Département de physique

Travaux dirigés d'électricité 2

Réalisé par : Pr. Z. YAMKANE

Rappels mathématiques

- Un nombre complexe écrit dans sa forme cartésienne a pour expression :

$$z = a + jb \tag{4}$$

Avec a la partie réelle et b la partie imaginaire, et j le nombre complexe vérifiant $j^2 = -1$.

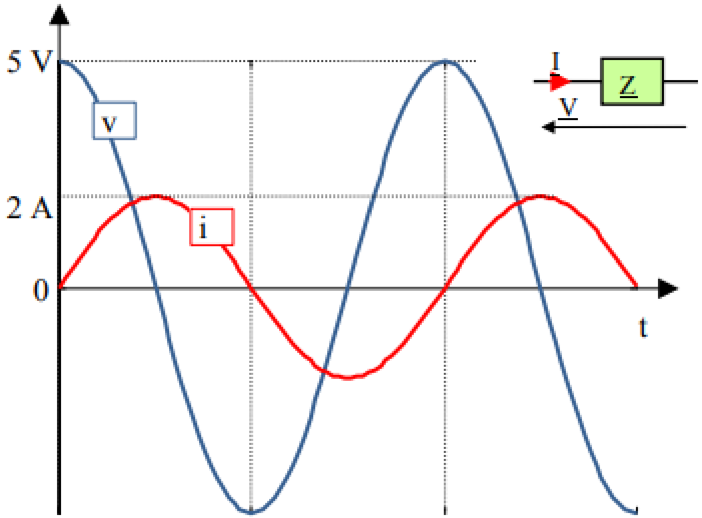
- Le module de z noté $|z|$ a pour expression : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Son argument θ est défini par : $\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{|z|}$
- Un nombre complexe écrit sous sa forme polaire a pour expression :

$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta) = re^{j\theta} \tag{5}$$

avec $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ son module et θ son argument.

Exercice 1:

A partir des relevés de v(t) et i(t) ci-dessous, déterminer la valeur de $\overline{Z}$ à la fréquence considérée



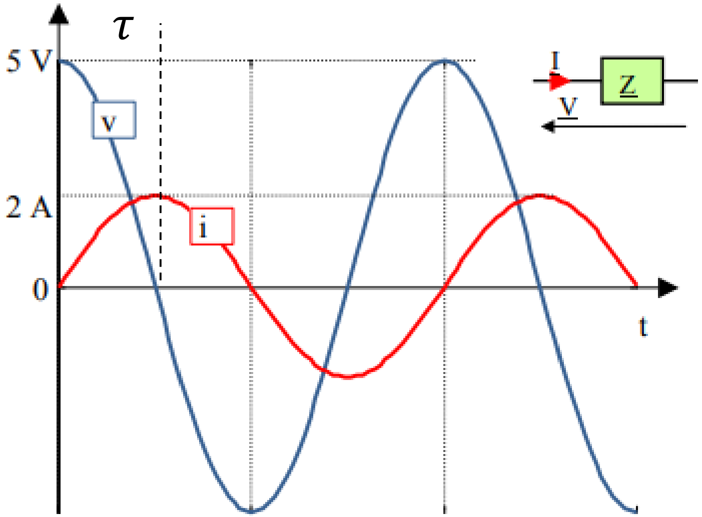
On considère que:

$$v(t) = V_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad \rightarrow \quad \overline{v} = V_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi}$$

$$i(t) = I_0 \sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad \overline{i} = i_0 e^{j\omega t}$$

Alors: $\overline{Z} = \frac{\overline{v}}{\overline{i}} = \frac{V_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi}}{i_0 e^{j\omega t}} = \frac{V_0}{I_0} e^{j\varphi}$ Or: $\overline{Z} = Z e^{j\alpha}$

Donc : $Z = \frac{V_0}{I_0}$ et $\alpha = \varphi$



A partir des relevés $V_0 = 5V\ et\ I_0 = 2A$

Par conséquent : $Z = \frac{V_0}{I_0} = 2{,}5\ \Omega$

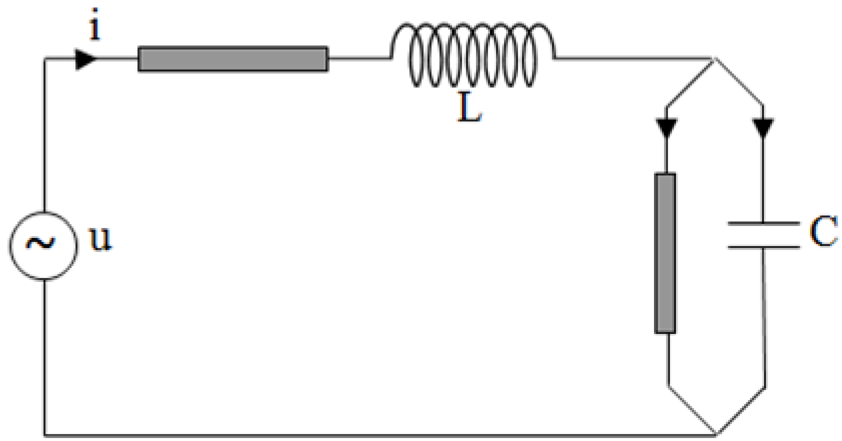
$|\varphi| = \frac{2\pi\tau}{T}$ Or $\tau = \frac{T}{4}$ donc $|\varphi| = \frac{\pi}{2}$

A partir des relevés v(t) est en avance de phase par rapport à i(t) alors $\varphi > 0\ donc\ \varphi = \frac{\pi}{2}$

Finalement :

$$\boxed{\overline{Z} = 2{,}5e^{j\frac{\pi}{2}} = 2{,}5j}$$

Exercice 2:



Le réseau électrique représenté ci-contre est alimenté par un générateur sinusoïdal, de valeur efficace 110 V et de fréquence 50 Hz .

1) Déterminer l'expression littérale de l'impédance complexe totale du circuit
2) Calculer la valeur efficace du courant et le déphasage entre i et u

Sachant que :

$R_1 = 0.5\ K\Omega$, $R_2 = 1\ K\Omega$, $\dfrac{1}{C\omega} = 1\ K\Omega$ ($C = 3{,}18\ \mu F$)

et $L\omega = 2\ K\Omega$ ($L = 6{,}36\ H$)

1- Déterminer l'expression littérale de l'impédance complexe totale du circuit

L'impédance complexe $\overline{Z}$ est définie par: $\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}}$

$\overline{Z}$ contient deux informations

$|\overline{Z}| = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = Z$

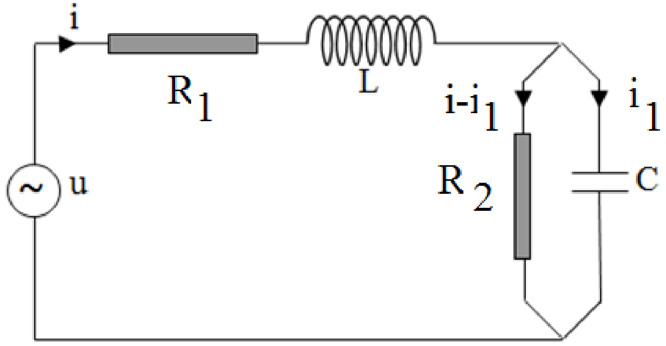
Arg$(\overline{Z})$=arg$(\overline{U}) - \arg(\overline{I})$

Arg$(\overline{Z})$= $+\varphi$ *si on choisit* $\overline{i} = I_0 e^{j\omega t}$ et $\overline{u} = U_0 e^{j(\omega t+\varphi)}$

Arg$(\overline{Z})$= $-\varphi$ *si on choisit* $\overline{i} = I_0 e^{j(\omega t+\varphi)}$ et $\overline{u} = U_0 e^{j\omega t}$

Déterminons donc $\overline{Z}$

$$\overline{Z} = \overline{Z}_{R1} + \overline{Z}_L + \overline{Z}_{R2/C}$$



$$\frac{1}{\overline{Z}_{R2/C}} = \frac{1}{\overline{Z}_{R2}} + \frac{1}{\overline{Z}_C} = \frac{\overline{Z}_C + \overline{Z}_{R2}}{\overline{Z}_{R2} \times \overline{Z}_C}$$

$$\overline{Z}_{R2/C} = \frac{\overline{Z}_{R2} \times \overline{Z}_C}{\overline{Z}_C + \overline{Z}_{R2}}$$

Or: $\overline{Z}_{R2} = R_2$, $\overline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$

$$\overline{Z}_{R2/C} = \frac{\frac{1}{jC\omega} \times R_2}{\frac{1}{jC\omega} + R_2} \qquad \overline{Z}_{R2/C} = \frac{R_2}{1 + jC\omega R_2}$$

$$\overline{Z} = R_1 + jL\omega + \frac{R_2}{1 + jC\omega R_2} = R_1 + jL\omega + \frac{R_2(1 - jC\omega R_2)}{(1 + jC\omega R_2).(1 - jC\omega R_2)}$$

$$\overline{Z} = R_1 + jL\omega + \frac{(R_2 - jC\omega {R_2}^2)}{(1^2 - (jC\omega R_2)^2)} = R_1 + jL\omega + \frac{R_2}{1+(C\omega R_2\ )^2} - \frac{jC\omega {R_2}^2}{1+(C\omega R_2)^2}$$

$$\overline{Z} = \left[R_1 + \frac{R_2}{1+(C\omega R_2)^2}\right] + j\left[L\omega - \frac{C\omega {R_2}^2}{1+(C\omega R_2)^2}\right]$$

A.N en kΩ

$$\overline{Z} = \left[0{,}5 + \frac{1}{2}\right] + j\left[2 - \frac{1}{1+1}\right] = 1 + \frac{3}{2}j$$

2- Calculer la valeur efficace du courant et le déphasage entre i et u

- **la valeur efficace du courant**

$$\left|\overline{Z}\right| = \mathrm{Z} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} \text{ donc } I_{eff} = \frac{U_{eff}}{Z}$$

Or:

$$Z = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}\,\mathrm{k\Omega} = \frac{\sqrt{13}}{2} \times 10^3\ \Omega$$

Alors :

$$I_{eff} = \frac{110}{\frac{\sqrt{13}\times 10^3}{2}} = 0{,}061A = 61mA$$

➢ **le déphasage entre i et u**

$$tan\varphi = \frac{\frac{3}{2}}{1}$$

$$\varphi = \arctan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}98 \text{ rad}$$

Exercice 3:

La tension e(t) fournie par le générateur du circuit ci-contre est de la forme $e(t) = E_0 \sin(\omega t)$.
Le courant principal est de la forme $i(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi_{i/e})$.

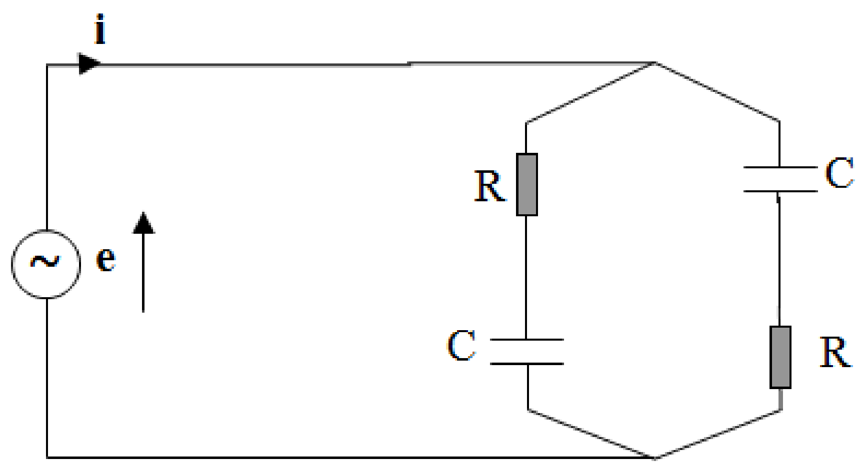
On cherche à déterminer la puissance active consommée aux bornes du générateur.

1) Déterminer l'expression littérale de l'impédance complexe totale du circuit.

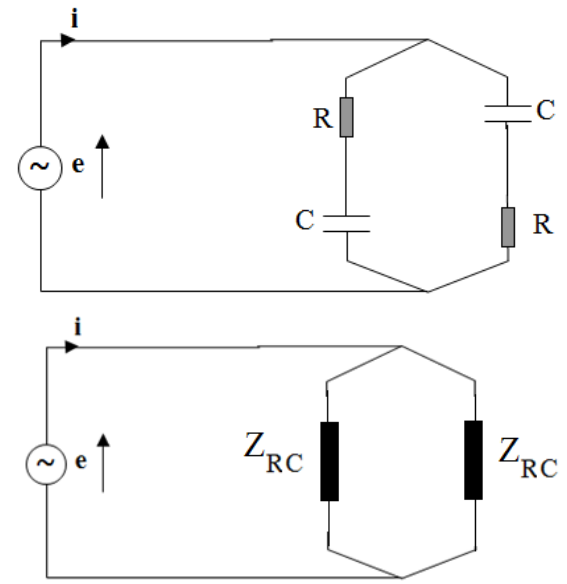
En déduire les expressions de I_0 et $\varphi_{i/e}$.

2) Calculer la valeur numérique de la puissance active consommée aux bornes du générateur.

Application numérique : $E_0 = 100$ V ; $R = 2$ kΩ ; $1/C\omega = 2$ kΩ



1- Déterminer l'expression littérale de l'impédance complexe totale du circuit.



$$\frac{1}{\overline{\overline{Z}}} = \frac{1}{\overline{\overline{Z}}_{RC}} + \frac{1}{\overline{\overline{Z}}_{RC}}$$

$$\overline{Z}_{RC} = \overline{Z}_R + \overline{Z}_C = R + \frac{1}{jC\omega} = \frac{RjC\omega + 1}{jC\omega}$$

$$\frac{1}{\overline{\overline{Z}}} = \frac{jC\omega}{1 + RjC\omega} + \frac{jC\omega}{1 + RjC\omega} = \frac{2jC\omega}{1 + RjC\omega}$$

$$\overline{Z} = \frac{1 + RjC\omega}{2jC\omega} = \frac{(1 + RjC\omega)(-2jC\omega)}{(2jC\omega)(-2jC\omega)} = \frac{(-2jC\omega + 2R(C\omega)^2)}{4(C\omega)^2} = \frac{R}{2} - j\frac{1}{2C\omega}$$

$\overline{Z} = 1 - j$ En kΩ

En déduire les expressions de I_0 et $\varphi_{i/e}$.

➢ Expression de I_0

$$|\overline{Z}| = Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{E_0}{I_0}$$

Donc $I_0 = \dfrac{E_0}{Z}$ Or $Z = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}\ \text{k}\Omega = \sqrt{2}.10^3\Omega$

A.N $I_0 = \dfrac{100}{\sqrt{2}.10^3} = 0.07A = 70mA$

➢ expressions de $\varphi_{i/e}$

$\alpha = \mathrm{Arg}(\overline{Z}) = \arg(\overline{U}) - \arg(\overline{I})$ Or $\overline{i} = I_0 e^{j(\omega t + \varphi_{i/e})}$ et $\overline{u} = U_0 e^{j\omega t}$

Par conséquent :

$$\alpha = 0 - \varphi_{i/e} = -\varphi_{i/e}$$

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{-1}{1} = -1, \alpha = \dfrac{-\pi}{4}$ Finalement: $\varphi_{i/e} = +\dfrac{\pi}{4}$

2- Calculer la valeur numérique de la puissance active consommée aux bornes du générateur.

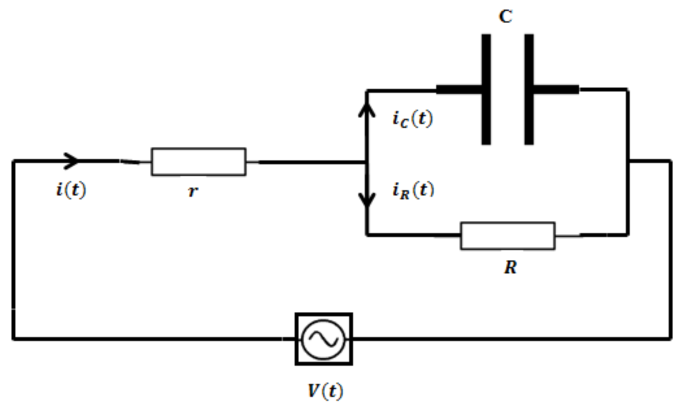
Par définition :

$$P = U_{eff} I_{eff} cos\varphi = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos\varphi_{\ i/e} = \frac{E_0 I_0}{2} cos\varphi_{i/e}$$

$$P = \frac{100 \times 0.07}{2} . \cos\frac{\pi}{4} = \frac{7}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2} = 2.47 Watt$$

Exercice 4

On considère le circuit présenté sur la figure suivante :



Avec : R=1Ω ; 1/Cω=1Ω ; r=0.5Ω

1- Etablir l'expression de l'impédance complexe de ce circuit et l'écrire sous la forme $\overline{Z}_{AB} = a + jb$, calculer les valeurs de a et b.

2- Calculer le module Z_{AB} de l'impédance complexe $\overline{Z}_{AB}$ de ce circuit.

3- Calculer l'argument θ de l'impédance $\overline{Z}_{AB}$ complexe de ce circuit.

4- Entre les bornes A, B on applique la tension sinusoïdale $v(t) = \sqrt{5} cos\omega t$, déterminer le courant i(t), on posera $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$, φ représente le déphasage du courant par rapport à la tension. En déduire I_m et φ .

1-

$$\overline{Z}_{AB} = \overline{Z}_r + \overline{Z}_{R//C}$$

$$\frac{1}{\overline{Z}_{R//C}} = \frac{1}{\overline{Z}_R} + \frac{1}{\overline{Z}_C} = \frac{\overline{Z}_R + \overline{Z}_C}{\overline{Z}_R.\overline{Z}_C}$$

$$\overline{Z}_{R//C} = \frac{\overline{Z}_R.\overline{Z}_C}{\overline{Z}_R + \overline{Z}_C}$$

$$\overline{Z}_{AB} = \overline{Z}_r + \frac{\overline{Z}_R.\overline{Z}_C}{\overline{Z}_R + \overline{Z}_C}$$

$$\overline{Z}_{AB} = r + \frac{R.\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = r + \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

$$\overline{Z}_{AB} = r + \frac{R.(1 - jRC\omega)}{(1 + jRC\omega).(1 - jRC\omega)}$$

$$\overline{Z}_{AB} = r + \frac{R.(1 - jRC\omega)}{1^2 + (RC\omega)^2}$$

$$\overline{Z}_{AB} = r + \frac{R}{1 + (RC\omega)^2} - j\frac{R^2C\omega}{1 + (RC\omega)^2}$$

$$a = r + \frac{R}{1 + (RC\omega)^2}$$

$$b = -\frac{R^2C\omega}{1 + (RC\omega)^2}$$

$$a = r + \frac{R}{1+(RC\omega)^2} = 1\Omega$$

$$b = -\frac{R^2C\omega}{1+(RC\omega)^2} = -\frac{1}{2}\ \Omega$$

2-

$$Z = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+\left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\ \Omega$$

3-

$$tg\theta = \frac{b}{a} = \frac{\frac{-1}{2}}{1} = \frac{-1}{2}$$

θ=-0,46 rad

4-

$$Z = \frac{U_m}{I_m} \rightarrow I_m = \frac{U_m}{Z} \rightarrow I_m = \frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = 2A$$

$$\arg \bar{Z} = \arg \bar{U} - \arg \bar{I}$$

$$\theta = 0 - \varphi$$

$$\varphi = -\theta$$

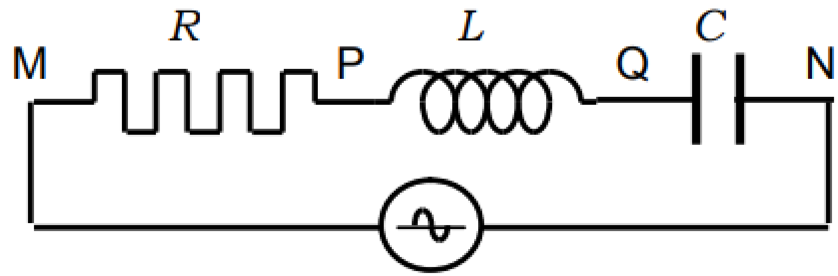
φ=0,46 rad

i(t)=2cos (ωt+0,46)

Exercice 5

On considère un circuit R, L, C monté en série et soumis à une d.d.p

$$u(t) = U\sqrt{2}\,\sin(\omega t)\,.$$



On donne :

$$U = 2 \text{ volts},\quad L = 0{,}4 \text{ mH},\quad C = 400 \text{ pF},\quad R = 5\ \Omega.$$

1°) Calculer la pulsation propre ω_o du circuit, sa fréquence propre f_o et la valeur maximale du courant I_o qui parcourt le circuit à la résonance.

2°) Trouver les valeurs des tensions U_{oL} et U_{oC} , mesurées à la résonance, aux bornes de la self et de la capacité. En déduire le coefficient de surtension ou facteur de qualité Q du circuit.

1- La pulsation propre du circuit est calculée à partir de l'expression

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \Rightarrow \qquad f_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$$

$$\omega_0 = 2{,}5\ 10^6 \text{ rad/s},\quad f_o = 400 \text{ kHz},$$

$$I_o = \frac{U}{R} \qquad I_o = 0{,}4 \text{ A}$$

2°) Calcul des tensions U_{oL} et U_{oC} et du coefficient de qualité Q :

$$U_{o,L} = L\omega_o I_o \quad \text{soit} \quad U_{o,L} = L\omega_o \frac{U}{R} = 400 \text{ volts}$$

U_{oC} = *400 volts.*

$$Q = \frac{L\omega_o}{R} = 200$$

A la résonance la tension aux bornes de la self U_{oL} est multipliée par un facteur Q = 200 : il en résulte une surtension. Il en est de même de la tension aux bornes du condensateur.