Série 2 : Corrigé (suite)

Exercice 2:

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x - 1$.

- 1. f possède une racine unique $\alpha \in]1,2[$. En effet, f est classe \mathcal{C}^1 et vérifie f(1).f(2) < 0, donc d'après le TVI, il existe $\alpha \in]1,2[$ tel que $f(\alpha)=0$. De plus, $f'(x)=3x^2-1>0$ sur [1,2], donc f est strictement croissante. Par conséquent la racine est unique.
- 2. (a) Le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^3 - 1 \\ x_0 \in [1, 2] \end{cases}$$

diverge (traité en TD).

(b) Par contre, le schéma suivant

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + 1} \\ x_0 \in [1, 2] \end{cases}$$

converge. Notons d'abord que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$ avec $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$. Ainsi, $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n+1} = g(x_n)$.

• g est contractante sur [1,2]. En effet, on a

$$0 \le g'(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} \le \frac{1}{3} \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} = K < 1$$

• D'autre part, comme g est croissante sur [1,2], donc $g(x) \ge g(1) = \sqrt[3]{2} > 1$ et $g(x) \le g(2) = \sqrt[3]{3} < 2$.

Par conséquent, la fonction g est contractante $[1,2] \longrightarrow [1,2]$, et par suite le schéma considéré converge vers l'unique point fixe de g, i.e. vers l'unique racine de f dans [1,2].

Exercice 3:

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $I = [x_0 - a, x_0 + a]$ avec a > 0. On considère une fonction $g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ supposée K-contractante et vérifiant

$$|g(x_0) - x_0| \le (1 - K)a$$

1. Montrons par récurrence que la suite définie $(x_n)_n$ par $x_{n+1}=g(x_n)$; $n\geq 0$, vérifie $x_n\in I$; $\forall n\geq 0$. Notons d'abord que

$$x \in I \Leftrightarrow \mid x - x_0 \mid \leq a$$

- $x_0 \in I$.
- On a aussi $|x_1 x_0| = |g(x_0) x_0| \le (1 K)a \le a$, donc $x_1 \in I$.
- Supposons que $x_n \in I$ et vérifions que $x_{n+1} \in I$, i.e. $|x_{n+1} x_0| \le a$. On a

$$|x_{n+1} - x_0| = |g(x_n) - x_0| \le |g(x_n) - g(x_0)| + |g(x_0) - x_0|$$

 $\le K |x_n - x_0| + (1 - K)a$
 $< Ka + (1 - K)a = Ka$

Ainsi $x_n \in I$; $\forall n \geq 0$.

- 2. Comme g est contractante sur I, donc la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy (voir le cours) et par conséquent elle converge vers l'unique point fixe de g.
- 3. Quant à l'estimation de l'erreur absolue $\mid x_m \alpha \mid$ à l'étape m, on a d'après le cours

$$|x_m - \alpha| \leq \frac{K^m}{1 - K} |x_1 - x_0|$$

Comme $|x_1 - x_0| \le (1 - K)a$, on a

$$|x_m - \alpha| \le K^m a$$

Exercice 4:

On considère l'équation $e^{-x} = x$; $x \in \mathbb{R}$.

1. Vérifions que l'équation ci-dessus admet une solution unique α dans \mathbb{R} . Cette équation est équivalente à f(x) = 0, avec $f(x) = e^{-x} - x$; f est de classe \mathcal{C}^1 .

On a $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$, donc il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$. D'autre part, on a $f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$, par conséquent f est strictement décroissante, donc la racine est unique dans \mathbb{R} .

Notons qu'on peut aussi utiliser le fait que f(0).f(1) < 0, et par suite que la racine $\alpha \in [0,1]$. On peut ainsi se limiter à l'intervalle I = [0,1].

2. De manière générale, si f est une fonction assez régulière telle que $f'(x) \neq 0$; $\forall x \in I$, alors la méthode de Newton pour la résolution d'une équation f(x) = 0 sur un intervalle I, est définie comme suit (voir le cours)

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_0 \in I \end{cases}$$

Dans le cas considéré, les trois itérés x_1 , x_2 , x_3 de la méthode de Newton avec $x_0 = 0$, sont donnés dans le tableau suivant.

x_0	x_1	x_2	x_3
0	0,5	0,5663110	0,5671432

3. Quant à la méthode de la sécante, elle est définie par

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

avec x_0 et x_1 donnés. Pour les trois itérés x_2 , x_3 , x_4 de la méthode de la sécante, avec $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$, les valeurs peuvent être obtenues de manière analogue. Elles sont données dans le tableau suivant.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
0	1	0,6126998	0,6517166	0,5671704

4. Comparaison des deux méthodes :

Il est vu dans le cours (voir polycopié) que la méthode de Newton est d'ordre 2, alors que la méthode de la sécante est d'ordre

$$\frac{1+\sqrt{2}}{2} \ \simeq \ 1,618 \ < 2$$

Par conséquent, la méthode de Newton est plus rapide.

Exercice 5 : Méthode d'accélération d'Aitken.

Soit $(x_n)_n$ une suite définie par :

$$x_0 \in [a, b]$$
 et $x_{n+1} = g(x_n)$

et convergente vers l solution de f(x) = 0.

On suppose que l'ordre de cette méthode est 1. Soient :

$$e_{n+1} = (A + \varepsilon_n)e_n$$
, où $e_n = x_n - l$, $A = g'(l)$, $0 < A < 1$ et $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$

1. En remplaçant, on vérifie que

(1)
$$e_{k+2} - 2e_{k+1} + e_k = [(A-1)^2 + \theta_k]e_k$$

avec

$$\theta_k = A(\varepsilon_{k+1} + \varepsilon_k) + \varepsilon_{k+1}\varepsilon_k - 2\varepsilon_k$$

Il est évident que

$$\lim_{k \to +\infty} \theta_k = 0$$

2. Afin d'accélérer la convergence, on considère une nouvelle suite de terme général défini par

$$x'_{k} = x_{k} - \frac{(x_{k+1} - x_{k})^{2}}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_{k}}$$

En utilisant la relation (1), il est facile de montrer que

$$\frac{x_k' - \alpha}{x_k - \alpha} = \frac{\theta_k - 2\varepsilon_k(A - 1) - \varepsilon_k^2}{(A - 1)^2 + \theta_k}$$

On en déduit que

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{x_k' - \alpha}{x_k - \alpha} = 0$$

3. On conclut que la suite $(x'_k)_k$ converge plus rapidement que $(x_k)_k$.

Exercice 6: Facultatif

L'objectif de cet exercice est de déterminer le zéro d'une fonction $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant -2 < f'(x) < -1 sur \mathbb{R} . On définit la suite $(x_n)_n$ de \mathbb{R} par la récurrence suivante

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n + cf(x_n),$$

où c > 0 et $x_0 \in \mathbb{R}$ sont donnés.

- 1. Montrer que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
- 2. En déduire qu'il existe un unique α élément de \mathbb{R} tel que $f(\alpha) = 0$
- 3. Montrer que si 0 < c < 1, la fonction g définie par g(x) = x + cf(x) vérifie

$$-1 < 1 - 2c < g'(x) < 1 - c \ sur \ \mathbb{R}$$

- 4. En déduire la convergence de la suite $(x_n)_n$ si 0 < c < 1.
- 5. La suite converge-t-elle pour $c = -\frac{1}{f'(\alpha)}$?
- 6. Donner l'ordre de convergence de la suite $(x_n)_n$ pour 0 < c < 1 en distinguant le cas $c = -\frac{1}{f'(\alpha)}$
- 7. Peut-on choisir $c = -\frac{1}{f'(\alpha)}$ d'un point de vue pratique?
- 8. On choisit alors d'approcher $c = -\frac{1}{f'(\alpha)}$ par $c_n = -\frac{1}{f'(x_n)}$ et la suite $(x_n)_n$ est définie par

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n + c_n f(x_n).$$

Quel est le nom de cette méthode itérative? Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$.