Série 2 : Corrigé (suite)

Exercice 2 :

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x - 1$.

1. f possède une racine unique $\alpha \in]1,2[$. En effet, f est classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $f(1).f(2) < 0$, donc d'après le TVI, il existe $\alpha \in]1,2[$ tel que $f(\alpha) = 0$. De plus, $f'(x) = 3x^2 - 1 > 0$ sur $[1,2]$, donc f est strictement croissante. Par conséquent la racine est unique.
2. (a) Le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^3 - 1 \\ \\ x_0 \in [1,2] \end{cases}$$

diverge (traité en TD).

(b) Par contre, le schéma suivant

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + 1} \\ \\ x_0 \in [1,2] \end{cases}$$

converge. Notons d'abord que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$ avec $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$. Ainsi, $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + 1} = g(x_n)$.

• g est contractante sur $[1,2]$. En effet, on a

$$0 \leq g'(x) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{1}{3}\,\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} = K < 1$$

• D'autre part, comme g est croissante sur $[1,2]$, donc
$g(x) \geq g(1) = \sqrt[3]{2} > 1$ et $g(x) \leq g(2) = \sqrt[3]{3} < 2$.
Par conséquent, la fonction g est contractante $[1,2] \longrightarrow [1,2]$, et par suite le schéma considéré converge vers l'unique point fixe de g, i.e. vers l'unique racine de f dans $[1,2]$.

Exercice 3 :

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $I = [x_0 - a, x_0 + a]$ avec $a > 0$. On considère une fonction $g \ : \ I \longrightarrow \mathbb{R}$ supposée K-contractante et vérifiant

$$\mid g(x_0) - x_0 \mid \leq \ (1-K)a$$

1. Montrons par récurrence que la suite définie $(x_n)_n$ par $x_{n+1} = g(x_n)$; $n \geq 0$, vérifie $x_n \in I$; $\forall n \geq 0$. Notons d'abord que

$$x \in I \Leftrightarrow \mid x - x_0 \mid \leq \ a$$

- $x_0 \in I$.
- On a aussi $\mid x_1 - x_0 \mid = \mid g(x_0) - x_0 \mid \leq (1-K)a \leq a$, donc $x_1 \in I$.
- Supposons que $x_n \in I$ et vérifions que $x_{n+1} \in I$, i.e. $\mid x_{n+1} - x_0 \mid \leq a$. On a

$$\begin{aligned} \mid x_{n+1} - x_0 \mid \ &= \ \mid g(x_n) - x_0 \mid \leq \mid g(x_n) - g(x_0) \mid + \mid g(x_0) - x_0 \mid \\ &\leq \ K \mid x_n - x_0 \mid + (1-K)a \\ &\leq \ Ka + (1-K)a \ = \ Ka \end{aligned}$$

Ainsi $x_n \in I$; $\forall n \geq 0$.

2. Comme g est contractante sur I, donc la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy (voir le cours) et par conséquent elle converge vers l'unique point fixe de g.

3. Quant à l'estimation de l'erreur absolue $\mid x_m - \alpha \mid$ à l'étape m, on a d'après le cours

$$\mid x_m - \alpha \mid \ \leq \ \frac{K^m}{1-K} \mid x_1 - x_0 \mid$$

Comme $\mid x_1 - x_0 \mid \leq \ (1-K)a$, on a

$$\mid x_m - \alpha \mid \ \leq \ K^m a$$

Exercice 4 :

On considère l'équation $e^{-x} = x$; $x \in \mathbb{R}$.

1. Vérifions que l'équation ci-dessus admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$. Cette équation est équivalente à $f(x) = 0$, avec $f(x) = e^{-x} - x$; f est de classe $\mathcal{C}^1$.

On a $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$. D'autre part, on a $f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$, par conséquent f est strictement décroissante, donc la racine est unique dans $\mathbb{R}$.
Notons qu'on peut aussi utiliser le fait que $f(0).f(1) < 0$, et par suite que la racine $\alpha \in [0, 1]$. On peut ainsi se limiter à l'intervalle $I = [0, 1]$.

2. De manière générale, si f est une fonction assez régulière telle que $f'(x) \neq 0$; $\forall x \in I$, alors la méthode de Newton pour la résolution d'une équation $f(x) = 0$ sur un intervalle I, est définie comme suit (voir le cours)

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ \\ x_0 \in I \end{cases}$$

Dans le cas considéré, les trois itérés x_1, x_2, x_3 de la méthode de Newton avec $x_0 = 0$, sont donnés dans le tableau suivant.

x_0	x_1	x_2	x_3
0	0,5	0,5663110	0,5671432

3. Quant à la méthode de la sécante, elle est définie par

$$x_{n+1} \;=\; x_n - f(x_n)\, \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

avec x_0 et x_1 donnés. Pour les trois itérés x_2, x_3, x_4 de la méthode de la sécante, avec $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$, les valeurs peuvent être obtenues de manière analogue. Elles sont données dans le tableau suivant.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
0	1	0,6126998	0,6517166	0,5671704

4. Comparaison des deux méthodes :
Il est vu dans le cours (voir polycopié) que la méthode de Newton est d'ordre 2, alors que la méthode de la sécante est d'ordre

$$\frac{1+\sqrt{2}}{2} \;\simeq\; 1,618 \;< 2$$

Par conséquent, la méthode de Newton est plus rapide.

Exercice 5 : Méthode d'accélération d'Aitken.
Soit $(x_n)_n$ une suite définie par :

$$x_0 \in [a,b] \;\; et \;\; x_{n+1} = g(x_n)$$

et convergente vers l solution de $f(x) = 0$.
On suppose que l'ordre de cette méthode est 1. Soient :
$e_{n+1} = (A + \varepsilon_n)e_n$, où $e_n = x_n - l$, $A = g'(l)$, $0 < A < 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$

1. En remplaçant, on vérifie que

   $$e_{k+2} - 2e_{k+1} + e_k = [(A-1)^2 + \theta_k]e_k \tag{1}$$

   avec

   $$\theta_k = A(\varepsilon_{k+1} + \varepsilon_k) + \varepsilon_{k+1}\varepsilon_k - 2\varepsilon_k$$

   Il est évident que

   $$\lim_{k\to+\infty} \theta_k = 0$$

2. Afin d'accélérer la convergence, on considère une nouvelle suite de terme général défini par

   $$x'_k = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

   En utilisant la relation (1), il est facile de montrer que

   $$\frac{x'_k - \alpha}{x_k - \alpha} = \frac{\theta_k - 2\varepsilon_k(A-1) - \varepsilon_k^2}{(A-1)^2 + \theta_k}$$

   On en déduit que

   $$\lim_{k\to+\infty} \frac{x'_k - \alpha}{x_k - \alpha} = 0$$

3. On conclut que la suite $(x'_k)_k$ converge plus rapidement que $(x_k)_k$.

Exercice 6 : Facultatif

L'objectif de cet exercice est de déterminer le zéro d'une fonction $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $-2 < f'(x) < -1$ sur $\mathbb{R}$. On définit la suite $(x_n)_n$ de $\mathbb{R}$ par la récurrence suivante

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n + cf(x_n),$$

où $c > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ sont donnés.

1. Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
2. En déduire qu'il existe un unique α élément de $\mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$
3. Montrer que si $0 < c < 1$, la fonction g définie par $g(x) = x + cf(x)$ vérifie
$$-1 < 1 - 2c < g'(x) < 1 - c \ \ sur \ \ \mathbb{R}$$
4. En déduire la convergence de la suite $(x_n)_n$ si $0 < c < 1$.
5. La suite converge-t-elle pour $c = -\frac{1}{f'(\alpha)}$?
6. Donner l'ordre de convergence de la suite $(x_n)_n$ pour $0 < c < 1$ en distinguant le cas $c = -\frac{1}{f'(\alpha)}$
7. Peut-on choisir $c = -\frac{1}{f'(\alpha)}$ d'un point de vue pratique ?
8. On choisit alors d'approcher $c = -\frac{1}{f'(\alpha)}$ par $c_n = -\frac{1}{f'(x_n)}$ et la suite $(x_n)_n$ est définie par
$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n + c_n f(x_n).$$
Quel est le nom de cette méthode itérative ? Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$.