图论作业 1

BY 18340087 李晨曦

1

假设图中有x个顶点，记为v_i，不失一般性地记：

$$\begin{cases} d(v_i)=3, i=0,1\\ d(v_i)=4, i=2,3\\ d(v_i)<3, \text{其他} \end{cases}$$

由握手定理可知：

$$\sum_{i=0}^{x-1} d(v_i)=10\times 2=20$$

那么可以得到：

$$\sum_{i=4}^{x-1} d(v_i)=6$$

而且

$$\sum_{i=4}^{x-1} d(v_i)<3\,(x-4)$$

所以有

$$\begin{aligned} 3\,(x-4) &> 6\\ 3x &> 18\\ x &> 6 \end{aligned}$$

所以

$$x_{\min}=7$$

在$x=7$，即图中有7个顶点的情况下，度序列为：

$$3,3,4,4,2,2,2 \tag{1}$$

由于这时没有关于边的信息，序列(1)的任何一个排列也是合法的度序列。
此时：

$$\begin{aligned} \Delta(G) &= 4\\ \delta(G) &= 2 \end{aligned}$$

2

这里的【简单图】应该是指【简单无向图】。

证明. 记集合A为：

$$\{(v_i,v_j)\,|\,i\neq j, v_i\in V(G)\}$$

其中$(v_i,v_j)\equiv(v_j,v_j)$， 集合A就是在$V(G)$中任选两个不同元素构成的所有无序对集合
由排列组合的基本原理， 有：

$$|A| = C_2^{|V(G)|}$$

而我们知道， 对于集合A和$E(G)$， 以下关系恒成立：

$$\begin{aligned} E(G) &\subseteq A \\ |E(G)| &\leqslant |A| \end{aligned}$$

所以，

$$|E(G)| \leqslant C_2^{|V(G)|} \qquad \square$$

3

由握手定理：

$$3v = 2\varepsilon \tag{2}$$

由(2)式和题意：

$$\begin{cases} 3v = 2\varepsilon \\ 2v - 3 = \varepsilon \end{cases}$$

得到：

$$\begin{cases} v = 6 \\ \varepsilon = 9 \end{cases}$$

我们写程序搜索所有可行解， 会得到：

```
'(((0 1) (0 2) (0 3) (1 2) (1 4) (2 5) (3 4) (3 5) (4 5));点集为{0,1,2,3,4,5}
  ((0 1) (0 2) (0 3) (1 4) (1 5) (2 4) (2 5) (3 4) (3 5)))
```

用Graphviz画出， 得到：

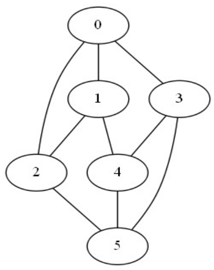

图 1. 一种符合题意的图

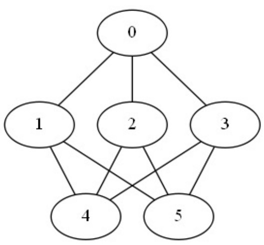

图 2. 另一种符合题意的图

解决这个问题的代码比较长， 不在这里列出了。具体参见
https://github.com/ayanamists/Graph-Theroy/blob/master/1/3.ss