

第二章 树

§ 2.1 树

°树：连通的无圈图称为树。

°例子：6 个顶点的不同构的树（见图 2.1）

°森林：无圈的图(不一定连通)称为森林。例子：

定理 2.1：在一棵树中，任意两个顶点均由唯一的路连接。

证：用反证法。设 G 是树，假设在 G 中存在两条不同的 (u, v) 路 P_1 和 P_2 。因为 $P_1 \neq P_2$ ，所以存在 P_1 的一条边 $e = xy$ ，它不是 P_2 的边。显然，图 $(P_1 \cup P_2) - e$ 是连通的。所以它包含一条 (x, y) 路 P 。于是 $P + e$ 就是无圈图 G 中的圈，导致矛盾。■

定理 2.2：若 G 是树，则 $\varepsilon = v - 1$ 。

证：对 v 用归纳法。当 $v = 1$ 时， $G \cong K_1$ 且 $\varepsilon = 0 = v - 1$ 。

假设定理对少于 v 个顶点的所有树均成立，并设 G 是 $v \geq 2$ 个顶点的树。设 $uv \in E$ 。因为 uv 是 G 中唯一的 (u, v) 路，所以 $G - uv$ 不包含 (u, v) 路。从而 $G - uv$ 不连通且 $\omega(G - uv) = 2$ 。 $G - uv$ 的分支 G_1 和 G_2 是无圈且连通的，因此是树。并且 G_1 和 G_2 的顶点数均小于 v 。所以由归纳假设

$$\varepsilon(G_i) = v(G_i) - 1, \text{ 对 } i = 1, 2 \text{ 成立。}$$

从而

$$\varepsilon(G) = \varepsilon(G_1) + \varepsilon(G_2) + 1$$

$$= v(G_1) + v(G_2) - 1 = v(G) - 1. \quad \blacksquare$$

推论 2.2：每棵非平凡树至少有两个 1 度顶点。

证：设 G 是非平凡树，则

$d(v) \geq 1$, 对所有 $v \in V$ 成立,

再由定理 1.1 和 2.2, 有

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon = 2v - 2$$

由此推出至少对于两个顶点 v , 有 $d(v) = 1$. ■

§ 2.2 割边和键

°割边: 图 G 的割边是指使得 $\omega(G - e) > \omega(G)$ 的边 e .

°割边的例子:

定理 2.3: e 是 G 的割边当且仅当 e 不包含在 G 的一个圈中。

证: 设 e 是 G 的割边。由于 $\omega(G - e) > \omega(G)$, 所以存在 G 的顶点 u 和 v , 它们在 G 中连通, 但在 $G - e$ 中不连通。因此在 G 中必有某条 (u, v) 路 P 经过 e 。设 x 和 y 是 e 的端点, 并且在 P 上 x 前于 y 。在 $G - e$ 中, u 被 P 的一节连到 x , y 被 P 的一节连到 v 。若 e 在某圈 C 中, 则在 $G - e$ 中 x 和 y 将被路 $C - e$ 所连。于是, u 和 v 在 $G - e$ 中就连通了, 导致矛盾。

反之, 假设 $e = xy$ 不是 G 的割边, 则 $\omega(G - e) = \omega(G)$ 。由于在 G 中存在一条 (x, y) 路 (即 xy), 所以 x 和 y 在 G 的同一个分支中。由此推知: x 和 y 在 $G - e$ 的同一个分支中, 从而在 $G - e$ 中存在一条 (x, y) 路 P 。于是 e 就位于 G 的圈 $P + e$ 中了。 ■

定理 2.4: 一个连通图是树当且仅当它的每条边都是割边。

证: 设 G 是树且 e 是 G 的边, 由于 G 是无圈图, 所以 e 不包含在 G 的圈中, 由定理 2.3, e 是 G 的割边。

反之，假设 G 连通但不是树，则 G 包含一个圈 C 。由定理 2.3， C 的边不会是 G 的割边。 ■

°生成树： G 的生成树是指 G 的生成子图，它同时又是树。

推论 2.4.1：每个连通图都包含生成树。

证：设 G 连通并设 T 是 G 的最小连通生成子图。由定义知 $\omega(T) = 1$ ，且对 T 的每条边 e 有 $\omega(T - e) > 1$ 。由此推知： T 的每条边均为割边。而 T 是连通的，故根据定理 2.4， T 是树。 ■

°生成树的例子：（见图 2.2）

推论 2.4.2：若 G 连通，则 $\varepsilon \geq v - 1$ 。

证：设 G 连通。由推论 2.4.1， G 包含一个生成树 T ，所以

$$\varepsilon(G) \geq \varepsilon(T) = v(T) - 1 = v(G) - 1。 ■$$

定理 2.5：设 T 是连通图 G 的生成树，并且 e 是 G 的不在 T 中的一条边。则 $T + e$ 包含唯一的圈。

证：由于 T 是无圈图，因此 $T + e$ 的每个圈都包含 e 。此外， C 是 $T + e$ 的圈当且仅当 $C - e$ 是 T 中连接 e 的两个端点的路。由定理 2.1， T 中只有一条这样的路，所以 $T + e$ 包含唯一的圈。 ■

对 V 的子集 S 和 S' ，用 $[S, S']$ 表示一个端点在 S 中，另一个端点在 S' 中的所有边的集合。

°边割： G 的边割是指形为 $[S, \bar{S}]$ 的 E 的子集，其中 $\emptyset \neq S \subset V$ ，且 $\bar{S} = V \setminus S$ 。 G 的极小边割称为键 B 。即 B 是边割，但 B 的任何真子集不是边割。

°例子：（见图 2.3）

°补图：若 H 是 G 的子图， G 中 H 的补图是指子图 $G - E(H)$ ，记为 $\bar{H}(G)$ 。若 G 连通， T 是 G 的生成树，则形为 \bar{T} 的子图称为 G 的余树。

定理 2.6：设 T 是连通图 G 的生成树， e 是 T 的任一边，则

- (i) 余树 \bar{T} 不包含 G 的键；
- (ii) $\bar{T} + e$ 包含 G 的唯一的键。

证：(i) 设 B 是 G 的键。则 $G - B$ 不连通，因而它不能包含生成树 T 。

所以 B 不包含在 \bar{T} 中。(ii) 设 $T - e$ 的两个分支之一的顶点集为 S ，则边割 $B = [S, \bar{S}]$ 显然是 G 的键，并且包含在 $\bar{T} + e$ 中。于是，对任何 $b \in B$ ， $T - e + b$ 是 G 的生成树。所以 G 的每个包含在 $\bar{T} + e$ 中的键必然包含每一个这样的元素 b 。由此推知： B 是 G 的包含在 $\bar{T} + e$ 中的唯一的键。 ■

§ 2.3 割点

°割点： G 的顶点 v 称为割点，如果 E 可以分为两个非空子集 E_1 和 E_2 ，使得 $G[E_1]$ 和 $G[E_2]$ 恰有一个公共顶点 v 。若 G 无环且非平凡，则 v 是 G 的割点当且仅当 $\omega(G - v) > \omega(G)$ 。

°例子：（见图 2.4）

定理 2.7：设 v 是树 G 的顶点，则 v 是 G 的割点当且仅当 $d(v) > 1$ 。

证：若 $d(v) = 0$ ，则 $G \cong K_1$ ，显然 v 不是割点。

若 $d(v) = 1$, 则 $G - v$ 是有 $v(G - v) - 1$ 条边的无圈图, 因此是树(见作业)。所以 $\omega(G - v) = 1 = \omega(G)$, v 不是割点。

若 $d(v) > 1$, 则存在相邻于 v 的两个不同顶点 u 和 w 。路 uvw 是 G 中的一条 (u, w) 路。根据定理 2.1, uvw 是 G 中唯一的 (u, w) 路, 由此推知: 在 $G - v$ 中没有 (u, w) 路, 所以 $\omega(G - v) > 1 = \omega(G)$ 。于是 v 是 G 的割点。 ■

推论 2.7: 每个非平凡的无环连通图, 至少有两个不是割点的顶点。

证: 设 G 是非平凡无环连通图。由推论 2.4.1, G 包含一个生成树 T 。由推论 2.2 和定理 2.7, T 至少有两个不是割点的顶点。设 v 是任意一个这样的顶点, 则 $\omega(T - v) = 1$ 。由于 T 是 G 的生成子图, $T - v$ 是 $G - v$ 的生成子图, 所以

$$\omega(G - v) \leq \omega(T - v)$$

由此推知: $\omega(G - v) = 1$, 因而 v 不是 G 的割点。由于至少有两个这样的顶点 v , 定理得证。 ■

§ 2.4 Cayley 公式

°边收缩: G 的边 e 称为被收缩, 是指把它删去并使它的两个端点重合; 这样得到的图记为 $G \cdot e$ 。

°例子: (见图 2.5)

显然, 若 e 是 G 的连杆, 则

$$v(G \cdot e) = v(G) - 1$$

$$\varepsilon(G \cdot e) = \varepsilon(G) - 1 \text{ 和 } \omega(G \cdot e) = \omega(G)$$

所以若 T 是树，则 $T \cdot e$ 也是树。

我们用 $\tau(G)$ 记 G 的生成树的棵数。

定理 2.8: 若 e 是 G 的连杆，则 $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$ 。

证：由于 G 的每一棵不包含 e 的生成树也是 $G - e$ 的生成树，所以反之， $\tau(G - e)$ 就是 G 的不包含 e 的生成树的棵数。

对于 G 的每棵包含 e 的生成树 T ，相应有一棵 $G \cdot e$ 的生成树 $T \cdot e$ 。

这个对应显然是一一对应。（见图 2.6）所以 $\tau(G \cdot e)$ 恰好是 G 的包含 e

的生成树的棵数。因此推知：

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)。$$

°例子：（见图 2.6）

作业 3:

1. 设 G 是有 $v - 1$ 条边的图。证明下述三个语句是等价的：

(a) G 是连通图；

(b) G 是无圈图；

(c) G 是树。

2. 证明：

(a) 若 G 的每个顶点均为偶点，则 G 没有割边；

(b) 若 G 是 k -正则偶图且 $k \geq 2$ ，则 G 没有割边。

3. 设 G 连通且 $v \geq 3$ ，证明：

(a) 若 G 有割边, 则 G 有顶点 v 使 $\omega(G - v) > \omega(G)$;

(b) (a)的逆命题不一定正确。

4. 证明: 若 $e \in E$, 则 $\omega(G) \leq \omega(G - e) \leq \omega(G) + 1$ 。