1. 图和子图

§1.1 图和简单图

图的概念：

一个图G是指一个有序三元组。其中：V(G)是非空顶点集，E(G)是不与V(G)相交的边集，的函数，称为关联函数。

若是一条边，而则称e连接u和v; 顶点u和v称为e的端点。

例1：，其中：

而定义为：

(见图1.1)

\*我们现在讨论的是无向图，即边没有方向，顶点对。

我们还可以定义有向图。

例2：定义有向图，其中：

}

\*这里是一条从u到v的弧。

。

分别表示图G的顶点数和边数，|称为n阶图。

均为有限数，则称G为有限图。

则称G为零图，的零图称为平凡图。

时，则称G为空图。

若，称u和v邻接。

关联：若，则称与u和v关联。

环：若，则称为环。有向图的环

不是环的边称为连杆。

若边有公共端点，则称

有向图中顶点的相邻：若，则称u与v相邻，u称为的始点，v称为的终点。

若，则称为平行边(多重边)。关联同一对顶点的多重边的条数称为多重边的重数。

(有向图的多重边)：若，则称为多重边。如果，则不称为多重边。

既不含平行边又不含环的图称为简单图。

在简单图里，我们不需要函数，对任一条边则我们直接用表示。

§1.2 图同构

1. 图的同构：设，为两个无向图，若存在双射函数，对任意，当且仅当，并且与的重数相同。则称与是同构的。记作。

例3：（见图1.2）

。

不同构的例子：(见图1.3)

\*两个图度序列相同，但不同构。

2. 几类特殊图类：

完全图：每一对不同的顶点都有一条边相连的简单图称为完全图。

\*在同构意义下，n个顶点的完全图只有一个，记为。

偶图（二部图）：是指一个图它的顶点集可以分解为两个子集X和Y，使得任何一条边都有一个端点在X中，另一个端点在Y中；这样一种分类称为偶图的一个二分类。

完全偶图是一个具有二分类的简单偶图，其中X的每个顶点都与Y的每个顶点相连；若。

例如：（见图1.4）

§1.3 子图

子图：称图H是图G的子图(记为)，如果

E(G)，并且上的限制。当时，则记为

，并称H是G的真子图。

若H是G的子图，则G称为H的母图。

生成子图：G的生成子图(或生成母图)是指满足的子图(或母图)H。

基础简单图：从图G中删去所有的环，并使每一对相邻顶点只留下一条边，即可得到G的一个简单生成子图，称为G的基础简单图。

\*举例：

导出子图：设为一个图。，以为顶点集，以G中两个端点都在中的边组成边集的图称为G的导出的子图，记作。

又设且，以为边集，以中边关联的顶点为顶点集的图称为G的导出的子图，记作。

例子：（见图1.5）

设则记为。若则把简记为

．

若边集为的G的生成子图简记为。类似地，在G中添加边集的所有边得到的图记为。若，则用和来代替。

设的子图。若，则称是不相交的，若，则称它们是边不重的。的并图。如果是不相交的，则有时记为。

§1.4 顶点的度

顶点的度：设为无向图，称v作为边的端点的次数为v的度数。简称为度，记作 (或)。

设为有向图， 称v作为边的始点的次数为v的出度，记作(v) (或)，称v作为边的终点的次数为v的入度，记作 (或)。

称为v的度数。

度数为偶数(奇数)的点称为偶点(奇点)。

定理1.1(握手定理)：设为无向图，

则。

证明：因为G中每条边（包括环）均有两个端点，所以在计算G中各顶点度数之和时，每条边均提供2度，当然，条边，共提供度。

推论1.1：任何图中奇度数顶点的个数是偶数。

证：设为任一图。令

则，，由定理1.1可知

由于均为偶数。所以为偶数，但因中顶点度数为奇数，只有偶数个奇数的和才为偶数，所以必为偶数。

度序列：设为一个阶无向图，称

), 为G的度序列。

度序列可图化：对于给定的非负整数列，若存在以为顶点集的则称d是可图化的。特别地，若所得的图是简单图，则称d是可简单图化的。

定理1.2：设非负整数列

仅当。

证明：由定理1.1可知，必要性显然。下面证充分性。由已知条件可知，d中有2k(0)个奇数。不妨设它们为

。可用多种方法做出阶无向图，

比如边集如下产生：在顶点之间连边，。若为偶数，令，若为奇数，令，得

则均为偶数。再在处做出条环，，将所得各边集合在一起组成E, 则G的度数列为d。其实，为偶数时，

，当为奇数时，

这就证明了d是可图化的。

例3：判断下列各非负整数列哪些是可图化的，哪些是可简单图化的？

解：(1)不可图化，因为奇度点有奇数个。

(2) 可图化，但不可简单图化，因为。

(3) 可图化。但不可简单图化。因为分别与G中4个顶点中的其它3个点相邻，此时，，矛盾。

(4) 可简单图化。见图1.3。

作业1：

1. 设无向图G有10条边，3度和4度顶点各2个，其余顶点的度数小于3，问G中至少有几个顶点？在最少顶点的情况下，写出G的度序列，。
2. 证明：若G是简单图，则

表示个中取2个的组合数。

1. 设阶无向简单图为3-正则图(即所有点的度数均为3)，且边数与

满足问这样的无向图有几种非同构的情况？