§1.5 关联矩阵与邻接矩阵

\*图可以用集合表示，更多地是用图形来表示。此外，还可以用矩阵来表示。

关联矩阵：设无向图

关联矩阵

为顶点。

例子：(见图1.6)

关联矩阵的性质：

度数。

1. 这个结果正是握手定理的内容，即各顶点的度数之和等于边数的两倍。

有向图的关联矩阵：设有向图中无环，，

, 令

则

例子：（见图1.7）

邻接矩阵：设有向图,

，令

的邻接矩阵。

例子：（见图1.8）

无向图的邻接矩阵：设为无向图，，令

则 。

例子：(见图1.9)

\*注意无向图的邻接矩阵是对称的。

§1.6 通路与回路及图的连通性

一．通路与回路

途径：G的一条途径是指一个有限非空序列

对称W是从的一条途径，或一条途径。顶点分别称为W的起点和终点，而

称为W的内部顶点，W中的边数k称为W的长度。

回路(闭途径)：若，则W称为闭途径。

迹：若途径W中，互不相同，则W称为迹。

闭迹：的迹W称为闭迹。

路(径)：若迹W中，互不相同，则W称为一条路(径)。

圈：的路W称为一个圈。

例子：(见图1.10)

途径：uavfyfvgyhwbv

迹 ：wcxdyhwbvgy

路 ：xcwhyeuav

奇圈和偶圈：长度为奇数的圈为奇圈，长度为偶数的圈为偶圈。

若和都是途径，则W逆转后所得到的途径记作，将处衔接在一起所得的途径记为。

途径的节是指W中由相继项构成的子序列，

，它也是一条途径；这一子序列称为W的节。

在简单图中，途径表示成顶点序列。

有向图的路径和圈举例。

二．图的连通性

设之间存在通路，则称是连通的，记作。对任意，规定。

无向图中顶点之间的连通关系是自反的，对称的和传递的，因而是V上的等价关系。

连通图：若无向图G是平凡图或G中任意两个顶点都是连通的，则称G是连通图，否则称G为不连通图。

连通分支：连通关系把G的顶点集V划分成等价类子图称为G的连通分支。两个顶点在G中是连通的，当且仅当它们在G的同一连通分支中。

G的连通分支数记为。

连通分支的例子。

两点间的距离：设为无向图G中任意两点，并且之间连通，那么从u到v的最短路径的长度称为u到v的距离，记作。

若u和v不连通，则记。

定理1.3：一个无向图是偶图当且仅当G中无长度为奇数的圈(奇圈)。

证明：必要性。设G是有二分类(X, Y)的偶图。若G中无回路，结论显然成立。若G中有回路，只需证明G中无奇圈。设C为G中任意一圈，令因为

且G是偶图，故，同理。一般说来，

又因为，所以于是对某个i，有因此，C是偶圈。

充分性。显然对连通图证明充分性就够了。设G是不包含奇圈的连通图。任选一个顶点u且定义V的一个分类如下：

现在证明是G的一个二分类。假设v和w是X的两个顶点，P是最短的路，Q是最短的路，以记P和Q的最后一个公共顶点。因P和Q是最短路，P和Q的节也是最短的路，

故长度相同。现因P和Q的长都是偶数，所以P的和Q的

节必有相同的奇偶性。由此推出路长为偶数。若v和w相连，则就是一个奇圈，与假设矛盾。故X中任意两个顶点均不相邻；类似地，Y中任意两个顶点也不相邻。

§1.7 最短路径问题

问题：在赋权无向图中，两点之间边上的权表示这两点的直接相连的路径的长度。路径P上各边权之和表示该路径的长度。求赋权图G中从某一给定点到其余各点的最短路径。记为。

。

算法的基本思想：

假设S是V的真子集且。若是从

的最短路，则显然节必然是最短路，所以

并且从到的距离由公式

给出。这个公式是Dijkstra算法的基础。

算法的基本步骤：

构造集合，其中中的每个顶点均已算出到

的最短路径和距离，且该最短路径只经过中的顶点，然后利用公式(1)求经过中的顶点到中各点的距离，再求出其中距离最小的顶点。令，再重复上述过程，直到

。

Dijkstra算法：

1. 置
2. 对每个

置

1. 若。

Dijkstra算法是有效算法，只需要时间。

例子：（见图1.11）

作业2：

1. 设G是无向简单图，且。证明：G中存在长度大于或等于

的圈。

1. 证明：若G是简单图且

G的顶点数和边数)。

1. 某公司在六个城市中都有分公司。从接航程票价由下述矩阵的第元素给出(表示无直接航路)，求到其余各城市的最廉航价和路线。（用Dijkstra算法）