第二章 树

2.1 树

树：连通的无圈图称为树。

例子：6个顶点的不同构的树（见图2.1）

森林：无圈的图(不一定连通)称为森林。例子：

定理2.1：在一棵树中，任意两个顶点均由唯一的路连接。

证：用反证法。设G是树，假设在G中存在两条不同的路

和。因为，所以存在的一条边，它不是的边。显然，图是连通的。所以它包含一条(x, y)路P。于是

就是无圈图G中的圈，导致矛盾。

定理2.2：若G是树，则。

证：对用归纳法。当时，。

假设定理对少于个顶点的所有树均成立，并设G是个顶点的树。设。因为是G中唯一的路，所以不包含

路。从而不连通且。的分支是无圈且连通的，因此是树。并且的顶点数均小于。所以由归纳假设

从而

。

推论2.2：每棵非平凡树至少有两个1度顶点。

证：设G是非平凡树，则

再由定理1.1和2.2，有

由此推出至少对于两个顶点v，有。

§2.2 割边和键

割边：图G的割边是指使得

割边的例子：

定理2.3：e是G的割边当且仅当e不包含在G的一个圈中。

证：设e是G的割边。由于，所以存在G的顶点u和v，它们在G中连通，但在中不连通。因此在G中必有某条

路P经过e。设x和y是e的端点，并且在P上x前于y。在

中，u被P的一节连到x，y被P的一节连到v。若e在某圈C中，则在中x和y将被路所连。于是，u和v在中就连通了，导致矛盾。

反之，假设不是G的割边，则。由于在G中存在一条路(即xy)，所以x和y在G的同一个分支中。由此推知：x和y在的同一个分支中，从而在中存在一条

路P。于是e就位于G的圈中了。

定理2.4：一个连通图是树当且仅当它的每条边都是割边。

证：设G是树且e是G的边，由于G是无圈图，所以e不包含在G的圈中，由定理2.3，e是G的割边。

反之，假设G连通但不是树，则G包含一个圈C。由定理2.3，C的边不会是G的割边。

生成树：G的生成树是指G的生成子图，它同时又是树。

推论2.4.1：每个连通图都包含生成树。

证：设G连通并设T是G的最小连通生成子图。由定义知

且对T的每条边e有由此推知：T的每条边均为割边。而T是连通的，故根据定理2.4，T是树。

生成树的例子：（见图2.2）

推论2.4.2：若G连通，则

证：设G连通。由推论2.4.1，G包含一个生成树T,所以

定理2.5：设T是连通图G的生成树，并且e是G的不在T中的一条边。则包含唯一的圈。

证：由于T是无圈图，因此的每个圈都包含e。此外，C是

的圈当且仅当是T中连接e的两个端点的路。由定理2.1，T中只有一条这样的路，所以包含唯一的圈。

对V的子集S和，用表示一个端点在S中，另一个端点在

中的所有边的集合。

边割：G的边割是指形为]的E的子集，其中，且

。G的极小边割称为键B。即B是边割，但B的任何真子集不是边割。

例子：（见图2.3）

补图：若H是G的子图，G中H的补图是指子图，记为

若G连通，T是G的生成树，则形为的子图称为G的余树。

定理2.6：设T是连通图G的生成树，e是T的任一边，则

1. 余树不包含G的键；
2. 包含G的唯一的键。

证：(i) 设B是G的键。则不连通，因而它不能包含生成树T。所以B不包含在中。(ii) 设的两个分支之一的顶点集为S，则边割显然是G的键，并且包含在中。于是，对任何

B，是G的生成树。所以G的每个包含在中的键必然包含每一个这样的元素b。由此推知：B是G的包含在中的唯一的键。

§2.3 割点

割点：G的顶点v称为割点，如果E可以分为两个非空子集

，使得恰有一个公共顶点v。若G无环且非平凡，则v是G的割点当且仅当

例子：（见图2.4）

定理2.7：设v是树G的顶点，则v是G的割点当且仅当。

证：若，显然v不是割点。

若条边的无圈图，因此是树(见作业)。所以不是割点。

若，则存在相邻于v的两个不同顶点u和w。路uvw是G中的一条(u, w)路。根据定理2.1，uvw是G中唯一的(u, w)路，由此推知：在中没有(u, w)路，所以于是v是G的割点。

推论2.7：每个非平凡的无环连通图，至少有两个不是割点的顶点。

证：设G是非平凡无环连通图。由推论2.4.1，G包含一个生成树T。由推论2.2和定理2.7，T至少有两个不是割点的顶点。设v是任意一个这样的顶点，则。由于T是G的生成子图，

的生成子图，所以

由此推知：，因而v不是G的割点。由于至少有两个这样的顶点v，定理得证。

§2.4 Cayley公式

边收缩：G的边e称为被收缩，是指把它删去并使它的两个端点重合；这样得到的图记为。

例子：（见图2.5）

显然，若e是G的连杆，则

所以若T是树，则也是树。

我们用记G的生成树的棵数。

定理2.8：若e是G的连杆，则。

证：由于G的每一棵不包含e的生成树也是的生成树，所以反之，就是G的不包含e的生成树的棵数。

对于G的每棵包含e的生成树T，相应有一棵的生成树。

这个对应显然是一一对应。（见图2.6）所以恰好是G的包含e

的生成树的棵数。因此推知：

例子：（见图2.6）

作业3：

1. 设G是有条边的图。证明下述三个语句是等价的：
2. G是连通图；
3. G是无圈图；
4. G是树。
5. 证明：
6. 若G的每个顶点均为偶点，则G没有割边；
7. 若G是k-正则偶图且，则G没有割边。
8. 设G连通且，证明：
9. 若G有割边，则G有顶点v使；
10. (a)的逆命题不一定正确。
11. 证明：若