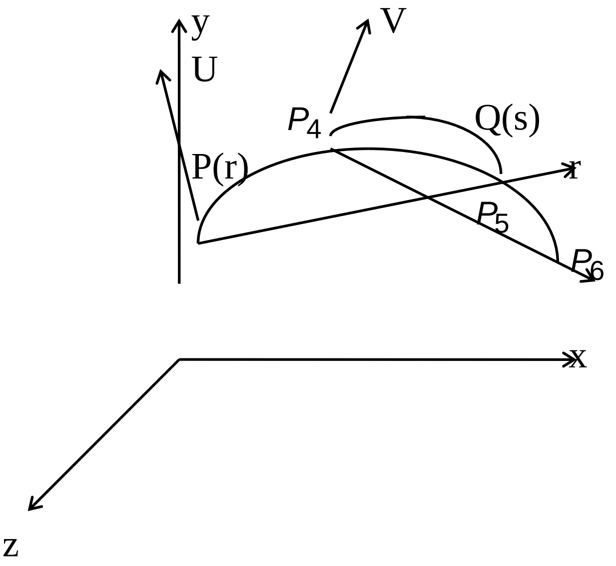
1.1.1. Параболічна інтерполяція.

Метод параболічної інтерполяції передбачає наявність чотирьох послідовних точок одночасно. Плавна крива між двома внутрішніми точками утворюється шляхом спряження двох параболічних сегментів, що перекриваються. Перший сегмент задається першими трьома точками, а другий трьома останніми.

Розглянемо 4 послідовні точки, що характеризуються в просторі, векторами положення P_3, P_4, P_5, P_6. Кожна парабола проходить через три точки і визначається місцевою системою координат. Парабола $P(r)$, що проходить через точки P_3, P_4, P_5 задається в системі координат U, r рівнянням

$$V = Q(s) = \beta \cdot s(e - s) \tag{1}$$



де d – довжина між P_3, P_4. Параметр x буде вибраний пізніше з умови проходження параболи (1) через точку P_4. Для задання другої параболи використаємо

$$V = Q(s) = \beta \cdot s(e - s) \tag{2}$$

де e –довжина між P_4, P_6.

В якості параметру для визначення кривої, що з'єднує всі чотири точки, вибирають відстань вздовж внутрішніх точок P_4, P_5. Позначимо параметр за $\boldsymbol{t}$. Тепер крива, що з'єднує точки P_4, P_5 і фактично усереднює криві (1), (2) $\in C(t)$, що визначається співвідношенням

$$C(t) = [1 - (\frac{t}{t_0})] \cdot P(r) + \frac{t}{t_0} Q(s) \tag{3}$$

де t_0– відстань між точками P_4, P_5.

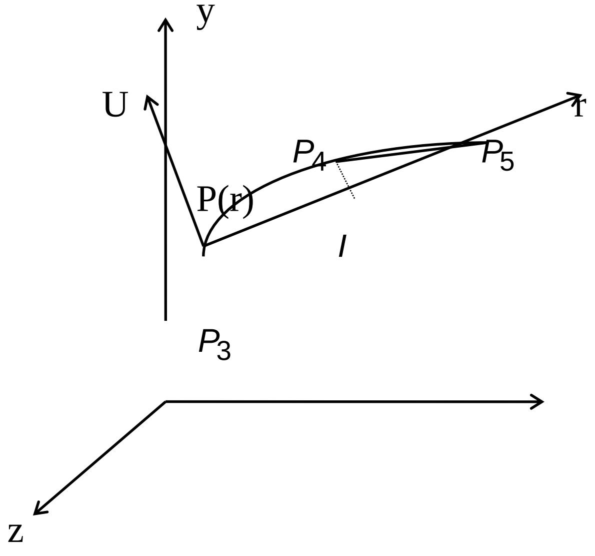
Для визначення (3) тепер необхідно задати явний вираз для $P(2), Q(s)$ та визначити залежності $r = r(t)$, $s = s(t)$.

Розглянемо детально отримання $P(r)$. Для цього введемо в розгляд точку l, яка є проекцією на вісь r точки P_4. Має місце

$(P_4 - I)(P_5 - P_3) = 0$ (4)

Якщо I має в системі (r, U) координати $(\xi d, 0)$, то в системі xyz її положення задається співвідношенням

$I = P_3 + \xi(P_5 - P_3)$ (5)



Підставляючи (5) в (4) отримаємо

$$(P_4 - (P_3 + \xi(P_5 - P_3))) \cdot (P_5 - P_3) = 0 \quad (6)$$

звідки маємо співвідношення для ξ

$$\xi = \frac{(P_4 - P_3)(P_5 - P_3)}{(P_5 - P_3)^2} = \frac{(P_4 - P_3)(P_5 - P_3)}{q^2} \quad (7)$$

Рівняння параболи $P(r)$ в системі координат xyz задається співвідношенням

$$P(r) = P_3 + \frac{r}{d}(P_5 - P_3) + \alpha \cdot r(d - r)\left(P_4 - I\right) \quad (8)$$

чи з врахуванням (5)

$$P(r) = P_3 + \frac{r}{d}(P_5 - P_3) + \alpha \cdot r(d - r)[(P_4 - P_3) - \xi(P_5 - P_3)] \quad (9)$$

Зауважимо, що рівняння (8) , (9) гарантують поки що лише належність до параболи точок P_3, P_5 . Для виконання цього ж і для точки P_4 визначимо параметр α з умови $P(\xi d) = P_4$.Маємо

$$P_4 - I = \alpha \cdot \xi d(d - \xi d)(P_4 - I)$$

звідки

$$\alpha = \frac{1}{d^2 \xi(1 - \xi)} \quad (10)$$

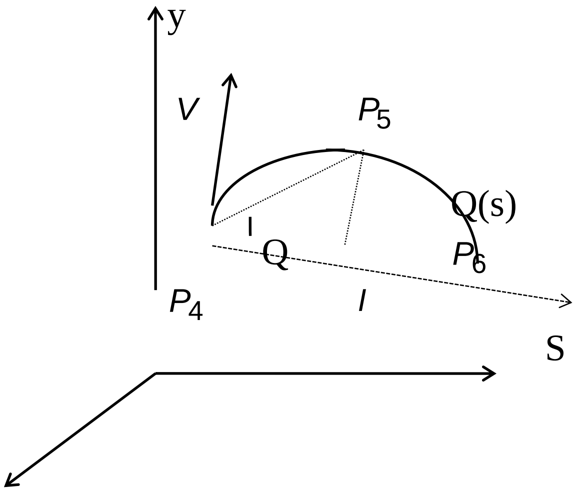
Залежність між r та введеним вище параметром t отримується з врахуванням кута Q :

$$r = \xi d + t \cdot \cos Q \quad (11)$$

де

$$\cos Q = (P_5 - P_4)\frac{(P_5 - P_3)}{t_0 d} \qquad (12)$$

Відповідні співвідношення для параболи $Q(s)$ отримаються у вигляді



$$s = t \cdot \cos Q = \frac{t(P_5 - P_4)(P_6 - P_4)}{t_0 \cdot e} \qquad (13)$$

де e – відстань між P_4 та P_6,

$$Q(s) = P_4 - \frac{s}{e}(P_6 - P_4) + \beta \cdot s(e - s)[(P_5 - P_4) - \eta(P_6 - P_4)]$$

(14)

Тепер для того, щоб отримати координати точки з параметром , що належить інтерполяційний кривій, що проходить через чотири точки, необхідно:

– обчислити значення ξ, η згідно формулі (7);

– обчислити значення r, s згідно (11), (12) та (13);

– обчислити точки на параболах $P(r), Q(s)$ згідно (9), (14);

– усереднити значення $P(r(\tau))$ та $Q(s(\tau))$ згідно процедурі (3).

У випадку n точок даний алгоритм використовується для побудови $(n-3)-x$ кубічних поліномів $C_i(t_i)$ $(i = 2, n = 2)$. Зауважимо, що всі ці поліноми є саме кубічними відносно t_i.

З побудови $C_i(t_i)$ випливає, що отримана інтерполяція є неперервною. Більше того, вона є неперервною і по своїй першій похідній. Покажемо це. Для цього перепишемоспіввідношення (3) у вигляді

$$C(t) = P(t) + \frac{t}{t_0}\left[Q(t) - P(t)\right]$$

Тоді

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dP}{dt} + \frac{t}{t_0}\left(\frac{dQ}{dt} - \frac{dP}{dt}\right) + \frac{1}{t_0}(Q - P)$$

В точці P_4 інтерполюючої кривої виконуються співвідношення $t = 0, P = Q$. Звідки випливає

$$\left(\frac{dC}{dt}\right)_{P_4} = \left(\frac{dP}{dt}\right)_{P_4}$$

Тобто нахил інтерполюючої кривої дорівнює нахилу параболи $P(r)$, в точці . Аналогічно, в точці P_5 на змішаній кривій $t = 0$ $P = Q$. Звідки

$$\left(\frac{dC}{dt}\right)_{P_5} = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{P_5}$$

З двох останніх рівностей витікає неперервність по першій похідній побудованої інтерполяції.

Параболічна інтерполяція може використовуватися лише для апроксимації внутрішніх фрагментів. Два кінцевих сегменти мають бути простими параболами. Відстань між точками на кінцях кривої, що апроксимується, беруться меншими ніж решта точок. За рахунок цього більш точно задається нахил кривої на кінцях.

Метод параболічної інтерполяції приводить до іншого способу задання та побудови кривої. Основна різниця між ними полягає в тому, що для параболічної інтерполяції не має необхідності знати координати всіх точок.