

Вступ. Визначення поняття „комп'ютерна графіка”, сфери та напрями її застосування.

Сучасна комп'ютерна графіка - це одна з найбільш швидко розвиваючих областей сучасних технологій. Методи комп'ютерної графіки широко застосовуються в розробці різних продуктів, навчальних програм, створенні музичних кліпів і телевізійної реклами, кінофільмах, аналізі даних, наукових дослідженнях, медичних процедурах, а також в інших застосуваннях. В цих прикладних застосуваннях використовуються різноманітні технології і апаратні рішення. На даний час ґрунтовно досліджені основні елементи геометричних перетворень та опису кривих та поверхонь. Достатньо досліджені, але продовжують розвиватися методи растрового сканування, відсічі, вилучення невидимих ліній та поверхонь, методи врахування кольорових ефектів та ефектів прозорості. В самостійну область комп'ютерної графіки виділяються питання про формати файлів графічних представлень, взаємні переходи між цими форматами, питання архівування та розархівування графічних файлів. Більша частина сучасних досліджень в області комп'ютерної графіки зв'язана з підвищенням ефективності, реалістичності і швидкості генерації зображень. Щоб отримати реалістичне зображення природної сцени, графічна програма повинна імітувати ефекти реального заломлення світла від фізичних об'єктів. Таким чином, в комп'ютерній графіці спостерігається тенденція до впровадження в графічні алгоритми оптимізаційних апроксимацій фізичних принципів, щоб краще імітувати складні взаємодії між об'єктом і світловим середовищем.

При такому розвитку комп'ютерної графіки для спеціалістів, які працюють в цій області, постійно пропонують все нові і нові терміни. Часто нові терміни та поняття є, як правило, похідними від вже раніше використовуваних, які мають чітке визначення і зміст. Більше того, все більше проникнення комп'ютерної графіки в інші галузі призводить до того, що термінологія відповідної області мимоволі впливається в термінологію комп'ютерної графіки.

Оскільки немає єдиного набору термінів в комп'ютерній графіці, то застосуємо лише встановлену термінологію, яка застосовується більшістю спеціалістів.

У Державному стандарті України ДСТУ 2939-94 дається таке визначення: **комп'ютерна графіка** – це сукупність методів і способів перетворення за допомогою комп'ютера даних у графічне зображення і графічного зображення у дані.

Одна з перших областей застосування комп'ютерної графіки – це демонстрація простих **графіків** даних. Побудова графіків до цих пір залишається найбільш поширеним прикладом застосування комп'ютерної графіки, але сьогодні можна дуже просто створювати **діаграми** для звітів та презентацій, які демонструють складні взаємозв'язки даних, використовуючи слайди, плакати або мультиплікацію. Графіки і діаграми, як правило, використовуються для узагальнення фінансових, статистичних, математичних, наукових, технічних і економічних даних при оформленні наукових доповідей, адміністративних звітів, інформаційних бюлетенів і публікацій інших видів. Зараз існує багато комерційних графічних програм, які перетворюють зображення на екрані у фільм, слайди або плакати, які використовуються для презентацій або архівного зберігання. Типовими прикладами графічного зображення даних – це лінійні графіки, гістограми, секторні діаграми, площинні діаграми, контурні і інші схеми, що показують взаємозв'язки між декількома параметрами в двох-, трьохмірному або більшого розміру просторі. Трьохмірні графіки і діаграми використовуються для того, щоб показати додаткову інформацію про параметри, хоча деколи ними користуються просто, щоб надати інформації більш вражаючий ефект або показати залежність даних в більш наглядній формі.

Комп'ютерна графіка широко використовується в процесах проектування, а саме, в технічних і архітектурних системах. В наш час ці системи називаються системами **автоматизованого проектування (АП, computer-aided design – CAD)** або **автоматизованого проектування і складання креслень (АПСК, computer-aided drafting and design - CADD)** і використовуються для проектування будинків, автомобілів, кораблів, космічних апаратів, комп'ютерів, текстильних виробів, побутової техніки і іншої продукції. В

цих областях проектування предмет спочатку зображується у вигляді каркасної моделі, яка показує загальну форму і характерні особливості об'єкта. Коли проектування об'єкта завершується, накладаються умови реалістичного освітлення і замальовуються поверхні, в результаті отримуємо зображення, яке показує завершальний зовнішній вигляд продукту.

Одне з самих нових застосувань комп'ютерної графіки – це створення *віртуальної реальності*, в якій користувач може взаємодіяти з предметами в трьохмірному просторі. Архітектурний проект можна перевірити, здійснюючи віртуальний обхід по кімнатах або навколо будинку, щоб краще оцінити загальне враження від розробленого проекту. Анімація віртуальної реальності часто використовується для навчання водінню транспортним засобом або аналізу ефективності різних моделей складових засобу та зручності розміщенню елементів управління ним.

Створення графічних відображень наукових, технічних, медичних даних і процесів – це ще одна з нових областей застосувань комп'ютерної графіки, яку ще називають *науковою візуалізацією*. А термін *ділова (комерційна) візуалізація* використовують у зв'язку з наборами даних, які відносяться до торгівлі, промисловості і інших ненаукових сфер. Дослідникам, аналітикам та іншим спеціалістам часто доводиться працювати з великими масивами інформації або вивчати проходження процесів високої складності. Під час комп'ютерного моделювання часто видаються файли, що містять не одну тисячу значень. Також аналогічно супутникові камери та інші записуючі пристрої накопичують файли великих об'ємів швидше, ніж їх можна обробити. Перегляд цих значних наборів цифр з метою визначення тенденцій і взаємозв'язків - невтішне заняття. Але якщо ці дані перетворити у візуальну форму, тоді зразу ж можна відслідкувати загальні тенденції і закономірності.

Існують багато різноманітних видів даних і ефективність схеми візуалізації залежить від характеристик цих даних. Набори даних можуть складатися зі скалярних величин, векторів, тензорів високого порядку або задавати будь-яку комбінацію цих видів даних. Крім цього, ці дані можуть бути координатами об'єктів двох-, трьохмірного простору або простору більш високого порядку. Кольорове кодування - це тільки один зі способів візуалізації даних. До інших методів візуалізації відносяться контурні графіки, діаграми, ізолінії, замальовування поверхонь однакових значень, а також спеціально придуманні форми задання різних типів даних.

В освітніх цілях часто використовуються комп'ютерні моделі фізичних, фінансових, політичних, соціальних, економічних та інших систем. Моделі фізичних процесів, фізіологічних функцій, демографічних тенденцій або устаткувань з кольоровим кодуванням допомагають краще зрозуміти принцип дії систем. Для деяких *навчальних* застосувань розроблено спеціальне устаткування. До прикладу таких спеціалізованих систем можна віднести тренажери для практичних занять або навчання капітанів суден, пілотів літаків, водіїв транспорту та авіадиспетчерів. Особливо часто такі тренажери застосовують для вивчення поведінки навчаючих в критичних ситуаціях.

Методи комп'ютерної графіки зараз широко використовують як в *поліграфії*, так і в *образотворчому мистецтві(комп'ютерне мистецтво)*. Сьогодні художникам доступні різноманітні комп'ютерні методи і засоби, в тому числі і спеціальне устаткування, комерційні програмні продукти, настільні видавничі системи та анімаційні системи, що дають можливість проектувати форми і описувати рух об'єктів. Щоб намалювати картину художник може користуватися сумісно програмами трьохмірного моделювання, накладанням текстури, малювання і програмним забезпеченням автоматизованого проектування. Цими методами „синтезу” зображень також користуються для створення логотипів та інших елементів дизайну, макетів сторінок, що містять текст і графічні зображення, телевізійної реклами. В поліграфії часто використовують фотореалістичні методи створення малюнків.

При створенні *телевізійної комерційної продукції* також користуються методами комп'ютерної анімації. Такі рекламні ролики створюються кадр за кадром, де кожний кадр малюється і зберігається як окремий файл зображення. На кожному наступному кадрі положення об'єкту трошки зміщується, що викликає сприйняття руху в анімаційному фільмі. Коли намальовані всі кадри анімаційної послідовності, вони об'єднуються у фільм або

зберігаються у відеобуфері для перегляду. Часто при цьому один об'єкт плавно перетворюється в інший.

В кінофільмах і музичних кліпах використовувати методи комп'ютерної графіки стало звичайним явищем. Деколи графічні зображення доповнюють гру живих акторів і реальні сцени, а бувають фільми, які повністю зроблені за допомогою методів комп'ютерного малювання і анімації. Методами комп'ютерної графіки користуються також для моделювання гри самого актора. За допомогою цифрових файлів, в яких записані риси обличчя актора, анімаційна програма може видати частину фільму, в якій буде міститися створена за допомогою комп'ютера репліка даної людини. Під час зйомок кінофільму у випадку хвороби актора або неможливої участі можна скористатися методами моделювання і замінити актора у деяких сценах.

Зміна або інтерпретація вже існуючих зображень, таких як фотографії або відеоплівки, називається **обробкою зображень**. Ці методи застосовуються для покращення якості малюнку, його аналізу або розпізнавання візуальних шаблонів в застосуваннях. Спочатку фотографію потрібно оцифрувати і перетворити у файл зображення. Далі за допомогою цифрових методів можна перемістити окремі частини зображення, збільшити контрастність кольорів або покращити якість ретушування. Ці методи інтенсивно використовуються в поліграфії, для аналізу фотографій Землі, отриманих зі супутника, і телескопічних записів розподілу зірок в галактиках, тощо.

В медичних застосуваннях обробка зображень і комп'ютерна графіка часто сумісно використовуються для моделювання і вивчення фізичних функцій, посилення зображень в томографії, проектування штучних органів, планування і виконання хірургічних операцій. За допомогою комп'ютерних методів створення зображень отримують двохмірні поперечні розрізи тіла. Далі ці розрізи переглядаються, над ними за допомогою графічних методів виконуються визначені дії з метою моделювання справжніх хірургічних процедур і апробації різних хірургічних втручань.

В даний час майже стандартно прийнято супроводжувати програмне забезпечення **графічним інтерфейсом (GUI)**. Головний елемент графічного інтерфейсу – це блок керування вікнами, який дозволяє користувачу бачити на екрані багато прямокутників, так званих вікон. В кожному вікні екрану можуть відображатися різні процеси, які видають графічну або неграфічну інформацію і для активізації окремих вікон можуть застосовуватися різні методи. Інтерфейси також служать для зображення меню і піктограм для вибору вікон, опції обробки або значення параметру. Перевага піктограм в тому, що вони займають менше місця на екрані, ніж відповідний текстовий опис, і при вдалому дизайні їх призначення можна зрозуміти швидше. Часто вікно можна перетворити в піктограму, а в меню помістити списки як текстових описів, так і піктограм.

Попередньо зроблено огляд деяких застосувань, в яких використовується комп'ютерна графіка, таких як побудова графіків даних, автоматизоване проектування, віртуальна реальність, наукова візуалізація, освіта, мистецтво, розваги, обробка зображень і графічні користувацькі інтерфейси. Зрозуміло тут не названо ще багато інших областей, в яких значну роль відведено графічним методам обробки інформації, деякі з них читач може знайти в роботах [].

1.1.1. Криві Без'є

Розглянемо сегмент кубічного сплайну, що проходить через 4 точки A_0, A_1, A_2, A_3 . Його рівняння має вигляд

$$r = r(U) = a_0 + Ua_1 + U^2a_2 + U^3a_3 \quad (1)$$

і 4 незалежних коефіцієнтів визначаються з умов на r та $\frac{dr}{dU}$ на обох кінцях сегмента. Якщо вважати за кінці сегмента точки $U = 0, U = 1$, то компоненти векторів a_i визначаються з системи

$$\begin{cases} a_0 = r(0) \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = r(1) \\ a_1 = r'(0) \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = r'(1) \end{cases}$$

звідки отримаємо

$$\begin{cases} G_0 = r(0) \\ G_1 = r'(0) \\ G_2 = 3[r(1) - r(0)] - 2r'(0) - r'(1) \\ G_3 = 2[r(0) - r(1)] + r'(0) + r'(1) \end{cases} \quad (2)$$

Підставляючи (2) в (1) остаточно отримаємо

$$r = r(U) = r(0)(1 - 3U^2 + 2U^3) + r(1)(3U^2 - 2U^3) + r'(0)(U - 2U^2 + U^3) + r'(1)(-U + U^5) \quad (3)$$

Співвідношення (3) часто називають представленням Фергюсона.

Без'є перегрупував члени параметричного кубічного многочлена Фергюсона (3) так, щоб став зрозумілим фізичний зміст окремих векторних коефіцієнтів. Формула Без'є має вигляд:

$$r = r(U) = (1 - U)^3 r_0 + 3U(1 - U)^2 r_1 + 3U^2(1 - U) r_2 + U^3 r_3 \quad (4)$$

де як і раніше вважається, що U змінюється в межах $0 \leq U \leq 1$. Легко бачити, що (4) переходить в (3), якщо вважати що :

$$\begin{aligned} a_0 &= r_0 \\ a_1 &= 3(r_1 - r_0) \\ a_2 &= 3(r_2 - 2r_1 + r_0) \\ a_3 &= r_3 - 3r_2 + 3r_1 - r_0 \end{aligned}$$

І як результат такої рівності:

$$\begin{aligned} r(0) &= r_0 \\ r(1) &= r_3 \\ r'(0) &= 3(r_1 - r_0) \\ r'(1) &= 3(r_3 - r_2) \end{aligned}$$

З (4) і (5) випливає, що крива Без'є проходить через точки r_0, r_1 і має дотичну в точці r_0 , що йде від r_0 до r_1 , а в точці r_3 , що йде від r_2 до r_3 . P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3 утворюють фігуру, що називається характеристичною ламаною заданої кривої.

При підході Без'є, для того, щоб побудувати сегмент кривої ми задаємо точки P_0, P_3 через які вона має проходити, а також точки P_1, P_2 , які задають напрям дотичних в кінцевих точках. Регулюючи довжину $|P_0P_1|, |P_2P_3|$, можна збільшити повноту кривої, чи надати їй більше чи менше асиметричний характер.

В загальному вигляді криві Без'є мають наступний вигляд

$$r = r(U) = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{(n-i)!i!} U^i (1-U)^{n-i} r_i \quad (6)$$

де r_0, r_1, \dots, r_n – радіус-вектори $n+1$ вершини P_0, P_n , деякої узагальненої характеристичної кривої. Підкреслена частина в (6) є так званою функцією Бернштейна, тому що часто наближення Без'є називають апроксимацією на базисі Бернштейна, формулу (6) – формулою Бернштейна-Без'є.

Неважко побачити, що (4) частковий випадок (6) при $n = 3$.

З (6) випливає, що

$$\begin{aligned} r(0) &= r_0 \\ r'(0) &= n(r_1 - r_0) \\ r(1) &= r_n \\ r'(1) &= n(r_n - r_{n-1}) \end{aligned} \quad (7)$$

З (7) можна зробити висновок, що поліномінальна крива (6) проходить через точки P_0, P_n , а напрям дотичних в цих точках співпадає з напрямом $\vec{P_0P_1}$ òà $\vec{P_{n-1}P_n}$.

Взагалі кажучи k перших (останніх) точок характеристичної ламаної характеризують $(k-1)$ похідну в першій (останній) точках. Зміна положення однієї з цих точок приводить до зміни і водночас форми кривої. Але з ростом $r^{(k-1)}$ вплив положення точки (k) на профіль відповідної кривої зменшується.

Співвідношення (4) при $n > 3$ використовується лише у випадках коли потрібно досягти неперервності окремих сегментів інтерполюючої кривої в сенсі похідної високого степеня.

Нехай нам потрібно провести з'єднання двох сегментів Без'є зі збереженням неперервності кривої, неперервності її нахилу та кривизни. Ці геометричні характеристики визначаються значенням вектор-положення точки, а також значенням його першої та другої похідної.

З (6) можна отримати формули k -ї похідної в першій та останній точках сегмента

$$\begin{aligned} r^{(k)}(0) &= \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i P_i \\ r^{(k)}(1) &= \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i P_{n-i} \end{aligned}$$

Таким чином, перші похідні характеризуються співвідношенням

$$\begin{aligned} r'(0) &= n(P_1 - P_0) \\ r'(1) &= n(P_n - P_{n-1}) \end{aligned} \quad (9)$$

Для других похідних відповідно

$$\begin{cases} r''(0) = n(n-1)(P_0 - 2P_1 + P_2) \\ r''(1) = n(n-1)(P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2}) \end{cases} \quad (10)$$

Тепер, якщо вважати, що криві Без'є визначеного $(n+1)$ точкою P_i спряжується з $(m+1)$ точками Q_i , то попередні умови запишуться як система

$$\begin{aligned} Q_0 &= P_n \\ P'(1) &= Q'(0) \\ P''(1) &= Q''(0) \end{aligned} \quad (11)$$

Співвідношення (11) з врахуванням (8) можна записати як

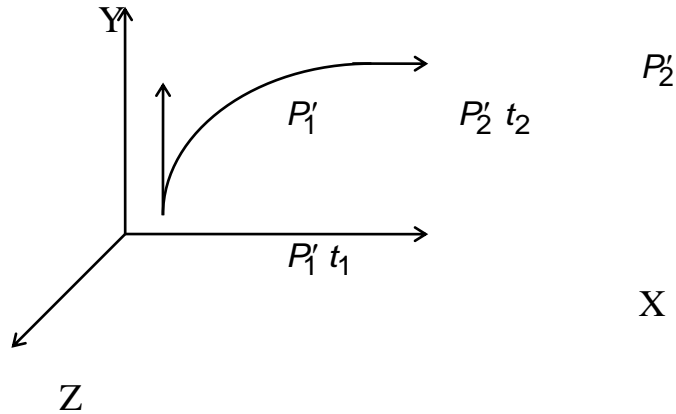
$$\begin{cases} Q_0 = P_n \\ Q_1 - Q_0 = \left(\frac{n}{m}\right)(P_n - P_{n-1}) \\ m(m-1)(Q_0 - 2Q_1 + Q_2) = n(n-1)(P_{n-2} - 2P_{n-1} + P_n) \end{cases} \quad (12)$$

Система (12) може модифікуватись в залежності від умов на гладкість.

Зауважимо також що структура системи (12) така, що при відомих Q_i , значення P_n, P_{n-1}, P_{n-2} і т. д. визначаються з системи послідовно однозначно.

1.1.1. Кубічні сплайни

Взагалі, під сплайном розуміється кусковий поліном степені k з неперервним в місцях з'єднання похідними порядку $k - 1$. Таким чином, кубічний сплайн має зберігати неперервність похідних 1-го та 2-го порядків.



Рівняння параметричного кубічного сплайну, що з'єднує дві точки, $P_1(t_1), P_2(t_2)$ в термінах параметру t має вигляд

$$P(t) = \sum_{i=0}^3 B_i t^{i-1} \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3)$$

де $P(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ — вектор положення довільної точки на сплайні. Коефіцієнти B_i які в свою чергу теж є вектори 1 на 3, визначаються з допомогою чотирьох спеціальних граничних умов для сплайнового сегмента. Таким чином в (3) 12 невідомих. В розгорнутому вигляді (3) записується як

$$P(t) = B_1 + B_2 t + B_3 t^2 + B_4 t^3 \quad (4)$$

Нехай нам відомо: координати точок P_1, P_2 та вектори дотичних в точках $P_1, P_2 - P_1', P_2'$. Нехай $t_1 = 0$ Ці відомі співвідношення математично можна записати

$$\begin{aligned} P(0) &= P_1 \\ P(t_2) &= P_2 \\ \left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=0} &= P_1' \\ \left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=t_2} &= P_2' \end{aligned} \quad (5)$$

З (4), (5) остаточно випливає:

$$\begin{aligned} P(0) &= B_1 = P_1 \\ \left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=0} &= B_2 = P_1' \end{aligned} \quad (6)$$

$$P(t_2) = B_1 + B_2 t_2 + B_3 t_2^2 + B_4 t_2^3$$

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=t_2} = B_2 + 2B_3t_2 + 3B_4t_2^2 \quad (7)$$

Розв'язуючи (7) відносно B_3, B_4 з врахуванням (6), отримаємо

$$\begin{aligned} B_3 &= \frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P'_1}{t_2^2} - \frac{P'_2}{t_2^2} \\ B_4 &= \frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P'_1}{t_2^2} + \frac{P'_2}{t_2^2} \end{aligned} \quad (8)$$

Підставляючи (6), (8) в (4) можемо отримати рівняння кубічного сплайнового сегмента

$$\begin{aligned} P(t) &= P_1 + P'_1 \cdot t + \left[\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P'_1}{t_2^2} - \frac{P'_2}{t_2^2} \right] \cdot t^2 + \\ &+ \left[\frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P'_1}{t_2^2} + \frac{P'_2}{t_2^2} \right] \cdot t^3 \end{aligned} \quad (9)$$

Узагальнимо (9), на випадок двох суміжних кубічних сегментів $P_k(t), P_{k+1}(t)$. Маємо

$$\left\{ \begin{aligned} P_k(t) &= P_k + P'_k \cdot t + \left[\frac{3(P_{k+1} - P_k)}{t_2^2} - \frac{2P'_k}{t_2^2} - \frac{P'_{k+1}}{t_2^2} \right] \cdot t^2 + \\ &+ \left[\frac{2(P_k - P_{k+1})}{t_2^3} + \frac{P'_k}{t_2^2} + \frac{P'_{k+1}}{t_2^2} \right] \cdot t^3 \\ P_{k+1}(t) &= P_{k+1} + P'_{k+1} \cdot t + \left[\frac{3(P_{k+2} - P_{k+1})}{t_2^2} - \frac{2P'_{k+1}}{t_2^2} - \frac{P'_{k+2}}{t_2^2} \right] \cdot t^2 + \\ &+ \left[\frac{2(P_{k+1} - P_{k+2})}{t_2^3} + \frac{P'_{k+1}}{t_2^2} + \frac{P'_{k+2}}{t_2^2} \right] \cdot t^3 \end{aligned} \right. \quad (10)$$

при умові, що на першому сегменті параметр знаходиться в межах $0 \leq t \leq t_2$, а другий $0 \leq t \leq t_3$. В формулі (10) є одна невизначена компонента, а саме P'_{k+1} . Для її визначення використовується умова неперервності другої похідної $P''(t)$ в місці з'єднання

З (4) маємо

$$P''(t) = 2B_3 + 6B_4 \cdot t \quad (11)$$

В кінці першого сплайнового сегмента, тобто при $t = t_2$ отримаємо

$$P''(t) = 6B_4 \cdot t_2 + 2B_3$$

а на початку другого ($t = 0$)

$$P'' = 2B_3$$

Враховуючи співвідношення (8) умови на обчислення P'_k (чи P'_2)

$$t_3P'_1 + 2(t_3 + t_2)P'_2 + t_2P'_3 = \frac{3}{t_2t_3} [t_2^2(P_3 - P_2) + t_3^2(P_2 - P_1)] \quad (12)$$

З врахуванням співвідношення (10) діють аналогічні вирази для відшукування сплайнів.

Отримані результати можуть бути узагальнені на випадок n точок для побудови $(n-1)$ сплайнів. При цьому для отримання невідомих похідних у внутрішніх точках використовуються умови неперервності других похідних в цих точках.

Співвідношення (12) при цьому перетворюється в систему рівнянь:

$$t_{k+2}P'_k + 2(t_{k+2} + t_{k+1})P'_{k+1} + t_{k+1}P'_{k+2} = \frac{3}{t_{k+1}t_{k+2}}[t_{k+1}^2(P_{k+2} - P_{k+1}) + t_{k+2}^2(P_{k+1} - P_k)] \quad (13)$$

В матричній формі співвідношення (13) можна представити

$$\begin{bmatrix} t_3 \cdot 2(t_2 + t_3) & t_2 & 0 & \dots \\ 0 & t_4 & 2(t_3 + t_4) & t_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ \vdots \\ P'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{t_2 t_3} [t_2^2(P_3 - P_2) + t_3^2(P_2 - P_1)] & \dots \\ \dots & \dots \\ \frac{3}{t_{n-1} t_n} [t_{n-1}^2(P_n - P_{n-1}) + t_n^2(P_{n-1} - P_{n-2})] \end{bmatrix} \quad (14)$$

Тепер метод інтерполяції сплайнами по точках має вигляд:

- розв'язати (14);
- згідно формул, що аналогічні (6), (8) записати коефіцієнти для кожного сплайну;
- побудувати інтерполяційні кубічні сплайни.

Слід відзначити, що неперервність других похідних у внутрішніх точках з'єднання не гарантує гладкості сплайна в сенсі мінімуму кривизни вздовж кривої. Для того щоб отримати мінімум кривизни і, відповідно, максимум гладкості необхідно мінімізувати коефіцієнти для кожного сегмента за рахунок вибору діапазону зміни параметрів. Одним з прийомів вибору значень t_{\max} на сегментах, який задовільняє попередньому критерію, є вибір t_{\max} рівним довжині хорд між слідуючими одна за другою точками.

Розглянемо рівняння (14) більш уважно. Для простоти запишемо його у матричному вигляді

$$M \cdot P = B \quad (15)$$

Зауважимо, що M — матриця прямокутна $(n-2) \times (n)$, P — стовпець $n \times 1$, B — стовпець $(n-2) \times 1$.

Для знаходження з (15) вектора невідомих P необхідно отримати квадратну матрицю. Це досягається шляхом використання спеціальних граничних умов, які фактично характеризують весь сплайн.

Ці умови можуть задаватися в різному вигляді і мають, як правило чіткий геометричний зміст. До цих умов належать:

- 1) закріплена гранична умова (формується, так званий, фіксований сплайн)

На початку, та в кінці сплайну задаються дотичні вектори P_1, P_n таким чином має місце

$$P'_1 = P_1$$

$$P'_n = P_n$$

В цьому випадку система (15) перетворюється в квадратну систему $n \times n$ з характеристиками:

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & M & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} P_1 \\ B \\ P_n \end{pmatrix}$$

M' — представляє собою тридіагональну матрицю, розв'язок якої можна отримати у вигляді рекурентних співвідношень.

2) слабкі граничні умови

$$\text{Умови типу } \frac{d^2 P}{dt^2} = 0$$

Розглянемо цю умову на початку сплайну ($k = 1, t = 0$).

Враховуючи співвідношення (11), (18) цю умову можна записати у вигляді

$$P'_1 + \frac{1}{2} P'_2 = \frac{3}{2} \frac{(P_2 - P_1)}{t_2} \quad (16)$$

На кінці останнього сегменту отримаємо:

$$2P'_{n-1} + 4P'_n = \frac{6}{t_n} (P_n - P_{n-1}) \quad (17)$$

Враховуючи (16), (17) система (15) набуде квадратний вигляд і характеристики:

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & \dots & 0 & 4 \\ & M & & & \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad B' = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \frac{(P_2 - P_1)}{t_2} \\ B \\ \frac{6}{t_n} (P_n - P_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Маємо справу з тридіагональною матрицею.

3) циклічні кінцеві умови

Такі умови задаються для опису замкнутої чи періодичної кривої. Ці умови характеризуються співвідношеннями

$$P'_1(0) = P'_n(t_n) \quad (18)$$

$$P''_1(0) = P''_n(t_n)$$

Таким чином нахил та кривизна на початку та в кінці кривої рівні.

З врахуванням (7), (8), (11) співвідношення (18) можна розгорнути у систему

$$\begin{cases} P'_1 - P'_{n-1} = 2 \left[\frac{3(P_n - P_{n-1})}{t_n^2} - \frac{2P'_{n-1}}{t_n} - \frac{P'_n}{t_n} \right] t_n + \\ + 3 \left[\frac{2(P_n - P_{n-1})}{t_n^3} + \frac{P'_{n-1}}{t_n^2} + \frac{P'_n}{t_n^2} \right] t_n \end{cases} \quad (19)$$

Система (19) фактично замикає систему (15). На практиці спочатку спрощується система (19), а потім (15) записується як система $((n-1) \times (n-1))$ з $(n-1)$ невідомим.

Домножимо 2-ге рівняння (19) на t_n віднімемо від першого і врахуємо, що $P'_1 = P'_n$. В результаті отримаємо

$$2\left(1 + \frac{t_n}{t_2}\right)P'_1 + P'_2 \frac{t_n}{t_2} + P'_{n-1} = 3(P_2 - P_1) \frac{t_n}{t_2^2} - 3(P_{n-1} - P_n) \frac{1}{t_n} \quad (20)$$

З врахуванням (20) з (15) отримаємо:

$$M' = \begin{bmatrix} 2\left(1 + \frac{t_n}{t_2}\right) & \frac{t_n}{t_2} & 0 & \dots & 1 \\ M & & & & \end{bmatrix}; \quad B' = \begin{bmatrix} 3(P_2 - P_1) \frac{t_n}{t_2^2} - \\ -3(P_{n-1} - P_n) \frac{1}{t_n} \\ B \end{bmatrix}$$

M' — профільна матриця.

4) у випадку побудови циклічного сплайну граничні умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} P'_1(0) &= -P'_n(t_n) \\ P''_1(0) &= -P''_n(t_n) \end{aligned} \quad (21)$$

Рівняння, якого не вистачає, як не важко показати аналогічно (19), (20), має вигляд

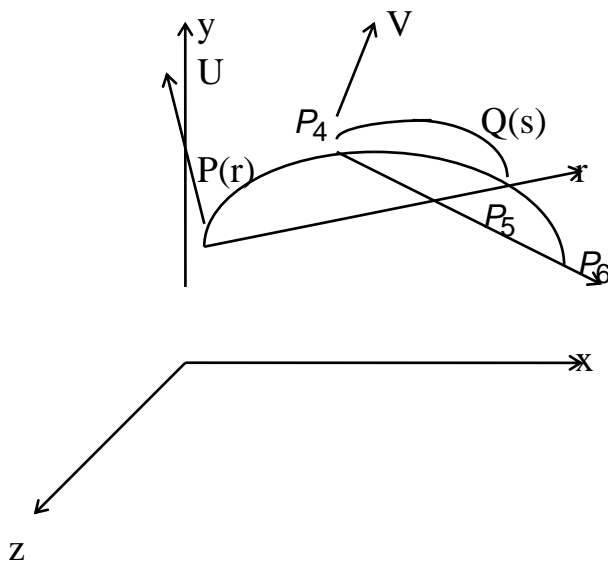
$$2\left(1 + \frac{t_n}{t_2}\right)P'_1 + P'_2 \frac{t_n}{t_2} - P'_{n-1} = 3(P_2 - P_1) \frac{t_n}{t_2^2} + 3(P_{n-1} - P_n) \frac{1}{t_n} \quad (21)$$

1.1.1. Параболічна інтерполяція.

Метод параболічної інтерполяції передбачає наявність чотирьох послідовних точок одночасно. Плавна крива між двома внутрішніми точками утворюється шляхом спряження двох параболічних сегментів, що перекриваються. Перший сегмент задається першими трьома точками, а другий трьома останніми.

Розглянемо 4 послідовні точки, що характеризуються в просторі, векторами положення P_3, P_4, P_5, P_6 . Кожна парабола проходить через три точки і визначається місцевою системою координат. Парабола $P(r)$, що проходить через точки P_3, P_4, P_5 задається в системі координат U, r рівнянням

$$V = Q(s) = \beta \cdot s(e - s) \quad (1)$$



де d – довжина між P_3, P_4 . Параметр x буде вибраний пізніше з умови проходження параболи (1) через точку P_4 . Для задання другої параболи використаємо

$$V = Q(s) = \beta \cdot s(e - s) \quad (2)$$

де e – довжина між P_4, P_6 .

В якості параметру для визначення кривої, що з'єднує всі чотири точки, вибирають відстань вздовж внутрішніх точок P_4, P_5 . Позначимо параметр за t . Тепер крива, що з'єднує точки P_4, P_5 і фактично усереднює криві (1), (2) $\in C(t)$, що визначається співвідношенням

$$C(t) = [1 - (\frac{t}{t_0})] \cdot P(r) + \frac{t}{t_0} Q(s) \quad (3)$$

де t_0 – відстань між точками P_4, P_5 .

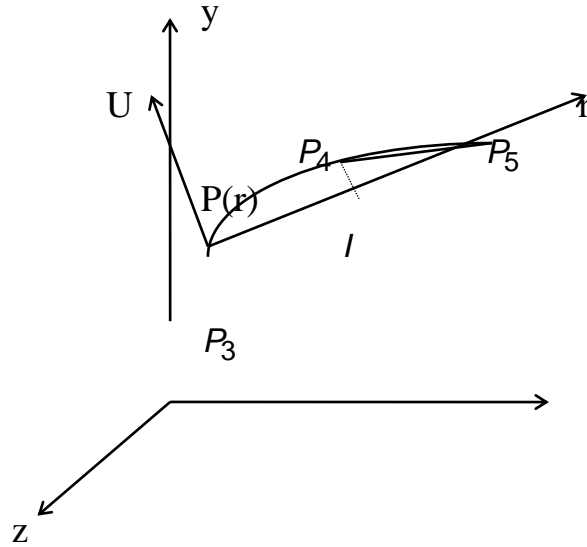
Для визначення (3) тепер необхідно задати явний вираз для $P(r), Q(s)$ та визначити залежності $r = r(t), s = s(t)$.

Розглянемо детально отримання $P(r)$. Для цього введемо в розгляд точку I , яка є проекцією на вісь r точки P_4 . Має місце

$$(P_4 - I)(P_5 - P_3) = 0 \quad (4)$$

Якщо I має в системі (r, U) координати $(\xi d, 0)$, то в системі xuz її положення задається співвідношенням

$$I = P_3 + \xi(P_5 - P_3) \quad (5)$$



Підставляючи (5) в (4) отримаємо

$$(P_4 - (P_3 + \xi(P_5 - P_3))) \cdot (P_5 - P_3) = 0 \quad (6)$$

звідки маємо співвідношення для ξ

$$\xi = \frac{(P_4 - P_3)(P_5 - P_3)}{(P_5 - P_3)^2} = \frac{(P_4 - P_3)(P_5 - P_3)}{q^2} \quad (7)$$

Рівняння параболи $P(r)$ в системі координат xuz задається співвідношенням

$$P(r) = P_3 + \frac{r}{d}(P_5 - P_3) + \alpha \cdot r(d - r)(P_4 - I) \quad (8)$$

чи з врахуванням (5)

$$P(r) = P_3 + \frac{r}{d}(P_5 - P_3) + \alpha \cdot r(d - r)[(P_4 - P_3) - \xi(P_5 - P_3)] \quad (9)$$

Зауважимо, що рівняння (8), (9) гарантують поки що лише належність до параболи точок P_3, P_5 . Для виконання цього ж і для точки P_4 визначимо параметр α з умови $P(\xi d) = P_4$. Маємо

$$P_4 - I = \alpha \cdot \xi d(d - \xi d)(P_4 - I)$$

звідки

$$\alpha = \frac{1}{d^2 \xi (1 - \xi)} \quad (10)$$

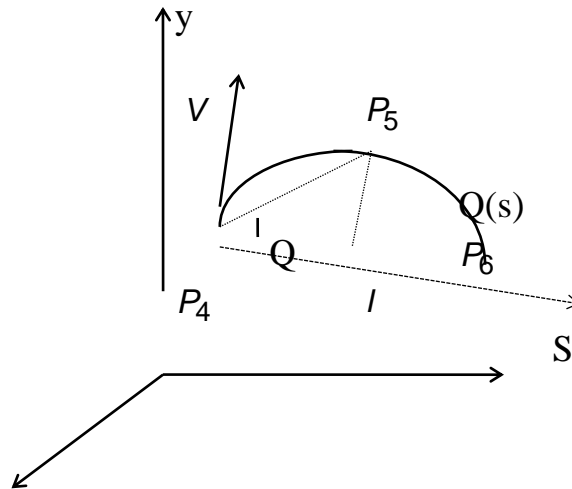
Залежність між r та введеним вище параметром t отримується з врахуванням кута Q :

$$r = \xi d + t \cdot \cos Q \quad (11)$$

де

$$\cos Q = (P_5 - P_4) \frac{(P_5 - P_3)}{t_0 d} \quad (12)$$

Відповідні співвідношення для параболи $Q(s)$ отримаються у вигляді



$$s = t \cdot \cos Q = \frac{t(P_5 - P_4)(P_6 - P_4)}{t_0 \cdot e} \quad (13)$$

де e – відстань між P_4 та P_6 ,

$$Q(s) = P_4 - \frac{s}{e}(P_6 - P_4) + \beta \cdot s(e - s)[(P_5 - P_4) - \eta(P_6 - P_4)]$$

(14)

Тепер для того, щоб отримати координати точки з параметром , що належить інтерполяційній кривій, що проходить через чотири точки, необхідно:

- обчислити значення ξ , η згідно формулі (7);
- обчислити значення r , s згідно (11), (12) та (13);
- обчислити точки на параболах $P(r)$, $Q(s)$ згідно (9), (14);
- усереднити значення $P(r(t))$ та $Q(s(t))$ згідно процедури (3).

У випадку n точок даний алгоритм використовується для побудови $(n-3) - x$ кубічних поліномів $C_i(t_i)$ ($i = 2, n=2$) . Зауважимо, що всі ці поліноми є саме кубічними відносно t_i .

З побудови $C_i(t_i)$ випливає, що отримана інтерполяція є неперервною. Більше того, вона є неперервною і по своїй першій похідній. Покажемо це. Для цього перепишемо співвідношення (3) у вигляді

$$C(t) = P(t) + \frac{t}{t_0}[Q(t) - P(t)]$$

Тоді

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dP}{dt} + \frac{t}{t_0} \left(\frac{dQ}{dt} - \frac{dP}{dt} \right) + \frac{1}{t_0} (Q - P)$$

В точці P_4 інтерполуючої кривої виконуються співвідношення $t = 0$, $P = Q$. Звідки випливає

$$\left(\frac{dC}{dt}\right)_{P_4} = \left(\frac{dP}{dt}\right)_{P_4}$$

Тобто нахил інтерполюючої кривої дорівнює нахилу параболи $P(r)$, в точці P_4 . Аналогічно, в точці P_5 на змішаній кривій $t = 0$ $P = Q$. Звідки

$$\left(\frac{dC}{dt}\right)_{P_5} = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{P_5}$$

З двох останніх рівностей витікає неперервність по першій похідній побудованої інтерполяції.

Параболічна інтерполяція може використовуватися лише для апроксимації внутрішніх фрагментів. Два кінцевих сегменти мають бути простими параболою. Відстань між точками на кінцях кривої, що апроксимується, беруться меншими ніж решта точок. За рахунок цього більш точно задається нахил кривої на кінцях.

Метод параболічної інтерполяції приводить до іншого способу задання та побудови кривої. Основна різниця між ними полягає в тому, що для параболічної інтерполяції не має необхідності знати координати всіх точок.

1.1.1. Плоскі криві.

В попередніх темах ми ознайомилися з різними методами перетворення окремих точок, далі дослідимо деякі функції. Звичайно графік функції можна зобразити у вигляді набору близько розташованих точок, але більш ефективним є математичний опис кривих. Це пов'язано з наступним:

- а) математичний опис є точним, і дозволяє точно отримувати характеристики кривої;
- б) математичний опис легко тримати в машині в компактному вигляді;
- с) крива, що математично описана, легко зображається на екрані;
- д) при аналітичному визначенні кривої відпадає необхідність в інтерполяційних схемах;
- е) при аналітичному записі кривої, як правило, суттєво спрощується проблема створення кривої, що відрізняються від попередньої на деякі геометричні параметри.

Існує два способи представлення кривих – у параметричній формі та непараметричній формі.

Непараметрично крива задається у вигляді явної чи неявної функції:

$$y = f(x) \quad (1)$$

$$f(x, y) = 0 \quad (2)$$

Формула (1) передбачає тільки однозначну функції (для кожного значення x існує тільки одне значення y) (2) – розширюється також на багатозначні, на замкнуті криві. Але розв'язок (2) вимагає, як правило, громіздких обчислень.

Як явні, так і неявні непараметричні криві залежать від виду описуючих їх координат. Тобто простота опису кривих і обчислення їх характеристик залежать від вибору системи координат.

В параметричній формі кожна координата точки на кривій є функцією від одного чи більше параметрів. У випадку плоскої кривої її запис в параметричній формі буде:

де t – параметр.

Вектор положення точки визначається вектори,

$$P(t) = [f(t) \ g(t)]$$

дотична в деякій точці до кривої

$$P'(t) = [f'(t) \ g'(t)]$$

Звичайно, що існує декілька способів переходу від (3) до (1) чи (2) і навпаки.

В зв'язку з тим, що точка параметричної кривої характеризується лише значенням параметру, то параметрична функція є осезалежною. Довжина кривої визначається діапазоном зміни параметра t , який як правило нормалізують в межах $0 \leq t \leq 1$. Враховуючи осезалежність параметричного представлення кривої, при її побудові можна використовувати методи матричних перетворень.

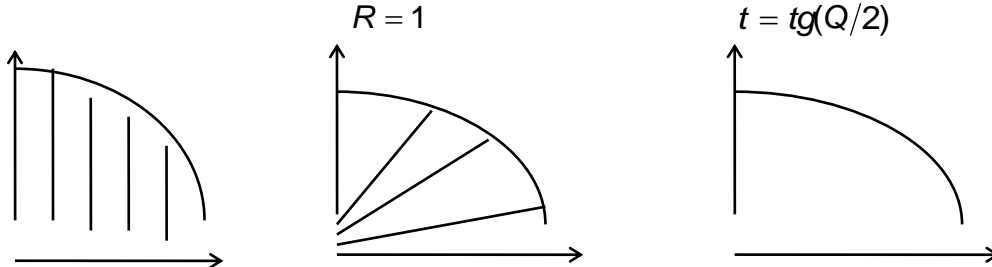
Наприклад: $(x^* \ y^* \ 1) = [f(t) \ g(t) \ 1] T$

Порівняємо різницю в параметричній та непараметричній формах на прикладі чверті кола:

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\begin{cases} x = \cos Q \cdot R \\ y = \sin Q \cdot R \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ y &= \frac{2t}{1 + t^2} \end{aligned}$$



Розглянемо більш детально способи зображення канонічних кривих на основі їх параметричного представлення:

1.1.2. Зображення кола:

$$\begin{cases} x = r \cos Q \\ y = r \sin Q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n = r \cos Q_n \\ y_n = r \sin Q_n \end{cases} \quad (4)$$

(4) – є громіздкою, так як вимагає обчислення + (т.т. ітераційного циклу).

(4) можна покращити використавши формули подвійного кута:

$$\begin{aligned} \cos(Q + dQ) &= \cos Q \cos dQ - \sin Q \sin dQ \\ \sin(Q + dQ) &= \cos Q \sin dQ + \cos dQ \sin Q \end{aligned} \quad (5)$$

Враховуючи (5) рекурентні формули для (4) можна записати, як :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \cos dQ - y_n \sin dQ \\ y_{n+1} &= x_n \sin dQ + y_n \cos dQ \end{aligned} \quad (6)$$

У випадку, коли центр кола розташовано в точці (h, k) , координати будь-якої точки кола записуються співвідношеннями

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= h + (x_n - h) \cos dQ - (y_n - k) \sin dQ \\ y_{n+1} &= k + (x_n - h) \sin dQ + (y_n - k) \cos dQ \end{aligned} \quad (7)$$

1.1.3. Параметричне представлення еліпса

Параметричне рівняння еліпса з центром в початку координат

$$\begin{cases} x = a \cos Q \\ y = b \sin Q \end{cases} \quad (8)$$

Скориставшись формулами (5) отримаємо

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a \cos Q \cos dQ - a \sin Q \sin dQ \\ y_{n+1} &= b \cos Q \sin dQ + b \cos dQ \sin Q \end{aligned} \quad (9)$$

Якщо (9) привести до термінів

$$x_n = a \cos Q$$

$$y_n = b \sin Q$$

остаточно отримаємо

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cos dQ - \frac{a}{b} y_n \sin dQ \\ y_{n+1} = \frac{b}{a} x_n \sin dQ + y_n \cos dQ \end{cases} \quad (10)$$

1.1.4. Параметричне представлення параболи

Непараметричне представлення параболи має вигляд

$$y^2 = 4ax$$

Його використання вимагає обчислення кореня квадратного і тому є незручним. Теж саме стосується параметричного представлення параболи через рівняння

$$\begin{cases} x = tg^2 Q \\ y = \pm 2\sqrt{a} \cdot tg Q \quad 0 \leq Q \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Більш ефективним є запис

$$\begin{cases} x = a \cdot Q^2 \\ y = 2a \cdot Q \quad 0 \leq Q \leq \infty \end{cases} \quad (11)$$

$$Q_{n+1} = Q_n + dQ$$

Для (11) можна використати рекурентну формулу

1.1.5. Параметричне представлення гіперболи

В прямокутних, непараметричних координатах гіпербола визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Безпосереднє розв'язування цього рівняння приведе до розрахунку $\sqrt{}$.

Використаємо параметричний запис:

$$\begin{cases} x = a \cdot chQ \\ y = b \cdot shQ \end{cases} \quad (13)$$

$$chQ = \frac{e^Q + e^{-Q}}{2}$$

Використавши формулу для гіперболічних функцій

$$\begin{aligned} ch(Q + dQ) &= chQ \cdot chdQ + shQ \cdot shdQ \\ sh(Q + dQ) &= shQ \cdot chdQ + chQ \cdot shdQ \end{aligned} +$$

отримаємо рекурентні формули для обчислення точок гіперболи

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cdot chdQ + \frac{a}{b} y_n \cdot shdQ \\ y_{n+1} = \frac{b}{a} x_n \cdot shdQ + y_n \cdot chdQ \end{cases} \quad (14)$$

1.1.6. Просторові криві

Як і у випадку просторових кривих для представлення просторових кривих використовуються параметричні та непараметричні співвідношення. Непараметричні включають в себе:

явні рівняння

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ z = g(x) \end{cases} \quad \text{чи} \quad \begin{cases} x = f^{(1)}(z) \\ y = g^{(1)}(z) \end{cases} \quad \text{чи} \quad \begin{cases} x = f^{(2)}(y) \\ z = g^{(2)}(y) \end{cases} \quad (1)$$

та неявні

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Метод опису кривої (2) має силу, якщо виконуються умови однозначності по x чи y чи z .

Такі умови повідношенню до z мають вигляд

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

Якщо аналітичне представлення кривої невідоме, можна використати інтерполяційну схему, щоб провести криву через задані просторові точки. При цьому, як правило, потрібно задовільнити певні умови гладкості кривої, та деякі граничні умови. Ми розглянемо деякі методи побудови інтерполяційних кривих в просторі.

Опис та побудова поверхонь в просторі.

Будемо вважати, що опис поверхні зроблено у векторному параметричному вигляді. Таке задання є зручним з наступних причин:

- Такий опис поверхні є осенезалежним;
- дозволяє отримати єдине задання для багатозначних поверхонь чи функцій;
- спрощує представлення просторових кривих в однорідних координатах і допускає використання тривимірних перетворень однорідних координат.

Будемо вважати також, що поверхня є кусково-неперервною, тобто вона складена з окремих фрагментів, які складуються по границі.

Далі будемо використовувати термін векторної функції:

$$P(t) = [x(t), y(t)] \text{ - для плоскої кривої,}$$
$$P(t) = [x(t), y(t), z(t)] \text{ - для просторової.}$$

Тепер поверхня в просторі буде задаватися векторною функцією двох змінних:

$$P(u, w) = [x(u, w), y(u, w), z(u, w)]$$

Криву на цій поверхні можна представити за рахунок фіксації u чи w . Наприклад, $P(u_i, w)$ чи $P(u, w_i)$ чи за допомогою деякої залежності між u та w - $f(u, w) = 0$.

Точку на поверхні можна задати чи фіксацією u та w - $P(u_i, w_i)$ чи як точку перетину двох кривих на поверхні -
$$\begin{cases} f(u, w) = 0 \\ g(u, w) = 0 \end{cases}$$

Розглянемо деякі способи інтерполяції сегментів просторової поверхні.

Білінійні поверхні.

Однією з найпростіших поверхонь є білінійна поверхня. Припустимо, що задані 4 кутові точки поверхні на площині uw точками $P(0, 0)$, $P(0, 1)$, $P(1, 0)$, $P(1, 1)$, тобто кутами одиничного квадрату. Необхідно побудувати функцію двох змінних чи білінійну поверхню $Q(u, w)$, в якій положення довільної точки на поверхні визначається лінійно через u , w . Це досягається функцією:

$$Q(u, w) = P(0, 0)(1 - u)(1 - w) + P(0, 1)(1 - u)w + P(1, 0)u(1 - w) + P(1, 1)uw \quad (1)$$

чи в матричній формі

$$Q(u, w) = \begin{bmatrix} (1-u) & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-w \\ w \end{bmatrix}.$$

Легко побачити, що при цьому виконується умови:

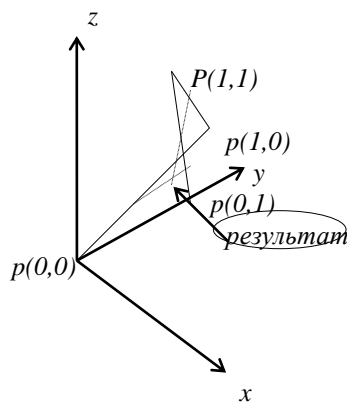
$$Q(0, 0) = P(0, 0) \text{ і т.д.}$$

Зрозуміло, що при використанні (1) будь-яка кускова поверхня буде лише (в загальному випадку неперервна).

Якщо ввести в розгляд вектор базових функцій $U = \begin{bmatrix} (1-u)(1-w) & (1-u)w & u(1-w) & uw \end{bmatrix}$ то співвідношення (1) залишеться в компактній матричній формі як

$$Q[x(u, w) \quad y(u, w) \quad z(u, w)] = UP$$

Як ми бачимо з малюнка білінійна поверхня є квадратичною (в загальному випадку) поверхнею обмеженою прямолінійними границями.



Це випадок, коли векторами положення вибираються 4 з 8 кутів одиничного куба.

$$P(0,0) = (0,0,0)$$

$$p(0,1) = (0,1,0)$$

$$p(1,0) = (1,0,1)$$

$$p(1,1) = (0,1,1)$$

$$x = u(1-w)$$

$$y = w, \quad z = u$$

Лінійчаті поверхні.

Дальший розвиток ідеї білінійних поверхонь приводить до лінійчатих поверхонь. Тут вважається, що граничні обмежуючі криві, пов'язані з протилежними сторонами одиничного квадрата в площині uw не обов'язково є прямолінійними відрізками. Будемо вважати, що одна пара цих кривих відома і позначимо її $P(u, 1)$. Аналогічно представлення для них може бути отримано любим з попередніх методів.

Лінійчата поверхня в цьому випадку отримується з допомогою лінійних інтерполяцій між цими кривими.

Інтерполяційна схема визначається співвідношенням:

$$Q(u, w) = P(u, 0)(1 - w) + P(u, 1)w \quad (2)$$

Неважко побачити зв'язок між співвідношеннями (1), (2).

З (2) бачимо, що

$$Q(u, 0) = P(u, 0),$$

$$Q(u, 1) = P(u, 1).$$

Якщо вважати, що відома друга пара обмежуючих кривих $P(0, w), P(1, w)$, то лінійчата поверхня прийме вигляд

$$Q(u, w) = P(0, w) * (1 - u) + P(1, w)u, \quad (3)$$

Лінійні поверхні Кунса.

При розгляді випадку лінійчатих поверхонь був випущений випадок, коли відомі усі 4 обмежуючі криві $P(0, w), P(1, w), P(u, 0), P(u, 1)$.

У цьому випадку можна об'єднати представлення (2). (3). Сумуючи ці співвідношення, отримаємо:

$$Q(u, w) = P(u, 0)(1 - w) + P(u, 1)w + P(0, w)(1 - u) + P(1, w)u \quad (4)$$

З (4) бачимо, що не виконуються умови неперервності в кутових точках

$$Q(0, 0) = P(0, 0) + P(0, 0)$$

і на краях

$$Q(0, w) = P(0, 0)(1 - w) + P(0, 1)w + P(0, w).$$

Ця невідповідність пов'язана з тим, що кутові точки враховуються два рази. Вірний результат можна отримати вираховуючи зайві кутові точки, що приводить до виразу

$$Q(u, w) = P(u, 0)(1 - w) + P(u, 1)w + P(0, w)(1 - u) + P(1, w)u - P(0, 0)(1 - u)(1 - w) - P(0, 1)(1 - u)w - P(1, 0)u(1 - w) - P(1, 1)uw \quad (5)$$

З (5) впливають умови неперервності $Q(0, 0) = P(0, 0)$ в кутах, та вздовж границь - $Q(0, w) = P(0, w), Q(u, 1) = P(u, 1)$ і т.д.

Співвідношення (5) виражає сегмент лінійної поверхні Кунса. В матричній формі (5) приймає вигляд:

$$Q(u, w) = \begin{bmatrix} (1 - u) & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0, w) \\ P(1, w) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P(u, 0) & P(u, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - w \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 - u & u \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} P(0, 0) & P(0, 1) \\ P(1, 0) & P(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - w \\ w \end{bmatrix}$$

чи в компактній формі

$$Q(u, w) = \begin{bmatrix} 1 - u & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P(0, 0) & -P(0, 1) & P(0, w) \\ -P(1, 0) & -P(1, 1) & P(1, w) \\ P(u, 0) & P(u, 1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - w \\ w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Фрагмент бікубічної поверхні.

При побудові поверхонь Кунса функції ліній границь вважаються відомими, але на практиці їх потрібно отримувати. Розглянемо випадок, коли криві $P(u, 0)$, $P(u, 1)$, $P(1, w)$, $P(0, w)$ описуються параметричними многочленами третього порядку.

Нагадаємо, що многочлен третього порядку має вигляд

$$P(t) = B_1 + B_2 t + B_3 t^2 + B_4 t^3 \quad (7)$$

де $P(t)$ - функція векторних величин з компонентами x, y, z .

Для зручності обмежимо діапазон зміни параметра t інтервалом $0 \leq t \leq 1$. Для однієї пари граничних кривих параметр t співпадає з u , а для другої з w .

Для визначення невідомих B_i використовується система рівнянь:

$$\begin{cases} P(0) = B_1 \\ P(1) = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \\ P'(0) = B_2 \\ P'(1) = B_2 + 2B_3 + 3B_4 \end{cases} \quad (8)$$

чи в матричній формі

$$P = MB \quad (9)$$

де $P^T = [P(0) \ P(1) \ P'(0) \ P'(1)]$, $B^T = (B_4 \ B_3 \ B_2 \ B_1)$,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Розв'язуючи (8) відносно B отримаємо:

$$B = M^{-1}P \quad (10)$$

$$\text{де } M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Підставляючи (10) в (7) отримаємо співвідношення для представлення функції границі, як

$$P(u) = F_1(u)P(0) + F_2(u)P(1) + F_3(u)P'(0) + F_4(u)P'(1) \quad (11)$$

де під F_i розуміємо функції форми, які визначаються співвідношенням

$$\begin{aligned}
& [F_1(t) \ F_2(t) \ F_3(t) \ F_4(t)] = \\
& = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{12}$$

Функції $F_i(t)$ є функціями однієї змінної t , які мають певний фізичний зміст і характеризуються наближеними графіками.

Використаємо отримані результати для побудови бікубічного фрагменту. Для цього скористаємося процедурою, яка використовувалася для побудови білінійного фрагменту. Спочатку будуємо поверхню, яка задовільняє граничним умовам на краях $u=0$, $u=1$ і після цього будуємо іншу поверхню, що проходить через границі $w=0$, $w=1$. Для отримання бікубічної поверхні ці результати об'єднуються.

Введемо позначення

$$\begin{aligned}
P^a(u) &= \frac{\partial^a P(u)}{\partial u^a}; \quad P^{a,b}(u,w) = \frac{\partial^{a+b} P(u,w)}{\partial u^a \partial w^b} \\
P^a(u_i) &= \frac{\partial^a P(u)}{\partial u^a} \Big|_{u=u_i}; \quad P^{a,b}(u_i, w_j) = \frac{\partial^{a+b} P(u,w)}{\partial u^a \partial w^b} \Big|_{\substack{u=u_i \\ w=w_j}}
\end{aligned}$$

З врахуванням цих позначень поверхня, що задовільняє граничним умовам на краях $u=\text{const}$ задається співвідношенням

$$\begin{aligned}
Q(u, w) &= P(0, w)(1 - 3u^2 + 2u^3) + P(1, w)(3u^2 - 2u^3) - \\
&- P^{1,0}(0, w)(u - 2u^2 + u^3) + P^{1,0}(1, w)(-u^2 + u^3)
\end{aligned} \tag{13}$$

З (13) легко отримати співвідношення неперервності

$$\begin{aligned}
Q(0, w) &= P(0, w) \\
Q(1, w) &= P(1, w).
\end{aligned}$$

Співвідношення для поверхні, що проходить через границі $w=\text{const}$ виглядає як:

$$\begin{aligned}
Q(u, w) &= P(u, 0)(1 - 3w^2 + 2w^3) + P(u, 1)(3w^2 - 2w^3) + \\
&+ P^{0,1}(u, 0)(w - 2w^2 + w^3) + P^{0,1}(u, 1)(-w^2 + w^3)
\end{aligned} \tag{14}$$

Просте додавання співвідношень (13), (14) не дає вірного результату в зв'язку з тим, що як і у випадку побудови білінійної поверхні, кутові точки поверхні враховані два рази. Тому потрібно відняти від (13)+(14) (білінійне співвідношення). Якщо в отриманому виразі застосувати кубічний розклад крайових ліній поверхні, то остаточно отримаємо співвідношення, що задає бікубічну поверхню

$$Q(u, w) = [F_1(u) \ F_2(u) \ F_3(u) \ F_4(u)]^* \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P^{0,1}(0,0) & P^{0,1}(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P^{0,1}(1,0) & P^{0,1}(1,1) \\ P^{1,0}(0,0) & P^{1,0}(0,1) & P^{1,1}(0,0) & P^{1,1}(0,1) \\ P^{1,0}(1,0) & P^{1,0}(1,1) & P^{1,1}(1,0) & P^{1,1}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(w) \\ F_2(w) \\ F_3(w) \\ F_4(w) \end{bmatrix} \quad (15)$$

Чи в компактній формі

$$Q = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} N P N^T \begin{bmatrix} w^3 & w^2 & w & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

де N - квадратна матриця M^{-1} , P - квадратна матриця з (15).

Як видно (15), (16) бікубічна поверхня задається 4-ма векторами положень кутових точок, 8-ма векторами дотичних в кутових точках, 4-ма векторами кривизни в кутових точках. Її структуру можна зобразити наступним чином

$$P = \begin{bmatrix} \text{кутові координати} & w - \text{дотичні вектори} \\ u - \text{дотичні вектори} & \text{вектори кривизни} \end{bmatrix}.$$

Геометричний зміст компонент матриці P пояснюється наступною схемою.

Поверхні Без'є.

Розглянуті вище методи інтерполяцій просторових поверхонь передбачали наявність наступної інформації про поверхню: вектори положень, дотичні вектори, вектори кривизни, вагові функції. Підготовка цієї інформації може бути складною задачею.

Розглянемо метод, який базується на розширенні поняття кривої Без'є на поверхню.

Для опису поверхні Без'є використовується форма (15), записана у вигляді:

$$P(u, w) = \begin{bmatrix} 1 - u^3 & 3u(1 - u)^2 & 3u^2(1 - u) & u^3 \end{bmatrix} * B \begin{bmatrix} (1 - w)^3 \\ 3(1 - w)^2 w \\ 3(1 - w)w^2 \\ w^3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

де

$$B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} \\ B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} & B_{3,4} \\ B_{4,1} & B_{4,2} & B_{4,3} & B_{4,4} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Тезор B складений з векторів положень точок характеристичного многогранника. Точка $B_{1,2}$ визначає вектор нахилу від першої точки до другої на першому многокутнику Без'є у напрямку u . Точка $B_{2,1}$ визначає вектор нахилу від першої точки до другої на першому многокутнику Без'є у напрямку w . Таке ж призначення точок $B_{1,3}, B_{1,4}, B_{3,4}, B_{4,3}, B_{4,2}, B_{3,1}$.

Точки $B_{2,2}, B_{2,3}, B_{3,3}, B_{3,2}$ використовуються для того, щоб задати вектори кривизни в кутових точках.

Поверхня Без'є є двопараметричним сімейством кривих Без'є, що характеризуються параметрами $0 \leq u \leq 1$ та $w = c_1$, де $0 \leq c \leq 1$ потрібно побудувати вектор P по формулі

$$B \begin{bmatrix} (1-w)^2 \\ 3(1-w)^2 w \\ 3(1-w)w^2 \\ w^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix},$$

де точка P_1 лежить на кривій $0w$, а P_4 - на кривій $1w$.

Матричний добуток

$$P(u, c_1) = \begin{bmatrix} (1-u)^3 & 3(1-u)^2 u & 3(1-u)u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

визначає точку на поверхні вздовж кривої $w = c_1$.