Опис та побудова поверхонь в просторі.

Будемо вважати, що опис поверхні зроблено у векторному параметричному вигляді. Таке задання є зручним з наступних причин:

- Такий опис поверхні є осенезалежним;
- дозволяє отримати єдине задання для багатозначних поверхонь чи функцій;
- спрощує представлення просторових кривих в однорідних координатах і допускає використання тривимірних перетворень однорідних координат.

Будемо вважати також, що поверхня є кусково-неперервною, тобто вона складена з окремих фрагментів, які складуються по границі.

Далі будемо використовувати термін векторної функції:

$P(t) = [x(t), \quad y(t)]$ - для плоскої кривої,

$P(t) = [x(t), \quad y(t), \quad z(t)]$ - для просторової.

Тепер поверхня в просторі буде задаватися векторною функцією двох змінних:

$$P(u, w) = [x(u, w), \quad y(u, w), \quad z(u, w)]$$

Криву на цій поверхні можна представити за рахунок фіксації u чи w. Наприклад, $P(u_i, w)$ чи $P(u, w_i)$ чи за допомогою деякої залежності між u та w - $f(u, w) = 0$.

Точку на поверні можна задати чи фіксацією u та w - $P(u_i, w_i)$ чи як точку перетину двох кривих на поверхні - $\begin{cases} f(u, w) = 0 \\ g(u, w) = 0 \end{cases}$.

Розглянемо деякі способи інтерполяції сегментів просторової поверхні.

Білінійні поверхні.

Однією з найпростіших поверхонь є білінійна поверхня. Припустимо, що задані 4 кутові точки поверхні на площині uw точками P(0, 0), P(0, 1), P(1, 0), P(1, 1), тобто кутами одиничного квадрату. Необхідно побудувати функцію двох змінних чи білінійну поверхню Q(u, w), в якій положення довільної точки на поверхні визначається лінійно через u, w. Це досягається функцією:

$$Q(u, w) = P(0,0)(1-u)(1-w) + P(0,1)(1-u)w + P(1,0)u(1-w) + \\ + P(1,1)uw \qquad (1)$$

чи в матричній формі

$$Q(u,w)=[(1-u) \quad u]\begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-w \\ w \end{bmatrix}.$$

Легко побачити, що при цьому виконується умови:

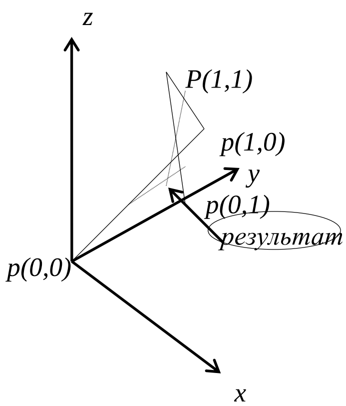
Q(0, 0)=P(0, 0) і т.д.

Зрозуміло, що при використанні (1) будь-яка кускова поверхня буде лише (в загальному випадку неперервна).

Якщо ввести в розгляд вектор базових функцій $U=[(1-u)(1-w) \quad (1-u)w \quad u(1-w) \quad uw]$ то співвідношення (1) залишеться в компактній матричній формі як

$$Q[x(u,w) \quad y(u,w) \quad z(u,w)]=UP$$

Як ми бачимо з малюнка білінійна поверхня є квадратичною (в загальному випадку) поверхнею обмеженою прямолінійними границями.



Це випадок, коли векторами положення вибираються 4 з 8 кутів одиничного куба.

P(0,0)=(0,0,0)

p(0,1)=(0,1,0)

p(1,0)=(1,0,1)

p(1,1)=(0,1,1)

x=u(1-w)

y=w, z=u

Лінійчаті поверхні.

Дальший розвиток ідеї білінійних поверхонь приводить до лінійчатих поверхонь. Тут вважається, що граничні обмежуючи криві, пов’язані з протилежними сторонами одиничного квадрата в площині uw не обов’язково є прямолінійними відрізками. Будемо вважати, що одна пара цих кривих відома і позначемо її P(u, 1). Аналогічно представлення для них може бути отримано любим з попередніх методів.

Лінійчата поверхня в цьому випадку отримується з допомогою лінійних інтерполяцій між цими кривими.

Інтерполяційна схема визначається співвідношенням:

$$Q(u,w)=P(u,0)(1-w)+P(u,1)w \qquad (2)$$

Неважко побачити зв’язок між співвідношеннями (1), (2).

З (2) бачимо, що

Q(u, 0)=P(u, 0),

Q(u, 1)=P(u, 1).

Якщо вважати, що відома друга пара обмежуючих кривих $P(0, w), P(1, w)$, то лінійчата поверхня прийме вигляд

$$Q(u, w) = P(0, w) * (1 - u) + P(1, w)u\,, \qquad (3)$$

Лінійні поверхні Кунса.

При розгляді випадку лінійчатих поверхонь був випущений випадок, коли відомі усі 4 обмежуючі криві P(0, w), P(1, w), P(u, 0), P(u, 1).

У цьому випадку можна об'єднати представлення (2). (3). Сумуючи ці співвілношення, отримаємо:

$$Q(u, w) = P(u, 0)(1 - w) + P(u, 1)w + P(0, w)(1 - u) + P(1, w)u \qquad (4)$$

З (4) бачимо, що не виконуються умови неперервності в кутових точках

$$Q(0, 0)=P(0, 0)+P(0, 0)$$

і на краях

$$Q(0, w)=P(0, 0)(1-w)+P(0, 1)w+P(0, w).$$

Ця невідповідність пов'язана з тим, що кутові точки враховуються два рази. Вірний результат можна отримати вираховуючи зайві кутові точки, що приводить до виразу

$$\begin{aligned} Q(u, w) &= P(u, 0)(1 - w) + P(u, 1)w + P(0, w)(1 - u) + P(1, w)u - \\ &- P(0, 0)(1 - u)(1 - w) - P(0, 1)(1 - u)w - P(1, 0)u(1 - w) - P(1, 1)uw \end{aligned} \qquad (5)$$

З (5) випливають умови неперервності $Q(0, 0)=P(0, 0)$ в кутах, та вздовж границь - $Q(0, w)=P(0, w)$, $Q(u, 1)=P(u, 1)$ і т.д.

Співвідношення (5) виражає сегмент лінійної поверхні Кунса. В матричній формі (5) приймає вигляд:

$$Q(u, w) = \left[(1 - u) \quad u\right]\begin{bmatrix} P(0, w) \\ P(1, w) \end{bmatrix} + \left[P(u, 0) \quad P(u, 1)\right]\begin{bmatrix} 1 - w \\ w \end{bmatrix} - \left[1 - u \quad u\right] *$$

$$* \begin{bmatrix} P(0, 0) & P(0, 1) \\ P(1, 0) & P(1, 1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 - w \\ w \end{bmatrix}$$

чи в компактній формі

$$Q(u, w) = \left[1 - u \quad u \quad 1\right]\begin{bmatrix} -P(0, 0) & -P(0, 1) & P(0, w) \\ -P(1, 0) & -P(1, 1) & P(1, w) \\ P(u, 0) & P(u, 1) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 - w \\ w \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Фрагмент бікубічної поверхні.

При побудові поверхонь Кунса функції ліній границь вважаються відомими, але на практиці їх потрібно отримувати. Розглянемо випадок, коли криві *P(u, 0), P(u, 1), P(1, w), P(0, w)* описуються параметричними многочленами третього порядку.

Нагадаємо, що многочлен третього порядку має вигляд

$$P(t) = B_1 + B_2 t + B_3 t^2 + B_4 t^3 \tag{7}$$

де *P(t)* - функція векторних величин з компонентами x, y, z.

Для зручності обмежимо діапазон зміни параметра t інтервалом $0 \le t \le 1$. Для однієї пари граничних кривих параметр t співпадає з u, а для другої з w.

Для визначення невідомих B_i використовується система рівнянь:

$$\begin{cases} P(0) = B_1 \\ P(1) = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \\ P^{'}(0) = B_2 \\ P^{'}(1) = B_2 + 2B_3 + 3B_4 \end{cases} \tag{8}$$

чи в матричній формі

$$P = MB \tag{9}$$

де $P^T = \left[P(0) \quad P(1) \quad P'(0) \quad P'(1) \right]$, $B^T = \left(B_4 \quad B_3 \quad B_2 \quad B_1 \right)$,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Розв’язуючи (8) відносно В отримаємо:

$$B = M^{-1} P \tag{10}$$

де $M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Підставляючи (10) в (7) отримаємо співвідношення для представлення функції границі, як

$$P(u) = F_1(u)P(0) + F_2(u)P(1) + F_3(u)P'(0) + F_4(u)P'(1) \tag{11}$$

де під F_i розуміємо функції форми, які визначаються співвідношенням

$$[F_1(t) \quad F_2(t) \quad F_3(t) \quad F_4(t)] = \\ = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Функції $F_i(t)$ є функціями однієї змінної t, які мають певний фізичний зміст і характеризуються наближеними графіками.

Використаємо отримані результати для побудови бікубічного фрагменту. Для цього скористаємося процедурою, яка використовувалася для побудови білінійного фрагменту. Спочатку будуємо поверхню, яка задовільняє граничним умовам на краях u=0, u=1 і після цього будуємо іншу поверхню, що проходить через границі w=0, w=1. Для отримання бікубічної поверхні ці результати об’єднуються.

Введемо позначення

$$P^a(u) = \frac{\partial^a P(u)}{\partial u^a}; \quad P^{a,b}(u,w) = \frac{\partial^{a+b} P(u,w)}{\partial u^a \partial w^b}$$

$$P^a(u_i) = \frac{\partial^a P(u)}{\partial u^a}\Big|_{u=u_i}; \quad P^{a,b}(u_i, w_j) = \frac{\partial^{a+b} P(u,w)}{\partial u^a \partial w^b}\Big|_{\substack{u=u_i \\ w=w_j}}$$

З врахуванням цих позначень поверхня, що задовільняє граничним умовам на краях u=const задається співвідношенням

$$Q(u,w) = P(0,w)\left(1-3u^2+2u^3\right) + P(1,w)\left(3u^2-2u^3\right) - \\ - P^{1,0}(0,w)\left(u-2u^2+u^3\right) + P^{1,0}(1,w)\left(-u^2+u^3\right) \tag{13}$$

З (13) легко отримати співвідношення неперервності

$$Q(0, w)=P(0, w)$$
$$Q(1, w)=P(1, w).$$

Співвідношення для поверхні, що проходить через границі w=const виглядає як:

$$Q(u,w) = P(u,0)\left(1-3w^2+2w^3\right) + P(w,1)\left(3w^2-2w^3\right) + \\ + P^{0,1}(u,0)\left(w-2w^2+w^3\right) + P^{0,1}(u,1)\left(-w^2+w^3\right) \tag{14}$$

Просте додавання співвідношень (13), (14) не дає вірного результату в зв’язку з тим, що як і у випадку побудови білінійної поверхні, кутові точки поверхні враховані два рази. Тому потрібно відняти від (13)+(14) (білінійне співвідношення). Якщо в отриманому виразі застосувати кубічний розклад крайових ліній поверхні, то остаточно отримаємо співвідношення, що задає бікубічну поверхню

$$Q(u,w) = \begin{bmatrix} F_1(u) & F_2(u) & F_3(u) & F_4(u) \end{bmatrix} *$$

$$* \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P^{0,1}(0,0) & P^{0,1}(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P^{0,1}(1,0) & P^{0,1}(1,1) \\ P^{1,0}(0,0) & P^{1,0}(0,1) & P^{1,1}(0,0) & P^{1,1}(0,1) \\ P^{1,0}(1,0) & P^{1,0}(1,1) & P^{1,1}(1,0) & P^{1,1}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(w) \\ F_2(w) \\ F_3(w) \\ F_4(w) \end{bmatrix} \tag{15}$$

Чи в компактній формі

$$Q = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} NPN^T \begin{bmatrix} w^3 & w^2 & w & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

де N - квадратна матриця M^{-1}, P - квадратна матриця з (15).

Як видно (15), (16) бікубічна поверхня задається 4-ма векторами положень кутових точок, 8-ма векторами дотичних в кутових точках, 4-ма векторами кривизни в кутових точках. Її структуру можна зобразити наступним чином

$$P = \begin{bmatrix} \text{кутові координати} & w\text{ - дотичні вектори} \\ u\text{ - дотичні вектори} & \text{вектори кривизни} \end{bmatrix}.$$

Геометричний зміст компонент матриці P пояснюється наступною схемою.

Поверхні Без'є.

Розглянуті вище методи інтерполяцій просторових поверхонь передбачали наявність наступної інформації про поверхню: вектори положень, дотичні вектори, вектори кривизни, вагові функції. Підготовка цієї інформації може бути складною задачею.

Розглянемо метод, який базується на розширенні поняття кривої Без'є на поверхню.

Для опису поверхні Без'є використовується форма (15), записана у вигляді:

$$P(u,w) = \begin{bmatrix} 1-u^3 & 3u(1-u)^2 & 3u^2(1-u) & w^3 \end{bmatrix} * B \begin{bmatrix} (1-w)^3 \\ 3(1-w)^2 w \\ 3(1-w)w^2 \\ w^3 \end{bmatrix} \tag{17}$$

де

$$B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} \\ B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} & B_{3,4} \\ B_{4,1} & B_{4,2} & B_{4,3} & B_{4,4} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Тезор В складений з векторів положень точок характеристичного многогранника. Точка $B_{1,2}$ визначає вектор нахилу від першої точки до другої на першому многокутнику Без'є у напрямку u. Точка $B_{2,1}$ визначає вектор нахилу від першої точки до другої на першому многокутнику Без'є у напрямку w. Таке ж призначення точок $B_{1,3}, B_{1,4}, B_{3,4}, B_{4,3}, B_{4,2}, B_{3,1}$.

Точки $B_{2,2}, B_{2,3}, B_{3,3}, B_{3,2}$ використовуються для того, щоб задати вектори кривизни в кутових точках.

Поверхня Без'є є двопараметричним сімейством кривих Без'є, що характеризуються параметрами $0 \le u \le 1$ та $w = c_1$, де $0 \le c \le 1$ потрібно побудувати вектор Р по формулі

$$B\begin{bmatrix} (1-w)^2 \\ 3(1-w)^2 w \\ 3(1-w)w^2 \\ w^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix},$$

де точка P_1 лежитьна кривій 0w, а P_4 - на кривій 1w.

Матричний добуток

$$P(u, c_1) = \begin{bmatrix} (1-u)^3 & 3(1-u)^2 u & 3(1-u)u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

визначає точку на поверхні вздовж кривої $w = c_1$.