1.1.1. Просторові криві

Як і у випадку просторових кривих для представлення просторових кривих використовуються параметричні та непараметричні співвідношення. Непараметричні включають в себе:

явні рівняння

$$\begin{cases} \acute{o} = f(x) \\ z = g(x) \end{cases} \quad \text{чи} \quad \begin{cases} x = f^{(1)}(z) \\ y = g^{(1)}(z) \end{cases} \quad \text{чи} \quad \begin{cases} x = f^{(2)}(y) \\ z = g^{(2)}(y) \end{cases} \qquad (1)$$

та неявні

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Метод опису кривої (2) має силу, якщо виконуються умови однозначності по x чи y чи z.

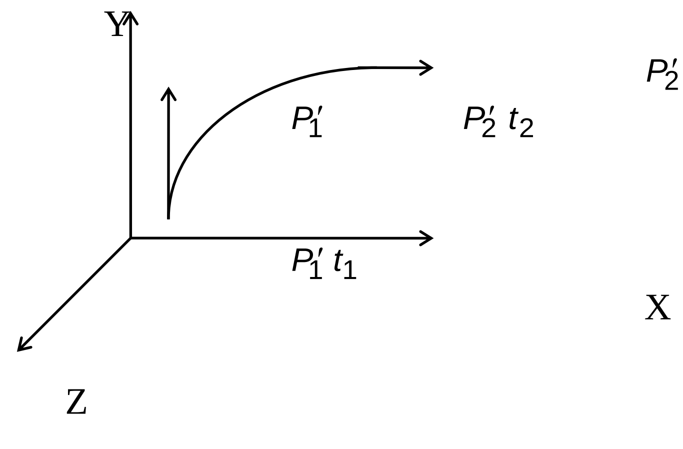
Такі умови повідношенню до z мають вигляд

$$\det\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

Якщо аналітичне представлення кривої невідоме, можна використати інтерполяційну схему, щоб провести криву через задані просторові точки. При цьому, як правило, потрібно задовільнити певні умови гладкості кривої, та деякі граничні умови. Ми розглянемо деякі методи побудови інтерполяційних кривих в просторі.

1.1.2. Кубічні сплайни

Взагалі, під сплайном розуміється кусковий поліном степені k з неперервним в місцях з'єднання похідними порядку $k-1$& Таким чином, кубічний сплайн має зберігати неперервність похідних 1-го та 2-го порядків.



Рівняння параметричного кубічного сплайну, що з'єднує дві точки, $P_1(t_1), P_2'(t_2)$ в термінах параметру t має вигляд

$$P(t) = \sum_{i=4}^{4} B_i t^{i-1} \qquad t_1 \le t \le t_2 \qquad (3)$$

де $P(t)=[x(t),y(t),z(t)]$ — вектор положення довільної точки на сплайні. Коефіцієнти B_i які в свою чергу теж є вектори 1 на 3, визначаються з допомогою чотирьох спеціальних граничних умов для сплайнового сегмента. Таким чином в (3) 12 невідомих. В розгорнутому вигляді (3) записується як

$$P(t)=B_1+B_2t+B_3t^2+B_4t^3 \qquad (4)$$

Нехай нам відомо: координати точок $Đ_1, P_2$ та вектори дотичних в точках P_1,P_2-P_1',P_2'. Нехай $t_1=0$ Ці відомі співвідношення математично можна записати

$$\begin{aligned} &P(0)=P_1\\ &P(t_0)=P_2\\ &\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=0}=P_1'\\ &\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=t_2}=P_2' \end{aligned} \qquad (5)$$

З (4), (5) остаточно випливає:

$$\begin{aligned} &P(0)=B_1=P_1\\ &\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=0}=B_2=P_1' \end{aligned} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} &P(t_2)=B_1+B_2t+B_3t^2+B_4t^3\\ &\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=t_2}=B_2+2B_3t_2+3B_4t^2 \end{aligned} \qquad (7)$$

Розв’язуючи (7) відносно B_3,B_4 з врахуванням (6), отримаємо

$$\begin{aligned} &B_3=\frac{3(P_2-P_1)}{t_2^2}-\frac{2P_1'}{t_2^2}-\frac{P_2'}{t_2^2}\\ &B_4=\frac{2(P_1-P_2)}{t_2^3}+\frac{P_1'}{t_2^2}+\frac{P_2'}{t_2^2} \end{aligned} \qquad (8)$$

Підставляючи (6), (8) в (4) можемо отримати рівняння кубічного сплайнового сегмента

$$P(t)=P_1+P_1'\cdot t+\left[\frac{3(P_2-P_1)}{t_2^2}-\frac{2P_1'}{t_2^2}-\frac{P_2'}{t_2^2}\right]\cdot t^2+$$

$$+\left[\frac{2(P_1-P_2)}{t_2^3}+\frac{P_1'}{t_2^2}+\frac{P_2'}{t_2^2}\right]\cdot t^3 \qquad (9)$$

Узагальнимо (9), на випадок двох суміжних кубічних сегментів $P_k(t),P_{k+1}(t)$. Маємо

$$\begin{cases} P_k(t) = P_k + P'_k \cdot t + \left[\dfrac{3(P_{k+1} - P_k)}{t_2^2} - \dfrac{2P'_k}{t_2^2} - \dfrac{P'_{k+1}}{t_2^2}\right] \cdot t^2 + \\ + \left[\dfrac{2(P_k - P_{k+1})}{t_2^3} + \dfrac{P'_k}{t_2^2} + \dfrac{P'_{k+1}}{t_2^2}\right] \cdot t^3 \\ P_{k+1}(t) = P_{k+1} + P'_{k+1} \cdot t + \left[\dfrac{3(P_{k+2} - P_{k+1})}{t_2^2} - \dfrac{2P'_{k+1}}{t_2^2} - \dfrac{P'_{k+2}}{t_2^2}\right] \cdot t^2 + \\ + \left[\dfrac{2(P_{k+1} - P_{k+1})}{t_2^3} + \dfrac{P'_{k+1}}{t_2^2} + \dfrac{P'_{k+2}}{t_2^2}\right] \cdot t^3 \end{cases} \qquad (10)$$

при умові, що на першому сегменті параметр знаходиться в межах $0 \le t \le t_2$, а другий $0 \le t \le t_3$. В формулі (10) є одна невизначена компонента, а саме P'_{k+1}. Для її визначення використовується умова неперервності другої похідної $P''(t)$ в місці з'єднання

З (4) маємо

$$P''(t) = 2B_3 + 6B_4 \cdot t \qquad (11)$$

В кінці першого сплайнового сегмента, тобто при $t = t_2$ отримаємо

$$P''(t) = 6B_4 \cdot t_2 + 2B_3$$

а на початку другого ($t = 0$)

$$P'' = 2B_3$$

Враховуючи співвідношення (8) умови на обчислення P'_k (чи P'_2)

$$t_3 P'_1 + 2(t_3 + t_2)P'_2 + t_2 P'_3 = \frac{3}{t_2 t_3}[t_2^2(P_3 - P_2) + t_3^2(P_2 - P_1) \qquad (12)$$

З врахуванням співвідношення (10) діють аналогічні вирази для відшукання сплайнів.

Отримані результати можуть бути узагальнені на випадок n точок для побудови $(n-1)$ сплайнів. При цьому для отримання невідомих похідних у внутрішніх точках використовуються умови неперервності других похідних в цих точках.

Співвідношення (12) при цьому перетворюється в систему рівнянь:

$$t_{k+2}P'_k + 2(t_{k+2} + t_{k+1})P'_{k+1} + t_{k+1}P'_{k+2} =$$

$$= \frac{3}{t_{k+1}t_{k+2}}[t_{k+1}^2(P_{k+2} - P_{k+1}) + t_{k+2}^2(P_{k+1} - P_k) \qquad (13)$$

В матричній формі співвідношення (13) можна представити

$$\begin{bmatrix} t_3 \cdot 2(t_2+t_3) & t_2 & 0 & & \dots \\ 0 & t_4 & 2(t_3+t_4) & t_3 & \dots. \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ \vdots \\ \vdots \\ P_n' \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{t_2 t_3}[t_2^2(P_3-P_2)+t_3^2(P_2-P_1) & \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \frac{3}{t_{n-1}t_n}[t_{n-1}^2(P_n-P_{n-1})+t_n^2(P_{n-1}-P_{n-2}) & \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Тепер метод інтерполяції сплайнами по точках має вигляд:

— розв’язати (14);

— згідно формул, що аналогічні (6), (8) записати коефіцієнти для кожного сплайну;

— побудувати інтерполяційні кубічні сплайни.

Слід відзначити, що неперервність других похідних у внутрішніх точках з’єднання не гарантує гладкості сплайна в сенсі мінімума кривизни вздовж кривої. Для того щоб отримати мінімум кривизни і , відповідно, максимум гладкості необхідно мінімізувати коефіцієнти для кожного сегмента за рахунок вибору діапазону зміни параметрів. Одним з прийомів вибору значень $t_{\max}$ на сегментах, який задовільняє попередньому критерію, є вибір $t_{\max}$ рівним довжині хорд між слідуючими одна за другою точками.

Розглянемо рівняння (14) більш уважно. Для простоти запишемо його у матричному вигляді

$M \cdot P = B$ (15)

Зауважимо, що М — матриця прямокутна $(n-2)\times(n)$, Р — стовпець $n \times 1$, В — стовпець $(n-2)\times 1$.

Для знаходження з (15) вектора невідомих Р необхідно отримати квадратну матрицю. Це досягається шляхом використання спеціальних граничних умов, які фактично характеризують весь сплайн.

Ці умови можуть задаватися в різному вигляді і мають, як правило чіткий геометричний зміст. До цих умов належать:

1) <u>закріплена гранична умова</u> (формується, так званий, фіксований сплайн)

На початку, та в кінці сплайну задаються дотичні вектори $\bar{P}_1, \bar{P}_n$ таким чином має місце

$P_1' = \bar{P}_1$

$P_n' = \bar{P}_n$

В цьому випадку система (15) перетворюється в квадратну систему $n \times n$ з характеристиками:

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ & M & \\ 0 & 0 \ldots\ldots & 1 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} \tilde{P}_1 \\ B \\ \tilde{P}_n \end{pmatrix}$$

M'— представляє собою тридіагональну матрицю, розв’язок якої можна отримати у вигляді рекурентних співвідношень.

2) <u>слабкі граничні умови</u>

Умови типу $\dfrac{d^2P}{dt^2} = 0$

Розглянемо цю умову на початку сплайну $(k = 1, t = 0)$.

Враховуючи співвідношення (11), (18) цю умову можна записати у вигляді

$$P_1' + \frac{1}{2} P_2' = \frac{3}{2} \frac{(P_2 - P_1)}{t_2} \qquad (16)$$

На кінці останнього сегменту отримаємо:

$$2P_{n-1}' + 4P_n' = \frac{6}{t_n}(P_n - P_{n-1}) \qquad (17)$$

Враховуючи (16), (17) система (15) набуде квадратний вигляд і характеристики:

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & \ldots\ldots & 0 & 4 \\ & & M & & \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad B' = \begin{pmatrix} \dfrac{\frac{3}{2}(P_2 - P_1}{t_2} \\ B \\ \dfrac{6}{t_n}(P_n - P_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Маємо справу з тридіагональною матрицею.

3) <u>циклічні кінцеві умови</u>

Такі умови задаються для опису замкнутої чи періодичної кривої. Ці умови характеризуються співвідношеннями

$$\begin{aligned} P_1'(0) &= P_n'(t_n) \\ P_1''(0) &= P_n''(t_n) \end{aligned} \qquad (18)$$

Таким чином нахил та кривизна на початку та в кінці кривої рівні.

З врахуванням (7), (8), (11) співвідношення (18) можна розгорнути у систему

$$\begin{cases} P_1' - P_{n-1}' = 2\left[\dfrac{3(P_n - P_{n-1})}{t_n^2} - \dfrac{2P_{n-1}'}{t_n} - \dfrac{P_n'}{t_n}\right] t_n + \\ +3\left[\dfrac{2(P_n - P_{n-1})}{t_n^3} + \dfrac{P_{n-1}'}{t_n^2} + \dfrac{P_n'}{t_n^2}\right] t_n \end{cases} \qquad (19)$$

Система (19) фактично замикає систему (15). На практиці спочатку спрощується система (19), а потім (15) записується як система $((n-1) \times (n-1)$ ç $(n-1)$ невідомим.

Домножимо 2-ге рівняння (19) на t_n віднімемо від першого і врахуємо, що $P_1' = P_n'$. В результаті отримаємо

$$2\left(1+\frac{t_n}{t_2}\right)P_1' + P_2'\frac{t_n}{t_2} + P_{n-1}' = 3(P_2 - P_1)\frac{t_n}{t_2^2} - 3(P_{n-1} - P_n)\frac{1}{t_n} \qquad (20)$$

З врахуванням (20) з (15) отримаємо:

$$M' = \begin{bmatrix} 2\left(1+\frac{t_n}{t_2}\right) & \frac{t_n}{t_2} & 0 & \ldots\ldots & 1 \\ & & M & & \end{bmatrix}; \quad B' = \begin{bmatrix} 3(P_2 - P_1)\frac{t_n}{t_2^2} - \\ -3(P_{n-1} - P_n)\frac{1}{t_n} \\ B \\ \end{bmatrix}$$

M' — профільна матриця.

4) у випадку побудови циклічного сплайну граничні умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} P_1'(0) &= -P_n'(t_n) \\ P_1''(0) &= -P_n''(t_n) \end{aligned} \qquad (21)$$

Рівняння, якого не вистачає, як не важко показати аналогічно (19), (20), має вигляд

$$2\left(1+\frac{t_n}{t_2}\right)P_1' + P_2'\frac{t_n}{t_2} - P_{n-1}' = 3(P_2 - P_1)\frac{t_n}{t_2^2} + 3(P_{n-1} - P_n)\frac{1}{t_n} \qquad (21)$$