

Теорія з комп. графіки

1. Ввід в комп'ютерну графіку. Сфери застосування.

Комп'ютерна графіка - це сукупність методів і способів перетворення за допомогою комп'ютера даних у граф. зобр. або граф. зобр. у дані.

Сфери:

1. Побудова графіків даних (презентації, слайди, плакати)
2. С-ми автомат. проектування (будинки, косм. кораблі)
3. Віртуальна реальність (водіння авто, огляд будинку)
4. Наукова, ділова візуалізація (атомні, складні процеси)
5. Навчальне застосування (навч. капітанів, суден, літаків)
6. Поліграфічне образотворче мистецтво (логотип, реклама)
7. Телевізійна комерційна продукція (рекл. ролик, кліп, фільм)
8. Обробка зображень (оцифрування, зображення в медицині)
9. GUI (графічний інтерфейс) – (побутові прилади, моб. тел.)

Ввід зображення:

1. Клавіатура
2. Зовнішні комп. с-ми
3. Сканер
4. Космічні знімки
5. Аерознімки
6. Ділітайзер

Вивід зображення:

1. Монітор
2. Принтер
3. Плотер
4. Магнітні носії
5. Відеофільми
6. Слайди
7. Зовнішні комп. с-ми

Дисплейний файл – сукупність даних, що викор. для малювання.

2. Основні етапи загального алгоритму обробки зображень.

	Синтез зображення	Аналіз зображення	Обробка зображення
Вхід	Формальний опис	Візуальне задання	Візуальне задання
Вихід	Візуальне задання	Формальний опис	Візуальне задання
Об'єкти	Лнії, пікселі, об'єкти, тексти та їх сукупність	Згенероване чи зіскановане зображення	Відскановане зображення
Задачі	Генерація, задання, сегментація, перетворення зобр.	Розпізнавання образів, структурний аналіз	Підвищення якості зображень

Етапи:

1. Вхідне задання, ввід зображення.
2. Підготовка до візуалізації.
3. Попередньо підготовлене зображення. малюється.
4. Взаємодія із зображення.

Взаємодія із зображенням:

1. Локатор (видача коорд інфи в 2D чи 3D)
2. Валюатор (для вводу окремої величини зображення)
3. Селектор (ідентиф, вибір об'єкта в згенер зображення)
4. Кнопка (вибір, активація явищ, процедур, що керуються діалоговим зображення)

5. Клавіатура (опрацьовує текстову інфу)

ВНРЗ – векторний монітор регенерації зображення – в ньому викор люмінофор з дуже малим після свічення. Тому зобр. повинне бути багаторазово перемальоване або регенеровано. Мін- 5-30с. Оптим- 40-50с.

ДБ-дисплейний буфер- неперервний фрагмент пам'яті, де зберігається вся інформація для виведення зображення на ЕТ.

ДК-дисплейний контролер- циклічно обробляє інф зі швидкістю регенерації.

3. Перетворення точок в R^2 . Обертання навколо центральної точки.

Так як графічний об'єкт задається сукупністю точок і ліній, тому далі наведено правила та операції з множ. Точок

$$A \rightarrow B \Rightarrow A \cdot T = B \Rightarrow T = A^{-1}B \quad CT = C^*$$

$$(x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ax + cy, bx + dy) = (x^*, y^*)$$

1. Еквівалентність $a=b=1; c=d=0$ (x,x)
2. Масштабування в напрямку X (ax,y)
3. Масштабування в напрямку Y (x,dy)
4. Масштабування в X і Y (ax,dy)
5. Симетрія щодо Y (-x, y)
6. Переміщення X (x+cy, y)
7. Переміщення Y (x, bx+u)

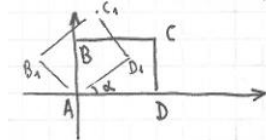
Кожна пряма лінія: $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} x_1^* & y_1^* \\ x_2^* & y_2^* \end{pmatrix}$

T може здійснювати обертання, переміщення, поворот навколо осі, масштабування, гомотетію.

Не задовільняє:

1. Переміщення на \checkmark вектор
2. Проектування
3. Поворот навколо \checkmark точки

Обертання навколо центральної точки.



$$\begin{aligned} D &\rightarrow D_1 & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ B &\rightarrow B_1 & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

4. Однорідні координати на площині. Проекція перетворення. Узагальнення обертань.

Для опису повного набору перетворень введемо 3-тю координату $(x, y) \rightarrow (x, y, 1)$

Однорідні координати - задання n-мірної точки за допомогою $(-n+1)$ - мірним вектором

$$T = \left(\begin{array}{cc|c} a & b & p \\ c & d & q \\ \hline m & n & s \end{array} \right) \begin{array}{c} 1 \ 2 \\ \hline 3 \ 4 \end{array}$$

1- здійснює зміну масштабу, зсув, обертання.

3- переміщення на \checkmark вектор.

2- отримання проекції (центр.)

4- гомотетія- повна зміна масштабу

Більш складні операції здійснюються розкладом на елем. і послідовне застосування останніх. Не потрібно будувати проміжні точки, що відповідають елементам перетворення, а лише результуючу матрицю переходу.

Узагальнене обертання.

Матрицю узагальнено на 3-х вимірний простір, тому що це є обертання площини $z=1$ навколо Z.

$$\begin{aligned} ① \quad T &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ навколо } Z \\ ② \quad T &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ навколо } Y \\ ③ \quad T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ навколо } X \end{aligned}$$

5. Точки в Безмежності.

Використовуючи одн. коорд. зручний та ефективний метод відображення однієї мн. в іншу. Але Π прямі в 1-ій системі коорд. після перетворення не будуть Π в іншій.

Приклад $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-3y=0 \end{cases} \quad x=\frac{3}{5} \quad y=\frac{2}{5}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-3y=0 \end{cases} & \quad (x, y, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0) \\ \text{Або } (x, y, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} & = (0, 0, 1) \\ (x, y, 1) &= (0, 0, 1) \cdot M^{-1}, \text{ де} \\ M^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \\ (x, y, 1) &= \frac{1}{5} (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right) \end{aligned}$$

Приклад $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} (x, y, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= (0, 0, 1) \\ (x, y, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= (0, 0, x) \\ M^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ (x, y, 1) &= (0, 0, x) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (x, -x, 0) \\ & \quad (+\infty, -\infty, 0) \end{aligned}$$

В загальному випадку точки $(a, b, 0)$ будемо називати точками в Безмежності і всі вони лежать на прямій $ax-by=\text{const}$

6. Однорідні координати в просторі. Базові перетворення.

Простір однорідних координат (P^2)

Нехай $(x, y, z) \in P^2, (x^*, y^*, z^*) \in P^2$

Для R^2 : $ax+by+c=0$

Для P^2 : $ax+by+cz=0$

$$P \in x \quad P \in (0, x) \quad P \in (0, x, y) \quad P \subset P^1 \subset P^2 \quad R^0 \subset R^1 \subset R^2$$

$A \in (P^n - R^n)$ - ідеальні точки, решта реальні

Перетворення 3-х вимірних координат

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, z, H) \rightarrow (x^*, y^*, z^*, 1) \quad x^* = \frac{x}{H}, y^* = \frac{y}{H}, z^* = \frac{z}{H}$$

Достатньо двох операцій: -переміщення

- обертання

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ \hline l & m & n & s \end{array} \right)$$

Біліне перетворення – це повне перетворення, шляхом дії на вектор точки матриці $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ з подальшою нормалізацією вектора.

Обертання навколо H осі, що проходить через початкові координати, що визнач. напрямним

$$\frac{(n_1, n_2, n_3)}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \cos \theta$$

косинусом

$$R = \begin{pmatrix} n_1^2 + (1-n_1^2)\cos\theta & n_1n_2(1-\cos\theta) + n_3\sin\theta & n_1n_3(1-\cos\theta) - n_2\sin\theta \\ n_1n_2(1-\cos\theta) - n_3\sin\theta & n_2^2 + (1-n_2^2)\cos\theta & n_2n_3(1-\cos\theta) + n_1\sin\theta \\ n_1n_3(1-\cos\theta) + n_2\sin\theta & n_2n_3(1-\cos\theta) - n_1\sin\theta & n_3^2 + (1-n_3^2)\cos\theta \end{pmatrix}$$

7. Афінна та перспективна геометрія. Аксонометричні проєкції.

Різниця між ними в Π прямих. В перспект. Π прямі можуть \cap , а в Афінній (евклідовій)-ні.

Афінне перетворення – комбінація мін. перетворень та опер. перенесу зобр. Для цього 4-ий стовпчик матриці є одиничним. Формують підсистему білінійних перетворення координат, тобто добуток $\sqrt{2}$ -х аф. Перетворень є афінним перетворенням.

Перспективне перетворення – дозволяє отримувати зображення близьке до реального, тому досить часто використовується в графіці, хоча воно вимагає складної будови. Персп. – якщо 4-ий ст. – неодиначний. Асоціюється з побудовою проєкцій на площину з $\sqrt{2}$ точки. Комбінація персп. і проєкцій перетворень утворюють перспективну проєкцію.

Аксонометричне проєкція – перспективна проєкція, що представляє перетворення зобр з 2D в 3D, коли центр проєктування знаходиться в безмежності. Здійснюється за допомогою афін. Перетворення, де $\det=0$.

Матр. проєкт. на $z=n$ і перем. на вектор $(0,0,n)$

$$(x, y, z, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x, y, n, 1) \quad (1)$$

Види:

1. Ортогональна (в більшості випадків матр. перетв. здійснює лише 1 оберт. коорд. осі залиш. ортог. під час перетв.)
2. Діаметрична (2 з 3 коорд осей однаково скорочені)
3. Ізометрична (всі 3 коорд осі однаково скорочені)

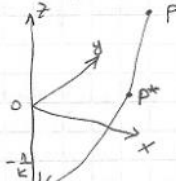
Ортогональна аксонометрична проєкція – результат перетворення (1) і деякого обертання навколо Z.

$$(x, y, z, h) = (x, y, z, 1) \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (x, y, z, 1) \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Перспективне проєктування.

Здійснення ненульовими елементами в 4-му стовпчику загальної матриці перетворень. Отримується шляхом перспективного перетворення та проєктування на деяку 2D площину – перспективна проєкція.

$$(x, y, z, h) = (x, y, z, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (x, y, 0, R \cdot z + 1) \quad \text{проекція на площ. } z=0$$


$$x^* = \frac{x}{Rz+1}; \quad y^* = \frac{y}{Rz+1}; \quad z^* = 0$$

$$\frac{x^*}{k} = \frac{x}{z+k} \quad \frac{y^*}{k} = \frac{y}{z+k} \quad R = \frac{1}{k}$$

$$x^* = \frac{x}{1+\frac{z}{k}} \quad y^* = \frac{y}{1+\frac{z}{k}}$$

Отже, x^*, y^* - перетворення координат, отримані за допомогою матричних операцій $R = \frac{1}{k}$.

Перспективне перетворення не є евклідовим, бо не зберігає властивостей \perp і Π прямих.

При $k = \infty \rightarrow$ аксонометричне перетворення (точка з площ. проектування не змінюється). Оскільки афінні перетворення зберігаються для $h=1$, то V перспективне перетворення може передувати послідовних афінних перетворень.

Початок координат \rightarrow на місці.

Перспект. і проекц. перетв. використовують, щоб визначити положення точок на площині спостереження $z=0$.

$$(0, 0, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 0, 1); \quad (0, 0, 1, 0) \rightarrow (0, 0, \frac{1}{R}, 1)$$

$$z \geq 0 \rightarrow 0 \leq r \leq \frac{1}{R}$$

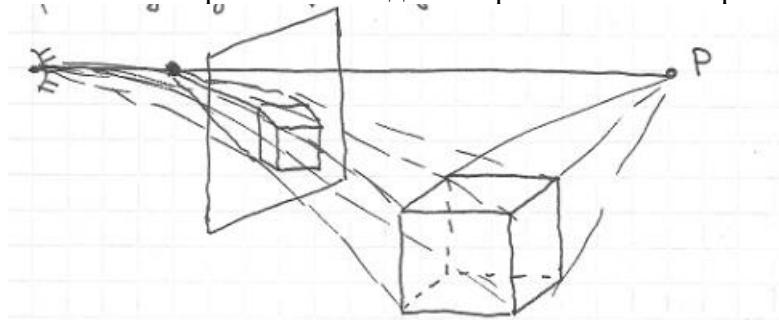
Прямі, Π осі z будуть проходити через $(0, 0, \frac{1}{R}, 1)$.

Якщо матричне перетворення має вигляд $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix}$, то

- одноточкове перспективне перетворення в точку $(0, \frac{1}{R}, 0, 1)$.
- кутова (двохточкова) перспектива – 2 ненульові елементи.
- коса (трихточкова) перспектива – 3 ненульові елементи.

9. Способи отримання перспективних зображень.

Розглянемо отримання складних перспективних зображень на прикладі одиничного куба



Нехай точка спостереження знаходиться на лінії \perp до попередньої грані. В цій проекції всі бокові площини перетворень в 1 точці збігу на горизонтальній лінії, що розташована на рівні очей.

Вертикальні площини залишаються \perp . Попередня і задня вертик. куба Π і не перетинається

$$\varphi(m, n)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & m & n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & 0 & -\sin \varphi/k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & 0 & \cos \varphi/k \\ 0 & m & 0 & n/k + 1 \end{pmatrix}$$

\rightarrow 2-точкове проєкт.

Операція обертання з 1-точкової перспективи утворює 2-х точкову та 3-х точкову перспективу.

10. Поновлення тривимірної інформації.

$$T' = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \quad T'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = T' \cdot T'' = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & 0 & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & 0 & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & 0 & T_{44} \end{bmatrix}$$

$$[x, y, z, 1] T = [x^*, y^*, 0, 1]$$

$$T_{11}x + T_{12}y + T_{13}z + T_{14} = H_{x^*}$$

$$T_{21}x + T_{22}y + T_{23}z + T_{24} = H_{y^*}$$

$$T_{41}x + T_{42}y + T_{43}z + T_{44} = H \quad 1 \cdot (-x^*) \quad 1 \cdot (-y^*)$$

$$\begin{cases} (T_{11} - T_{14}x^*)x + (T_{12} - T_{24}x^*)y + (T_{31} - T_{34}x^*)z + (T_{41} - T_{44}x^*) = 0 \\ (T_{21} - T_{24}y^*)x + (T_{22} - T_{24}y^*)y + (T_{32} - T_{34}y^*)z + (T_{42} - T_{44}y^*) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$a) T \text{ відомо } (x, y, z) \rightarrow (x^*, y^*, 0)$$

$$b) T \text{ відомо } x^*, y^* \rightarrow (x, y, z)$$

$$b) (x, y, z) \leftarrow (x^*, y^*) \rightarrow T$$

$$T_{11}x + T_{12}y + T_{13}z + T_{14} - T_{14}x^*x - T_{24}x^*y - T_{34}x^*z - T_{44}x^* = 0$$

$$T_{21}x + T_{22}y + T_{23}z + T_{24} - T_{14}y^*x - T_{24}y^*y - T_{34}y^*z - T_{44}y^* = 0$$

$$AT^* = 0$$

$$T' = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{12} \\ t_{13} \\ t_{14} \end{bmatrix}$$

A-коэф. при T

$$T_{44} = 1$$

(1) – математично записана проблема поновлення тривимірної інформації.

11. Задання плоских кривих.

1. Математичний опис є точним і дозволяє отримати характ. прямої.
2. Математичний опис легко зберігати в контакт. вигляді.
3. Крива, яка описується математично, легко зображати на екрані.
4. При аналітичному заданні кривої відпадає необхідність від інтерполяційних схем.
5. При таких заданнях суттєво спрощується задача отримання динамічних зображень, тому що вони відрізняються від попередніх на деякі геометричні параметри.

Існують 2 способи задання кривої на площину:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

-параметричне

$$y = f(x)$$

явний

$$f(x, y) = 0$$

неявний

Коло :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} x_n = r \cos \varphi_n \\ y_n = r \sin \varphi_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cos \Delta \varphi - y_n \sin \Delta \varphi \\ y_{n+1} = x_n \sin \Delta \varphi + y_n \cos \Delta \varphi \end{cases} \quad \varphi_{n+1} = \varphi_n + \Delta \varphi, \quad \Delta \varphi = \frac{2\pi}{n-1}$$

Еліпс:

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} x_n = a \cos \varphi_n \\ y_n = b \sin \varphi_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cos \Delta \varphi - \left(\frac{a}{b}\right) y_n \sin \Delta \varphi \\ y_{n+1} = \left(\frac{b}{a}\right) x_n \sin \Delta \varphi + y_n \cos \Delta \varphi \end{cases} \quad \varphi_{n+1} = \varphi_n + \Delta \varphi, \Delta \varphi = \frac{2\pi}{n-1}$$

Парабола:

$$y^2 = 4ax \quad \begin{cases} x = aQ^2 \\ y = 2aQ \end{cases} \quad \begin{aligned} Q_{\max} &= \sqrt{\frac{x_{\max}}{a}} \\ Q_{\min} &= \sqrt{\frac{x_{\min}}{a}} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \Delta Q + a(\Delta Q)^2 \\ y_{n+1} = y_n + 2a \Delta Q \end{cases} \quad Q_{n+1} = Q_n + \Delta Q, \Delta Q = \frac{Q_{\max} - Q_{\min}}{n-1}$$

Гіпербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \begin{cases} x = a \operatorname{ch} \varphi \\ y = b \operatorname{sh} \varphi \end{cases} \quad \begin{aligned} \operatorname{Arch} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \\ \varphi_{\max} &= \operatorname{Arch} \left(\frac{x_{\max}}{a} \right) \\ \varphi_{\min} &= \operatorname{Arch} \left(\frac{x_{\min}}{a} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \operatorname{ch} \Delta \varphi + \left(\frac{a}{b}\right) y_n \operatorname{sh} \Delta \varphi \\ y_{n+1} = \left(\frac{b}{a}\right) x_n \operatorname{sh} \Delta \varphi + y_n \operatorname{ch} \Delta \varphi \end{cases} \quad \varphi_{n+1} = \varphi_n + \Delta \varphi, \Delta \varphi = \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{n-1}$$

12. Задання просторових кривих. Кубічні сплайни.

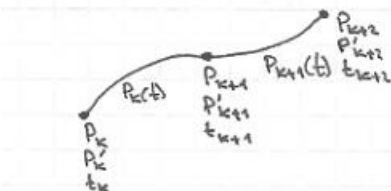
Параметричне :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \begin{cases} F(x, t) = 0 \\ g(y, t) = 0 \\ V(z, t) = 0 \end{cases} \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

Сплайн – кусковий поліном степені k , з неперервним в точці з'єднання похідними $(k-1)$ порядку.

Форма кубічного сплайну задається кубічним поліномом:

$$y = A_1 x^3 + B_1 x^2 + C_1 x + D_1 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 t + \vec{B}_3 t^2 + \vec{B}_4 t^3 = P(t)$$



P_k, P_{k+1}, P_{k+2} – вектори кінців сегменту
 P'_k, P'_{k+1}, P'_{k+2} – дот. вектори кінців
 t_k, t_{k+1}, t_{k+2} – знач. парам. кінців сегм.

Узагальнене рівняння для двох будь-яких сусідніх сегментів сплайна:

$$P_k(t) = P_k + P'_k t \left[\frac{3(P_{k+1} - P_k)}{t_{k+1}^2} - \frac{2P'_k}{t_{k+1}} - \frac{P'_{k+1}}{t_{k+1}} \right] t^2 +$$

$$+ \left[\frac{2(P_k - P_{k+1})}{t_{k+1}^3} + \frac{P'_k}{t_{k+1}^2} + \frac{P'_{k+1}}{t_{k+1}^2} \right] t^3$$

Щоб визначити дотичний вектор в точках з'єднання будь-яких двох сегментів, порівняєм

$$P'_k(t_k) = P'_{k+1}(0):$$

$$t_{k+2} P'_k + 2(t_{k+1} + t_{k+2}) P'_{k+1} + t_{k+1} P'_{k+2} =$$

$$= \frac{3}{t_{k+1} t_{k+2}} [t_{k+1}^2 (P_{k+1} + P_{k+2}) + t_{k+2}^2 (P_{k+1} - P_k)]$$

Якщо відомо вектори дотичні на кінцях кривої P'_1, P'_n , то

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ t_3 & 2(t_2+t_3) & t_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & t_4 & 2(t_3+t_4) & t_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & t_n & 2(t_{n-1}+t_n) & t_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ \vdots \\ P'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P'_1 \\ \frac{3}{t_2 t_3} \{ t_2^2 (P_2 - P_1) + t_3^2 (P_2 - P_1) \} \\ \vdots \\ \frac{3}{t_{n-1} t_n} \{ t_{n-1}^2 (P_n - P_{n-1}) + t_n^2 (P_n - P_{n-1}) \} \\ P'_n \end{bmatrix}$$

Або

$$[M][P'] = [R]$$

$$[P'] = [M]^{-1}[R]$$

Якщо нам відомі P'_k , то можна визначити коефіцієнт B_i для кожного сегменту сплайну

$$B_{1k} = P_k$$

$$B_{2k} = P'_k$$

$$B_{3k} = \frac{3(P_{k+1} - P_k)}{t_{k+1}^2} - \frac{2P'_k}{t_{k+1}} - \frac{P'_{k+1}}{t_{k+1}}$$

$$B_{4k} = \frac{2(P_k - P_{k+1})}{t_{k+1}^3} + \frac{P'_k}{t_{k+1}^2} + \frac{P'_{k+1}}{t_{k+1}^2}$$

В матричній формі рівняння будь-якого сплайна:

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{1k} \\ B_{2k} \\ B_{3k} \\ B_{4k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{t_{k+1}^2} & -\frac{2}{t_{k+1}} & \frac{3}{t_{k+1}^2} & -\frac{1}{t_{k+1}} \\ \frac{2}{t_{k+1}^3} & \frac{1}{t_{k+1}^2} & -\frac{2}{t_{k+1}^3} & \frac{1}{t_{k+1}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P'_k \\ P_{k+1} \\ P'_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$P_k(t) = [1 \ t \ t^2 \ t^3] \begin{bmatrix} B_{1k} \\ B_{2k} \\ B_{3k} \\ B_{4k} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq t_{k+1}$$

$$P_k(\tau) = [F_1(\tau) \ F_2(\tau) \ F_3(\tau) \ F_4(\tau)] \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ P'_k \\ P'_{k+1} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \leq \tau \leq 1 \\ 1 \leq k \leq n-1 \end{matrix}$$

Де

$$F_{1k}(\tau) = 2\tau^3 - 3\tau^2 + 1$$

$$F_{2k}(\tau) = -2\tau^3 + 3\tau^2$$

$$F_{3k}(\tau) = \tau(\tau^2 - 2\tau + 1)t_{k+1}$$

$$F_{4k}(\tau) = \tau(\tau^2 - \tau)t_{k+1}$$

- вагові функції

Тому

$$P_k(\tau) = [F][G], \text{ де } [F] - \text{матр. вагові функції}$$

$$[F] = [F_1(\tau) \ F_2(\tau) \ F_3(\tau) \ F_4(\tau)]$$

$$[G]^T = [P_k \ P_{k+1} \ P'_k \ P'_{k+1}]$$

Гранична умова	Ненульові елементи в першій і останній строках [M]	Перша і остання строки [R]
Закріплена	$M(1,1) = 1$ $M(n,n) = 1$	$R(1,1) = P'_1$ $R(n,1) = P'_n$
Слабка	$M(1,1) = 1$ $M(1,2) = 1/2$ $M(n,n-1) = 2$ $M(n,n) = 4$	$R(1,1) = \frac{3}{2t_2}(P_2 - P_1)$ $R(n,1) = \frac{6}{t_n}(P_n - P_{n-1})$
Циклічні	$M(1,1) = 2(1 + \frac{t_n}{t_2})$ $M(1,2) = \frac{t_n}{t_2}$ $M(1,n-1) = 1$	$R(1,1) = 3(\frac{t_n}{t_2})(P_2 - P_1) - \frac{3}{t_n}(P_{n-1} - P_n)$ $R(n,1)$ не визначений
Ациклічні	$M(1,1) = 2(1 + \frac{t_n}{t_2})$ $M(1,2) = \frac{t_n}{t_2}$ $M(1,n-1) = -1$	$R(1,1) = 3(\frac{t_n}{t_2})(P_2 - P_1) + \frac{3}{t_n}(P_{n-1} - P'_n)$ $R(n,1)$ не визначений

Закріплені – коли відомі одиничні вектори P'_1 і P'_n

Слабкі – нульова кривизна в кінцевих точках

Циклічні – дотичні вектори і кривизна на обох кінцях нульові

$$\begin{aligned} P_1'(0) &= P_n'(t_n) \\ P_1''(0) &= P_n''(t_n) \end{aligned}$$

Ациклічні – дотичні вектори на кінцях мають однакову величину і протилежні напрями

$$\begin{aligned} P_1'(0) &= -P_n'(t_n) \\ P_1''(0) &= -P_n''(t_n) \end{aligned}$$

13. Параболічна інтерполяція.

Ідея полягає в лінійній інтерполяції перелічених частин двох парабол. Параболи задані чотирма послідовними точками:

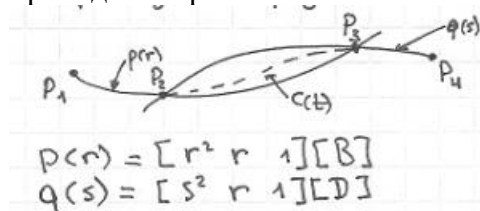
-перша – 3 перші точки

-друга – 3 останні

Перетин лежить між другою і третьою точками.

Параболічно інтерпольована крива має вигляд:

$C(t) = (1-t)p(r) + tq(s)$, де r, s, t – параметри, $p(r), q(s)$ – параметричні параболи, які проходять через P_1, P_2, P_3 і P_2, P_3, P_4 відповідно



$[B]$ і $[D]$ – матриці, що представляють положення вектор-точок

P_1, P_2, P_3 і P_2, P_3, P_4

Результат інтерполяції – кубічна крива

$C(t) = [t^3 \ t^2 \ t \ 1][A][G] = [T][A][G]$, де $[T][A]$ – матриця інтерполяційних функцій, а $[G]$ – геометрична матриця вектор-точок P_1, P_2, P_3, P_4 .

Нехай дані розподілені рівномірно і діапазон параметрів нормалізований $0 \leq r, s, t \leq 1$, r, s в точках $P_2, P_3 = 1/2$

Тоді матриця A має вигляд:

$$[A] = \left(\frac{1}{2} \right) \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

14. Криві Без'є.

Математичне параметричне задання кривої Без'є:

$P(t) = \sum_{i=0}^N B_i J_{n,i}(t)$, $0 \leq t \leq 1$, де функція апроксимації

$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$, $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$, $n = N-1$, де N – кількість вершин.

Крива Без'є задається багатокутником, має такі властивості:

1. Функції апроксимації дійсні
2. Степінь многочлена, що визначає ділянку кривої, на одиницю менший від k -ті точок відповідного багатокутника
3. Перша і остання точки кривої збігаються з відповідними точками визначального багатокутника
4. Крива лежить всередині опуклої оболонки багатокутника
5. Крива іваріантна щодо афінних перетворень

Крива Без'є в матричній формі:

$$P(t) = [F][N][G] = [F][G]^T$$

Тут $[F] = [J_{0,1} \ J_{1,1} \ \dots \ J_{n,1}]$; $[G]^T = [B_0 \ B_1 \ \dots \ B_n]$

15. Апроксимація поверхонь в просторі.

Будемо вважати, що опис поверхонь зроблено в векторному параметричному вигляді.

Таке задання є зручним з наступних причин:

1. Осенезалежне
2. Дозволяє отримати єдине представлення для багатозначних поверхонь
3. Спрощує задання просторових поверхонь в одн. коорд. і допускає використання 3-вимірних перетворень одн. коорд.

Припустимо, що поверхня є кусково-неперервна, тобто вона складена з окремих елементів з'єднаних по границі

$$P(t) = [x(t), y(t)]$$

$$P(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

Узагальнемо це для векторної функції 2 змінних:

$$P(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$$

u, v - криволінійні коорд.
 $(x, y, z) \rightarrow (u, v)$

$$P(u, v_i) - \text{Touch} \iff \begin{cases} f(u, v) = 0 \\ g(u, v) = 0 \end{cases}$$

Розглянемо деякі способи інтерполяції:

1. Білінійні поверхні

Опис поверхні будемо здійснювати в криволінійній системі координат (u, v) . Припустимо, що задані 4 кутові точки $P(0, 0)$, $P(0, 1)$, $P(1, 0)$, $P(1, 1)$

Необхідно побудувати білінійну функцію $Q(u, w)$ в якій довільне положення визначається лінійно через u і w .

Це досягається заданням наступної функції

$$Q(u, w) = P(0, 0)(1-u)(1-w) + P(1, 0)u(1-w) + P(0, 1)(1-u)w + P(1, 1)uw \quad (1)$$

(1) в матричній формі:

$$Q(u, w) = (1-u, u) \begin{pmatrix} P(0, 0) & P(0, 1) \\ P(1, 0) & P(1, 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-w \\ w \end{pmatrix}$$

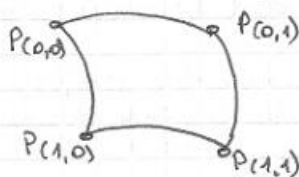
Легко бачити, що виконуються граничні умови

$$Q(0, 0) = P(0, 0)$$

$$Q(1, 0) = P(1, 0)$$

$$Q(0, 1) = P(0, 1)$$

$$Q(1, 1) = P(1, 1)$$



2. Лінійчаті поверхні.

Припустимо задана пара кривих, які обмежують поверхню $P(u, 0)$, $P(u, 1)$

Лінійчатa поверхня отримується за допомогою лінійної інтерполяції між цими кривими.

Інтерполяційна схема:

$$Q(u, w) = P(u, 0)(1-w) + P(u, 1)w$$

Виконуються граничні умови:

$$Q(u, 0) = P(u, 0)$$

$$Q(u, 1) = P(u, 1)$$

Коли вважати, що відома друга пара обмежуючих кривих $P(0, w)$, $P(1, w)$

$$Q(u, w) = P(0, w)(1-u) + P(1, w)u$$

3. Лінійні поверхні Кунса.

Розглянемо 4 обмежуючі криві: $P(u, 0)$, $P(u, 1)$, $P(0, w)$, $P(1, w)$

Правильний результат можна отримати, враховуючи зайві кутові точки, отримаємо:

$$Q(u, v) = P(u, 0)(1-w) + P(u, 1)w + P(0, w)(1-u) + P(1, w)u - P(0, 0)(1-u)(1-w) - P(0, 1)(1-u)w - P(1, 0)u(1-w) - P(1, 1)uw$$

Можна перевірити, що виконуються граничні умови:

$$Q(u, v) = P(u, 0)$$

$$Q(0, 0) = P(0, 0) \quad \text{і т.д.}$$

4. Бікубічні поверхні.

Розглянемо випадок, коли криві $P(u, 0)$, $P(u, 1)$, $P(0, w)$, $P(1, w)$ описуються параметричними

многочленами 3-го порядку $P(t) = B_1 + B_2t + B_3t^2 + B_4t^3$

Не зменшуючи загальності, обмежимо діапазон параметра $t \in [0, 1]$.

Для визначення P_i використовується система рівнянь

$$\begin{cases} P(0) = B_1 \\ P(1) = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \\ P'(0) = B_2 \\ P'(1) = B_2 + 2B_3 + 3B_4 \end{cases} \quad \text{або} \quad P = MB \Rightarrow B = M^{-1}P$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix}^T$$

$$P = (P(0), P(1), P'(0), P'(1))^T$$

$$Q(u, v) = (F_1(u), F_2(u), F_3(u), F_4(u)) \begin{pmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P'(0,0) & P'(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P'(1,0) & P'(1,1) \\ P(0,0) & P(0,1) & P'(0,0) & P'(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P'(1,0) & P'(1,1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(w) \\ F_2(w) \\ F_3(w) \\ F_4(w) \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \text{вектори крайових точок} & w\text{-додавні вектори} \\ u\text{-додавні вектори} & \text{вектори кривизни} \end{pmatrix}$$

5. Поверхні Без'є.

Поверхня Без'є задається у вигляді $Q(u, w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{ij} J_{ni}(u) K_{mj}(w)$, де $J_{ni}(u)$ і $K_{mj}(w)$ — базисні функції в параметричних напрямках u і w .

$$J_{ni}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$$

$$K_{mj}(w) = \binom{m}{j} w^j (1-w)^{m-j}$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad \binom{m}{j} = \frac{m!}{j!(m-j)!}$$

B_{ij} — вершина полігональної сітки, m і n на одиницю менші за u і w .

В матричному вигляді поверхня Без'є:

$$Q(u, w) = [U][N][B][M]^T[W]$$

$$[U] = [u^n \ u^{n-1} \ \dots \ 1]$$

$$[W] = [w^m \ w^{m-1} \ \dots \ 1]^T$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{0,0} & \dots & B_{0,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,0} & \dots & B_{n,m} \end{bmatrix}$$