1.1.1. Плоскі криві.

В попередніх темах ми ознайомилися з різними методами перетворення окремих точок, далі дослідимо деякі функції. Звичайно графік функції можна зобразити у вигляді набору близько розташованих точок, але більш ефективним є математичний опис кривих. Це пов’язано з наступним:

a) математичний опис є точним, і дозволяє точно отримувати характеристики кривої;
b) математичний опис легко тримати в машині в компактному вигляді;
c) крива, що математично описана, легко зображається на екрані;
d) при аналітичному визначенні кривої відпадає необхідність в інтерполяційних схемах;
e) при аналітичному записі кривої, як правило, суттєво спрощується проблема створення кривої, що відрізняються від попередньої на деякі геометричні параметри.

Існує два способи представлення кривих – у параметричній формі та непареметричній формі.

Непараметрично крива задається у вигляді явної чи неявної функції:

$$y = f(x) \qquad (1)$$

$$f(x, y) = 0 \qquad (2)$$

Формула (1) передбачає тільки однозначну функції (для кожного значення x існує тільки одне значення y) (2) – розширюється також на многозначні, на замкнуті криві. Але розв’язок (2) вимагає, як правило, громіздких обчислень.

Як явні , так і неявні непараметричні криві залежать від виду описуючих їх координат. Тобтопростота опису кривих і обчислення їх характеристик залежать від вибору системи координат.

В параметричній формі кожна координата точки на кривій є функцією від олного чи більше параметрів. У випадку плоскої кривої її запис в параметричній формі буде:

де t – параметр.

Вектор положення точки визначається вектори,

$P(t) = [\, f(t) \;\; g(t)]$

дотична в деякій точці до кривої

$P'(t) = [\, f'(t) \;\; g'(t)]$

Звичайно, що існує декілька способів переходу від (3) до (1) чи (2) і навпаки.

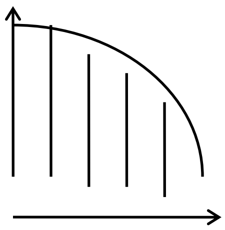
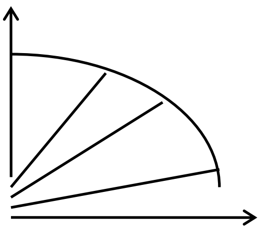
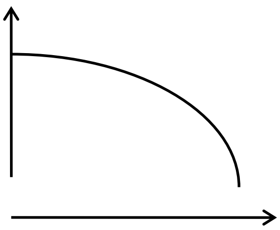
В зв’язку з тим, що точка параметричної кривої характеризується лише значенням параметру , то пареметрична функція є осенезалежною. Довжина кривої визначається діапазоном зміни параметра t , який як правило нормалізують в межах $0 \le t \le 1$. Враховуючи осенезалежність параметричного представлення кривої, при її побудові можна використовувати методи матричних перетворень.

<u>Наприклад:</u> $(x^* \; y^* \; 1) = [\, f(t) \;\; g(t) \;\; 1]\, T$

Порівняємо різницю в параметричній та непараметричній формах на прикладі чверті кола:

$$y = \sqrt{1 - x^2} \qquad \begin{cases} x = \cos Q \cdot R \\ y = \sin Q \cdot R \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ y = \dfrac{2t}{1 + t^2} \end{array}$$

$R = 1$ $\qquad$ $t = tg(Q/2)$

Розглянемо більш детально способи зображення канонічних кривих на основі їх параметричного представлення:

1.1.2. Зображення кола:

$$\begin{cases} x = r\cos Q \\ y = r\sin Q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n = r\cos Q_n \\ y_n = r\sin Q_n \end{cases} \qquad (4)$$

(4) – є громіздкою, так як вимагає обчислення + (т.т. ітераційного циклу).

(4) можна покращити використавши формули подвійного кута:

$$\begin{aligned} \cos(Q + dQ) &= \cos Q\cos dQ - \sin Q\sin dQ \\ \sin(Q + dQ) &= \cos Q\sin dQ + \cos dQ\sin Q \end{aligned} \qquad (5)$$

Враховуючи (5) рекурентні формули для (4) можна записати, як :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n\cos dQ - y_n\sin dQ \\ y_{n+1} &= x_n\sin dQ + y_n\cos dQ \end{aligned} \qquad (6)$$

У випадку, коли центр кола розташовано в точці (h, k) , координати любої точки кола записуються співвідношеннями

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= h + (x_n - h)\cos dQ - (y_n - k)\sin dQ \\ y_{n+1} &= k + (x_n - h)\sin dQ + (y_n - k)\cos dQ \end{aligned} \qquad (7)$$

1.1.3. Параметричне представлення еліпса

Параметричне рівняння еліпса з центром в початку координат

$$\begin{cases} x = a\cos Q \\ y = b\sin Q \end{cases} \qquad (8)$$

Скориставшись формулами (5) отримаємо

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a\cos Q\cos dQ - a\sin Q\sin dQ \\ y_{n+1} &= b\cos Q\sin dQ + b\cos dQ\sin Q \end{aligned} \qquad (9)$$

Якщо (9) привести до термінів

$$x_n = a\cos Q$$
$$y_n = b\sin Q$$
остаточно отримаємо

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cos dQ - \frac{a}{b} y_n \sin dQ \\ y_{n+1} = \frac{b}{a} x_n \sin dQ + y_n \cos dQ \end{cases} \quad (10)$$

1.1.4. Параметричне представлення параболи

Непараметричне представлення параболи має вигляд

$$y^2 = 4ax$$

Його використання вимагає обчислення кореня квадратного і тому є незручним. Теж саме стосується параметричного представлення параболи через рівняння

$$\begin{cases} x = tg^2 Q \\ y = \pm 2\sqrt{a} \cdot tgQ \quad 0 \le Q \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Більш ефективним є запис

$$\begin{cases} x = a \cdot Q^2 \\ y = 2a \cdot Q \quad 0 \le Q \le \infty \end{cases} \quad (11)$$

$$Q_{n+1} = Q_n + dQ$$

Для (11) можна використати рекурентну формулу

1.1.5. Параметричне представлення гіперболи

В прямокутних, непараметричних координатах гіпербола визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Безпосереднє розв’язування цього рівняння приведе до розрахунку $\sqrt{\ }$.

Використаємо параметричний запис:

$$\begin{cases} x = a \cdot chQ \\ y = b \cdot shQ \end{cases} \quad (13)$$

$$chQ = \frac{e^Q + e^{-Q}}{2}$$

Використавши формулу для гіперболічних функцій

$$ch(Q + dQ) = chQ \cdot chdQ + shQ \cdot shdQ$$
$$+$$
$$sh(Q + dQ) = shQ \cdot chdQ + chQ \cdot shdQ$$

отримаємо рекурентні формули для обчислення точок гіперболи

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cdot chdQ + \dfrac{a}{b} y_n \cdot shdQ \\ y_{n+1} = \dfrac{b}{a} x_n \cdot shdQ + y_n \cdot chdQ \end{cases} \qquad (14)$$

1.1.6. Просторові криві

Як і у випадку просторових кривих для представлення просторових кривих використовуються параметричні та непараметричні співвідношення. Непараметричні включають в себе:

явні рівняння

$$\begin{cases} \acute{o} = f(x) \\ z = g(x) \end{cases} \quad \text{чи} \quad \begin{cases} x = f^{(1)}(z) \\ y = g^{(1)}(z) \end{cases} \quad \text{чи} \quad \begin{cases} x = f^{(2)}(y) \\ z = g^{(2)}(y) \end{cases} \qquad (1)$$

та неявні

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Метод опису кривої (2) має силу, якщо виконуються умови однозначності по x чи y чи z.

Такі умови повідношенню до z мають вигляд

$$\det \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

Якщо аналітичне представлення кривої невідоме, можна використати інтерполяційну схему, щоб провести криву через задані просторові точки. При цьому, як правило, потрібно задовільнити певні умови гладкості кривої, та деякі граничні умови. Ми розглянемо деякі методи побудови інтерполяційних кривих в просторі.