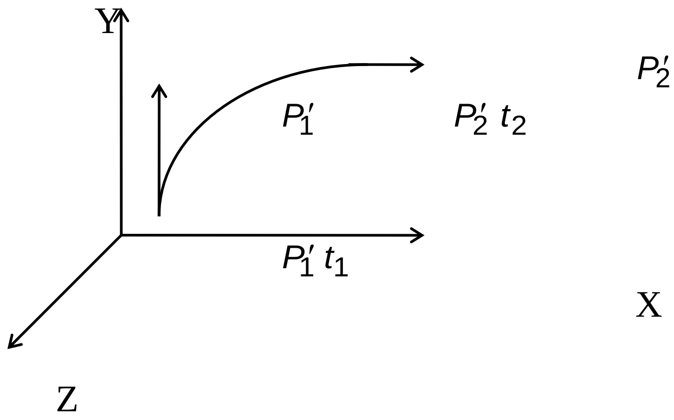
1.1.1. Кубічні сплайни

Взагалі, під сплайном розуміється кусковий поліном степені k з неперервним в місцях з'єднання похідними порядку $k-1$& Таким чином, кубічний сплайн має зберігати неперервність похідних 1-го та 2-го порядків.



Рівняння параметричного кубічного сплайну, що з'єднує дві точки, $P_1(t_1), P_2'(t_2)$ в термінах параметру $\boldsymbol{t}$ має вигляд

$$P(t) = \sum_{i=4}^{4} B_i t^{i-1} \qquad t_1 \le t \le t_2 \qquad (3)$$

де $P(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ — вектор положення довільної точки на сплайні. Коефіцієнти B_i які в свою чергу теж є вектори 1 на 3, визначаються з допомогою чотирьох спеціальних граничних умов для сплайнового сегмента. Таким чином в (3) 12 невідомих. В розгорнутому вигляді (3) записується як

$$P(t) = B_1 + B_2 t + B_3 t^2 + B_4 t^3 \qquad (4)$$

Нехай нам відомо: координати точок $Ð_1, P_2$ та вектори дотичних в точках $P_1, P_2 - P_1', P_2'$. Нехай $t_1 = 0$ Ці відомі співвідношення математично можна записати

$$P(0) = P_1$$
$$P(t_0) = P_2$$
$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=0} = P_1' \qquad (5)$$
$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=t_2} = P_2'$$

З (4), (5) остаточно випливає:

$$P(0) = B_1 = P_1$$
$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=0} = B_2 = P_1' \qquad (6)$$

$$P(t_2) = B_1 + B_2 t + B_3 t^2 + B_4 t^3$$

$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=t_2} = B_2 + 2B_3t_2 + 3B_4t^2 \qquad (7)$$

Розв’язуючи (7) відносно B_3, B_4 з врахуванням (6), отримаємо

$$B_3 = \frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2^2} - \frac{P_2'}{t_2^2}$$
$$B_4 = \frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2} \qquad (8)$$

Підставляючи (6), (8) в (4) можемо отримати рівняння кубічного сплайнового сегмента

$$P(t) = P_1 + P_1' \cdot t + \left[\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2^2} - \frac{P_2'}{t_2^2}\right] \cdot t^2 +$$
$$+\left[\frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2}\right] \cdot t^3 \qquad (9)$$

Узагальнимо (9), на випадок двох суміжних кубічних сегментів $P_k(t), P_{k+1}(t)$. Маємо

$$\begin{cases} P_k(t) = P_k + P_k' \cdot t + \left[\frac{3(P_{k+1} - P_k)}{t_2^2} - \frac{2P_k'}{t_2^2} - \frac{P_{k+1}'}{t_2^2}\right] \cdot t^2 + \\ +\left[\frac{2(P_k - P_{k+1})}{t_2^3} + \frac{P_k'}{t_2^2} + \frac{P_{k+1}'}{t_2^2}\right] \cdot t^3 \\ P_{k+1}(t) = P_{k+1} + P_{k+1}' \cdot t + \left[\frac{3(P_{k+2} - P_{k+1})}{t_2^2} - \frac{2P_{k+1}'}{t_2^2} - \frac{P_{k+2}'}{t_2^2}\right] \cdot t^2 + \\ +\left[\frac{2(P_{k+1} - P_{k+1})}{t_2^3} + \frac{P_{k+1}'}{t_2^2} + \frac{P_{k+2}'}{t_2^2}\right] \cdot t^3 \end{cases} \qquad (10)$$

при умові, що на першому сегменті параметр знаходиться в межах $0 \le t \le t_2$, а другий $0 \le t \le t_3$. В формулі (10) є одна невизначена компонента, а саме P_{k+1}'. Для її визначення використовується умова неперервності другої похідної $P''(t)$ в місці з’єднання

З (4) маємо

$$P''(t) = 2B_3 + 6B_4 \cdot t \qquad (11)$$

В кінці першого сплайнового сегмента, тобто при $t = t_2$ отримаємо

$$P''(t) = 6B_4 \cdot t_2 + 2B_3$$

а на початку другого $(t = 0)$

$$P'' = 2B_3$$

Враховуючи співвідношення (8) умови на обчислення P_k' (чи P_2')

$$t_3P_1' + 2(t_3 + t_2)P_2' + t_2P_3' = \frac{3}{t_2t_3}[t_2^2(P_3 - P_2) + t_3^2(P_2 - P_1) \qquad (12)$$

З врахуванням співвідношення (10) діють аналогічні вирази для відшукання сплайнів.

Отримані результати можуть бути узагальнені на випадок n точок для побудови $(n-1)$ сплайнів. При цьому для отримання невідомих похідних у внутрішніх точках використовуються умови неперервності других похідних в цих точках.

Співвідношення (12) при цьому перетворюється в систему рівнянь:

$$t_{k+2}P'_k + 2(t_{k+2} + t_{k+1})P'_{k+1} + t_{k+1}P'_{k+2} =$$

$$= \frac{3}{t_{k+1}t_{k+2}}[t_{k+1}^2(P_{k+2} - P_{k+1}) + t_{k+2}^2(P_{k+1} - P_k) \qquad (13)$$

В матричній формі співвідношення (13) можна представити

$$\begin{bmatrix} t_3 \cdot 2(t_2 + t_3) & t_2 & 0 & \dots & \\ 0 & t_4 & 2(t_3 + t_4) & t_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ P'_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{t_2 t_3}[t_2^2(P_3 - P_2) + t_3^2(P_2 - P_1) \quad \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{3}{t_{n-1}t_n}[t_{n-1}^2(P_n - P_{n-1}) + t_n^2(P_{n-1} - P_{n-2}) \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Тепер метод інтерполяції сплайнами по точках має вигляд:

— розв’язати (14);

— згідно формул, що аналогічні (6), (8) записати коефіцієнти для кожного сплайну;

— побудувати інтерполяційні кубічні сплайни.

Слід відзначити, що неперервність других похідних у внутрішніх точках з’єднання не гарантує гладкості сплайна в сенсі мінімума кривизни вздовж кривої. Для того щоб отримати мінімум кривизни і , відповідно, максимум гладкості необхідно мінімізувати коефіцієнти для кожного сегмента за рахунок вибору діапазону зміни параметрів. Одним з прийомів вибору значень $t_{\max}$ на сегментах, який задовільняє попередньому критерію, є вибір $t_{\max}$ рівним довжині хорд між слідуючими одна за другою точками.

Розглянемо рівняння (14) більш уважно. Для простоти запишемо його у матричному вигляді

$$M \cdot P = B \qquad (15)$$

Зауважимо, що М — матриця прямокутна $(n-2)\times(n)$, Р — стовпець $n \times 1$, В — стовпець $(n-2)\times 1$.

Для знаходження з (15) вектора невідомих Р необхідно отримати квадратну матрицю. Це досягається шляхом використання спеціальних граничних умов, які фактично характеризують весь сплайн.

Ці умови можуть задаватися в різному вигляді і мають, як правило чіткий геометричний зміст. До цих умов належать:

1) <u>закріплена гранична умова</u> (формується, так званий, фіксований сплайн)

На початку, та в кінці сплайну задаються дотичні вектори P_1, P_n таким чином має місце

$$P_1' = P_1$$
$$P_n' = P_n$$

В цьому випадку система (15) перетворюється в квадратну систему $n \times n$ з характеристиками:

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0\ldots\ldots & 0 \\ & M & \\ 0 & 0\ldots\ldots & 1 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} P_1 \\ B \\ P_n \end{pmatrix}$$

M' — представляє собою тридіагональну матрицю, розв'язок якої можна отримати у вигляді рекурентних співвідношень.

2) <u>слабкі граничні умови</u>

Умови типу $\dfrac{d^2P}{dt^2} = 0$

Розглянемо цю умову на початку сплайну $(k = 1, t = 0)$.

Враховуючи співвідношення (11), (18) цю умову можна записати у вигляді

$$P_1' + \frac{1}{2}P_2' = \frac{3}{2}\frac{(P_2 - P_1)}{t_2} \qquad (16)$$

На кінці останнього сегменту отримаємо:

$$2P_{n-1}' + 4P_n' = \frac{6}{t_n}(P_n - P_{n-1}) \qquad (17)$$

Враховуючи (16), (17) система (15) набуде квадратний вигляд і характеристики:

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & \ldots\ldots & 0 & 4 \\ & & M & & \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad B' = \begin{pmatrix} \dfrac{\frac{3}{2}(P_2 - P_1}{t_2} \\ B \\ \dfrac{6}{t_n}(P_n - P_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Маємо справу з тридіагональною матрицею.

3) <u>циклічні кінцеві умови</u>

Такі умови задаються для опису замкнутої чи періодичної кривої. Ці умови характеризуються співвідношеннями

$$\begin{aligned} P_1'(0) &= P_n'(t_n) \\ P_1''(0) &= P_n''(t_n) \end{aligned} \qquad (18)$$

Таким чином нахил та кривизна на початку та в кінці кривої рівні.

З врахуванням (7), (8), (11) співвідношення (18) можна розгорнути у систему

$$\begin{cases} P_1' - P_{n-1}' = 2\left[\dfrac{3(P_n - P_{n-1})}{t_n^2} - \dfrac{2P_{n-1}'}{t_n} - \dfrac{P_n'}{t_n}\right]t_n + \\ +3\left[\dfrac{2(P_n - P_{n-1})}{t_n^3} + \dfrac{P_{n-1}'}{t_n^2} + \dfrac{P_n'}{t_n^2}\right]t_n \end{cases} \qquad (19)$$

Система (19) фактично замикає систему (15). На практиці спочатку спрощується система (19), а потім (15) записується як система ($(n-1)\times(n-1)$ ç $(n-1)$ невідомим.

Домножимо 2-ге рівняння (19) на t_n віднімемо від першого і врахуємо, що $P_1' = P_n'$. В результаті отримаємо

$$2\left(1+\frac{t_n}{t_2}\right)P_1' + P_2'\frac{t_n}{t_2} + P_{n-1}' = 3(P_2 - P_1)\frac{t_n}{t_2^2} - 3(P_{n-1} - P_n)\frac{1}{t_n} \qquad (20)$$

З врахуванням (20) з (15) отримаємо:

$$M' = \begin{bmatrix} 2\left(1+\dfrac{t_n}{t_2}\right) & \dfrac{t_n}{t_2} & 0 & \ldots\ldots & 1 \\ & M & & & \end{bmatrix}; \quad B' = \begin{bmatrix} 3(P_2 - P_1)\dfrac{t_n}{t_2^2} - \\ -3(P_{n-1} - P_n)\dfrac{1}{t_n} \\ B \\ \\ \end{bmatrix}$$

M' — профільна матриця.

4) у випадку побудови циклічного сплайну граничні умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} P_1'(0) &= -P_n'(t_n) \\ P_1''(0) &= -P_n''(t_n) \end{aligned} \qquad (21)$$

Рівняння, якого не вистачає, як не важко показати аналогічно (19), (20), має вигляд

$$2\left(1+\frac{t_n}{t_2}\right)P_1' + P_2'\frac{t_n}{t_2} - P_{n-1}' = 3(P_2 - P_1)\frac{t_n}{t_2^2} + 3(P_{n-1} - P_n)\frac{1}{t_n} \qquad (21)$$