1.1.1. Криві Без'є

Розглянемо сегмент кубічного сплайну, що проходить через 4 точки $A_0, A_1, A_2, A_3,$. Його рівняння має вигляд

$$r = r(U) = a_0 + Ua_1 + U^2 a_2 + U^3 a_3 \qquad (1)$$

і r незалежних коефіцієнтів визначаються з умов на r та $\frac{dr}{dU}$ на обох кінцях сегмента. Якщо вважати за кінці сегмента точки $U = 0, U = 1$, то компоненти векторів a_i визначаються з системи

$$\begin{cases} a_0 = r(0) \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = r(1) \\ a_1 = r'(0) \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = r'(1) \end{cases}$$

звідки отримаємо

$$\begin{cases} G_0 = r(0) \\ G_1 = r'(0) \\ G_2 = 3[r(1) - r(0)] - 2r'(0) - r'(1) \\ G_3 = 2[r(0) - r(1)] + r'(0) + r'(1) \end{cases} \qquad (2)$$

Підставляючи (2) в (1) остаточно отримаємо

$$r = r(U) = r(0)(1 - 3U^2 + 2U^3) + r(1)(3U^2 - 2U^3) +$$

$$+ r'(0)(U - 2U^2 + U^3) + r'(1)(-U + U^5) \qquad (3)$$

Співвідношення (3) часто називають представленням Фергюсона.

Без'є перегрупував члени параметричного кубічного многочлена Фергюсона (3) так, щоб став зрозумілим фізичний зміст окремих векторних коефіцієнтів. Формула Без'є має вигляд:

$$r = r(U) = (1-U)^3 r_0 + 3U(1-U)^2 r_1 + 3U^2(1-U) r_2 + U^3 r_3 \qquad (4)$$

де як і раніше вважається, що U змінюється в межах $0 \le U \le 1$. Легко бачити, що (4) переходить в (3), якщо вважати що :

$$a_0 = r_0$$

$$a_1 = 3(r_1 - r_0)$$

$$a_2 = 3(r_2 - 2r_1 + r_0)$$

$$a_3 = r_3 - 3r_2 + 3r_1 - r_0$$

І як результат такої рівності:

$$r(0) = r_0$$

$$r(1) = r_3$$

$$r'(0) = 3(r_1 - r_0)$$

$$r'(1) = 3(r_3 - r_2)$$

З (4) і (5) випливає, що крива Без'є проходить через точки r_0, r_1 і має дотичну в точці r_0, що йде від r_0 аї r_1, а в точці r_3, що йде від r_2 до r_3.P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3 утворюють фігуру, що називається характеристичною ламаною заданої кривої.

При підході Без'є, для того, щоб побудувати сегмент кривої ми задаємо точки P_0, P_3 через які вона має проходити, а також точки P_1, P_2, які задають напрям дотичних в кінцевих точках. Регулюючи довжину $|P_0P_1|, |P_2P_3|$, можна збільшити повноту кривої, чи надати їй більше чи менше асиметричний характер.

В загальному вигляді криві Без'є мають наступний вигляд

$$r = r(U) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!\,i!} U^i (1-U)^{n-i} r_i \qquad (6)$$

де $r_0, r_1, \ldots, r_n$ – радіус-вектори $n+1$ вершини P_0, P_n, деякої узагальненої характеристичної кривої. Підкреслена частина в (6) є так званою функцією Бернштейна, тому що часто наближення Без'є називають апроксимацією на базисі Бернштейна, формулу (6) – формулою Бернштейна-Без'є.

Неважко побачити, що (4) частковий випадок (6) при $n = 3$.

З (6) випливає, що

$$\begin{aligned} r(0) &= r_0 \\ r'(0) &= n(r_1 - r_0) \\ r(1) &= r_n \\ r'(1) &= n(r_n - r_{n-1}) \end{aligned} \qquad (7)$$

З (7) можна зробити висновок, що поліноміальна крива (6) проходить через точки P_0, P_n, а напрям доттичних в цих точках співпадає з напрямом $\overrightarrow{P_0P_1}$ òà $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.

Взагалі кажучи k перших (останніх) точок характеристичної ламаної характеризують $(k-1)$ похідну в першій (останній) точках. Зміна положення однієї з цих точок приводить до зміни і водночас форми кривої. Але з ростом $r^{(k-1)}$вплив положення точки (k) на профіль відповідної кривої зменшується.

Співвідношення (4) при $n > 3$ використовується лише у випадках коли потрібно досягти неперервності окремих сегментів інтерполюючої кривої в сенсі похідної високого степеня.

Нехай нам потрібно провести з'єднання двох сегментів Без'є зі збереженням неперервності кривої, неперервності її нахилу та кривизни. Ці геометричні характеристики визначаються значенням вектор-положення точки, а також значенням його першої та другої похідної.

З (6) можна отримати формули k-ї похідної в першій та останній точках сегмента

$$r^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i P_i$$

$$r^{k}(1) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i} C_k^i P_{n-i}$$

Таким чином, перші похідні характеризуються співвідношенням

$$\begin{aligned} r'(0) &= n(P_1 - P_0) \\ r'(1) &= n(P_n - P_{n-1}) \end{aligned} \qquad (9)$$

Для других похідних відповідно

$$\begin{cases} r''(0) = n(n-1)(P_0 - 2P_1 + P_2) \\ r''(1) = n(n-1)(P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2}) \end{cases} \qquad (10)$$

Тепер, якщо вважати, що криві Без'є визначеного $(n+1)$ точкою P_i спряжується з $(m+1)$ точками Q_i , то попередні умови запишуться як система

$$\begin{aligned} & Q_0 = P_n \\ & P'(1) = Q'(0) \qquad (11) \\ & P''(1) = Q''(0) \end{aligned}$$

Співвідношення (11) з врахуванням (8) можна записати як

$$\begin{cases} Q_0 = P_n \\ Q_1 - Q_0 = (\frac{n}{m})(P_n - P_{n-1}) \\ m(m-1)(Q_0 - 2Q_1 + Q_2) = n(n-1)(P_{n-2} - 2P_{n-1} + P_n) \end{cases} \qquad (12)$$

Система (12) може модифікуватись в залежності від умов на гладкість.

Зауважимо також що структура системи (12) така, що при відомих Q_i, значення P_n, P_{n-1}, P_{n-2} і т. д. визначаються з системи послідовно однозначно.