1. Означення множини: відкритої, замкненої, зв'язної, області.
Множину *D* в R^n називають:
а) *відкритою,* якщо кожна точка цієї множини міститься в D разом з деякою кулею з центром в цій точці;
б) *замкненою*, якщо вона містить всі свої межові точки, тобто $\partial D \subset D$;
в) *зв'язною,* якщо кожні її дві точки можна сполучити ламаною, яка повністю лежить в D;
г) область - це відкрита і зв'язна множина в просторі R^n

2. Означення просторів: неперервних функцій, неперервно диференційовних функцій.
1) якщо $M \subset R^n$, то $C(M) = \{u: M \to R | \forall x_0 \in M \lim\limits_{M \ni x \to x_0} u(x) = u(x_0)\}$
2) якщо $M \in N$, то $C^m(< a, b >)$

3. Що таке ліво- та правостороння похідна?
Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то цю границю називають правосторонньою похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0і позначають $f_+'(x_0)$. (лівостороння прямує до -0).

4. Яка заміна змінних на площині називається невиродженою?
$\xi = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$є невиродженою =>$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} =$ визначник$|\xi' x \; \xi' y; \; \eta' x \; \eta' y| \neq 0$ в D

5. Означення того, що функція задовольняє умову Ліпшиця.
$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}$задовольняє в *D* ум. Л.за змінною *y*, якщо існує таке число L>0, що для всіх $(x, y_1), (x, y_2) \in D$виконується нерівність $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$

6. Теорема про достатні умови того, що функція задовольняє умову Ліпшиця.
Якщо функція f(x,y) у випуклій області G має обмежену часткову похідну по y, то $f \in Lip_y(G)$.

Деякі загальні питання теорії диференціальних рівнянь

7. Означення диференціального рівняння порядку n.
Співвідношення вигляду $G(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$ між незалежною змінною x, невідомою функцією y(x) та її похідними до порядку n включно, називається *звичайним диференціальним рівнянням n-го порядку*, якщо похідна $y^{(n)}$дійсно є в рівнянні.

8. Вигляд диференціального рівняння першого порядку в нормальній формі.
Рівняння $y' = f(x, y)$називається *диференціальним рівнянням 1-го порядку в нормальній формі.*

9. Що таке розв'язок диференціального рівняння першого порядку в нормальній формі?
Нехай D - множина з R^2. Функція $y = \varphi(x)$, x є <a,b> називається *розв'язком диф. рів. 1-го порядку в нормальній формі* на проміжку <a,b> якщо:

$$1)\varphi \in \mathrm{C}^1(< a, b >);$$
$$2)\forall x \in < a, b >: \; (x, \varphi(x)) \; \in \; D;$$
$$3)\forall x \in < a, b > : \varphi'(x) = f(x, \varphi(x));$$

10. Вигляд диференціального рівняння першого порядку в симетричній формі.
Вираз $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ називається *диф. рів. 1-го порядку в симетричній формі.*

11. Що таке розв'язок диференціального рівняння першого порядку в симетричній формі?
Функція $y = \varphi(x)$, x є <a,b> називається *розвязком диф. рів. 1-го порядку в симетричній формі* на проміжку <a,b> якщо:

$$1)\varphi \in \mathrm{C}^1(< a, b >);$$
$$2)\forall y \in < a, b >: \; (\varphi(x), y) \; \in \; D;$$
$$3)\forall y \in < a, b > : M(\varphi(x), y)\varphi'(y)dy + N(\varphi(y), y)dy = 0.$$

12. Означення загального розв'язку диференціального рівняння першого порядку.
Однопараметричну сім'ю функцй$y = \varphi(x, C), x \in I_C;$ де параметр С пробігає деяку множину P⊂R, називаємо загальним розв'язком ДР, якщо
1) для всіх С є Р функіяφ є розвязком ДР на I_C

2) для кожного розвязку z ДР існують такі C_0 є Р та $I_{C_0} \subset R$,
що z(x) ≡ $\varphi(x, C_0)$ для всіх x є I_{C_0}.

13. Що таке інтеграл диференціального рівняння першого порядку?
Функцію $U = U(x,y)$з областю визначення $\Omega \subset R^2$та множиною значень $R \subset R$^1 називаємо *інтегралом диф. рів.*$y' = f(x,y)$ чи $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, якщо: 1)$\Omega \subset D$;2) ∀ $C \in R$ рівність $U(x,y) = C$ неявно задає розвязок $y = \varphi(x)$ на деякому інтервалі $I \subset R$^1.

14. Означення загального інтегралу диференціального рівняння першого порядку.
Запис вигляду U(x,y) = C називається загальним інтегралом ДР.

15. Що таке поле напрямків диференціального рівняння першого порядку в нормальній формі?
Нехай $D \subset R^2$- область, $f: D \to R$ - деяка функція. Візьмемо $y' = f(x,y)$.В кожній точці $(x,y) \in D$ побудуємо вектор, нахилений під кутом ψдо осі $\underline{OX}$, де $tg\psi = f(x,y)$. Сукупність таких векторів називається *полем напрямків диф. рів*. $y' = f(x,y)$.

16. Що таке поле напрямків диференціального рівняння першого порядку в симетричній формі?
Нехай M, N Є C(D). У кожній точці (x, y) Є D побудуємо вектор, нахилений під кутом ψдо осі $\underline{OX}$, де tg$\psi = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$якщо N(x,y) != 0, і вертикальний вектор, якщо N(x,y)=0
Сукупність таких векторів назвемо полем напрямків рівняння M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0

17. Що таке інтегральна крива диференціального рівняння першого порядку?
Крива q, яка в кожній своїй точці дотикається до відповідного вектора поля напрямків називається інтегральною кривою рівняння$y' = f(x,y)$.

Інтегровні типи звичайних диференціальних рівнянь

18. Вигляд рівняння на відшукання первісної.
$f: < a,b > \to R$^1; $y\,' = f(x)$

19. Теорема про вигляд загального розв'язку рівняння на відшукання первісної.
Якщо $f \in C(< a,b >)$, то ф-ла $y = \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi + C$
визначає загальний р-ок р-ня $y\,' = f(x)$

20. Означення рівняння з відокремленими змінними.
Рівняння: K(x)dx + L(y)dy = 0; де $K: < a,b > \to R$^1, $L: < \alpha,\beta > \to R$^1 називається диф. рівнянням з відокремленими змінними

21. Теорема про вигляд загального інтегралу рівняння з відокремленими змінними.
Якщо K Є C(<a, b>), L Є C(<α, β>), то формула
$\int_{x_0}^{x}$ K(ξ)dξ + $\int_{y_0}^{y}$ L(η)dη = C
де x_0Є<a, b>,y_0Є <α, β>, а C - довільна стала, задає загальний інтеграл рівняння.

22. Означення рівняння з відокремлюваними змінними.
Рівняння, яке можна записати у вигляді:
y' = f(x)g(y), де x є <a, b>, або
M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0, де x є <a, b> та y є<a, b>, називається рівнянням з відокремлюваними змінними (відповідно в нормальній та симетричній формі).

23. Які рівняння зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними?
1) $y' = f(ax + by + c)$
2) $y' = f(\frac{y}{x})$

24. Означення однорідної функції виміру к.
Функція G = G(x, y) називається однорідною функцією виміру k є R, якщо
G(tx, ty) = t^kG(x, y) для всіх t > 0.

25. Означення однорідного рівняння.
Диференціальне рівняня називається однорідним рівняням, якщо його можна перетворити до вигляду y' = f($\frac{y}{x}$).

26.Вигляд рівняння, права частина якого є функцією від дробово-лінійного виразу.
y' = f($(a_1x + b_1y + c_1)$/$(a_2x + b_2y + c_2)$)

27.Означення узагальнено однорідного рівняння.
Д.р. y' = f(x, y) чи M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 називається узагальнено однорідним диф. р-ням, якщо заміна y(x) ~> z(x), де y = z^{α}, при деякому $\alpha\ != 0{,}1$ зводить це р-ня до однорідного.

28.Означення рівняння в повних диференціалах.
Р-ня вигляду M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, називається р-ням в повних диференціалах, якщо існує така функція u(x,y), що du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy

29.Теорема про необхідні та достатні умови того, що рівняння є рівнянням в повних диференціалах.
Нехай D = {(x,y)є R^2| $a < x < b$, $\alpha < y < \beta$}, M, N, $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$єC(D), |M|+|N|>0 в D. Тоді р-няM(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, (x, y)ϵD є р-ням в повних диференціалах тоді і тільки тоді коли виконується умова $\frac{\partial M}{\partial y}$-$\frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$

30. Що таке інтегрувальний множник?
Функція $\mu = \mu(x,y)$, $(x,y) \in D$, називається *інтегрувальним множником* для рівняння $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, якщо $\mu \neq 0$ і рівняння $\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$ є рівнянням в повних диференціалах.

32. Означення лінійного рівняння першого порядку
Д.р. назив *лінійним диференціальним рівнянням першого порядку,* якщо його можна записати у вигляді $y' = a(x)y + b(x)$

34. Вигляд рівняння Бернуллі
Диференціальне рівняння називається *рівнянням Бернуллі,* якщо його можна записати у вигляді $y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$,де $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0;1\}$.

35. Сформулюйте закон Мальтуса
Нехай $u = u(t)$-*чисельність популяції.* Функція u задовільняє *закон Мальтуса* $u' = \varepsilon u$, де $\varepsilon = \varepsilon(u,t)$-*істинна швидкість збільшення чисельності популяції.*

36. Вигляд рівняння Фархюльста
Диференціальне рівняння вигляду $\boldsymbol{u' = \varkappa u - \frac{\varkappa}{\kappa}u^{2}}$, називається *рівнянням Ферхюльста*

38. Вигляд рівняння балансу доходу економіки.
$\boldsymbol{Y' = \frac{1 - a(t)}{K(t)}Y - \frac{b(t) - E(t)}{K(t)}}$, де Y(t) — національний дохід, E(t) — державні витрати, K(t) — норма акселерації, a(t) — коефіцієнт схильності до споживання (0<a(t)<1), а b(t) — автономне (скінченне) споживання.

41. Зв'язок між струмом і напругою реохорда, котушки і конденсатора.
Реохорд (металева струна) служить для зміни опору, тобто, для обмеження струму. Зв'язок між I та U: $U_{\alpha\beta}(t) = R_{\alpha\beta}I_{\alpha\beta}(t)$, де $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha} > 0$ - стала (опір реохорда).

Котушка - додатковий опір: $U_{\alpha\beta}(t) = L_{\alpha\beta}\frac{d}{dt}I_{\alpha\beta}(t)$, де $L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha} > 0$ - стала (індуктивність котушки)

Конденсатор (дві пластини) - це прилад для накопичення електричного заряду. $I_{\alpha\beta}(t) = C_{\alpha\beta}\frac{d}{dt}U_{\alpha\beta}(t)$, де $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha} > 0$ - стала (ємність конденсатора).

Інтегральні рівняння Вольтерра

43.Означення інтегрального рівняння Вольтера
Співвідношення вигляду $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$ яке зв'язує незалежну змінну х, невідому функцію $y(x)$та інтеграл від якогось виразу назив р-ям Вольтера 2-го роду.

44. Що таке розв'язок інтегрального рівняння Вольтерра.
$y = \varphi(x)$ називається розв'язком інтегрального рівнння Вольтера на $< a, b >$, якщо:
1) $x_0 \in < a, b >$; 2) $\forall x \in < a, b >: (x, \varphi(x)) \in D$; 3) $\varphi \in C(< a, b >)$;4) $\forall x \in < a, b >: \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$

45. Теорема Пікара для інтегральних рівнянь.
Якщо $f \in C(D) \cap Lip_y(D)$, то інтегральне р-ня Вольтера $\forall (x_0, y_0) \in D$ має єдиний розв'язок визначений на проміжку $[x_0 - h, x_0 + h], h > 0$.

46. Формула послідовних наближень розв'язку інтегрального рівняння Вольтерра.
$\varphi_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}_{\mathbf{0}}$;

$$\varphi_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}_{\mathbf{0}} + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}, \qquad \boldsymbol{n} \in N$$

Задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного стосовно похідної

47. Як ставиться задача Коші для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі?
Нехай $D \subset R^2, (x_0, y_0) \in D, f: D \to R$.   Задача Коші:
$y' = f(x, y)$,
$y(x_0) = y_0$

48. Що таке розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі?
Функція у=$\varphi(x)$ наз. розвязком задачі Коші на проміжку <a,b>, якщо:
1) $x \in < a, b >$;
2)$\varphi \in \mathrm{C}^1(< a, b >)$;
3)$\forall x \in < a, b >: (x, \varphi(x)) \in D$;
4)$\forall x \in < a, b >: \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$;
5)$\varphi(x_0) = y_0$;

49. Лема про зв'язок інтегрального рівняння та задачі Коші для диференціального рівняння.
Якщо $f \in C(D)$, то задача Коші $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ є еквівалентною до інтегрального рівняння $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, x \in < a, b >$.

50. Теорема Пікара для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі.
Якщо $f \in C(D) \cap Lip_y(D)$ то $\forall (x_0, y_0) \in D$ з. Коші має єдиний розв'язок визначений на деякому $I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$ де h>0.

51. Теорема Пеано для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі.
Якщо $f \in C(\Pi_{a,b}(x_0, y_0))$, то задачі Коші $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$має р-ок визначений на $I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$, де $h = min\{a, \frac{b}{M}\}, a\ M = max\frac{|f(x,y)|}{(x_0,y_0)}$ для $(x, y) \in \Pi_{a,b}(x_0, y_0)$

52. Що таке відрізок Пеано?
Відрізок $I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$, де $h = min\{a, \frac{b}{M}\}, a\ M = max\frac{|f(x,y)|}{(x_0,y_0)}$ для $(x, y) \in \Pi_{a,b}(x_0, y_0)$ називається відрізком Пеано для задачі Коші $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

53. Лема Гронуолла-Беллмана.
Нехай $u \in C([a,b])$, $x_0 \in [a,b]$, $C, L \geq 0$- сталі. Якщо $\forall x \in [a,b]$ виконується нерівність
$|u(x)| \leq C + L|\int_{x_0}^{x} \quad |u(\xi)|d\xi|$ то $\forall x \in [a,b]$: $|u(x)| \leq C * e^{\ L|x-x_0|}$
54. Теорема єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі.
Якщо $f \in C(D) \cap Lip_y(D)$, то задача Коші ($y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$) не може мати на $< a,b >$більше одного розв'язку.

55. Означення продовження розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння.
Якщо $y = \varphi(x)$ - розв'язок задачі Коші на $< a,b >$, а $y = \psi(x)$ - розв'язок задачі на $x\epsilon < a, b+\varepsilon >$ і, крім того,
1) $\varepsilon > 0$;
2) $\forall x \in < a,b >: \varphi(x) = \psi(x)$,
то ψ називається продовженням розв'язку φ вправо.

56. Означення непродовжувального розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння.
Функція $y = \varphi(x)$ назив непродовжувальним розвязком задачі Коші, якщо φ не можна продовжити ні вліво, ні вправо.

57. Теорема про продовження розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі.
Якщо $f \in C(D)$, то $\forall (x_0, y_0) \in D$ р-ок φзадачі Коші $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$можна продовжити на інтервал (ξ, η), який: 1) $\lim\limits_{x\to\eta-0}|\varphi(x)| = +\infty$або 2) $\lim\limits_{x\to\eta-0} dist(\varphi(x), \vartheta D) = 0, \vartheta D$-межа області D. Аналогічні співвідношення при $x \to \xi + 0$ виконуються і для точки ξ.

58. Теорема про існування непродовжувального розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі.
Якщо $f \in C(D)$, то для кожної точки $(x_0, y_0) \in D$ існує непродовжувальний розв'язок задачі Коші.

59. Теорема про єдиністьнепродовжувального розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі.
Якщо $f \in C(D) \cap Lip_y(D)$, то задача Коші має єдиний непродовжувальний розв'язок.

Неявні диференціальні рівняння першого порядку

60. Що таке неявне диференціальне рівняння 1-го порядку?
Диференційне рівняння вигляду *F(x,y,y')=0, F cCG, GcR^3* називається неявним д.р.

61. Означення розв'яку неявного диференціального рівняння 1-го порядку?
Функція *y=φ(x)* називається розв'язком неявного д.р. *F(x,y,y')=0, F cCG, GcR^3* якщо
1) *φ є C1*(<a,b>) ;
2) *∀x* є *<a,b>:(x,φ(x),φ'(x))* є G;
3) *∀x* є *<a,b>:F(x,φ(x),φ'(x))=0* .

62. Як ставиться задача Коші для неявного диф.рівняння 1-го порядку?
Для задачі Коші потрібно задавати такі умови:$y(x_0) = y_{0,}\ y'(x_0) = y_{1,}$,також має виконуватися рівність $F(x_0, y_0, y_1) = 0$.
63.Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші для неявного диф.рівняння 1-го порядку?
Нехай $(x_0, y_0, y_1)\epsilon\ \boldsymbol{G}$ **,** *F є C(G)* і виконується умови:
1)$F(x_0, y_0, y_1) = 0$,
2)$F'_y, F'_{y'}$,- неперервні функції в деякому околі точки(x_0, y_0, y_1) ;
3)$F'_{y1}(x_0, y_0, y_1)$*≠0* ,
то задача Коші має єдиний розвязок у= *φ(x)*,визначений інтервалі $I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$ де h>0

64. Що таке звичайні точки неявного диференціального рівняння 1-ого порядку?
Точки (x_0, y_0)в яких існує єдиний розвязок задачі Коші для *F(x,y,y')=0*, називаються звичайними точками цього рівняння.

65. Що таке особливі точки неявного диференціального рівняння 1-го порядку?
Точки площини хОу, в яких порушується єдиність розв'язку задачі Коші.

66. Що таке особлива інтегральна крива неявного диференціального рівняння 1-го порядку?
Особлива інтегральна крива - це крива утворена з особливих точок.

67. Що таке особливий розв'язок неявного диференціального рівняння 1-го порядку?
Розв'язок неявного ДР $F(x, y, y') = 0$, який в кожній своїй точці дотикається до графіка якогось іншого розв'язку цього ж рівняння називається *особливим розв'язком.*

68. Як знайти дискримінантні криві неявного диференціального рівняння 1-го порядку?
$\{F(x, y, y') = 0;\ F'_{y'}(x, y, y') = 0.\}$ Щоб знайти криві, потрібно знайти з 1-го рівнняння системи y' і підставити у 2-ге рівняння цієї системи. Якщо отримана рівність задає на площині хОу якусь криву, то ця крива називається *дискримінантною кривою* рівняння $F(x, y, y') = 0$; вона підозріла на особливий розв'язок.

69. Загальний вигляд рівняння Лагранжа. У чому полягає особливість цього рівняння?
$y = x\varphi(y') + \psi(y')$. Особливість: розв'язуючи це рівняння за допомогою методу введення параметра, всередині отримаємо просте лінійне рівняння.

70. Загальний вигляд рівняння Клеро. У чому полягає особливість цього рівняння?
$y = xy' + \psi(y')$.Особливість: розв'язуючи це рівняння за допомогою методу введення параметра, всередині отримаємо просте лінійне рівняння.