

## СХЕМА НАРАХУВАННЯ БАЛІВ іспиту з **Диф. р-нь** (спеціальність “інформатика”, 2016 н.р.)

Бали нараховуються, використовуючи такі величини:

КР = сумарний бал за контрольні роботи (не перевищує 30 балів) ,

КО = сумарний бал за колоквиуми (не перевищує 20 балів) ,

МІ =  $\text{minimum}\{10, (\text{кількість пропусків без одного}) + (\text{кількість не зроблених дом. завд.})\}$

ІП – бали за практику на іспиті (не перевищує 25 балів) ,

ІТ – бали за теорію на іспиті (не перевищує 25 балів) ,

ВО – бонус (дорівнює 5 балів) ,

SB – сумарний бал, тобто підсумкова оцінка (не перевищує 100 балів)

$$SB = КР + КО - МІ + ІП + ІТ + ВО.$$

**Примітка.** За бажанням студента ( перед початком іспиту ) можна виставити йому підсумкову оцінку, вважаючи, що:

$$ІТ = 0,$$

$$\text{якщо } КР \geq 20, \text{ то } ІП = \frac{5}{6} КР, \text{ інакше } ІП = 0.$$

### СТРУКТУРА БІЛЕТУ З ТЕОРІЇ на іспит

1. Два “означення”.
2. Два “означення”.
3. Одне “доведення”.
4. Одне “доведення”.

### СТРУКТУРА БІЛЕТУ З ПРАКТИКИ на іспит

- 1) Задача Коші для рівняння першого порядку, розв’язного стосовно похідної.
- 2) Неявне рівняння першого або вищого порядку.
- 3) Лінійне неоднорідне рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами.
- 4) Система лінійних (не)однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

### Основна література

1. Бугрій О.М., Процах Н.П., Бугрій Н.В. Основи диференціальних рівнянь: теорія, приклади та задачі: навчальний посібник. – Львів, 2011. – 348 с.

**ПИТАННЯ на іспит з Диф. р-нь**  
(спеціальність “інформатика”, 2016 н.р.)

**Деякі загальні питання математичного аналізу**

Означення множини: відкритої, замкненої, зв'язної, області.  
Означення просторів: неперервних функцій, неперервно диференційовних функцій.  
Що таке ліво- та правостороння похідна?  
Яка заміна змінних на площині називається невиродженою?  
Означення того, що функція задовольняє умову Ліпшиця.  
Теорема про достатні умови того, що функція задовольняє умову Ліпшиця.  
Що таке власне значення, власний вектор, норма матриці?  
Яка функція називається додатно визначеною, від'ємно визначеною?

**Деякі загальні питання теорії диференціальних рівнянь [1, підрозділ 1.1]**

Означення диференціального рівняння порядку  $n$ .  
Вигляд диференціальне рівняння 1-го порядку в нормальній формі.  
Що таке розв'язок диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі?  
Вигляд диференціальне рівняння 1-го порядку в симетричній формі.  
Що таке розв'язок диференціального рівняння 1-го порядку в симетричній формі?  
Означення загального розв'язку диференціального рівняння 1-го порядку.  
Що таке інтеграл диференціального рівняння 1-го порядку?  
Означення загального інтегралу диференціального рівняння 1-го порядку.  
Що таке поле напрямків диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі?  
Що таке поле напрямків диференціального рівняння 1-го порядку в симетричній формі?  
Що таке інтегральна крива диференціального рівняння 1-го порядку?

**Інтегровні типи звичайних диференціальних рівнянь [1, підрозділи 1.2-1.5]**

Вигляд рівняння на відшукування первісної.  
Теорема про вигляд загального розв'язку рівняння на відшукування первісної.  
Означення рівняння з відокремленими змінними.  
Теорема про вигляд загального інтегралу рівняння з відокремленими змінними.  
Означення рівняння з відокремлюваними змінними.  
Які рівняння зводяться до рівнянь відокремлюваними змінними?  
Вигляд рівняння, права частина якого є функцією від лінійного виразу.  
Вигляд однорідного рівняння.  
Вигляд рівняння, права частина якого є функцією від дробово-лінійного виразу.  
Означення узагальнено однорідного рівняння.  
Означення рівняння в повних диференціалах.  
Теорема про необхідні та достатні умови того, що рівняння є рівнянням в повних диференціалах (з доведенням).  
Що таке інтегрувальний множник?  
З якого рівняння можна знайти інтегрувальний множник, якщо він існує?  
Означення лінійного рівняння першого порядку.  
Що таке коефіцієнт та вільний член лінійного рівняння першого порядку.  
Вигляд рівняння Бернуллі.  
Сформулюйте закон Мальтуса.  
Вигляд рівняння Ферхюльста (тут і далі для рівнянь вказувати прикладний зміст коефіцієнтів).  
Вигляд рівняння для обчислення доходу фірми.  
Вигляд рівняння балансу доходу економіки в динамічній моделі Кейнса.

Вигляд рівняння для обчислення концентрації речовини при перебігу хімічної реакції.  
Сформулюйте друге правило Кірхгофа для електричних кіл.  
Зв'язок між струмом і напругою реохорда, котушки і конденсатора.  
Вигляд рівняння для знаходження електричного струму в коливному контурі з джерелом напруги, котушкою та опором, з'єднаних послідовно.

### **Інтегральні рівняння Вольтерра [1, підрозділ 1.6]**

Означення інтегрального рівняння Вольтерра.  
Що таке розв'язок інтегрального рівняння Вольтерра.  
Теорема Пікара для інтегральних рівнянь (*з частковим доведенням*).  
Формула послідовних наближень розв'язку інтегрального рівняння Вольтерра.

### **Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку [1, підрозділ 1.7]**

Як ставиться задача Коші для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі?

Що таке розв'язок задачі Коші для рівняння 1-го порядку в нормальній формі?  
Лема про зв'язок інтегрального рівняння та задачі Коші для диференціального рівняння.  
Теорема Пікара для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі.  
Теорема Пеано для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі.  
Що таке відрізок Пеано?  
Лема Гронуолла-Белмана (*з доведенням*).

Теорема єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі (*з доведенням*).

Означення продовження розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння.

Означення непродовжувального розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння.

Теорема про продовження розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі.

Теорема про існування непродовжувального розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі.

Теорема про єдиність непродовжувального розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння 1-го порядку в нормальній формі.

### **Неявні диференціальні рівняння [1, розділ 2, підрозділи 3.1-3.2]**

Що таке неявне диференціальне рівняння 1-го порядку?

Означення розв'язку неявного диференціального рівняння 1-го порядку?

Як ставиться задача Коші для неявного диференціального рівняння 1-го порядку?

Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші для неявного диференціального рівняння 1-го порядку?

Що таке звичайні точки неявного диференціального рівняння 1-го порядку?

Що таке особливі точки неявного диференціального рівняння 1-го порядку?

Що таке особлива інтегральна крива неявного диференціального рівняння 1-го порядку?

Що таке особливий розв'язок неявного диференціального рівняння 1-го порядку?

Як знайти дискримінантні криві неявного диференціального рівняння 1-го порядку?

Загальний вигляд рівняння Лагранжа. У чому полягає особливість цього рівняння?

Загальний вигляд рівняння Клеро. У чому полягає особливість цього рівняння?

Що таке неявне диференціальне рівняння вищого порядку?

Означення розв'язку неявного диференціального рівняння вищого порядку?

Як ставиться задача Коші для неявного диференціального рівняння вищого порядку?

Наведіть неявне рівняння вищого порядку в якому відсутня незалежна змінна. Яка заміна понижує порядок цього рівняння?

Наведіть неявне рівняння вищого порядку в якому відсутня невідома функція. Яка заміна понижує його порядок?

Коли неявне рівняння вищого порядку буде однорідним? Яка заміна понижує його порядок?

Наведіть узагальнено однорідне неявне рівняння вищого порядку. Яка заміна понижує його порядок?

### **Нормальні системи диференціальних рівнянь та диференціальні рівняння вищого порядку [1, підрозділи 3.1, 3.3]**

Загальний вигляд системи звичайних диференціальних рівнянь.

Означення нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь.

Означення розв'язку нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь.

Як ставиться задача Коші для нормальних систем?

Означення того, що функція  $g(x, \vec{y}) : R^{n+1} \rightarrow R^1$  задовольняє умову Ліпшиця за змінною  $\vec{y}$ .

Означення того, що вектор-функція  $\vec{g}(x, \vec{y}) : R^{n+1} \rightarrow R^{n+1}$  задовольняє умову Ліпшиця за змінною  $\vec{y}$ .

Теорема Пікара для нормальної системи.

Вигляд системи Бейлі.

Загальний вигляд рівняння  $n$ -го порядку, розв'язаного відносно старшої похідної.

Означення розв'язку рівняння  $n$ -го порядку, розв'язаного відносно старшої похідної.

Записати нормальну систему, якій еквівалентне рівняння  $n$ -го порядку, розв'язаного відносно старшої похідної.

Як ставиться задача Коші для рівняння  $n$ -го порядку, розв'язаного відносно старшої похідної?

Теорема Пікара для рівнянь  $n$ -го порядку.

Види рівнянь вищого порядку (рівняння, що не містить незалежної змінної, рівняння, що не містить невідомої функції, однорідне рівняння вищого порядку, узагальнено однорідне рівняння вищого порядку) та методи пониження їх порядку.

### **Лінійні рівняння вищого порядку зі змінними коефіцієнтами [1, підрозділ 3.3]**

Загальний вигляд ЛОР та ЛНОР  $n$ -го порядку.

Що таке коефіцієнти та вільний член ЛНОР  $n$ -го порядку?

Теорема про метод пониження порядку для ЛНОР (з доведенням)?

Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для ЛНОР  $n$ -го порядку?

Вигляд лінійного диференціального оператора  $n$ -го порядку.

Теорема про властивості лінійного диференціального оператора  $n$ -го порядку (з доведенням).

Теорема про властивості лінійних комбінацій розв'язків ЛОР  $n$ -го порядку (з доведенням).

Теорема про комплекснозначні розв'язки ЛОР (з доведенням).

Означення того, що функції  $g_1, \dots, g_n : R^1 \rightarrow R^1$  є лінійно залежними.

Означення того, що функції  $g_1, \dots, g_n : R^1 \rightarrow R^1$  є лінійно незалежними.

Що таке фундаментальна система розв'язків ЛОР  $n$ -го порядку?

Теорема про існування фундаментальної системи розв'язків ЛОР  $n$ -го порядку.

Що таке визначник Вронського набору функцій  $\varphi_1, \dots, \varphi_n : R^1 \rightarrow R^1$ ?

Теорема про властивості визначника Вронського набору функцій  $\varphi_1, \dots, \varphi_n : R^1 \rightarrow R^1$ .

Теорема про структуру загального розв'язку ЛОР  $n$ -го порядку (з доведенням).

Теорема про структуру загального розв'язку ЛНОР  $n$ -го порядку (з доведенням).

Теорема про метод варіації сталих для ЛНОР  $n$ -го порядку (з доведенням).

### **Лінійні рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами [1, підрозділ 3.4]**

Загальний вигляд ЛОР  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами та характеристичне рівняння для нього.

Лема про формулу зсуву для лінійного диференціального оператора  $n$ -го порядку.

Лема про розв'язок ЛОР  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами, що відповідає дійсному кореню  $\lambda \in R$  характеристичного рівняння з кратністю  $k = 1$  (з доведенням).

Лема про розв'язок ЛОР  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами, що відповідає комплексному кореню  $\lambda \in C$  характеристичного рівняння з кратністю  $k = 1$  (з доведенням).

Лема про розв'язок ЛОР  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами, що відповідає дійсному кореню  $\lambda \in R$  характеристичного рівняння з кратністю  $k > 1$  (з доведенням).

Лема про розв'язок ЛОР  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами, що відповідає комплексному кореню  $\lambda \in C$  характеристичного рівняння з кратністю  $k > 1$ .

Теорема про вигляд часткового розв'язку ЛНОР  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами у випадку, коли вільний член рівняння є квазімногочленом.

Теорема про вигляд часткового розв'язку ЛНОР  $n$ -го порядку зі сталими коефіцієнтами у випадку, коли вільний член рівняння є тригонометричним квазімногочленом.

Що таке однорідне та неоднорідне рівняння Ейлера та характеристичне рівняння для нього?

Яка заміна змінних зводить рівняння Ейлера до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами?

Вигляд рівняння для обчислення сили струму в електричному колі, утвореному послідовним з'єднанням джерела напруги, реохорда, конденсатора та котушки.

### **Системи лінійних диференціальних рівнянь [1, підрозділи 4.1-4.2]**

Загальний вигляд нормальної СЛОР та СЛНОР.

Що таке матриця, вільний член лінійної системи?

Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для СЛНОР.

Загальний вигляд лінійного векторного диференціального оператора 1-го порядку.

Теорема про властивості лінійного векторного диференціального оператора 1-го порядку (з доведенням).

Теорема про властивості лінійних комбінацій розв'язків СЛОР (з доведенням).

Означення того, що вектор-функції  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n : R \rightarrow R^n$  є лінійно залежними.

Означення того, що функції  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n : R \rightarrow R^n$  є лінійно незалежними.

Що таке визначник Вронського набору вектор-функцій  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n : R \rightarrow R^n$ ?

Теорема про властивості визначника Вронського набору вектор-функцій  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n : R \rightarrow R^n$ .

Загальний вигляд матричного рівняння?

Означення розв'язку матричного рівняння?

Що таке фундаментальна система розв'язків СЛОР?

Два означення фундаментальної матриці СЛОР.

Теорема про існування фундаментальної матриці СЛОР.

Теорема про структуру загального розв'язку СЛОР (з доведенням).

Теорема про структуру загального розв'язку СЛНОР (з доведенням).

Теорема про метод варіації сталих для СЛНОР (з доведенням).

## **Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами**

### **[1, підрозділ 4.3]**

Загальний вигляд СЛОР зі сталими коефіцієнтами та її характеристичного рівняння.

Який вигляд має розв'язок СЛОР зі сталими коефіцієнтами, що відповідає дійсному власному значенню  $\lambda \in R$  матриці цієї системи коли алгебрична та геометрична кратності співпадають і дорівнюють 1 ?

Який вигляд має розв'язок СЛОР зі сталими коефіцієнтами, що відповідає дійсному власному значенню  $\lambda \in R$  матриці цієї системи коли алгебрична та геометрична кратності не співпадають?

Який вигляд має розв'язок СЛОР зі сталими коефіцієнтами, що відповідає комплексному власному значенню  $\lambda \in C$  матриці цієї системи коли алгебрична і геометрична кратності рівні 1?

Теорема про вигляд часткового розв'язку СЛНОР зі сталими коефіцієнтами у випадку, коли вільний член рівняння є векторним квазімногочленом.

Теорема про вигляд часткового розв'язку СЛНОР зі сталими коефіцієнтами у випадку, коли вільний член рівняння є векторним тригонометричним квазімногочленом.

## **Нормальні загальні системи диференціальних рівнянь [1, розділ 5, підрозділ 8.1]**

Загальний вигляд таких систем диференціальних рівнянь: нормальної, динамічної, нормальної в симетричній формі, динамічної в симетричній формі.

Як формулюється задача Коші для систем диференціальних рівнянь і які умови гарантують її однозначну розв'язність.

Що таке інтегральна крива, траєкторія, стан рівноваги системи?

Що таке тривіальний розв'язок системи?

Що таке нетривіальний розв'язок системи?

Означення того, що розв'язок задачі Коші для нормальної системи стійкий за Ляпуновим.

Означення того, що розв'язок задачі Коші для нормальної системи асимптотично стійкий за Ляпуновим.

Означення того, що розв'язок задачі Коші для нормальної системи нестійкий.

Означення того, що тривіальний розв'язок системи стійкий за Ляпуновим.

Означення того, що тривіальний розв'язок системи асимптотично стійкий за Ляпуновим.

Означення того, що тривіальний розв'язок системи нестійкий.

Теорема про зв'язок питання про стійкість тривіальних та нетривіальних розв'язків різних систем (з доведенням).

Що таке похідна функції  $v: R^n \rightarrow R$  в силу динамічної системи диференціальних рівнянь?

Що таке функція Ляпунова для системи рівнянь?

Теорема Ляпунова про стійкість (з доведенням).

Теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість (з доведенням).

Теорема Четаєва про нестійкість.

Теорема про стійкість тривіального розв'язку СЛОР зі сталими коефіцієнтами.

Що таке система першого наближення для динамічної системи.

Теорема про стійкість за першим наближенням.

Як нормальну систему звести до динамічної?

Означення та критерій того, що функція є першим інтегралом динамічної системи.

Означення та критерій того, що функція є першим нормальної системи.

Коли перші інтеграли системи будуть незалежними?

Теорема про пониження порядку динамічної системи (з доведенням).

Що таке повний набір перших інтегралів динамічної і нормальної систем порядку  $n$ ?

Теорема про існування повного набору перших інтегралів динамічної системи порядку  $n$ .

Теорема про існування повний набір перших інтегралів нормальної систем порядку  $n$ .

Вигляд загального інтегралу динамічної системи.

Вигляд загального інтегралу нормальної системи.

Вигляд системи Лотки-Вольтерра.

Доцент  
кафедри диференціальних рівнянь

Бугрій О.М.