Розв'язання. Продиференціюємо перше рівняння по t:

$$\ddot{y} = -\dot{z}$$

та підставимо в друге рівняння системи:

$$-t^2\ddot{y} + 2y = 0.$$

Отримане рівняння після перепозначень стане однорідним рівнянням Ейлера (3.4.61). Його розв'язок $y = C_1t^{-1} + C_2t^2$, де C_1, C_2 — довільні сталі.

Врахувавши перше рівняння системи, знайдемо $z = -C_1t^{-2} + 2C_2t$.

Відповідь: $y = C_1t^{-1} + C_2t^2$, $z = -C_1t^{-2} + 2C_2t$, де C_1, C_2 — довільні сталі.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Розв'язати системи рівнянь

1) $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

Питання для самоконтролю

1. Наведіть загальний вигляд лінійного векторного диференціального оператора першого порядку.
2. Які властивості лінійного векторного диференціального оператора першого порядку Ви знаєте?
3. Які властивості лінійних комбінацій розв'язків СЛОР Ви знаєте?
4. Дайте означення того, що вектор-функції $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ є лінійно залежними.
5. Дайте означення того, що скалярні функції $g_1, \ldots, g_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є лінійно незалежними.
6. Що таке визначник Вронського набору вектор-функцій?
7. Які властивості має визначник Вронського набору вектор-функцій?
8. Наведіть загальний вигляд матричного диференціального рівняння.
9. Дайте означення розв'язку матричного диференціального рівняння.
10. Що таке фундаментальна система розв'язків СЛОР?
11. Які властивості фундаментальної системи розв'язків СЛОР Ви знаєте?
12. Що таке фундаментальна матриця СЛОР?
13. Сформулюйте теорему про існування фундаментальної матриці СЛОР.
14. Яка структура загального розв'язку СЛОР?
15. Яка структура загального розв'язку СЛНОР?
16. Сформулюйте теорему про метод варіації сталих для СЛНОР.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\sin t & \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ -\cos t & \operatorname{tg} t \end{vmatrix} = -\cos t,$$

то

$$\dot{C}_1(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\sin t \operatorname{tg}^2 t, \quad \dot{C}_2(t) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\cos t.$$

Проінтегрувавши, знайдемо

$$C_1(t) = -\int \sin t \operatorname{tg}^2 t\, dt = -\int \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}\, dt = \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\, d\cos t = -\frac{1}{\cos t} - \cos t + C_1.$$

$$C_2(t) = -\int \cos t\, dt = -\sin t + C_2.$$

Отримані функції підставимо в систему (4.3.69).

$$\begin{aligned} x(t) &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t + \tfrac{\sin t}{\cos t} + \sin t \cos t - \sin t \cos t = \\ &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t + \operatorname{tg} t, \\ y(t) &= -C_1 \cos t - C_2 \sin t + 1 + \cos^2 t + \sin^2 t = -C_1 \cos t - C_2 \sin t + 2. \end{aligned}$$

Тоді загальним розв'язком системи (4.3.69) є

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + \operatorname{tg} t, \\ y(t) = -C_1 \cos t - C_2 \sin t + 2, \end{cases} \tag{4.3.71}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Відповідь: Загальним розв'язком (4.3.67) є (4.3.71).

Вправи для самостійного розв'язування

I. Знайшовши власні значення (де їх не вказано) та власні вектори відповідної матриці, розв'язати системи рівнянь

1) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z, \end{cases}$ $(\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 3)$;

2) $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0, \\ \dot{y} + 3x + y = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = 3x + y - z, \\ \dot{z} = x + z, \end{cases}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2)$;

5) $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2z - y, \end{cases}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2)$;

6) $\begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x, \end{cases}$ $(\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = 3 \pm i)$;

8) $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = y - x + z, \\ \dot{z} = x - z, \end{cases}$ $(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1)$;

9) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x, \\ \dot{y} = 4x + y, \\ \dot{z} = 2x + y - z, \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1)$;

11) $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y; \end{cases}$

12) $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y, \end{cases}$ $(\lambda_{1,2} = \pm 1,\ \lambda_3 = 2)$;

13) $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z, \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i)$;

14) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y; \end{cases}$

15) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 2x - y - 2z, \\ \dot{z} = 2z - x + y, \end{cases}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1)$.

II. За допомогою методу варіації сталих розв'язати системи лінійних неоднорідних рівнянь

16) $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}; \end{cases}$

17) $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x - y; \end{cases}$

18) $\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + 6 \operatorname{tg} t + 15; \end{cases}$

19) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}; \end{cases}$

20) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}; \end{cases}$

21) $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}. \end{cases}$

III. За допомогою методу невизначених коефіцієнтів розв'язати системи лінійних неоднорідних рівнянь

22) $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y; \end{cases}$

23) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y; \end{cases}$

24) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^t, \\ \dot{y} = -2x + 2t; \end{cases}$

25) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t; \end{cases}$

26) $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dot{y} = y - 2x; \end{cases}$

27) $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin\ t, \\ \dot{y} = 2x - y; \end{cases}$

28) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$

$$\frac{dt}{t} = -\frac{d(y-z)}{y-z}.$$

Таким чином, ми одержали ЗДР стосовно змінних t та $y-z$. Його розв'язком є функція $\ln|t| = -\ln|y-z| + \ln|C_2|$, де C_2 — довільна стала, звідси

$$C_2 = t(y-z).$$

Отже, іншим першим інтегралом системи буде функція

$$u_2(t,y,z) = t(y-z). \tag{5.1.24}$$

Крім того,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} & \dfrac{\partial u_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y} & \dfrac{\partial u_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 2y & 2z \\ y-z & t & -t \end{pmatrix} = 2,$$

бо

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2y \\ y-z & t \end{pmatrix} = 2y(z-y) \not\equiv 0.$$

Відповідь: ПНПІ складають функції (5.1.23) та (5.1.24).

Вправи для самостійного розв'язування

I. Розв'язати системи рівнянь

1) $\dfrac{dx}{2y-z} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$;

2) $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{xy+z}$;

3) $\dfrac{dx}{y-x} = \dfrac{dy}{x+y+z} = \dfrac{dz}{x-y}$;

4) $\dfrac{dx}{y-u} = \dfrac{dy}{z-x} = \dfrac{dz}{u-y} = \dfrac{du}{x-z}$;

5) $\dfrac{dx}{x(y+z)} = \dfrac{dy}{z(z-y)} = \dfrac{dz}{y(y-z)}$;

6) $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{z}$;

7) $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{xz} = \dfrac{dz}{y}$;

8) $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{u} = \dfrac{dz}{x} = \dfrac{du}{y}$;

9) $\dfrac{dx}{xz} = \dfrac{dy}{yz} = \dfrac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}$;

10) $-\dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dy}{xy - 2z^2} = \dfrac{dz}{xz}$;

11) $\dfrac{dx}{y+z} = \dfrac{dy}{x+z} = \dfrac{dz}{x+y}$;

12) $\dfrac{dx}{z^2 - y^2} = \dfrac{dy}{z} = -\dfrac{dz}{y}$;

13) $\dfrac{dx}{x(y^2 - z^2)} = -\dfrac{dy}{y(z^2 + x^2)} = \dfrac{dz}{z(x^2 + y^2)}$;

14) $\dfrac{dx}{x + y^2 + z^2} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$;

15) $\dfrac{dx}{x(z-y)} = \dfrac{dy}{y(y-x)} = \dfrac{dz}{y^2 - xz}$.

Питання для самоконтролю

1. Запишіть загальний вигляд автономної системи диференціальних рівнянь.
2. Запишіть автономну систему диференціальних рівнянь у симетричній формі.
3. Яку функцію називають першим інтегралом автономної системи диференціальних рівнянь?
4. Скільки достатньо знайти перших інтегралів автономної системи диференціальних рівнянь порядку n, щоб звести її до рівняння 1-го порядку? Якою властивістю повинні володіти вказані перші інтеграли?
5. Що таке стан рівноваги автономної системи диференціальних рівнянь?

5.2. Перші інтеграли нормальних систем

5.2.1. Зв'язок між нормальною та динамічними системами. Нехай $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — область, $f_1, \ldots, f_n \in C^1(D)$ — деякі функції. Розглянемо тепер нормальну систему ЗДР в загальному вигляді

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \quad\vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n), \end{cases} \qquad x \in \langle a, b \rangle, \tag{5.2.1}$$

чи у векторній формі

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(x, \vec{y}), \quad x \in \langle a, b \rangle, \tag{5.2.1$'$}$$

де $\vec{y} = \operatorname{colon}(y_1, \ldots, y_n)$, $\vec{y}\,' = \operatorname{colon}(y_1', \ldots, y_n')$, $\vec{f} = \operatorname{colon}(f_1, \ldots, f_n)$. Систему (5.2.1) чи (5.2.1$'$) можна записати в такій *симетричній формі*

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dx}{1}, \tag{5.2.2}$$

Тому аналогічно як і для динамічної системи ЗДР, для (5.2.1) вводиться, наприклад, поняття першого інтеграла системи.

Вправи для самостійного розв'язування

Звести систему до симетричної форми і розв'язати

1) $\begin{cases} y' = x/z, \\ z' = -x/y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y' = y^2 z, \\ z' = \dfrac{z}{x} - yz^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y' = y^2/(z-x), \\ z' = y+1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y' = 15z/(y-z)^2, \\ z' = 15y/(z-y)^2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} y' = 2ty/(t^2-y^2-z^2), \\ z' = 2tz/(t^2-y^2-z^2). \end{cases}$

Питання для самоконтролю

1. Запишіть нормальну систему диференціальних рівнянь у симетричній формі.
2. Яку функцію називають першим інтегралом нормальної системи диференціальних рівнянь?
3. Скільки достатньо знайти перших інтегралів нормальної системи диференціальних рівнянь, щоб можна було записати її загальний розв'язок? Якою властивістю повинні володіти вказані перші інтеграли?

Крім того, $\frac{dy}{-x^2y} = \frac{dz}{3y}$, $\frac{dy}{-x^2} = \frac{dz}{3}$, $\frac{-3y^2dy}{C_1^2} = dz$, $\frac{-y^3}{x^2y^2} = z + C_2$, тобто

$$-\frac{y}{x^2} - z = C_2. \tag{6.1.19}$$

Подивимося на (6.1.18) та (6.1.19) як на систему рівнянь. Підставимо цю систему в початкову умову при $z = 0$ та виразимо x, y через C_1, C_2:

$$\begin{cases} xy = C_1, \\ -\frac{y}{x^2} = C_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\sqrt[3]{\frac{C_1}{C_2}}, \\ y = -\sqrt[3]{C_1^2C_2}. \end{cases}$$

Отже, розв'язком задачі Коші є функція типу (6.1.10):

$$u = xy^2\Big|_{\substack{x=-\sqrt[3]{\frac{C_1}{C_2}}, \\ y=-\sqrt[3]{C_1^2C_2}}} = -\sqrt[3]{\frac{C_1}{C_2}}\sqrt[3]{C_1^4C_2^2}\Big|_{\substack{C_1=xy \\ C_2=-\frac{y}{x^2}-z}} = \sqrt[3]{x^3y^6 + zy^5x^5}.$$

Відповідь: $u = \sqrt[3]{x^3y^6 + zy^5x^5}$.

Вправи для самостійного розв'язування

I. Знайти загальний розв'язок рівнянь

1) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$;

2) $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = x - y$;

3) $(x - z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y - z)\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$;

4) $e^x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = ye^x$;

5) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + xy\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$;

6) $(y + z)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (z + x)\dfrac{\partial u}{\partial y} + (x + y)\dfrac{\partial u}{\partial z} = u$.

II. Розв'язати задачі Коші

7) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + xy\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = x^2 + y^2$, $z = 0$;

8) $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + yz\dfrac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$, $x - y = 0$, $x - yz = 1$;

9) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = 2x$, $y = 1$;

10) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z^2(x - 3y)$, $x = 1$, $yz + 1 = 0$;

11) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + 2\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = yz$, $x = 1$;

12) $(x-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z\,,\ x-y=2\,,\ z+2x=1\,;$

13) $2\sqrt{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\,,\ z=y^2\,,\ x=1\,;$

14) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\dfrac{\partial z}{\partial y}=y\,,\ y=2z\,,\ x+2y=z\,;$

15) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+(2e^x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\,,\ z=y\,,\ x=0\,;$

16) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-(xz+y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z\,,\ x+y=2z\,,\ xz=1\,;$

17) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy\,,\ x=2\,,\ z=y^2+1\,;$

18) $(x-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z\,,\ x-y=2\,,\ z+2x=1\,.$

Питання для самоконтролю

1. Що таке порядок рівняння із частинними похідними?
2. Наведіть вигляд квазілінійного рівняння із частинними похідними першого порядку.
3. Наведіть вигляд лінійного однорідного рівняння із частинними похідними першого порядку.
4. Сформулюйте задачу Коші для лінійного однорідного рівняння із частинними похідними першого порядку. Які умови гарантують існування її розв'язку?

Підставимо (7.2.32), (7.2.33), (7.2.34) в (7.2.30):

$$2y_2 + 6y_3x + 12y_4x^2 + \dots + ny_n(n-1)x^{n-2} + \dots =$$

$$= x(2y_2x + 3y_3x^2 + 4y_4x^3 + \dots + ny_nx^{n-1} + \dots) -$$

$$-(y_0 + y_1x + y_2x^2 + y_3x^3 + y_4x^4 + \dots + y_nx^n + \dots) + 5.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x та знаходимо

$x^0: \ 2y_2 = -1 + 5;$
$x^1: \ 6y_3 = 0;$
$x^2: \ 12y_4 = 2y_2 - y_2;$
$x^3: \ 20y_5 = 3y_3 - y_3;$
$x^4: \ 30y_6 = 4y_4 - y_4,$

а тому

$$y_2 = 2, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = \frac{1}{6}, \quad y_5 = 0, \quad y_6 = \frac{1}{60}.$$

Підставимо ці коефіцієнти в ряд (7.2.32) та виписуємо перші чотири ненульові члени ряду

$$y(x) \approx 1 + 2x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{60}x^6. \tag{7.2.35}$$

Відповідь: розв'язок задачі (7.2.30), (7.2.31) наближено задає формула (7.2.35).

Вправи для самостійного розв'язування

I. Знайти у вигляді ряду розв'язки рівнянь

1) $y'' = x^2y, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 1;$
2) $xy'' + y' + xy = 0, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 0;$
3) $y'' + xy = 0, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 0;$
4) $y'' = xy' + y, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1;$
5) $y'' - xy' + y = 1, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 0.$

II. Знайти перші шість членів розвинення в степеневий ряд розв'язку задачі Коші

6) $y'' - (1+x^2)y = 0, \quad y(0) = -2, \ y'(0) = 2.$

III. Знайти перші шість членів розвинення в степеневий ряд розв'язку рівняння

7) $y'' = ye^x.$

Питання для самоконтролю

1. Яку функцію називають аналітичною?
2. Які умови гарантують існування аналітичного розв'язку лінійного рівняння другого порядку?
3. Наведіть вигляд рівняння Бесселя порядку s.
4. Що таке функції Бесселя? Які вони бувають?
5. Які властивості функцій Бесселя ви знаєте?

Вправи для самостійного розв'язування

1. Знайти власні значення та власні функції задачі Штурма-Ліувілля для рівняння

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

з такими крайовими умовами

1) $X(0) = 0\,,\; X(\pi) = 0\,;$
2) $X(0) = 0\,,\; X'(\ell) = 0\,;$
3) $X'(0) = 0\,,\; X(\ell) = 0\,;$
4) $X'(0) = 0\,,\; X'(\ell) = 0\,;$
5) $X(0) = 0\,,\; X'(\ell) + h\,X(\ell) = 0$, де $h > 0\,;$
6) $X'(0) = 0\,,\; X'(\ell) + h\,X(\ell) = 0$, де $h > 0\,;$
7) $X'(0) - h\,X(0) = 0\,,\; X(\ell) = 0$, де $h > 0\,;$
8) $X'(0) - h\,X(0) = 0\,,\; X'(\ell) = 0$, де $h > 0\,;$
9) $X'(0) - h\,X(0) = 0\,,\; X'(\ell) + h\,X(\ell) = 0$, де $h > 0\,.$

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте регулярну задачу Штурма-Ліувілля.
2. Що таке власне значення регулярної задачі Штурма-Ліувілля? Які властивості власних значень ви знаєте?
3. Що таке власна функція регулярної задачі Штурма-Ліувілля? Які властивості власних функцій ви знаєте?
4. Яка функція називається кусково-неперервною? Наведіть приклад такої функції.
5. Сформулюйте теорему Стєклова.
6. Наведіть рівність Парсеваля.
7. Доведіть, що ряд (7.3.17) з доведення теореми 2 є абсолютно та рівномірно збіжним.

7.4. Сингулярна задача Штурма-Ліувілля та властивості її розв'язків

Тепер перейдемо до вивчення сингулярної задачі Штурма-Ліувілля. Рівняння знову розглядатимемо в дивергентному вигляді. Для усунення можливих непорозумінь, невідому функцію позначимо $P = P(r)$ і задачу розглядатимемо на відрізку $[0, R]$, де $R > 0$ — деяке число. Припустимо, що виконується умова

(S): $p \in C^1((0, R])\,,\; p(r) > 0\,,\; x \in (0, R]\,,\; q, \rho \in C((0, R])\,,\; \rho(r) > 0\,,\; r \in (0, R]\,,$
$p(0) = 0\,,\; b_R, c_R \in \mathbb{R}\,,\; |b_R| + |c_R| \neq 0\,.$

Розглянемо *сингулярну (у точці $r = 0$) задачу Штурма-Ліувілля* (див. підрозділ 7.1):

$$(p(r)\,P'(r))' + q(r)\,P(r) = -\lambda\rho(r)\,P(r), \quad r \in (0, R], \tag{7.4.1}$$

$$|P(0)| < +\infty, \quad |P'(0)| < +\infty, \tag{7.4.2}$$

$$h_n^2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\pi^2-\varphi^2)\sin(n\varphi)\,d\varphi = -\frac{\pi}{n}\cos(n\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi^2\sin(n\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\varphi^2\cos(n\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi\cos(n\varphi)\,d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{\pi n^2}\varphi\sin(n\varphi)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n^2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(n\varphi)\,d\varphi = 0.$$

Відповідь: виконується рівність

$$h(\varphi) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(n\varphi), \quad \varphi\in[-\pi,\pi].$$

Вправи для самостійного розв'язування

I. Розкласти функцію $f(x)$, в ряд Фур'є за основною тригонометричною системою функцій на відрізку I, якщо

1) $f(x) = \begin{cases} x, & 0\le x\le \pi/2, \\ \pi/2, & \pi/2\le x\le\pi, \end{cases} \quad I=[-\pi;\pi]$;
2) $f(x) = \frac{2A}{\pi}(\frac{\pi}{2}-x)$, $I=[0;\pi]$;
3) $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$, $I=[0;2\pi]$;
4) $f(x) = x^2$, $I=[0;2\pi]$;
5) $f(x) = \cos ax$, $a\notin\mathbb{Z}$, $I=[0;2\pi]$;
6) $f(x) = \sin ax$, $a\notin\mathbb{Z}$, $I=[-\pi;\pi]$.

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте задачу Штурма-Ліувілля з умовами періодичності.
2. Що таке власне значення задачі Штурма-Ліувілля з умовами періодичності? Які властивості власних значень ви знаєте?
3. Що таке власна функція задачі Штурма-Ліувілля з умовами періодичності? Які властивості власних функцій ви знаєте?
4. Сформулюйте теорему про розклад функції в ряд за основною тригонометричною системою функцій.