Лекція 6

Тема 2. Множини, функції, відношення

План лекції

- Означення відношення
- Функції як відношення
- Подання відношень матрицями та орієнтованими графами
- Властивості бінарних відношень на множині
- Теоретико-множинні операції над відношеннями
- Композиція відношень
  - Теорема про властивість степеня транзитивного відношення

Означення відношення

Бінарне відношення з множини A в множину B **– це підмножина *R* декартового добутку $A\times B$ цих множин: $R\subset A\times B$. Інакше кажучи, бінарне відношення з *A* в *B* – це якась множина впорядкованих пар, у якій перший елемент пари належить множині *A*, а другий – множині *B*. Якщо $(a, b)\in R$, то пишуть *aRb*.**

Приклад 1. Нехай $A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{a, b\}$ та задано відношення $R=\{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$. Отже, $0Ra$, оскільки $(0, a)\in R$, а $(1, b)\notin R$.

Здебільшого розглядають бінарні відношення за умови *A*=*B*.

Відношенням на множині A **називають бінарне відношення з *A* в *A*. Інакше кажучи, відношенням *R* на множині *A* – це підмножина декартового квадрату множини *A*, тобто $R\subset A^2$.**

Приклад 2. Нехай $A=\{1, 2, 3, 4\}$. Які впорядковані пари утворюють відношення

$$R = \{(a, b) \mid a \text{ ділить } b\}?$$

Очевидно, що $R=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$.

Функції як відношення

Нагадаємо, що функція f із множини A в множину B кожному елементу множини A ставить у відповідність точно один елемент множини B. Графік функції f – це множина упорядкованих пар (a,b) таких, що $b = f(a)$. Тому що графік функції f є підмножиною $A \times B$, він є відношенням із A в B. Більше того, графік функції має таку властивість, що кожний елемент з A є **першим елементом точно одної впорядкованої пари**.

Відношення можна використати для того, щоб задати відповідність «один до багатьох» між елементами множин A та B, у якій елементу $a \in A$ може відповідати **більше ніж один** елемент множини B. Тоді як функція репрезентує відношення, коли кожному елементу множини A відповідає **точно один** елемент множини B.

Висновок. Відношення можна розглядати як узагальнення графіків функцій. Їх можна використовувати для зображення ширшого ніж функції класу взаємозв'язків між множинами.

Подання відношень матрицями та орієнтованими графами

Бінарне відношення на множині A можна подати за допомогою булевої матриці або орієнтованого графа.

Булевою **називають матрицю, елементи якої – нулі та одиниці.**

Матриця, яка задає відношення R на n-елементній множині A, – це булева $n \times n$ матриця $M_R=[m_{ij}]$, $i, j = 1, \ldots, n$, де

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } (a_i, a_j) \in R, \\ 0, \text{ якщо } (a_i, a_j) \notin R. \end{cases}$$

Орієнтований граф **складається із множини *V вершин* і множини *E дуг*; кожна *дуга* – це упорядкована пара вершин із *V*. Якщо (*a*, *b*) – дуга, то вершину *a* називають *ініціальною* (або *початковою*), а вершину *b* – *термінальною* (або *кінцевою*) вершиною дуги. Дугу (*a*, *a*), яка має ініціальною й термінальною одну й ту саму вершину *a*, називають *петлею*.**

Граф G_R, який задає відношення R на множині A, будують так. Вершини графа позначають елементами цієї множини, а дуга (a_i, a_j) існує тоді й лише тоді, коли пара $(a_i, a_j) \in R$. Такий граф G_R називають *графом, асоційованим із відношенням* R, або просто *графом відношення* R.

Приклад 3. На рис. 1 зображено матрицю та граф, які задають відношення *ділить* з прикладу 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

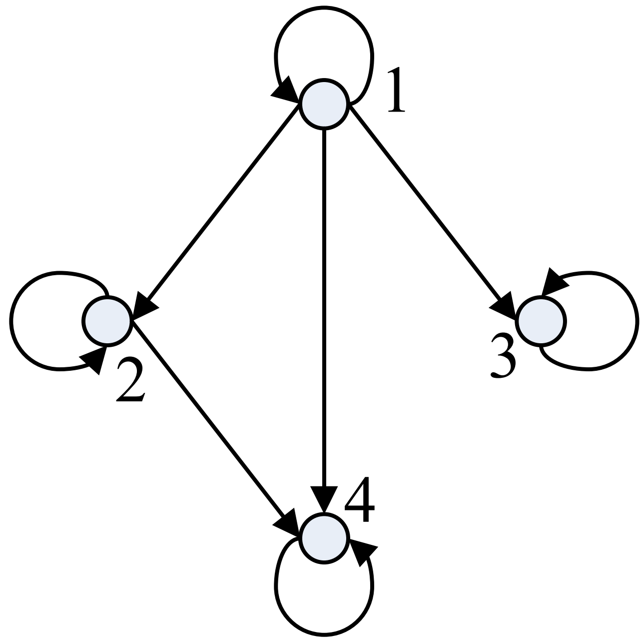


Рис. 1

Властивості бінарних відношень на множині

Розглянемо властивості відношень на множині A.

Відношення R на множині A називають *рефлексивним*, якщо для будь-якого $a \in A$ виконується $(a, a) \in R$.

Приклад 4. Розглянемо шість відношень на множині $A=\{1, 2, 3, 4\}$:

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$;

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$;

$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$;

$R_4 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$;

$R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$;

$R_6 = \{(3, 4)\}$.

Відношення R_3 та R_5 рефлексивні,

Відношення R на множині A називають *іррефлексивним*, якщо для будь-якого $a \in A$ виконується $(a, a) \notin R$.

Наприклад, відношення R_4, R_6 із прикладу 4 іррефлексивні, а R_1, R_2 – не рефлексивні й не іррефлексивні.

Відношення R на множині A називають *симетричним*, якщо для будь-яких a, $b \in A$ з того, що $(a, b) \in R$, випливає, що $(b, a) \in R$.

У прикладі 4 лише відношення R_2 та R_3 симетричні.

Відношення R на множині A називають *антисиметричним*, якщо для всіх a, $b \in A$ з того, що $(a, b) \in R$ і $(b, a) \in R$, випливає, що $a = b$.

Інакше кажучи, відношення антисиметриче, якщо в разі $a \neq b$ воно водночас не містить пар (a, b) та (b, a).

У прикладі 4 антисиметричні лише відношення R_4, R_5 та R_6. У кожному з них немає таких пар елементів a та b ($a \neq b$), що одночасно $(a, b) \in R$ та $(b, a) \in R$.

Важливо зазначити, що властивості симетричності й антисиметричності не антагоністичні: існують відношення, які мають обидві ці властивості.

Приклад 5. Відношення $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ (*діагональне відношення*) на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$ є симетричним і антисиметричним одночасно.

Приклад 6. Відношення R_1 з прикладу 4 ані симетричне, ані антисиметричне.

Відношення R на множині A називають *асиметричним*, якщо для всіх $a, b \in A$ з того, що $(a, b) \in R$, випливає, що $(b, a) \notin R$.

Зрозуміло, що будь-яке асиметричне відношення має бути й антисиметричним. Обернене твердження неправильне. Відношення R_5 із прикладу 4 антисиметричне, проте не асиметричне, бо містить пари (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4).

Відношення R на множині A називають *транзитивним*, якщо для будь-яких $a, b, c \in A$ з того, що $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in R$, випливає $(a, c) \in R$.

Відношення R_4, R_5 та (зверніть увагу!) R_6 із прикладу 4 транзитивні. Справді, якщо пари (a, b) та (b, c) належать цим відношенням, то й пара (a, c) теж належить.

Відношення R_1, R_2, R_3 із прикладу 4 не транзитивні: $(3, 4) \in R_1$, $(4, 1) \in R_1$, але $(3, 1) \notin R_1$; $(2, 1) \in R_2$, $(1, 2) \in R_2$, але $(2, 2) \notin R_2$; $(2, 1) \in R_3$, $(1, 4) \in R_3$, але $(2, 4) \notin R_3$.

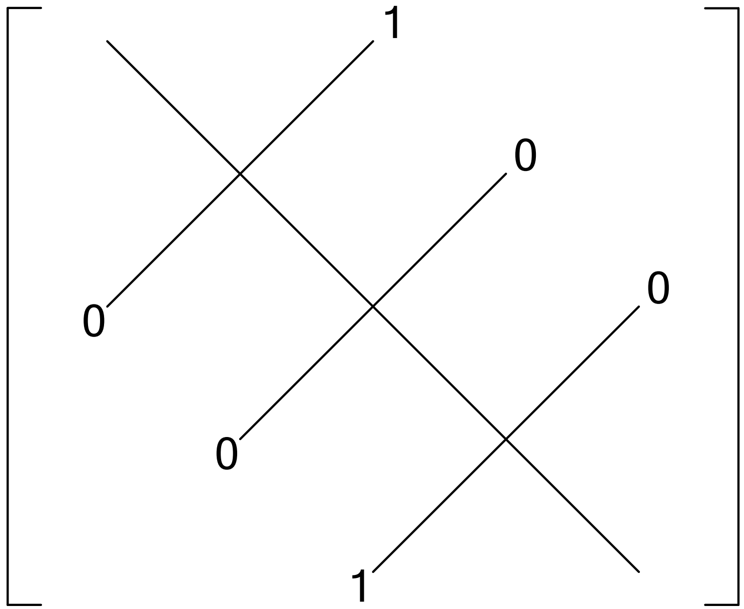


Рис. 2

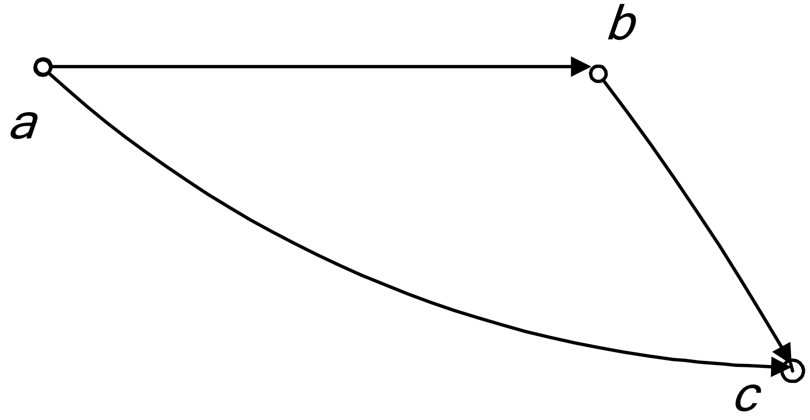
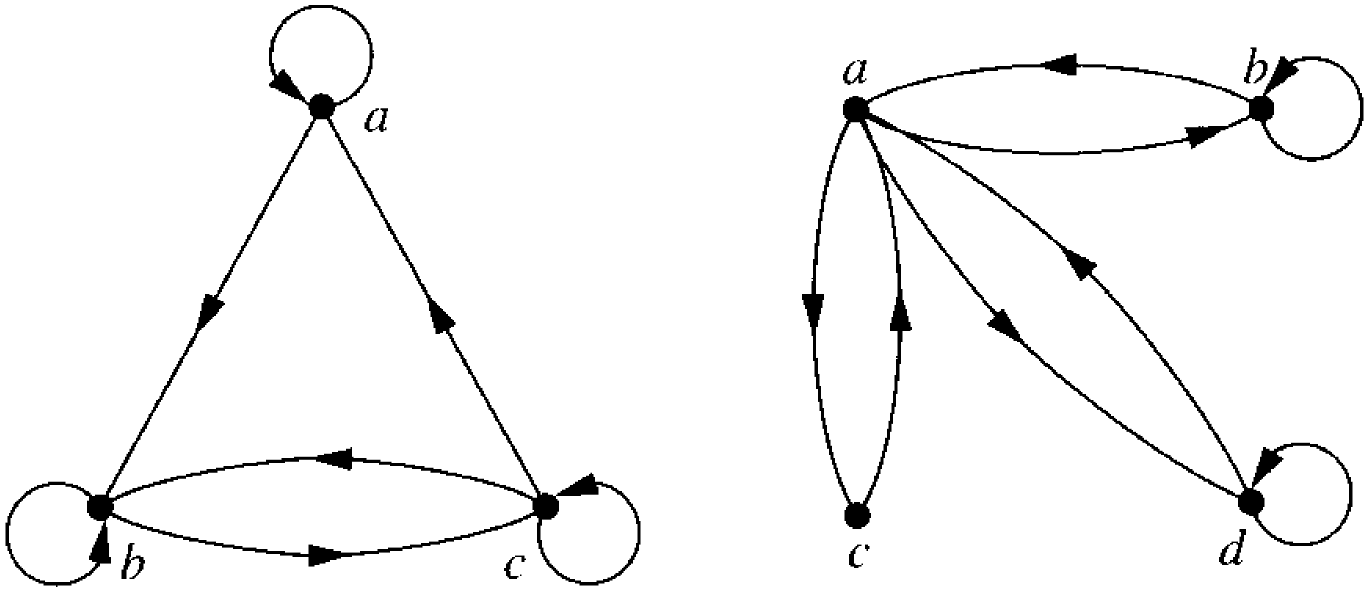


Рис. 3

Розглянемо, як деякі властивості відношень відображаються на матрицях і графах цих відношень. Якщо відношення R рефлексивне, то на головній діагоналі матриці M_R лише одиниці, якщо іррефлексивне – то нулі. Матриця M_R симетричного відношення симетрична. Матриця M_R антисиметричного відношення R має таку властивість: якщо $i \neq j$, то з $m_{ij}=1$, випливає $m_{ji}=0$ (але може бути $m_{ij}=m_{ji}=0$) (рис. 2).

Граф G_R рефлексивного відношення R має петлю в кожній вершині. У графі транзитивного відношення в разі наявності пари дуг (a, b) та (b, c) обов'язково є дуга (a, c) (рис. 3).

Приклад 7. На рис. 4 зображено орієнтовані графи відношень *R* та *S*. Для кожного з відношення визначити, чи є воно рефлексивним, симетричним, антисиметричним, транзитивним.



(*а*) Орієнтований граф відношення *R* (*б*) Орієнтований граф відношення *S*

Рис. 4

Теоретико-множинні операції над відношеннями

Оскільки відношення з множини A в множину B – підмножина декартового добутку $A\times B$, то над будь-якими двома відношеннями з A в B можна виконувати звичайні теоретико-множинні операції.

Приклад. Нехай $A=\{1, 2, 3\}$ та $B=\{1, 2, 3, 4\}$. Визначимо відношення R_1 та R_2 з A в B:

$R_1=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$,

$R_2=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$.

Тоді

$R_1\cup R_2=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$,

$R_1\cap R_2=\{(1, 1)\}$,

$R_1\setminus R_2=\{(2, 2), (3, 3)\}$,

$R_2\setminus R_1=\{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$.

Композиція відношень

Нехай R – відношення із множини A в множину B, а S – відношення із множини B в множину C.

Композицією відношень R і S називають відношення, яке складається з усіх можливих упорядкованих пар (a, c), де $a \in A$, $c \in C$, для яких існує такий елемент $b \in B$, що $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in S$.

Композицію відношень R та S позначають як $S \circ R$ (ми пишемо справа перше з двох відношень, які беруть участь у композиції, як і для композиції функцій).

Приклад. Знайдемо композицію відношень R і S, де R – відношення з множини $A=\{1,2,3\}$ в множину $B=\{1, 2, 3, 4\}$:

$$R=\{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\};$$

S – відношення з множини B в множину $C=\{0, 1, 2\}$:

$$S=\{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}.$$

$$S \circ R=\{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}.$$

Нехай R – відношення на множині A. Степінь R^n, n=1, 2, 3 …, означають за допомогою рекурсії:

$R^1=R$,

$R^{n+1}=R^n\circ R$.

Отже, зокрема

$R^2=R\circ R$,

$R^3=R^2\circ R=(R\circ R)\circ R$.

Приклад 8. Нехай на множині $A=\{1, 2, 3, 4\}$ задано відношення $R=\{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$. Знайдемо R^n, $n = 2, 3, 4, 5$. За означенням послідовно отримаємо:

$R^2=R\circ R=\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$,

$R^3=R^2\circ R=\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$,

$R^4=R^3\circ R=\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$,

тобто $R^4=R^3$. Можна переконатись, що $R^5=R^4$.

Теорема. Якщо $R^2 \subset R$, то відношення транзитивне.

Доведення. За означенням композиції, якщо $(a, b) \in R$ та $(b, c) \in R$, то $(a, c) \in R^2$. Оскільки $R^2 \subset R$, то це означає, що $(a, c) \in R$. Отже, відношення R транзитивне.

Теорема про властивість степеня транзитивного відношення. Нехай R – транзитивне відношення на множині A. Тоді $R^n \subset R$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Доведення. Застосуємо математичну індукцію. У разі $n = 1$ твердження теореми тривіальне. Гіпотеза індукції: $R^n \subset R$. Для завершення доведення потрібно переконатись, що із цієї гіпотези випливає включення $R^{n+1} \subset R$. Припустімо, що $(a, b) \in R^{n+1}$. Оскільки $R^{n+1} = R^n \circ R$, то існує такий елемент $x \in A$, що $(a, x) \in R$ та $(x, b) \in R^n$. За індуктивною гіпотезою $R^n \subset R$, звідки випливає, що $(x, b) \in R$. Позаяк відношення R транзитивне, то з $(a, x) \in R$ та $(x, b) \in R$ випливає, що $(a, b) \in R$. Отже, $R^{n+1} \subset R$.