Лекція 1

Тема 1. Булеві функції

План лекції

- **Означення функції алгебри логіки (булевої функції). Реалізація функцій формулами**
- **Еквівалентність формул**
- **Двоїстість**

Означення функції алгебри логіки (булевої функції). Реалізація функцій формулами

Функцією алгебри логіки, або *булевою функцією* називають функцію $f(x_1, \ldots, x_n)$ з областю значень $\{0, 1\}$, змінні $x_1, \ldots, x_n$ якої також набувають лише цих двох значень. Множину всіх булевих функцій позначають P_2, множину булевих функцій від n змінних – $P_2(n)$.

Булеву функцію від n змінних називають *n-місною*. Область її визначення – множина B^n усіх двійкових упорядкованих наборів довжиною n. Отже, область визначення n-місної булевої функції скінченна й складається з 2^n наборів. Для набору $(a_1, \ldots, a_n)$ у цьому розділі будемо використовувати позначення $\tilde{a}^n$ або $\tilde{a}$ (якщо довжина набору зрозуміла з контексту).

Віддаллю Геммінга між наборами $\tilde{a}^n$ та $\tilde{b}^n$ називають число $\rho\left(\tilde{a}^n, \tilde{b}^n\right)$, що дорівнює кількості компонент, у яких набори $\tilde{a}^n$ та $\tilde{b}^n$ різняться:

$$\rho\left(\tilde{a}^n, \tilde{b}^n\right) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|.$$

Набори $\tilde{a}^n$ та $\tilde{b}^n$ називають *сусідніми*, якщо $\rho\left(\tilde{a}^n, \tilde{b}^n\right) = 1$, і *протилежними*, якщо $\rho\left(\tilde{a}^n, \tilde{b}^n\right) = n$. Отже, сусідні набори різняться точно однією компонентою, а протилежні – усіма n компонентами. Наприклад, набори (0100) і (1100) – сусідні, а (0100) і (1011) – протилежні.

Скінченність області визначення булевих функцій дає змогу задавати такі функції за допомогою таблиць. Розглянемо двійкові набори значень змінних як записи цілих чисел у двійковій системі числення. Це означає, що набір $\tilde{a}^n = (a_1, \ldots, a_n)$ ототожнюють із записом числа

$$a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot 2 + a_n.$$

Назвемо це число номером набору $\tilde{a}^n$. Наприклад, для тримісної булевої функції номер набору 110 – число $1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 = 6$.

Номери наборів значень змінних *n-місної* булевої функції змінюються від 0 до $2^n - 1$. Розмістимо набори в стовпчик за зростанням їх номерів і покажемо значення функції на кожному наборі. Одержимо *таблицю булевої функції*:

$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$	$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0 0 . . . 0 0	$f(0, 0, \ldots, 0, 0)$
0 0 . . . 0 1	$f(0, 0, \ldots, 0, 1)$
0 0 . . . 1 0	$f(0, 0, \ldots, 1, 0)$
....	....
1 1 . . . 1 1	$f(1, 1, \ldots, 1, 1)$

Правий стовпець (стовпець значень функції) складається з 2^n нулів і одиниць. Отже, n-місних булевих функцій стільки, скільки наборів довжиною 2^n з нулів і одиниць. Тому справджується таке твердження.

Теорема. Кількість різних булевих функцій від n змінних, дорівнює 2^{2^n}.

Далі ми завжди будемо передбачати розташування наборів у порядку зростання їхніх номерів (від 0 до 2^n-1). Тому функцію $f(\tilde{x}^n)=f(x_1,\dots,x_n)$ можна задати вектором її значень $\tilde{y}_f=(y_0,y_1,\dots,y_{2^n-1})$, у якому компонента y_i – це значення функції $f(\tilde{x}^n)$ на i-му наборі значень змінних, де i=0, 1, …, 2^n-1.

Множину наборів, на яких булева функція $f(\tilde{x}^n)$ набуває значення 1, позначають N_f:

$$N_f=\{\,\tilde{a}^n\mid \tilde{a}^n\in B^n, f(\tilde{a}^n)=1\,\}.$$

Очевидно, що множина N_f повністю визначає функцію f.

Змінну x_i функції $f(x_1,\dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1},\dots, x_n)$ називають *істотною*, якщо існує такий набір $(a_1,\dots, a_{i-1}, a_{i+1},\dots, a_n)$ значень решти змінних, що

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n)\neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Змінну, яка не є істотною, називають *неістотною* або *фіктивною*. Отже, змінна x_i функції $f(x_1,\dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1},\dots, x_n)$ неістотна (фіктивна), якщо

$$f(x_1,\dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1},\dots, x_n)=f(x_1,\dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1},\dots, x_n)$$

для будь-яких значень решти змінних. Це означає, що зміна значення x_i в довільному наборі значень x_1, …, x_n не змінює значення функції. Тоді функція $f(x_1, \dots, x_n)$ по суті залежить від $(n-1)$ змінної, тобто являє собою функцію $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. У такому разі говорять, що функцію g отримано з функції f *вилученням* фіктивної змінної, а функція f отримано з g *введенням* фіктивної змінної. Функції f і g називають *рівними*, якщо функцію g можна одержати з f уведенням або вилученням фіктивних змінних.

Фіктивні змінні вилучають тому, що вони не впливають на значення функції, і з цього погляду зайві. Проте іноді корисно вводити фіктивні змінні. Завдяки цьому будь-яку функцію n змінних можна зробити функцією довільної більшої кількості змінних. Тому можна вважати, що всі функції зі скінченної множини $\{f_1, \dots, f_s\}$ залежать від одних і тих самих змінних x_1, …, x_n. Зокрема, твердження $|P_2(n)|=2^{2^n}$ теореми про кількість булевих функцій передбачає, що ми враховуємо **всі** булеві функції від n змінних, включаючи функції з фіктивними змінними.

Зі зростанням кількості змінних швидко збільшується кількість залежних від них булевих функцій. Наприклад, різних булевих функцій чотирьох змінних є $2^{2^4}\approx 65$ тис., а п'яти – $2^{2^5}\approx 4$ млрд. Зі збільшенням кількості змінних таблиці для булевих функцій стають громіздкими, і ними незручно користуватись.

Розглянемо аналітичний метод подання булевих функцій, тобто подання функцій формулами. Спочатку за допомогою таблиць означають функції, які називають *елементарними*.

x	0	1	x	$\neg x$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

x_1 x_2	x_1x_2	$x_1\vee x_2$	$x_1\to x_2$	$x_1\leftrightarrow x_2$	$x_1\oplus x_2$	$x_1\mid x_2$	$x_1\downarrow x_2$
0 0	0	0	1	1	0	1	1
0 1	0	1	1	0	1	1	0
1 0	0	1	0	0	1	1	0
1 1	1	1	1	1	0	0	0

Уведені елементарні функції мають такі назви.

1. $f_1(x) = 0$ – *константа* 0.
2. $f_2(x) = 1$ – *константа* 1.
3. $f_3(x) = x$ – *тотожна функція.*
4. $f_4(x) = \neg x$ – *заперечення x*, читають „не x" (іноді використовують запис $\overline{x}$).
5. $f_5(x_1, x_2) = x_1x_2$ – *кон'юнкція*, читають «x_1 і x_2» (іноді використовують символи $\wedge$ та &).
6. $f_6(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ – *диз'юнкція*, читають «x_1 або x_2».
7. $f_7(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2$ – *імплікація*, читають «із x_1 випливає x_2» (іноді використовують символ $\supset$).
8. $f_8(x_1, x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2$ – *еквівалентність* (використовують також символ ~).
9. $f_9(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ – *додавання за* mod2, читають також як альтернативне „або" („або …, або").
10. $f_{10}(x_1, x_2) = x_1 | x_2$ – *штрих Шеффера.*
11. $f_{11}(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$ – *стрілка Пірса.*

За допомогою елементарних функцій можна подати будь-яку булеву функцію аналітично, тобто у вигляді формули. Нехай задано булеві функції $f(x)$ і $g(x)$. Говорять, що функцію $h(x) = g(f(x))$ отримано *підстановкою* f у g. Для багатомісних функцій $f_1, \ldots, f_m$, по-перше, можливі будь-які підстановки булевих функцій замість змінних у булеві функції. По-друге, можливі будь-які *перейменування* змінних, наприклад, перейменування x_3 в x_2 породжує з функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ функцію трьох змінних $f(x_1, x_2, x_2, x_4)$ (у такому разі кажуть, що змінні x_2 та x_3 *ототожнено*). Функцію, яку одержано з $f_1, \ldots, f_m$ деякою підстановкою їх одна в одну й перейменуванням змінних, називають *суперпозицією* $f_1, \ldots, f_m$. Вираз, який описує цю суперпозицію та містить функціональні знаки, круглі дужки й символи змінних, називають *формулою.*

Приклад. Тримісну функцію

$$(x_3 \vee x_1) \oplus (x_1 \wedge (x_1 \oplus x_2)).$$

подано не таблицею, а формулою. Вона являє собою суперпозицію диз'юнкції, кон'юнкції та додавання за mod2.

Формулу, побудовану описаним вище способом, тобто таку, що містить лише символи змінних, дужки та знаки функцій із множини Q, називають *формулою над* Q.

Приклад. Нехай $Q = \{\overline{x}, xy, x \vee y\}$, тоді вираз $\overline{(x \vee y)} z \vee t$ – формула над Q.

Щоб зменшити кількість дужок у формулах, уводять пріоритет операцій:

- заперечення;
- кон'юнкція;
- усі інші операції.

Крім того, домовляються, що символ заперечення відіграє роль дужок, якщо він міститься над частиною формули.

Будь-яка формула, яка виражає функцію f як суперпозицію функцій, подає спосіб її обчислення. Цей спосіб визначено таким очевидним правилом: формулу можна обчислити, лише тоді, коли вже обчислено значення всіх її підформул. Отже, формула кожному набору значень аргументів ставить у відповідність значення функції, і відтак може слугувати способом подання й обчислення функції. Зокрема, за формулою обчисленням її значень на всіх 2^n наборах можна відновити таблицю функції. Про формулу, що подає функцію, кажуть також, що вона *реалізує* або *зображає* цю функцію.

Приклад. Функцію подано формулою $\bar{x} \to (\bar{z} \leftrightarrow (y \oplus xz))$. Потрібно подати її таблицею. Процес розв'язування цієї задачі проілюстровано в наступній таблиці.

x	y	z	xz	$y \oplus xz$	$\bar{z}$	$\bar{z} \leftrightarrow (y \oplus xz)$	$\bar{x}$	$\bar{x} \to (\bar{z} \leftrightarrow (y \oplus xz))$
0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0	1	0	1

Еквівалентність формул

Подання функції формулою не єдине. Формули називають *еквівалентними* (або *тотожними*, *рівносильними*), якщо вони реалізують рівні булеві функції. Еквівалентність формул позначають символом =.

Приклад. Формули $x \to y$ та $(\bar{x} \vee y) \vee z\bar{z}$ еквівалентні: $x \to y = (\bar{x} \vee y) \vee z\bar{z}$. У цьому можна переконатись, побудувавши таблиці відповідних булевих функцій. Очевидно, що змінна z у другій формулі фіктивна.

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{x} \vee y$	$\bar{z}$	$z\bar{z}$	$(\bar{x} \vee y) \vee z\bar{z}$	$x \to y$
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	1

Крім побудови таблиць є й інші методи доведення еквівалентності формул і побудови нових формул, рівносильних даним. Ці методи називають *рівносильними* (*еквівалентними*) *перетвореннями формул*.

Двоїстість

Розглянемо тепер іще одне важливе поняття. Функцію $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ називають *двоїстою* до функції $f(x_1, \ldots, x_n)$, якщо $f^*(x_1,\ldots,x_n) = \overline{f}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$.

Візьмемо заперечення над обома частинами рівності й підставимо $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$ замість $x_1, \ldots, x_n$, тоді одержимо $\overline{f}^*(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \overline{\overline{f}}(\bar{\bar{x}}_1, \ldots, \bar{\bar{x}}_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Звідси випливає, що функція f двоїста до f^*, тобто $(f^*)^* = f$. Пари двоїстих функцій утворюють, наприклад, кон'юнкція та диз'юнкція, константи 0 та 1, додавання за mod2 та еквівалентність. Таблицю для двоїстої функції у разі вибраного нами порядку наборів отримують із таблиці для функції $f(x_1,\ldots,x_n)$ інвертуванням (тобто заміною 0 на 1 і 1 на 0) стовпчика функції та його перевертанням.

З означення двоїстості зрозуміло, що для довільної функції двоїста функція визначається однозначно. Функція може бути двоїстою до самої себе, тоді її називають *самодвоїстою*. Наприклад, заперечення $\bar{x}$ та функція $x \oplus y \oplus z$ – самодвоїсті функції.

Нехай функцію задано формулою F. Який вигляд має формула F^*, що задає двоїсту функцію? Відповідь на це запитання дає така теорема.

Теорема. Якщо

$$F(x_1,\ldots,x_n) = f\left(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_s(x_1,\ldots,x_n)\right),$$

то

$$F^*(x_1,\ldots,x_n) = f^*\left(f_1^*(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_s^*(x_1,\ldots,x_n)\right).$$

Доведення.

$$F^*(x_1,\ldots,x_n) = \overline{F}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n) = \overline{f}\left(f_1(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n),\ldots,f_s(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)\right) =$$
$$= \overline{f}\left(\overline{\overline{f}}_1(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n),\ldots,\overline{\overline{f}}_s(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)\right) = \overline{f}\left(\overline{f}_1^*(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\overline{f}_s^*(x_1,\ldots,x_n)\right) =$$
$$= f^*\left(f_1^*(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_s^*(x_1,\ldots,x_n)\right).$$

З теореми випливає таке твердження.

Принцип двоїстості. Якщо у формулі F, що подає функцію f, усі символи функцій замінити символами відповідних двоїстих функцій, то одержана формула F^* подає функцію f^*, двоїсту до f.

Інакше це твердження можна сформулювати так: функція, двоїста до суперпозиції функцій, дорівнює відповідній суперпозиції двоїстих функцій.

Приклад. Нехай $f = (x \oplus \bar{y}) \vee z$, тоді $f^* = (x \leftrightarrow \bar{y}) \wedge z = (x \leftrightarrow \bar{y}) z$.

Якщо функції рівні, то й двоїсті до них функції також рівні. Це дає змогу отримувати нові еквівалентності за допомогою принципу двоїстості. Для цього потрібно від еквівалентності $F_1 = F_2$ перейти до $F_1^* = F_2^*$.