Лекція 15

Тема 4. Графи та їхні властивості

План лекції

- Ейлерів цикл у графі
- Гамільтонів цикл у графі
- Планарність

Ейлерів цикл у графі

Початок теорії графів як розділу математики пов'язують із задачею про кенігсберзькі мости. Сім мостів міста Кенігсберга (нині – Калінінград у Росії) було розміщено на річці Прегель так, як зображено на рис. 1. Чи можна, починаючи з якоїсь точки міста, пройти через усі мости точно по одному разу й повернутись у початкову точку? Швейцарський математик Л. Ейлер розв'язав цю задачу. Його розв'язання, опубліковане 1736 р., було першим явним застосуванням теорії графів. Ейлер поставив у відповідність плану міста мультиграф G, вершини якого відповідають чотирьом частинам A, B, C, D міста, а ребра – мостам. Цей мультиграф зображено на рис. 2.

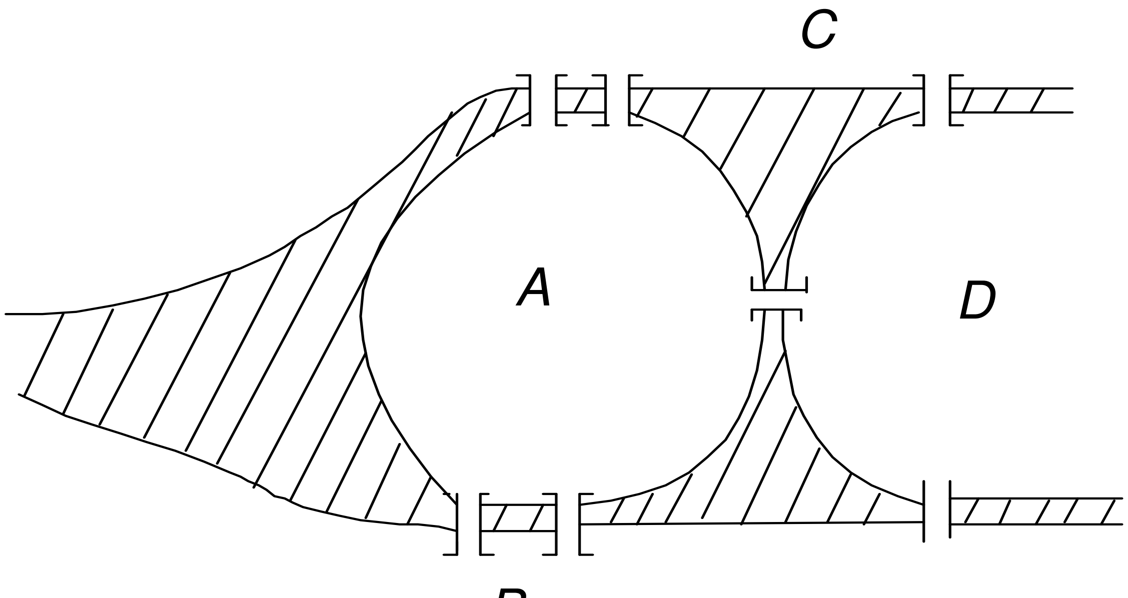


Рис. 1

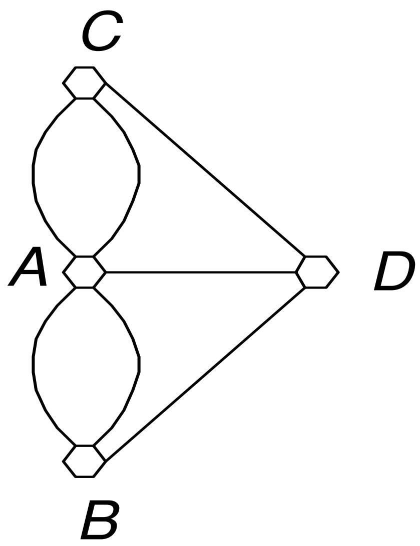


Рис. 2

Отже, задачу про кенігсберзькі мости мовою теорії графів можна сформулювати так: чи існує в мультиграфі G простий цикл, який містить усі ребра цього мультиграфа? Ейлер довів нерозв’язність задачі про кенігсберзькі мости. Нагадаємо, що в простому циклі ребра не повторюються, а вершини можуть повторюватись.

Ейлеровим циклом у зв’язному мультиграфі G називають простий цикл, який містить усі ребра графа. *Ейлеровим шляхом* у зв’язному мультиграфі G називають простий шлях, який містить усі ребра графа.

Інакше кажучи, ***<u>ейлерів цикл проходить через кожне ребро графа точно один раз.</u>*** Отже, його довжина дорівнює кількості ребер графа.

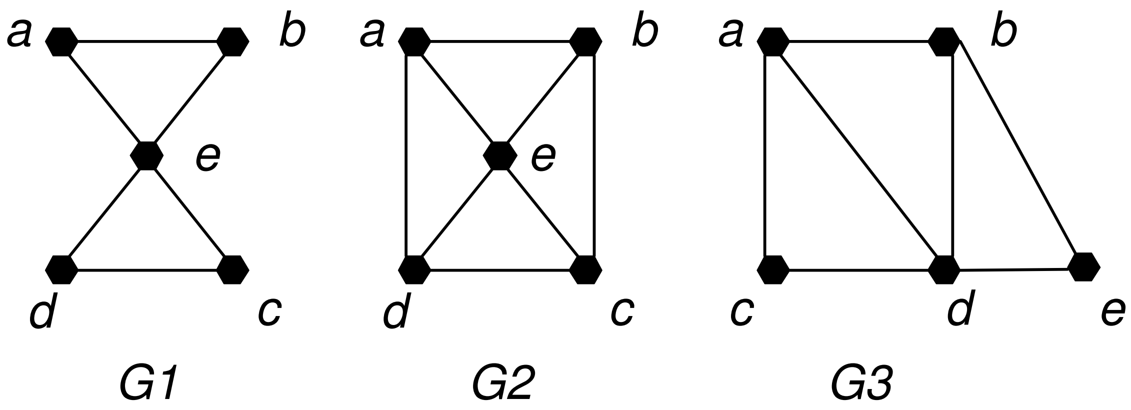


Рис. 3

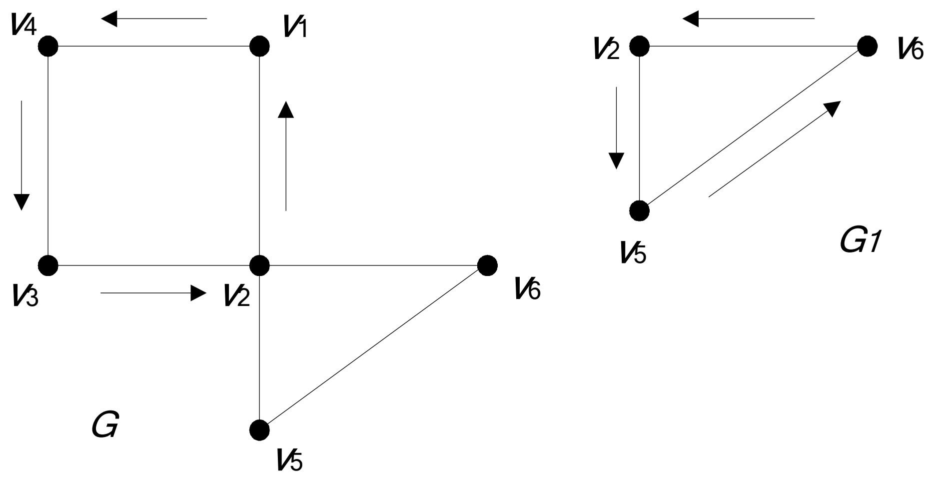
Приклад. На рис. 3 проілюстровано концепцію ейлерових циклів і шляхів. Граф G_1 має ейлерів цикл, наприклад, a, e, c, d, e, b, a; граф G_3 не має ейлерового циклу, але має ейлерів шлях: a, c, d, e, b, d, a, b; граф G_2 не має ні ейлерового циклу, ні ейлерового шляху.

Існує простий критерій (необхідна й достатня умова) для виявлення, чи має граф ейлерів цикл.

Теорема. Зв'язний мультиграф має ейлерів цикл тоді й лише тоді, коли степені всіх його вершин парні.

Доведення. Необхідність. Нехай у графі G існує ейлерів цикл. Тоді він проходить через кожну вершину графа та входить до неї по одному ребру, а виходить по іншому. Це означає, що кожна вершина інцидентна парній кількості ребер ейлерового циклу. Оскільки такій цикл містить усі ребра графа G, то звідси випливає парність степенів усіх його вершин.

Достатність. Припустимо тепер, що всі вершини графа G мають парний степінь. Почнемо шлях P_1 із довільної вершини v_1 і продовжимо його, наскільки це можливо, вибираючи щоразу нове ребро. Позаяк степені всіх вершин парні, то, увійшовши в будь-яку вершину, відмінну від v_1, ми завжди маємо можливість вийти з неї через іще не пройдене ребро. Тому шлях P_1 можна продовжити, додавши це ребро. Отже, побудова шляху P_1 завершиться у вершині v_1, тобто P_1 обов'язково виявиться циклом.



$P_1=v_1,v_4,v_3,v_2,v_1$ $\qquad$ $P_2=v_2,v_5,v_6,v_2$

Рис. 4

Якщо з'ясується, що цикл P_1 містить усі ребра графа G, то це ейлерів цикл. У протилежному випадку вилучимо з G всі ребра циклу P_1 і всі вершини, інцидентні лише вилученим ребрам. Отримаємо якійсь граф G_1. Зауважимо, що граф G_1 може і не бути зв'язним. Оскільки P_1 та G мають вершини лише парних степенів, то, очевидно, і граф G_1

матиме цю властивість. Окрім того, позаяк граф G зв'язний, то графи P_1 та G_1 мають принаймні одну спільну вершину (на рисунку це вершина v_2).

Тепер із вершини v_2 будуємо цикл P_2 у графі G_1 аналогічно до того, як ми будували цикл P_1 у графі G. Цикл P_2 вставимо в цикл P_1 на місце вершини v_2. Одержимо цикл P_3. Описані побудови показано на рис. 4. Цикл $P_3 = v_1, v_4, v_3, P_2, v_1 = v_1, v_4, v_3, v_2, v_5, v_6, v_2, v_1$ – ейлерів. Якби він виявився не ейлеровим, то потрібно продовжити аналогічні побудови й отримати ще більший цикл. Цей процес закінчиться побудовою ейлерового циклу. Теорему доведено.

Зазначимо, що доведення достатності конструктивне: подано алгоритм побудови ейлерового циклу. Його іноді називають алгоритмом об'єднання циклів.

Обчислювальна складність цього алгоритму становить $O(m)$.

Існує й інший алгоритм побудови ейлерового циклу, який дає змогу побудувати цей цикл одразу. Це алгоритм Флері (Fleuri).

Алгоритм Флері побудови ейлерового циклу.

Робота полягає в нумерації ребер у процесі побудови ейлерового циклу.

Крок 1 (початок). Починаємо з довільної вершини u та присвоюємо довільному ребру $\{u, v\}$ номер 1. Викреслюємо ребро $\{u, v\}$ і переходимо у вершину v.

Крок 2 (ітерація). Нехай *w* – вершина, у яку ми перейшли на попередній ітерації, *k* – останній присвоєний номер. Вибираємо довільне ребро, інцидентне вершині *w*, причому міст вибираємо лише тоді, коли немає інших можливостей. Присвоюємо вибраному ребру номер (k+1) і викреслюємо його.

Крок 3 (закінчення). Цей процес закінчуємо, коли всі ребра графа викреслено та пронумеровано – ці номери задають послідовність ребер в ейлеровому циклі.

За складністю цей алгоритм *гірший* *за алгоритм об'єднання циклів, його оцінка складності становить* $O(m^2)$. Хоча виглядає, що маємо $O(m)$, але пошук мостів – це ще $O(m)$, тому виходить $O(m^2)$. Якщо використовувати спеціальний алгоритм пошуку мостів, то буде трохи ефективніше: $O(m \cdot \log^3 m \cdot \log \log m)$.

Повертаючись до задачі про кенігсберзькі мости, виявляємо, що мультиграф на рис. 2 має всі вершини непарного степеня. Отже, цей мультиграф не має ейлерового циклу, тому неможливо пройти кожний міст по одному разу й повернутись в початкову точку шляху.

Теорема. Зв'язний мультиграф має ейлерів шлях, але не має ейлерового циклу тоді й лише тоді, коли він має точно дві вершини непарного степеня.

Доведення. Необхідність. Припустимо, що зв'язний мультиграф має ейлерів шлях від *u* до *v*, але не має ейлерового циклу. Перше ребро циклу додає одиницю до степеня вершини u. Щоразу, коли шлях проходитиме через вершину u, він додаватиме до її степеня двійку. Останнє ребро шляху додасть одиницю до степеня вершини v, а кожне проходження шляху через вершину v додаватиме до її степеня двійку. Отже, вершини u та v мають непарний степінь. Усі інші вершини – парного степеня, бо шлях додає двійку до степеня вершини коли проходить через неї.

Достатність. Припустимо, що граф G має точно дві вершини, нехай u та v, з непарним степенем. Розглянемо граф G', одержаний з графа G додаванням нового ребра $\{u, v\}$. Кожна вершина графа G' має парний степінь, отже, G' має ейлерів цикл. Тепер вилучимо нове ребро і одержимо ейлерів шлях у графі G. Теорему доведено.

Зазначимо, що будь-який ейлерів шлях починається в одній із цих двох вершин непарного степеня, а закінчується в іншій.

Оскільки мультиграф для кенігсберзьких мостів має чотири вершини з непарними степенями, можна дійти висновку про неможливість пройти кожний міст по одному разу, навіть якщо не потрібно повертатись у початкову точку.

Граф, який має ейлерів цикл, часто називають ***ейлеровим графом.***

Гамільтонів цикл у графі

Ми дослідили необхідні й достатні умови існування шляхів і циклів, які містять кожне ребро зв'язного мультиграфа G точно один раз. Чи можемо ми зробити це саме для шляху й циклу, які містять кожну вершину графа точно один раз?

Шлях у неорієнтованому зв'язному графі, який проходить через кожну вершину графа точно один раз називають *гамільтоновим шляхом*. Цикл, який проходить через кожну вершину точно один раз (окрім першої і останньої) називають *гамільтоновим циклом*.

Отже, шлях $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ у графі $G=(V, E)$ – гамільтонів шлях, якщо $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ і $x_i \neq x_j$ для $0 \le i < j \le n$. Цикл $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_0$ (тут $n \ge 2$) у графі G *гамільтонів цикл*, якщо $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ – гамільтонів шлях.

Зазначимо, що гамільтонові цикл і шлях, узагалі кажучи, не містять усіх ребер графа.

За означенням гамільтонові цикли розглядають лише для графів, які мають не менше трьох вершин (отже, довжина гамільтонового циклу не менша трьох).

Якщо використовувати терміни «елементарний шлях» і «елементарний цикл» (не містять повторюваних вершин), то можна так означити гамільтонів шлях і цикл.

Гамільтоновим шляхом називають елементарний шлях, який містить усі вершини графа. Гамільтоновим циклом називають елементарний цикл, який містить усі вершини графа.

Термін „гамільтонів" у цих означеннях походить від імені відомого ірландського математика Вільяма Ровена Гамільтона (W. R. Hamilton), який 1857 року запропонував гру „Навколосвітня подорож". Кожній із двадцяти вершин додекаедра (правильного дванадцятигранника, грані якого – п'ятикутники) приписано назву одного з великих міст світу. Потрібно, розпочавши з довільного міста, відвідати решту 19 міст точно один раз, і повернутись у початкове місто. Перехід дозволено ребрами додекаедра.

Приклад. Ту саму задачу можна зобразити й на площині (рис. 5) Вона зводиться до відшукання в графі гамільтонового циклу. Один із можливих розв’язків показано потовщеними лініями.

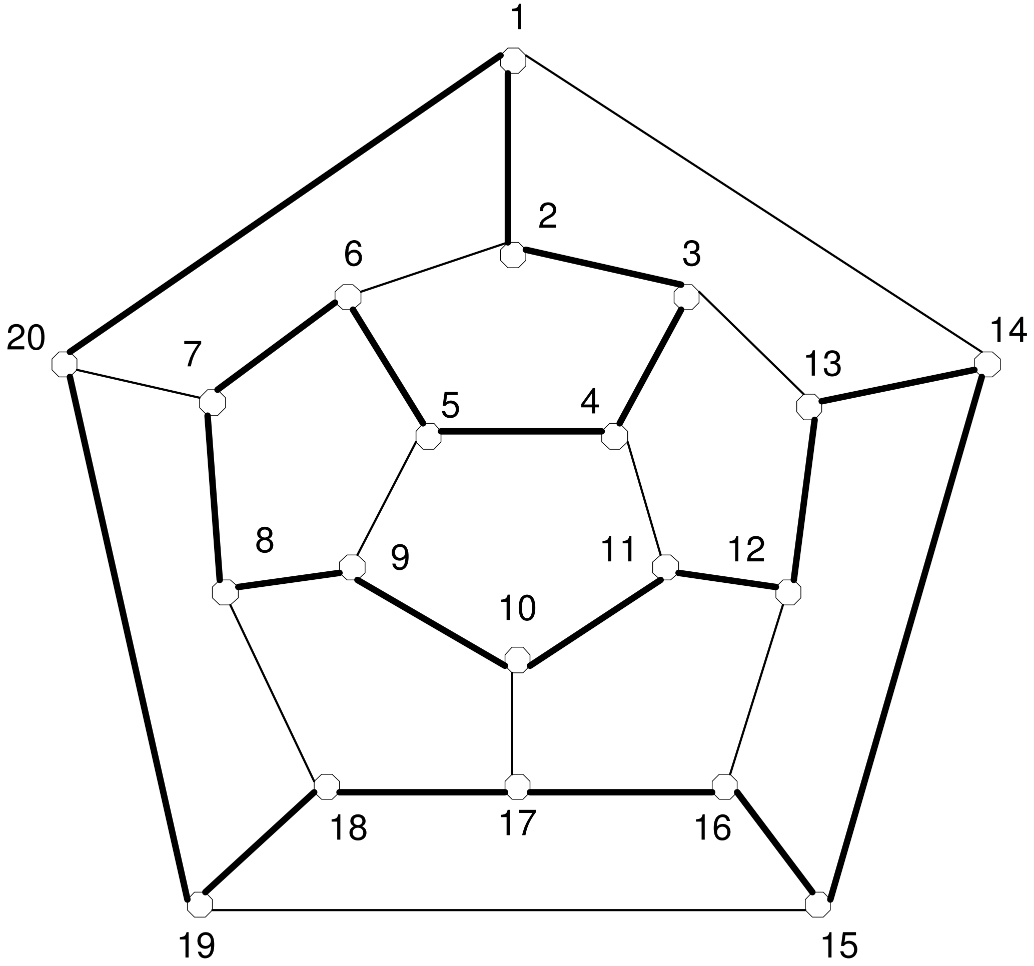


Рис. 5

Не всі зв'язні графи мають гамільтонів цикл хоча б тому, що такі графи мають бути двозв'язними (тобто граф, який має точки з'єднання, не може мати гамільтонового циклу). Приклад графа, зображеного на рис. 6, свідчить, що для наявності гамільтонового циклу двозв'язності недостатньо.

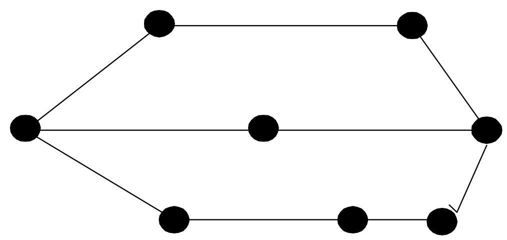


Рис. 6

Незважаючи на зовнішню подібність формулювань задач про існування ейлерового й гамільтонового циклів, ці задачі принципово різні. Використовуючи результати попереднього підрозділу, легко виявити, чи має граф ейлерів цикл, і, якщо має, то побудувати його. Ситуація для гамільтонового циклу істотно інша. Відповісти на питання, чи має граф гамільтонів цикл, зазвичай, дуже важко. Вивчення достатніх умов наявності в графі гамільтонового циклу – один із важливих напрямів у теорії графів. Інтуїтивно зрозуміло, що граф із багатьма ребрами, достатньо рівномірно розподіленими, з великими шансами має гамільтонів цикл.

Теорема (Г. Дірак, 1952 р.). Якщо G – зв'язний простий граф з $n \geq 3$ вершинами, і для кожної вершини v виконується нерівність $\deg(v) \geq n/2$, то граф G має гамільтонів цикл.

Теорема (О. Оре, 1960 р.). Якщо G – зв'язний простий граф з $n \geq 3$ вершинами, такий, що $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ для кожної пари несуміжних вершин u та v, то граф G має гамільтонів цикл.

Теорему Дірака можна довести як наслідок теореми Оре, бо із виконання умов теореми Дірака випливає виконання умов теореми Оре.

Обидві теореми (і Дірака, і Оре) дають лише ДОСТАТНІ умови існування гамільтонового циклу. Наприклад, умови жодної з цих теорем не можна застосувати до графа C_5, хоча він має гамільтонів цикл.

Завдання. Навести приклад графа, до якого не можна застосувати теорему Дірака, але можна застосувати теорему Оре.

Як знайти гамільтонів цикл або переконатись, що його немає? Очевидний алгоритм, який можна застосувати, – це „повний перебір усіх можливостей", тобто $n!$ перестановок усіх вершин графа й перевірок. Зрозуміло, що такий спосіб практичного застосування не знаходить. Розгляд практично застосовного алгоритму *бектрекінг* відкладемо до наступного розділу.

Найкращий алгоритм для знаходження гамільтонового циклу має експоненціальну складність (за кількістю вершин графа).

Знаходження поліноміального алгоритму розв’язання цієї проблеми було би дуже великим досягненням, бо задача знаходження гамільтонового циклу *NP*-повна. Отже, із існування такого алгоритму випливає, що багато інших на вигляд важкорозв’язних задач можуть бути розв’язані поліноміальними алгоритмами. Але саме це дає підстави думати, що такого алгоритму не існує (хоча це і не доведено).

Граф, який містить гамільтонів цикл, часто називають ***гамільтоновим графом***.

Планарність

У цьому підрозділі розглянемо неорієнтовані графи. Часто не має значення, як зобразити на граф рисунку, бо ізоморфні графи несуть одну й ту саму інформацію. Проте інколи важливо, чи можна нарисувати на площині граф так, щоб його зображення задовольняло певним вимогам. Наприклад, у радіоелектроніці в процесі виготовлення мікросхем друкованим способом електричні ланцюги наносять на плоску поверхню ізоляційного матеріалу. Оскільки провідники не ізольовані, то вони не мають перетинатись. Аналогічна задача виникає під час проектування залізничних та інших шляхів, де переїзди небажані. Так виникає поняття плоского графа.

Плоским називають граф, зображений на площині так, що ніякі два його ребра геометрично не перетинаються ніде, окрім інцидентних їм вершин. Граф, ізоморфний до плоского графа, називають *планарним*.

Приклад. Усі три графи на рис. 7 планарні, але лише другий і третій з них плоскі.

Важливою є теорема Ейлера, яка пов’язує кількість вершин, ребер і граней зв’язного плоского графа. Попередньо дамо означення поняття грані плоского зв’язного графа.

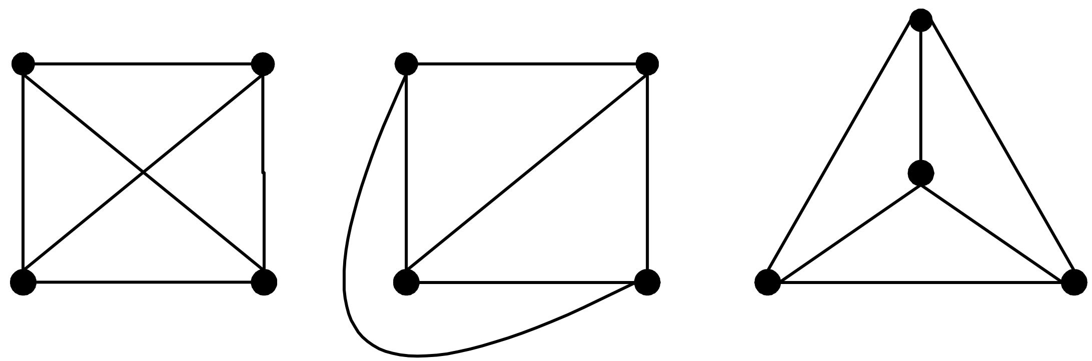


Рис. 7

Внутрішньою гранню плоского зв’язного графа називають область площини, обмежену циклом і таку, що не містить всередині себе ні вершин, ні ребер графа. Цикл, що обмежує грань, називають *межею грані*. Частину площини, що складається з точок, які не належать ні графу, ні жодній із його внутрішніх граней, називають *зовнішньою* (або *необмеженою*) *гранню*.

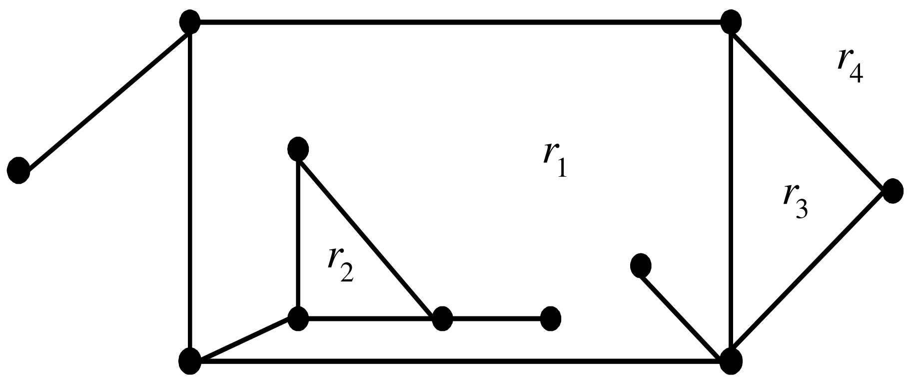


Рис. 8

Приклад. На рис. 8 зображено плоский граф. Він має чотири грані: r_1, r_2, r_3, r_4, причому грань r_4– зовнішня.

Якщо плоский граф зв'язний і не має точок з'єднання, то межею грані є цикл без повторюваних вершин («елементарний цикл» за введеною в лекціях термінологією). Для довільного зв'язного плоского графа це, очевидно, не так (див., наприклад, грань r_1 на рис. 8).

Теорема (теорема Ейлера про плоскі графи). Нехай зв'язний плоский граф G має n вершин, m ребер та r граней. Тоді

$$n + r = m + 2.$$

Доведення проводимо індукцією за кількістю ребер у графі G. Якщо m **=** 0**,** то $n = 1$ (оскільки граф зв'язний) і $r = 1$ (зовнішня грань); отже, у цьому випадку теорема справджується.

Допустимо тепер, що теорема справджується для довільного плоского графа G, який має m–1 ребро, і додамо до G нове ребро e. Можливі три випадки.

1. Ребро e – петля. У цьому випадку виникне нова грань, а кількість вершин залишиться незмінною.

2. Ребро e з'єднує дві різні вершини графа G. У такому разі одна із граней розпадеться на дві, тому кількість граней збільшиться на одну, а кількість вершин не зміниться.

3. Ребро e інцидентне лише одній вершині в G. Тоді потрібно додати ще одну вершину; отже, кількість вершин збільшиться на одну, а кількість граней не зміниться.

Твердження теореми залишається правильним у кожному з цих випадків. Оскільки інші випадки неможливі, то індукцію завершено й теорему доведено.

Теорему Ейлера можна використати для доведення існування непланарних графів.

Наслідок 1. Якщо G – зв'язний планарний простий граф з $n \geq 3$ вершинами, то кількість його ребер m задовольняє нерівність $m \leq 3n - 6$.

Доведення. Для доведення цього наслідку зручно ввести поняття степеня грані. *Степенем грані* називають довжину циклу, який обмежує цю грань. Степінь грані r позначатимемо як $\deg(r)$. Наприклад, степені граней на рис. 8 такі: $\deg(r_1) = 13$, $\deg(r_2) = 3$, $\deg(r_3) = 3$, $\deg(r_4) = 7$. Зв'язний планарний граф, зображений на площині, розбиває цю площину на грані. Степінь кожної грані дорівнює щонайменше трьом (бо граф G простий, тобто не має кратних ребер і петель). Зокрема, степінь зовнішньої грані також дорівнює щонайменше трьом, бо граф має не менше трьох вершин. Тепер зазначимо, що сума степенів усіх граней точно в два рази більша ніж кількість ребер. Справді, кожне ребро враховується щоразу два рази (по одному разу, коли належить двом граням, і двічі – коли одній). Оскільки кожна грань обмежена принаймні трьома ребрами, то $3r$ є оцінкою знизу подвоєної кількості ребер:

$$2m = \sum_{\text{всі грані } r} \deg(r) \geq 3r.$$

Отже, $\frac{2}{3}m \geq r$. Використавши формулу Ейлера $r = m - n + 2$, маємо $m - n + 2 \leq \frac{2}{3}m$, звідки $\frac{m}{3} \leq n - 2$, тобто $m \leq 3n - 6$.

Теорема. Граф K_5 непланарний.

Доведення. Граф K_5 має п'ять вершин і 10 ребер. Нерівність $m \leq 3n-6$ для цього графа не виконується, бо $m=10$, а $3n-6=9$. Отже, граф K_5 непланарний.

Зараз ми доведемо, що $K_{3,3}$ непланарний. Зазначимо, що цей граф має 6 вершин і 9 ребер. Нерівність $m \leq 3n-6$ виконується: $9 \leq 12$. Отже, із виконання нерівності $m \leq 3n-6$ НЕ випливає, що граф планарний.

Наслідок 2. Якщо G – зв'язний планарний двочастковий граф з $n \geq 3$ вершинами, то кількість його ребер m задовольняє нерівність $m \leq 2n-4$.

Доведення цього наслідку повністю повторює доведення наслідку 1, за виключенням того факту, що степінь кожної грані має бути не меншим, ніж 4, бо двочастковий граф не може мати циклів непарної довжини. Отже, $2m \geq 4r$. Звідси і з теореми Ейлера випливає, що $m \leq 2n-4$.

Теорема. Граф $K_{3,3}$ непланарний.

Доведення. Граф $K_{3,3}$ має 6 вершин і 9 ребер. Оскільки $m=9$, а $2n-4=8$, то нерівність $m \leq 2n-4$ не виконується. Звідси доходимо висновку, що граф $K_{3,3}$ непланарний.

Наслідок 3. Якщо G – зв’язний простий планарний граф, то G має вершину, степінь якої не більший п’яти.

Доведення. Якщо граф має дві вершини, то твердження справджується. Нехай граф має принаймні три вершини. Тоді за наслідком 1 маємо $m \le 3n - 6$, отже $2m \le 6n - 12$. Якщо степінь кожної вершини дорівнює щонайменше шести, то, оскільки за теоремою про рукостискання $2m = \sum\limits_{v \in V} \deg(v)$, маємо $2m \ge 6n$. Але це суперечить нерівності $2m \le 6n - 12$. Отже, має бути вершина, степінь якої не перевищує п’яти.

Далі розглянемо одне важливе означення.

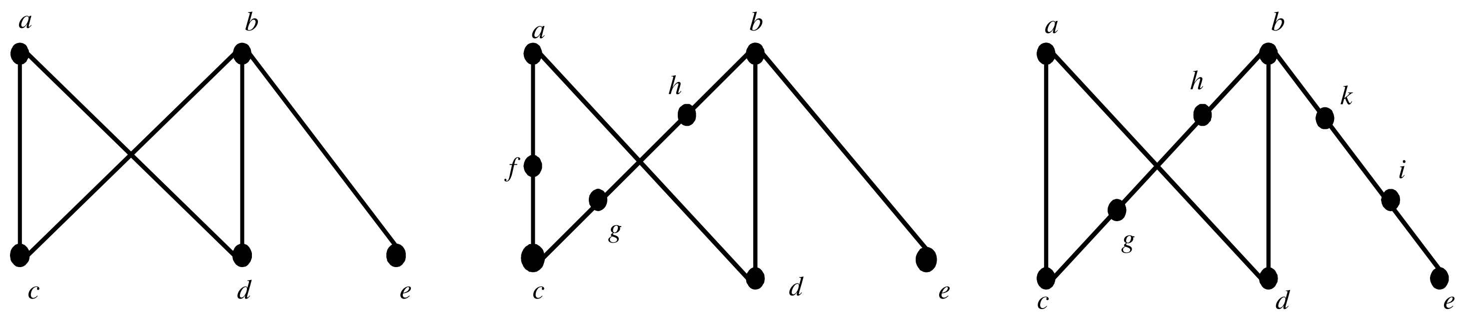


Рис. 9

Два графи називають *гомеоморфними* (або *тотожними з точністю до вершин степеня 2*), якщо вони можуть бути отримані з одного графа включенням у його ребра нових вершин степеня 2. Наприклад, графи, зображені на рис. 9, гомеоморфні, і те саме можна сказати про будь-які два цикли c_n.

Зрозуміло, що введення терміну «гомеоморфні графи» зручне лише з технічних міркувань, бо включення чи виключення вершин степеня 2 ніяк не пов'язано з планарністю. Проте це дає нам змогу сформулювати результат, відомий як теорема Куратовського. Ця теорема дає критерій (необхідну й достатню умову) планарності графа.

Теорема (Куратовський, 1930 р.). Граф планарний тоді й лише тоді, коли він не містить підграфів, гомеоморфних графам K_5 або $K_{3,3}$.

Необхідність умов теореми вже доведено, оскільки доведено непланарність графів K_5 і $K_{3,3}$, а доведення достатності доволі довге й складне, ми його вирішили не наводити.

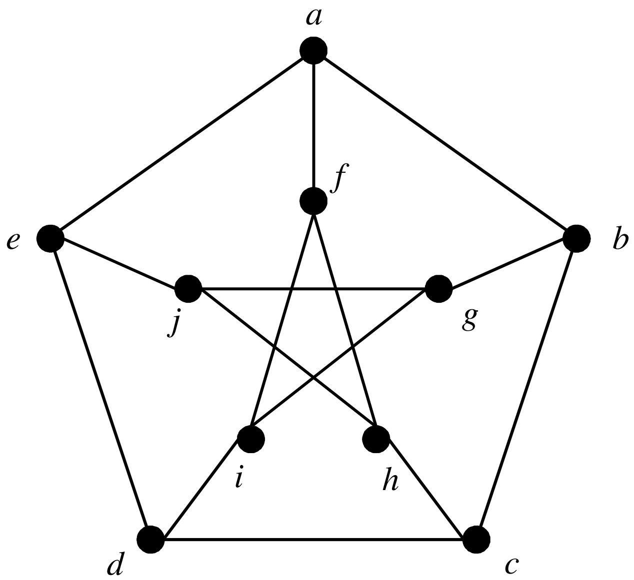


Рис. 10

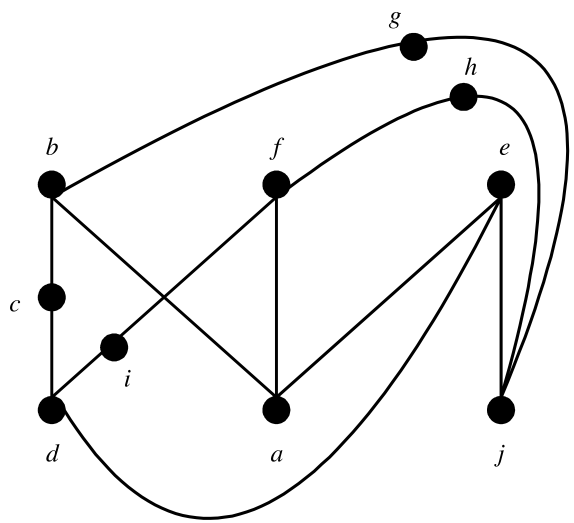


Рис. 11

Приклад. На рис.10 зображено *граф Петерсена*, а на рис. 11 – його підграф, гомеоморфний $K_{3,3}$. Отже, за теоремою Куратовського, граф Петерсена непланарний.

Окрім теореми Куратовського існують і інші критерії планарності графів. Ось один із цих інших критеріїв.

Стягуванням ребра e називають таку процедуру: беремо ребро $e=\{v, w\}$ і «стягуємо» його, тобто вилучаємо e та ототожнюємо його кінці v та w; одержана при цьому вершина інцидентна тим ребрам (відмінним від e), яким спочатку були інцидентні вершини v та w.

Граф G називають *стяжним до графа H*, якщо H одержують із G у результаті якоїсь послідовності стягувань ребер.

Теорема (К. Вагнер, 1937 р.). Граф планарний тоді й лише тоді, коли він не містить підграфів, стяжних до графів K_5 або $K_{3,3}$.

Оскільки граф Петерсена очевидним способом стягується до K_5, то непланарність графа Петерсена за допомогою критерію Вагнера доводиться зовсім просто.

Варто зазначити, що практично перевірити умови, якими характеризуються планарні графи, не завжди просто. Проте розроблено ефективні алгоритми, які дають змогу для будь-якого заданого графа знайти його зображення на площині без перетину ребер, або переконатись, що це неможливо (якщо граф непланарний).

Питання. Чи можна будь-який планарний граф зобразити на площині так, щоб його ребра були відрізками прямих ліній?

Відповідь: Так, можна. Про це свідчить ще одна теорема Вагнера.

Теорема (К. Вагнер, 1936 р.). Для будь-якого планарного графа існує ізоморфний плоский граф, у якому всі ребра зображені відрізками прямих ліній.

КУРАТО́ВСЬКИЙ Казімєж (Kuratowski Kazimierz; 02. 02. 1896, Варшава – 18. 06. 1980, там само) – польський математик. Дійс. чл. Польської АН (1945; віце-президент 1957–68). Іноз. чл. АН СРСР (1966). Навч. в Ун-ті м. Ґлазґо (Велика Британія, 1913–14), здобув ступ. д-ра у Варшав. ун-ті (1921), де й працював відтоді (з перервою): 1935–52 – зав. каф. математики. 1927–34 – у Львів. політехніці: зав. каф. математики (до 1933), водночас 1929–34 – декан заг. ф-ту. 1948–67 очолював Математичний ін-т Польської АН (Варшава). Наук. дослідження присвячені питанням топології, теорій графів, множин і функцій дійсної змінної. Розвинув аксіоматику заг. топол. простору (аксіоматика К.), дослідив проблеми топології на площині. Спільно з С. Банахом на основі гіпотези континууму довів, що не існує єдиної міри (1929). Автор праці «Topologia» (Warszawa, 1933, t. 1; 1950, t. 2), підручників «Teoria mnogości» (1952, співавт.), «Wstęp do teorii mnogości i topologii» (1955; обидва – Варшава).