Лекція 14

Тема 4. Графи та їхні властивості

План лекції

Ізоморфізм графів
Шляхи та цикли. Зв'язність. Термінологія
Шляхи в графах та ізоморфізм
Характеристики зв'язності простого графа
Критерій двочастковості графа

Ізоморфізм графів

Як у застосуваннях теорії графів, так і в самій цій теорії істотним є те, що існують об'єкти (вершини графа) і зв'язки між об'єктами (ребра графа). Із цих позицій графи, котрі одержують один з одного зміною позначень вершин, доцільно не розрізняти. Оформимо ці міркування у вигляді такого означення.

Нехай $G_1=(V_1, E_1)$ та $G_2=(V_2, E_2)$ – прості графи, а $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ – бієкція. Якщо для будь-яких вершин u та v графа G_1 їх образи $\varphi(u)$ та $\varphi(v)$ суміжні в G_2 тоді й лише тоді, коли u та v суміжні в G_1, то цю бієкцію називають *ізоморфізмом* графа G_1 на граф G_2. Якщо такий ізоморфізм існує, то графи G_1 та G_2 називають *ізоморфними* та записують $G_1 \cong G_2$.

Інакше кажучи, прості графи G_1 та G_2 називають ізоморфними, якщо існує така бієкція $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$, що вершини u та v суміжні в G_1 тоді й лише тоді, коли вершини $\varphi(u)$ та $\varphi(v)$ суміжні в G_2 для всіх $u, v \in V_1$ (у такому разі говорять, що ця бієкція зберігає суміжність вершин).

Приклад. Графи на рис. 1 ізоморфні, бієкцію φ можна задати так: $\varphi(x_1)=y_1$; $\varphi(x_2)=y_4$; $\varphi(x_3)=y_3$; $\varphi(x_4)=y_2$.

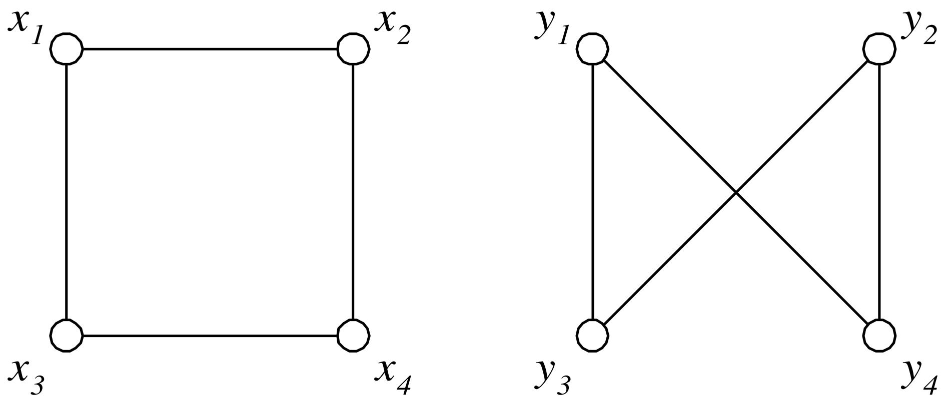

Рис. 1

Приклад. Усі три графи, зображені на рис. 2, ізоморфні. Довести це пропонуємо як вправу.

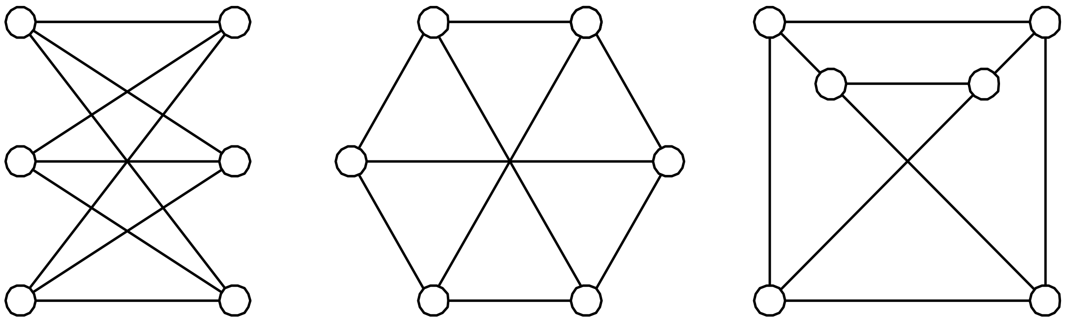

Рис. 2

Ізоморфні графи природно ототожнювати (їх можна зобразити одним рисунком). Вони могли б різнитися природою своїх елементів, але саме це ігнорується при введенні поняття „граф”. У деяких ситуаціях усе ж доводиться розрізняти ізоморфні графи, і тоді корисне поняття „позначеного графа”. Граф з n вершинами називають *позначеним*, якщо його вершинам присвоєно якісь мітки, наприклад, числа 1, 2, …, n. Ототожнимо кожну з вершин з її номером (і, отже, множину вершин – із множиною чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$) і означимо рівність простих позначених графів G_1 та G_2 з однаковою кількістю вершин n так: $G_1=G_2$ тоді й лише тоді, коли $E_1=E_2$.

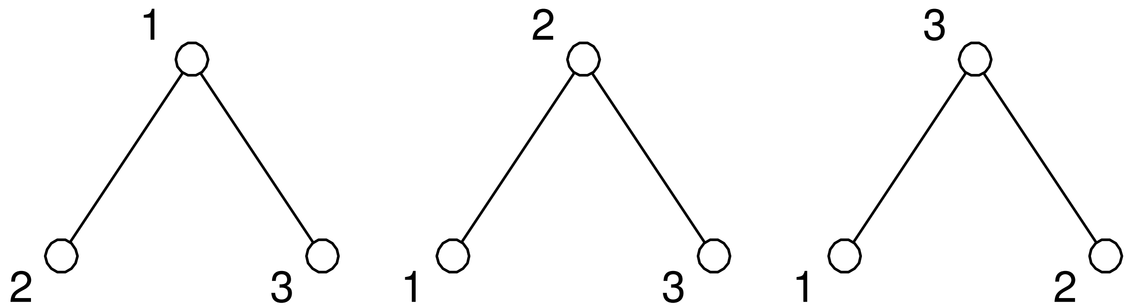

Рис.3

Приклад. На рис. 3 зображено три різні позначені графи.

Щоб наголосити, що графи розрізняють лише з точністю до ізоморфізму, говорять про *абстрактний граф*. Абстрактний граф приводить до різних матриць суміжності залежно від нумерації вершин. З’ясуємо, як пов’язані між собою ці матриці. Нехай G_1 та G_2 – позначені графи з n вершинами й $G_1 \cong G_2$ (тобто G_1 та G_2 ізоморфні). Це означає, що G_1 та G_2 розрізняються лише нумерацією вершин, тобто існує підстановка s на множині вершин, яка зберігає суміжність: вершини u та v тоді й лише тоді суміжні в G_1, коли їхні образи $s(u)$ та $s(v)$ суміжні в G_2. Нехай $A=[a_{ij}]$ та $B=[b_{ij}]$ – матриці суміжності відповідно графів G_1 та G_2. Тоді $b_{s(i)s(j)} = a_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$). Тим самим доведено таку теорему.

Теорема 4. Прості графи ізоморфні тоді й лише тоді, коли їх матриці суміжності можна отримати одну з одної однаковими перестановками рядків і стовпців.

Задача виявлення ізоморфізму дуже складна. Теоретично алгоритм перевірки пари простих графів на ізоморфізм існує – його сформульовано в попередній теоремі. Проте він не знаходить практичного застосування, оскільки може бути потрібно до $n!$ перестановок і перевірок.

Часто неважко довести, що два графи не ізоморфні. Це буде, якщо порушуються інваріанти. *Інваріант* – це властивість, яку довільні ізоморфні графи або обидва мають, або обидва не мають.

Такими інваріантами, наприклад, є:

- кількість вершин;
- кількість ребер;
- кількість вершин конкретного степеня (вершині v, $v \in V_1$, $\deg(v)=d$, має відповідати вершина $u=\varphi(v)$, $u \in V_2$, $\deg(u)=d$).

Є й інші інваріанти, але порушення інваріанта – це лише достатня умова неізоморфності графів. Не існує набору інваріантів для виявлення ізоморфізму.

Приклад. Графи на рис. 4 не ізоморфні. Обидва графи мають по п’ять вершин і по шість ребер. Проте граф G_2 має вершину степеня 1, якої не має граф G_1.

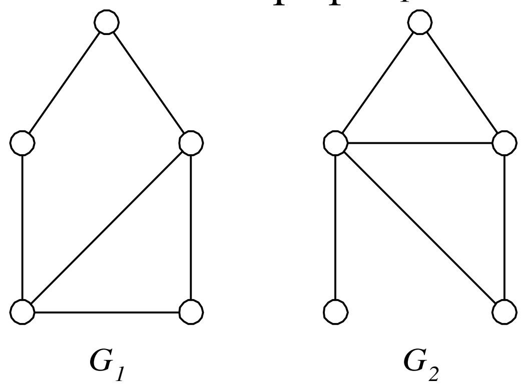

Рис. 4

Приклад. На рис. 5 зображено графи G_1 і G_2. Обидва вони мають по 8 вершин і по 10 ребер. Вони також мають по чотири вершини степеня 2 і по чотири вершини степеня 3. Однак ці графи не ізоморфні. Справді, позаяк $\deg(x_1)=2$ в G_1, то вершині x_1 має відповідати одна із чотирьох вершин y_2, y_4, y_6, y_8 у графі G_2. Зазначені вершини мають у графі G_2 степінь 2. Проте кожна з цих чотирьох вершин суміжна з іншою вершиною степеня 2 в графі G_2, що не виконується для вершини x_1 у графі G_1.

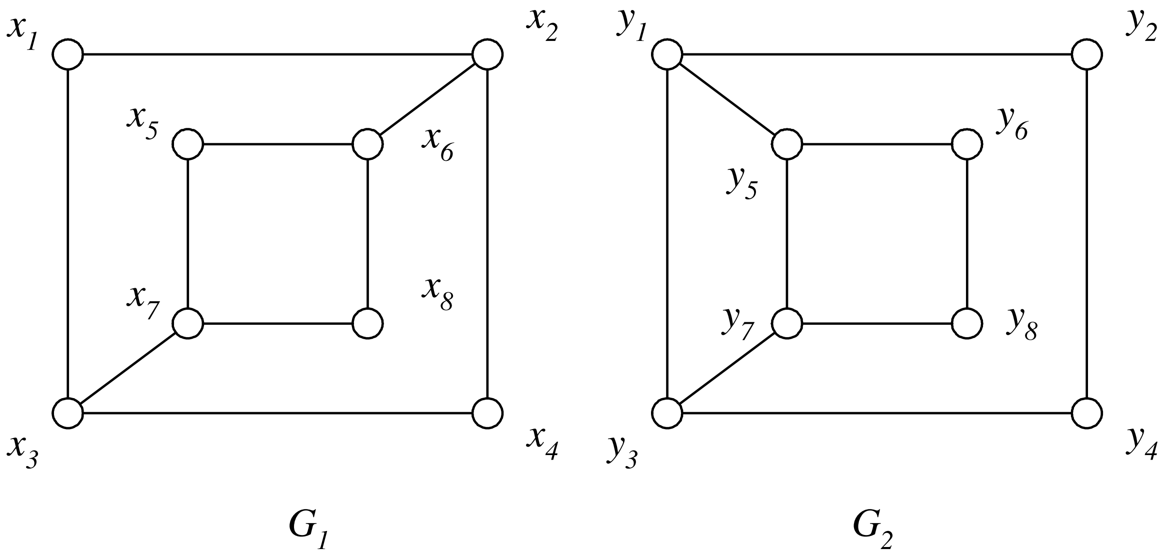

Рис. 5

Те, що графи, зображені на рис. 5, не ізоморфні, можна довести й інакше. На рис. 6 зображено підграфи графів G_1 і G_2, породжені вершинами степеня 3. Якщо графи G_1 та G_2 ізоморфні, то й зазначені підграфи мають бути ізоморфними. Проте підграфи з рис. 6 не ізоморфні.

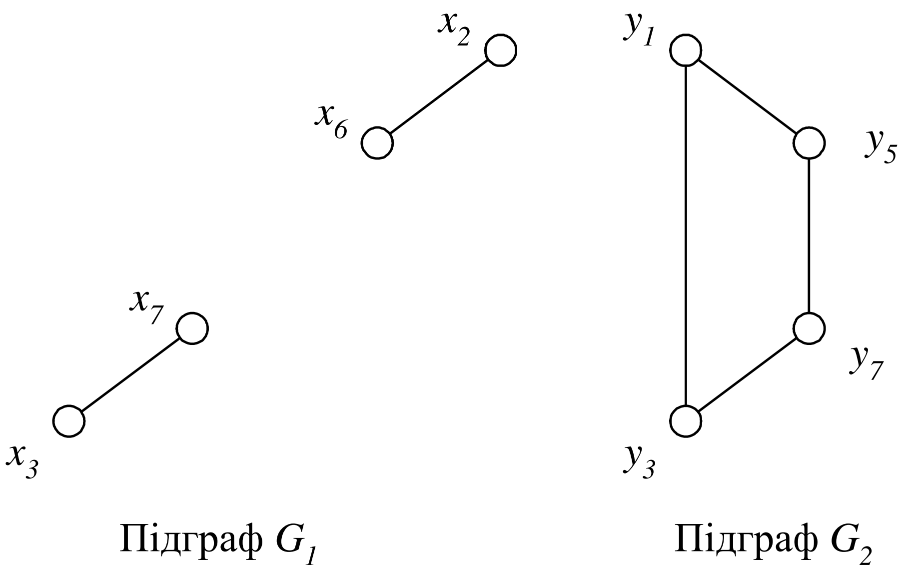

Рис. 6

Ми розглянули поняття ізоморфізму для простого графа. Для неорієнтованих мультиграфів і псевдографів, а також орієнтованих графів природно вводять поняття ізоморфізму як бієкції між множинами вершин, яка зберігає суміжність, кратності ребер, петлі та напрямки дуг. Зазначимо, що теорема 4 залишається правильною для мультиграфів, псевдографів і орієнтованих графів.

Шляхи та цикли. Зв’язність. Термінологія

Шляхом довжиною r із вершини u в вершину v в неорієнтованому графі називають послідовність ребер $e_1=\{x_0, x_1\}$, $e_2=\{x_1, x_2\}$, ..., $e_r=\{x_{r-1}, x_r\}$, де $x_0=u$, $x_r=v$, r – натуральне число. Отже, шлях довжини r має r ребер, причому ребро враховують стільки разів, скільки воно входить у шлях. Вершини u та v називають *крайніми*, а решту вершин шляху – *внутрішніми*.

Циклом у неорієнтованому графі називають шлях, який з’єднує вершину саму із собою, тобто $u=v$.

У простому графі шлях можна задати послідовністю вершин, через які він проходить: x_0, x_1, x_2, …, x_{r-1}, x_r.

Шлях або цикл називають *простим*, якщо він не містить повторюваних ребер.

Іноді використовують такі означення. Шлях називають *елементарним*, якщо він не містить повторюваних вершин. Цикл називають *елементарним*, якщо він не містить повторюваних вершин, окрім першої та останньої.

Говорять, що шлях із крайніми вершинами u та v *з’єднує* ці вершини. Шлях, що з’єднує вершини u та v, позначають як $\langle u,v\rangle$ та називають $\langle u,v\rangle$-*шляхом*.

Приклад. На рис. 7 зображено простий граф. У ньому a, d, c, f, e – простий шлях довжиною 4, оскільки пари $\{a, d\}$, $\{d, c\}$, $\{c, f\}$ та $\{f, e\}$ – ребра. Однак, d, e, c, b – не шлях, бо пара $\{e, c\}$ – не ребро. Зазначимо, що b, c, f, e, b – цикл довжиною 4, позаяк $\{b, c\}$, $\{c, f\}$, $\{f, e\}$, та $\{e, b\}$ – ребра та цей шлях починається й закінчується в одній і тій самій вершині b. Шлях a, b, e, d, a, b, довжина якого дорівнює 5, не простий, оскільки він двічі проходить через ребро $\{a, b\}$.

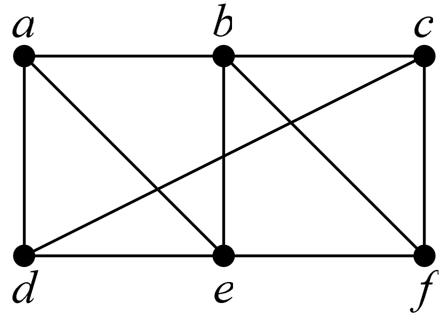

Рис. 7

Неорієнтований граф називають *зв'язним*, якщо будь-які дві його вершини з'єднані шляхом. Граф називають *незв'язним*, якщо він не є зв'язним. Незв'язний граф складається із двох або більше зв'язних підграфів, кожна пара з яких не має спільних вершин. Ці зв'язні підграфи називають *компонентами зв'язності* або просто *компонентами* графа.

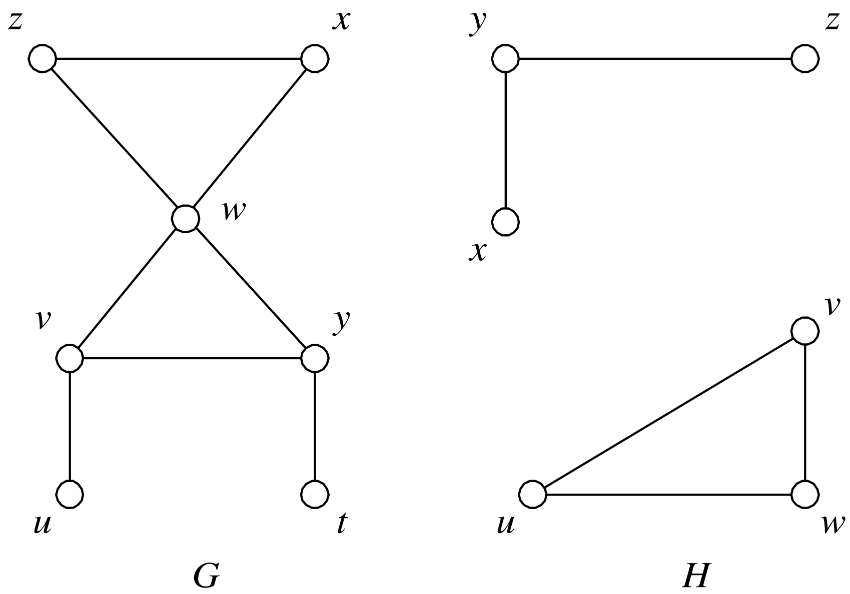

Рис. 8

Приклад. Граф G на рис. 8 зв'язний; граф H – незв'язний, оскільки не існує шляху $\langle y, v\rangle$. Граф H має дві компоненти.

Віддаллю $d(u, v)$ між вершинами u та v у неорієнтованому графі G називають довжину найкоротшого $\langle u, v\rangle$-шляху, а сам цей шлях називають *геодезичним*.

Теорема. Між кожною парою різних вершин зв'язного неорієнтованого графа існує простий шлях.

Доведення. Нехай u та v – Дві різні вершини зв'язного неорієнтованого графа $G=(V,E)$. Оскільки граф G – зв'язний, то існує принаймні один шлях між u та v. Нехай x_0, x_1, …, x_r, де $x_0=u$, $x_r= v$ – послідовність вершин геодезичного шляху. Доведемо, що цей шлях – обов'язково простий. Припустимо протилежне, тоді $x_i = x_j$ для деяких i та j ($0 \le i < j$). Тоді існує $\langle u, v\rangle$-шлях x_1, …, x_{i-1}, x_j, …, x_r з меншою довжиною ніж геодезичний. Але геодезичний шлях має найменшу довжину. Суперечність. Теорему доведено.

Для орієнтованого графа вводять поняття *орієнтованого шляху* (або просто *шляху*) з вершини u у вершину v. Це скінченна послідовність дуг $e_1=(x_0,x_1)$, $e_2=(x_1,x_2)$, ..., $e_r=(x_{r-1},x_r)$, де $x_0=u$, $x_r=v$. Вершини u та v називають, як і в неорієнтованому графі, *крайніми*, а решту вершин шляху – *внутрішніми*. *Довжиною* шляху називають кількість дуг, з яких він складається. *Орієнтованим циклом* називають орієнтований шлях, який з'єднує вершину саму із собою, тобто $u=v$. Орієнтований шлях або цикл називають *простим*, якщо жодна дуга не міститься в ньому більше одного разу.

Для орієнтованого графа поняття зв'язності вводять по-різному, залежно від того, чи враховують напрям дуг.

Орієнтований граф називають *сильно зв'язним*, якщо для будь-яких його різних вершин u та v існують орієнтовані шляхи від u до v та від v до u. Отже, для сильної зв'язності орієнтованого графа повинна існувати послідовність дуг з урахуванням орієнтації від будь-якої вершини графа до будь-якої іншої.

Орієнтований граф може не бути сильно зв’язним, але може бути, так би мовити, „в одному цілому”. У зв’язку із цим дамо таке означення. Орієнтований граф називають *слабко зв’язним*, якщо існує шлях між будь-якими двома різними вершинами у відповідному йому неорієнтованому графі (тобто без урахування напрямку дуг).

Зрозуміло, що сильно зв’язний граф водночас і слабко зв’язний.

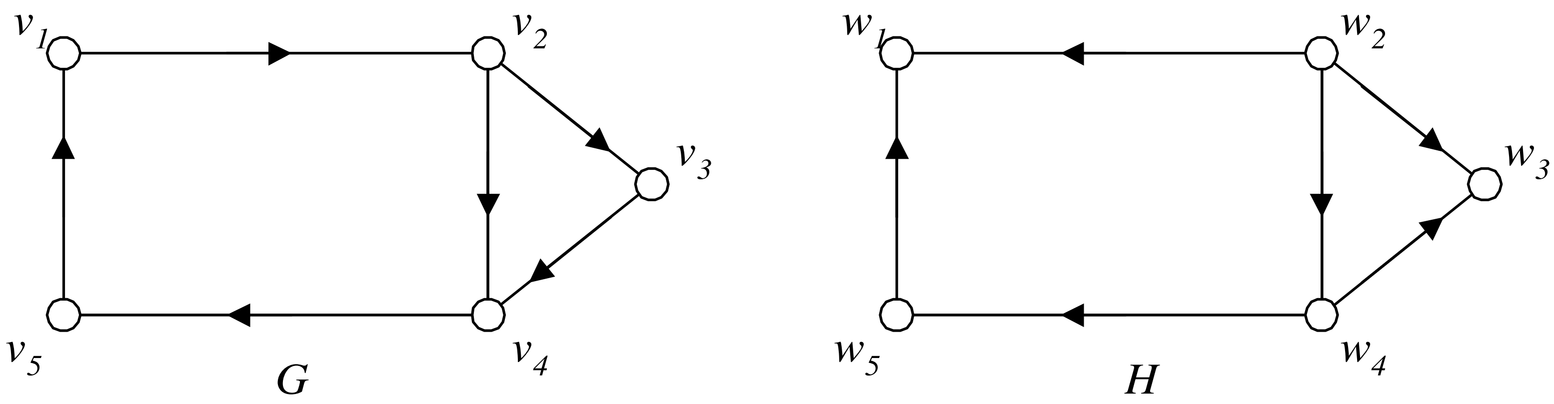

Рис. 9

Приклад. На рис. 9 зображено графи G й H. Граф G – сильно зв’язний. Граф H – слабко зв’язний; він не сильно зв’язний, бо не існує орієнтованого шляху від w_1 до w_2.

Кількість різних шляхів між двома довільними вершинами графа можна підрахувати за допомогою матриці суміжності.

Теорема. Нехай G – граф (орієнтований чи неорієнтований; можуть бути кратні ребра й петлі), A – його матриця суміжності, яка відповідає заданій нумерації вершин v_1, v_2, …, v_n. Тоді кількість різних шляхів довжиною r (r – натуральне) з вершини v_i у вершину v_j дорівнює (i, j)-му елементу матриці A^r.

Терміни, які тут уведено, не уніфіковано й вони по-різному означуються різними авторами. Ми дотримуємося термінології з книги [*Kenneth H. Rosen.* Discrete Mathematics and Its Applications. McGraw-Hill, Inc, 2012]. Уводяться поняття шляху, циклу, простих шляху й циклу в неорієнтованому графі. Аналогічно ці поняття вводяться й для орієнтованих графів. З нашого погляду перевагою цієї термінології є її простота: небагато нових термінів і вони стосуються всіх типів графів, як неорієнтованих, так і орієнтованих. Зазначимо (див. табл.), що в літературі також поширений альтернативний набір термінів [*В.Ф. Емеличев и др.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990], [*Ю.В. Капітонова та ін.* Основи дискретної математики. К.: Наукова думка, 2002]. Очевидно, особливо уважним потрібно бути з термінами „цикл", „простий цикл" і „шлях", оскільки їх використовують у різних значеннях. Зокрема, простий шлях і цикл ми визначаємо як такі, що не містять повторюваних ребер, тоді як у іншій системі термінів їх визначають як такі, що не містять повторюваних вершин (ми такий шлях і цикл назвали елементарними). Це має значення для формулювання означень і теорем, у яких використовуються терміни й поняття шляху та циклу.

Таблиця

Властивості шляху	**Терміни у лекціях стосуються довільних графів**	**Неорієнтовані графи** [*В.Емеличев, Ю.Капітонова*]	**Орієнтовані графи**	
			[*В.Емеличев*]	[*Ю.Капітонова*]
Найзагальніший випадок: ребра (дуги) можуть повторюватись	*Шлях*	*Маршрут*	*Орієнтований маршрут* або *маршрут*	*Маршрут* або *шлях*
Усі ребра (дуги) різні	*Простий шлях*	*Ланцюг*	*Ланцюг*	*Орланцюг*
Усі вершини різні, окрім, можливо, крайніх	*Елементарний шлях*	*Простий ланцюг*	*Шлях*	*Простий орланцюг*
Перша й остання вершини співпадають	*Цикл*	*Циклічний маршрут*	*Циклічний маршрут*	–
Перша й остання вершини співпадають, а ребра (дуги) не повторюються	*Простий цикл*	*Цикл*	–	*Замкнутий орланцюг*
Перша й остання вершини співпадають, а усі інші вершини різні	*Елементарний цикл*	*Простий цикл*	*Контур*	*Цикл*

Шляхи в графах та ізоморфізм

Є різні способи використати концепцію шляху та циклу для визначення, чи є два графи ізоморфними. Наприклад, існування простого циклу певної довжини – корисний інваріант, яким можна скористатись для доведення, що два графи не ізоморфні.

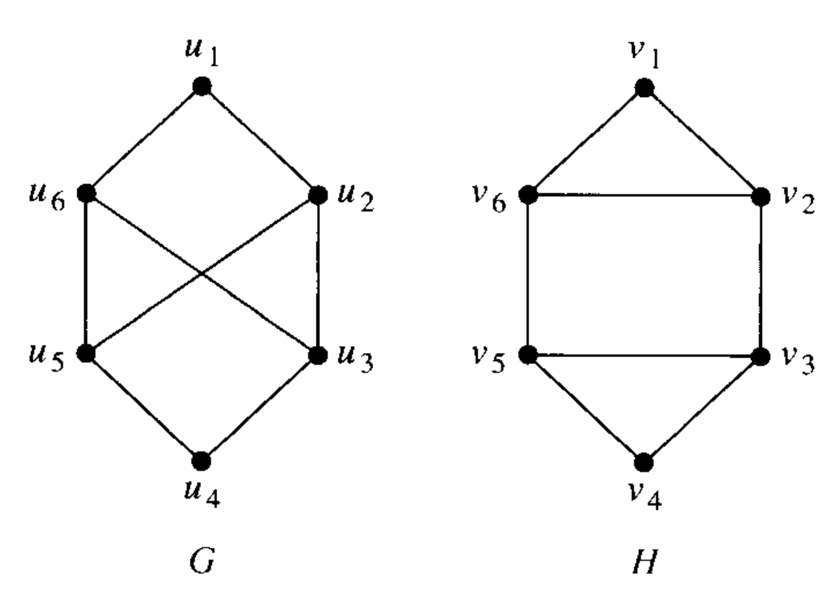

Рис. 10

Приклад. Дослідимо, чи ізоморфні графи G та H на рис. 10. Обидва ці графи мають по шість вершин і по вісім ребер. Кожний з них має чотири вершини степеня три і дві вершини степеня два. Отже, три інваріанти – кількість вершин, кількість ребер і степені вершин – усі узгоджені в цих двох графах. Проте, граф H має простий цикл довжиною три, нехай v_1, v_2, v_6, v_1, тоді як граф G не має простого циклу довжиною три. Цикл певної довжини є інваріантом. Отже, графи G та H не ізоморфні.

Існують і інші інваріанти, пов’язані зі шляхами й циклами. Наприклад, інваріантом є простий цикл, який проходить через вершини певного степеня. Наприклад, графи G_1 та G_2 на рис. 5 неізоморфні, бо граф G_2 має простий цикл y_1, y_5, y_7, y_3, y_1, у якому степені всіх вершин дорівнюють трьом, а граф G_1 такого циклу на має.

Характеристики зв'язності простого графа

Розглянемо неорієнтовані графи K_n та C_n. Обидва ці графи зв'язні, проте інтуїтивно зрозуміло, що для n>3 граф K_n „сильніше зв'язаний", ніж граф C_n. Розглянемо два поняття, які характеризують міру зв'язності простого графа.

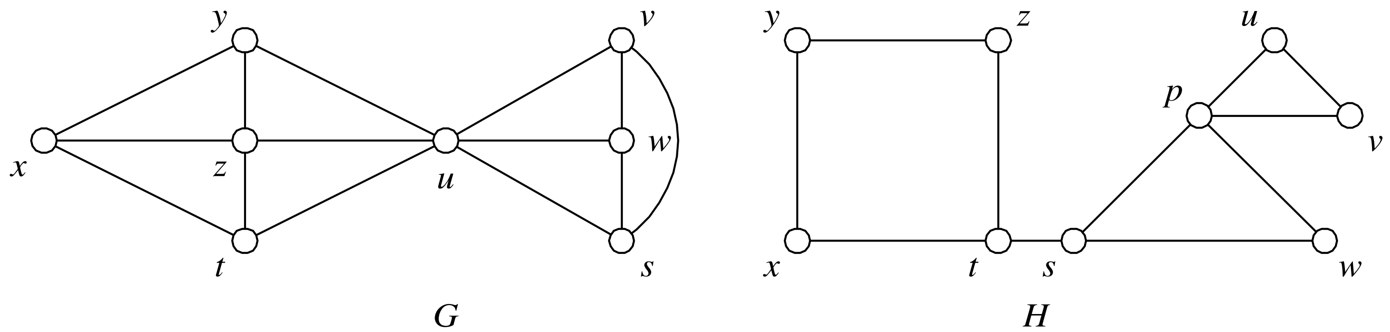

Рис. 11

Числом вершинної зв'язності (або просто *числом зв'язності*) $\kappa(G)$ простого графа G називають найменшу кількість вершин, вилучення яких дає незв'язний або одновершинний граф. Зазначимо, що вершину вилучають разом з інцидентними їй ребрами. Наприклад, $\kappa(K_1)=0$, $\kappa(K_n)=n-1$, $\kappa(C_n)=2$. Граф G, зображений на рис. 11, зв'язний, але його зв'язність можна порушити вилученням вершини u. Отже, $\kappa(G)=1$. Якщо ж спробувати порушити зв'язність цього графа вилученням ребер (а не вершин), то потрібно вилучити не менше ніж три ребра.

Нехай G – простий граф з n>1 вершинами. *Числом реберної зв'язності* $\lambda(G)$ графа G називають найменшу кількість ребер, вилучення яких дає незв'язний граф. Число реберної зв'язності одновершинного графа вважають таким, що дорівнює 0. Для графа G, зображеного на рис. 11, $\lambda(G) = 3$.

Вершину *u* простого графа G називають *точкою з'єднання*, якщо граф G в разі її вилучення матиме більше компонент, ніж даний граф G. Зокрема, якщо G – зв'язний граф і *u* – точка з'єднання, то G без вершини *u* – незв'язний. Нагадаємо, що вершину *u* при цьому вилучають разом із інцидентними їй ребрами. Ребро графа G називають *мостом*, якщо його вилучення збільшує кількість компонент. Отже, точки з'єднання й мости – це свого роду „вузькі місця" простого графа.

Приклад. Граф H із рис. 11 має три точки з'єднання t, s, p та один міст $\{t, s\}$.

Позначимо як $\delta(G)$ мінімальний степінь вершин графа G. Можна показати, що $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$.

Простий граф G називають *t-зв'язним*, якщо $\kappa(G) \ge t$ і *реберно-t-зв'язним*, якщо $\lambda(G) \ge t$. Отже, відмінний від K_1 граф однозв'язний тоді й лише тоді, коли він зв'язний. *Двозв'язні графи* – це зв'язні графи без точок з'єднання, відмінні від графа K_1.

Приклад. Граф G, зображений на рис. 4, однозв'язний і реберно-3-зв'язний.

Очевидно, що кількість ребер у зв'язному простому графі з n вершинами не перевищує кількості ребер у графі K_n, тобто $n(n–1)/2$. Але скільки може бути ребер у простому графі з n вершинами й фіксованою кількістю k компонент?

Теорема. Якщо простий граф G має n вершин і k компонент, то кількість m його ребер задовольняє нерівності

$$n-k \le m \le (1/2)(n-k)(n-k+1).$$

Доведення. Доведемо спочатку верхню оцінку. Нехай G – простий граф з n вершинами, k компонентами й максимальною для таких графів кількістю ребер $m_{\max}$. Очевидно, що кожна компонента графа G – повний граф. Нехай K_p, K_q – дві компоненти, $p \ge q > 1$, v – вершина з компоненти K_q. Вилучимо з графа всі ребра, інцидентні вершині v, і з'єднаємо вершину v ребром із кожною вершиною з компоненти K_p. Кількість вершин і компонент при цьому не зміниться, а кількість ребер зросте на величину $p–(q–1)=p–q+1>1$, що неможливо, бо граф G має максимально можливу кількість ребер. Звідси випливає, лише одна компонента графа G являє собою повний граф із більшою ніж 1 кількістю вершин $n-(k-1)=n-k+1$, а решта (k–1) компонент – ізольовані вершини. Отже,

$$m_{\max} = (1/2)(n-k)(n-k+1).$$

Доведемо нижню оцінку. Доведення здійснюємо математичною індукцією за кількістю ребер m. Для m=0 твердження очевидне, оскільки тоді k=n і, отже, 0≤0. Нехай тепер m>0, і для графів із кількістю ребер меншою, ніж m, нижня оцінка справджується. Припустимо, що граф G має найменшу можливу кількість ребер $m_{\min}$ серед усіх простих графів з n вершинами й k компонентами. Вилучивши довільне ребро, отримаємо граф з n вершинами, k+1 компонентою й $m_{\min}$–1 ребром. Для цього графа справджується припущення індукції: $n-(k+1) \le m_{\min} - 1$, звідки випливає нерівність $n-k \le m_{\min}$.

Питання. Чи можна стверджувати, що коли простий граф з n вершинами містить більше ніж $(n-1)(n-2)/2$ ребер, то він обов'язково зв'язний?

Критерій двочастковості графа

Д. Кеніг сформулював критерій двочастковості простого графа в термінах довжин простих циклів.

Теорема (Кеніг, 1936 р.). Для того, щоб граф G був двочастковим, необхідно й достатньо, щоб він не містив простих циклів із непарною довжиною.

Доведення. Необхідність. Нехай G – двочастковий граф, C – один із його простих циклів довжиною k. Пройдемо всі ребра цього циклу, починаючи з вершини v. Зробивши k кроків, повернемось у вершину v. Оскільки кінці кожного ребра містяться в різних підмножинах вершин, то k – парне число.

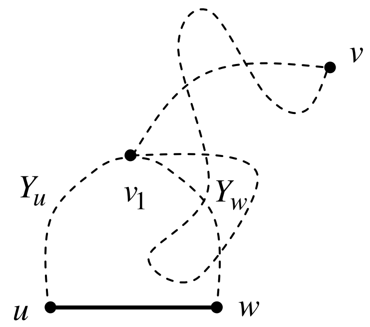

Рис. 12

Достатність. Нехай зв'язний простий граф $G = (V, E)$ з $n>1$ вершинами не має простих циклів із непарною довжиною та $v \in V$. Побудуємо розбиття $V=A \cup B$ ($A \cap B=\varnothing$) так. Довільну вершину $x \in V$ долучимо до множини A, якщо віддаль $d(x,v)$ – парна, а ні, то до множини B. Залишилося довести, що <u>породжені підграфи</u> $G(A)$ та $G(B)$ порожні (тобто не мають ребер). Припустимо, що це не так, тобто існують дві суміжні вершини u та w, які належать одній множині. Тоді жодна із цих вершин не співпадає з v, бо $v \in A$, а всі вершини, суміжні з v, належать множині B. Нехай $U=\langle u, v\rangle$ та $W=\langle w, v\rangle$ – геодезичні шляхи, v_1 – остання (якщо починати від v) зі спільних вершин цих шляхів (рис. 12). Позначимо як X_U та Y_U відповідно частини шляху U від v до v_1 та від v_1 до u. Аналогічно, як X_W та Y_W позначимо відповідно частини шляху W від v до v_1 та від v_1 до w. Очевидно, що довжини шляхів X_U та X_W однакові (бо шляхи U та W геодезичні). Отже, довжини шляхів Y_U та Y_W мають один тип парності (позаяк за припущенням вершини u та w належать одній множині, то їх віддалі від вершини v мають один тип парності). Але тоді об'єднання шляхів Y_U та Y_W та ребра $\{u,w\}$ являє собою простий цикл із непарною довжиною. Суперечність. Теорему доведено.

Доведення теореми Кеніга підказує простий спосіб розпізнавання двочастковості графа. Цей спосіб ґрунтується на простому алгоритмі, який називають пошуком ушир. Множину вершин, суміжних із вершиною v, будемо називати *оточенням* вершини v. *Пошук ушир* так приписує вершинам графа номери 0, 1, 2, ... Починають із довільної вершини, приписують їй номер 0. Кожній вершині з оточення вершини 0 приписують номер 1. Тепер розглядають почергово оточення всіх вершин із номером 1, і всім вершинам, що належать цим оточенням і ще не мають номера, приписують номер 2. Розглядають оточення всіх вершин із номером 2 та продовжують процес присвоювання номерів, доки це можливо. Якщо даний граф $G=(V, E)$ зв'язний, то пошук ушир занумерує всі його вершини.

Далі розіб'ємо множину вершин V на дві підмножини – A та B. До множини A долучимо всі вершини з парними номерами (та 0), а до множини B – з непарними. Розглянемо породжені підграфи $G(A)$ та $G(B)$. Якщо обидва вони порожні (достатньо перевірити, що всі пари вершин з однаковими номерами не суміжні), то G – двочастковий граф, а ні – то не двочастковий.

Зазначимо, що існує й інший, більш розповсюджений варіант пошуку вшир. Він відрізняється тим, що всі вершини отримують різні номери.