Лекція 10

Комбінаторний аналіз

Основні правила комбінаторного аналізу. Розміщення та сполучення

Почнемо з формулювання двох основних правил комбінаторики: *правила суми* та *правила добутку*.

Правило суми. Якщо деякий об'єкт x можна вибрати n_1 способами, а інший об'єкт y – n_2 способами, то вибрати або x або y можна n_1+n_2 способами. Це правило можна пояснити інакше. Нехай якусь процедуру можна виконати, розв'язавши одне з двох завдань. Якщо є n_1 способів розв'язати перше завдання та n_2 способів розв'язати друге завдання, причому множини способів розв'язання першого та другого завдань не мають спільних елементів, то всю процедуру можна виконати n_1+n_2 способами.

Приклад. Студент має вибрати тему курсової роботи зі списку, розміщеного на трьох аркушах. Аркуші містять відповідно 20, 15 і 17 тем, причому жодна тема не повторюється в двох аркушах. З якої кількості можливих тем студент робить свій вибір?

За правилом суми кількість тем для вибору становить 20+15+17=52.

Правило добутку. Якщо об'єкт x можна вибрати n_1 способами та після кожного такого вибору об'єкт y можна вибрати n_2 способами, то пару об'єктів (x, y) у зазначеному порядку можна вибрати $n_1 \cdot n_2$ способами. Це правило можна пояснити інакше. Нехай якусь процедуру можна виконати розв'язавши послідовно два завдання. Якщо є n_1 способів розв'язати перше завдання та n_2 способів розв'язати після цього друге завдання, то всю процедуру можна виконати $n_1 \cdot n_2$ способами.

Приклад. В одній із версій мови BASIC ім'я змінної – це рядок з одного або двох символів, якими можуть бути 26 букв латинського алфавіту та 10 цифр. Першим символом має бути буква. Крім того, не можна використовувати 5 двосимвольних рядків, які зарезервовано для спеціального використання. Знайдемо, скільки різних імен змінних є в цій версії мови BASIC.

Нехай V – величина, яку потрібно обчислити, V_1 – кількість односимвольних імен, V_2 – двосимвольних. За правилом суми всього імен $V=V_1+V_2$. Очевидно, що $V_1=26$; за правилом добутку $V_2=26\cdot 36-5=931$. Отже, $V = 26 + 931 = 957$.

Складніше розв'язують комбінаторні задачі, у яких кількість можливостей вибору після кожного кроку залежить від того, які елементи вибрані на попередніх кроках. Далі подано приклад такої задачі.

Приклад. Скількома способами із 28 кісток доміно можна вибрати дві кості так, щоб їх можна було прикласти одну до одної (тобто щоб якась кількість очок зустрічалась на обох кістках)?

Спочатку виберемо одну кістку. Це можна зробити 28 способами. При цьому в 7 випадках вибрана кістка виявиться «дублем», тобто кісткою вигляду 00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, а в 21 випадку – кісткою з різними числами очок (04, 13, тощо). У першому випадку другу кістку можна вибрати 6 способами (наприклад, коли на першому кроці вибрано кістку 11, то на другому кроці можна взяти одну з кісток 01, 12, 13. 14. 15, 16). У другому випадку другу кістку можна вибрати 12 способами (для кістки 35 підійдуть кістки 03, 13. 23, 33, 34, 36, 05, 15, 25, 45,55, 56). За правилом добутку у першому випадку матимемо $7 \cdot 6 = 42$ способи вибору, а в другому – $21 \cdot 12 = 252$ способи вибору. За правилом суми отримаємо $42 + 252 = 294$ способи вибору пари.

У наведених міркуваннях враховано порядок, у якому вибиралися кістки. Тому кожна пара кісток з'являлася двічі (наприклад, перший раз 01 і 16, а другий раз 16 і 01). Оскільки порядок вибору кісток неістотний, то насправді одержимо вдвічі менше способів вибору, тобто **147 способів**.

Розглянемо **основні комбінаторні об’єкти – розміщення та сполучення.** Попередньо означимо **важливе поняття вибірки.**

Нехай задано скінченну непорожню множину $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ і виконано r таких кроків.

Крок 1. Із множини A вибирають якийсь елемент x_1.

Крок 2. Із множини A чи з множини $A\setminus\{x_1\}$ вибирають якийсь елемент x_2.

… …

Крок r. Якщо $x_1, x_2 \ldots, x_{r-1}$ – елементи, які вибрані на перших r–1 кроках (r≥3), то на цьому кроці вибирають якийсь елемент x_r із множини A чи з множини $A\setminus\{x_1, x_2 \ldots, x_{r-1}\}$. Тоді елементи $x_1, x_2 \ldots, x_{r-1}, x_r$ утворюють ***вибірку обсягом r***, або ***r-вибірку* з множини *A*.**

Вибірку називають ***упорядкованою***, якщо задано порядок її елементів, а ні – то ***невпорядкованою***. Зрозуміло, що впорядкована r-вибірка – це кортеж (вектор) з r компонентами, і тому її позначають $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, $x_i \in A$, $i=1, \ldots, r$. Невпорядковану r-вибірку позначатимемо як $[x_1, x_2, \ldots, x_r]$, $x_i \in A$, $i=1, \ldots, r$.

Упорядковані r-вибірки з n-елементної множини називають *розміщеннями з n елементів по r*, а невпорядковані – *сполученнями з n елементів по r*. Використовують також терміни *r-розміщення* (*r-permutation*) та *r-сполучення* (*r-combination*).

Розглянемо два способи вибору елементів. Згідно з першим способом вибору на кожному кроці вибирають елемент з усієї множини A. Отже, один і той самий елемент із множини A може зустрітись у вибірці декілька разів. Такі вибірки називають *вибірками з повтореннями*.

У разі застосування другого способу вибраний елемент вилучають із множини A. Це означає, що на кожному j-му кроці ($1<j\leq k$) вибирають елемент із множини $A\setminus\{x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}\}$, і вибірка не містить однакових елементів. Такі вибірки називають *вибірками без повторень*.

Отже, ми ввели поняття розміщення з повтореннями й без повторень та сполучення з повтореннями й без повторень.

Приклад. Задано множину $A=\{a, b, c\}$, тобто $n=3$.
Розміщення без повторень із трьох елементів по два, тобто $r=2$:

$$(a, b), (a, c), (b, c), (b, a), (c, a), (c, b);$$

розміщення з повтореннями із трьох елементів по два:

$$(a, b), (a, c), (b, c), (b, a)\ (c, a), (c, b), (a, a), (b, b), (c, c);$$

сполучення без повторень із трьох елементів по два:

$$[a, b], [a, c], [b, c];$$

сполучення з повтореннями із трьох елементів по два:

$$[a, b], [a, c], [b, c], [a, a], [b, b], [c, c].$$

Зазначимо, що сполучення без повторень з n елементів по r – це просто r-елементні підмножини множини з n елементів; отже, їх можна записати так: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$.

Сполучення з повтореннями – це, узагалі кажучи, не множина у звичайному розумінні: її елементи можуть повторюватись, тобто зустрічатися більше одного разу.

Обчислення кількості розміщень і сполучень

Кількість усіх розміщень без повторень з n елементів по r позначають як A_n^r або $A(n,r)$, де r і n – невід'ємні цілі числа, причому $r \le n$. Кількість різних розміщень із повтореннями з n елементів по r позначають як $\tilde{A}_n^r$ або $\tilde{A}(n,r)$. Тут r і n – будь-які невід'ємні цілі числа. Кількість усіх сполучень без повторень з n елементів по r позначають як C_n^r, $C(n,r)$, або $\binom{n}{r}$, де r і n – невід'ємні цілі числа, причому $r \le n$. Кількість усіх сполучень із повтореннями з n елементів по r позначимо як H_n^r або $H(n,r)$, де r і n – будь-які невід'ємні цілі числа. Числа C_n^r називають *біноміальними коефіцієнтами*.

Доведемо, що

$A_n^r = n(n-1)\ldots(n-r+1) = \dfrac{n\,!}{(n-r)\,!}$ (1)	$C_n^r = \dfrac{A_n^r}{r\,!} = \dfrac{n\,!}{r\,!(n-r)\,!}$ (3)
$\tilde{A}_n^r = n^r$ (2)	$H_n^r = C_{n+r-1}^r$ (4)

Доведемо рівність (1). Розглянемо якесь розміщення (x_1, x_2, …, x_r) без повторень з n елементів по r. Ми можемо взяти як x_1 будь-який з n елементів, як x_2 – будь-який з (n–1) елементів, що залишились, і продовжити цей процес. Отже, для x_r залишається (n–r+1) можливостей вибору. Використавши правило добутку, переконуємось у тому, що рівність (1) правильна.

Рівність (2) також справджується, бо в розміщенні з повтореннями (x_1, x_2, …, x_r) для кожного елемента x_i, i=1, 2, …, r є n незалежних можливостей вибору.

Доведемо рівність (3). Розглянемо якесь сполучення [x_1, x_2, …, x_r] без повторень з n елементів по r. Виявимо, скільки можна отримати різних розміщень без повторень з r елементів по r із цього сполучення як з r-елементної множини. За формулою (1) дістанемо $A_r^r = r \cdot (r-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = r!$. Очевидно, що в разі [$x_1$, …, x_r]≠[y_1, …, y_r] із двох сполучень без повторень [x_1, …, x_r] і [y_1, …, y_r] не можна одержати рівних розміщень без повторень з r елементів по r. Отже, $A_n^r = r! \cdot C_n^r$, і рівність (3) доведено.

Нарешті, доведемо рівність (4). Замість n-елементної множини $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ розглянемо множину $A'=\{1, 2, \ldots, n\}$ – також з n елементів. Кожну невпорядковану r-вибірку із множини A' можна записати у вигляді

$$[m_1, m_2, \ldots, m_r], \text{ де } m_1 \le m_2 \le \ldots \le m_r,$$

оскільки порядок елементів не суттєвий. Тоді $[m_1+0, m_2+1, \ldots, m_r+r-1]$ є сполученням без повторень з $n+r-1$ елементів по r.

Розглянемо функцію φ із множини всіх сполучень із повтореннями з n елементів по r на множину всіх сполучень без повторень з $n+r-1$ елементів по r:

$$\varphi\,([m_1, m_2, \ldots, m_r]) = [m_1+0, m_2+1, \ldots, m_r+r-1].$$

Два сполучення з повтореннями *рівні*, якщо вони складаються з однакових елементів і кратності цих елементів збігаються.

Якщо $[m_1, m_2,\ldots, m_r]\neq[m'_1, m'_2, \ldots, m'_r]$,
то і $[m_1+0, m_2+1, \ldots, m_r+r-1]\neq[m'_1+0, m'_2+1, \ldots, m'_r+r-1]$.

Більше того, якщо $[n_1, n_2, \ldots, n_r]$ є сполученням без повторень з $n+r-1$ елементів по r, де $n_1<n_2<\ldots<n_r$, то $[n_1, n_2-1, \ldots, n_r-r+1]$ є елементом множини сполучень з повтореннями з n елементів по r.

Отже, функція φ – бієкція (взаємно-однозначне відображення). Рівність (4) доведено.

Перестановки

Перестановка (*permutation*) – це особливий випадок розміщення без повторень з n елементів, коли в розміщення входять усі елементи. Окремі перестановки різняться лише порядком елементів. Кількість таких перестановок позначають як P_n. Формулу для P_n одержують із формули (1) для кількості розміщень без повторень: $P_n = A_n^n = n!$.

Приклад. Скількома способами можна розсадити n людей на лавці?

Очевидно ця кількість дорівнює $P_n = n!$

Приклад. Скількома способами можна розсадити n людей за круглим столом?

Якщо місця не пронумеровано, то при фіксованій розсадці всі можуть посунутись на одне місце без зміни ситуації («карусель»). Тобто, результат попередньої задачі потрібно поділити на n (кількість людей).

Отже, n людей за круглим столом можна розсадити $\dfrac{n!}{n} = (n-1)!$ способами.

Приклад. Скількома способами можна розсадити n чоловіків і n жінок на лавці так, щоб чергувалися чоловік і жінка?

Якщо перший чоловік, то $n! \cdot n! = (n!)^2$ способів, і стільки ж буде, коли першою є жінка. Тому всього є $2(n!)^2$ способів розсадити на лавці n чоловіків і n жінок на лавці так, щоб вони чергувалися.

Приклад. Скількома способами можна розсадити n чоловіків і n жінок за круглим столом так, щоб чергувалися чоловік і жінка?

Це «карусель». Відповідь попередньої задачі поділити на кількість людей, тобто на $2n$. Тоді матимемо $\frac{2(n!)^2}{2n} = n!\cdot(n-1)!$

Приклад. Скількома способами можна розсадити за круглим столом вісім людей, якщо:

(а) немає жодних обмежень. **Тоді 7!**

(б) персони *A* та *B* мають сидіти поруч. **Тоді 6!·2**

(в) є 4 чоловіки і 4 жінки і жодні 2 чоловіки й 2 жінки не мають сидіти поруч. Це задача про чергування чоловіків і жінок за круглим столом. **Відповідь: 4!·3!**

(г) п'ятеро мають сидіти поруч. Цих п'ятьох розглядаємо як одну позицію, і є ще троє. Отже, всього 4 позиції, за круглим столом є 3! способів їхнього розміщення. П'ятьох, які мають сидіти разом, можна розмістити 5! способами. **Відповідь отримуємо за правилом добутку: 3!·5!**

(д) є чотири подружніх пари, і подружжя мають сидіти поруч. Чотири подружніх пари за круглим столом за вказаної умови можна розсадити 3! способами, і після цього в кожній подружній парі поміняти місцями чоловіка й жінку. **За правилом добутку отримаємо $3!\cdot 2^4 = 96$ способів.**

Розглянемо тепер задачу про перестановки *n* елементів за умови, що не всі елементи різні (перестановки з повтореннями). Точніше, нехай є n елементів k різних типів, а число n_j (j=1, …, k) – кількість елементів j-го типу. Очевидно, що $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Перестановки з n елементів за такої умови називають *перестановками з повтореннями*. Кількість таких перестановок позначають як $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Щоб знайти явний вираз для $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, візьмемо окрему перестановку та замінимо в ній усі однакові елементи різними.

Тоді кількість різних перестановок, котрі можна отримати із взятої однієї перестановки, дорівнює $n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!$. Якщо це зробити для кожної перестановки, то одержимо $n!$ перестановок. Отже, $P_n(n_1,n_2,\ldots,n_k)\cdot n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k! = n!$, звідки

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

Приклад. Знайдемо кількість слів (рядків), які можна утворити, переставляючи букви слова PRODUCT. Оскільки жодна буква тут не повторюється, то можна утворити P_7=7!=5040 слів.

Приклад. Знайдемо, скільки слів можна утворити, переставляючи букви слова SUCCESS. У цьому слові є повторні входження букв, тому скористаємося формулою для перестановок із повтореннями:

$$P_7(3,2,1,1)=\frac{7!}{3!\ 2!\ 1!\ 1!}=420.$$

Біном Ньютона

Нагадаємо, що біноміальними коефіцієнтами називають числа $C_n^r = n!/[r!(n-r)!]$ – кількість сполучень без повторень із n елементів по r. Розглянемо деякі властивості біноміальних коефіцієнтів.

Теорема 1. Нехай n і r – невід’ємні цілі, $r \leq n$. Тоді $C_n^r = C_n^{n-r}$.

Доведення. $C_n^r = n!/[r!(n-r)!]$ і $C_n^{n-r} = \dfrac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \dfrac{n!}{(n-r)!\ r!}$.

Отже, $C_n^r = C_n^{n-r}$.

Теорема 2 (тотожність Паскаля). Нехай n і k – невід'ємні цілі, $k \le n$. Тоді
$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Доведення. Позначимо як $S_{n,k}$ множину всіх сполучень з елементів $\{a_1, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ по k елементів; як $S_{n-1,k}$ – відповідно з елементів $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ по k; як $S_{n-1,k-1}$ – з елементів $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ по $k-1$. Кожному сполученню з $S_{n,k}$, яке містить елемент a_n, відповідає сполучення з $S_{n-1,k-1}$. Якщо ж сполучення з $S_{n,k}$ не містить a_n, то йому відповідає сполучення з $S_{n-1,k}$. Отже, існує бієкція між множинами $S_{n,k}$ і $S_{n-1,k} \cup S_{n-1,k-1}$. Оскільки очевидно, що $S_{n-1,k} \cap S_{n-1,k-1} = \varnothing$, то $|S_{n,k}| = |S_{n-1,k}| + |S_{n-1,k-1}|$, тобто $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Отримане рекурентне співвідношення дає змогу побудувати з лінійною складністю таблицю для чисел C_n^k, яку називають *трикутником Паскаля*.

k / n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
0	1										…
1	1	1									…
2	1	2	1								…
3	1	3	3	1							…
4	1	4	6	4	1						…
5	1	5	10	10	5	1					…
6	1	6	15	20	15	6	1				…
7	1	7	21	35	35	21	7	1			…
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		…
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Послідовність (p_n) дійсних чисел називають *унімодальною*, якщо існує такий натуральний номер m, що $p_0 < p_1 < \ldots < p_m$; $p_m \geq p_{m+1} > p_{m+2} > \ldots > p_n$, тобто:

1) послідовність строго зростає на відрізку $[0, m]$, $m > 0$;
2) послідовність строго спадає на відрізку $[m + 1, n]$, $m + 1 < n$;
3) максимальне значення досягається не більше ніж у двох точках: m і, можливо, m+1.

Нагадаємо, що як $\lfloor x \rfloor$ позначають найбільше ціле число, яке не більше x (ціла частина x).

Теорема 3. За фіксованого n послідовність біноміальних коефіцієнтів (C_n^k), k=0, 1, 2, …, n, унімодальна, $m = \lfloor n/2 \rfloor$. У разі парного n максимум досягається в точці $m = \lfloor n/2 \rfloor = n/2$, а в разі непарного – у двох точках: $m = \lfloor n/2 \rfloor = (n-1)/2$ і $m+1 = (n+1)/2$.

Теорема 4 (тотожність Вандермонда). Нехай m, n, r – невід’ємні цілі , причому $r \leq \min(m, n)$. Тоді $C_{m+n}^r = \sum_{k=0}^r C_m^{r-k} C_n^k$.

Теорема 5 (біноміальна теорема). Нехай x та y – змінні, n – натуральне число. Тоді

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^j y^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^{n-j} y^j .$$

Доведення. Дамо комбінаторне доведення цієї теореми. Оскільки $x^j y^{n-j}$ отримано внаслідок j-кратного вибору x і $(n-j)$-кратного вибору y з n співмножників у виразі $(x+y)^n$, то коефіцієнт при $x^j y^{n-j}$ дорівнює кількості способів j-кратного вибору x з n співмножників, тобто C_n^j. Друга рівність випливає з того, що $C_n^j = C_n^{n-j}$. Це завершує доведення.

Легко переконатись, що $(x-y)^n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j x^{n-j} y^j$.

Приклад. Знайдемо розклад $(x+y)^4$. Скориставшись біноміальною теоремою, можемо записати:

$$(x+y)^4 = C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 y + C_4^2 x^2 y^2 + C_4^3 x y^3 + C_4^4 y^4 = x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

Біноміальні коефіцієнти можна брати з трикутника Паскаля чи обчислювати за формулою (3).

Приклад. Визначимо коефіцієнт при $x^{12}y^{13}$ у розкладі $(x+y)^{25}$.

Очевидно, що цей коефіцієнт дорівнює

$$C_{25}^{13} = \frac{25!}{13!\,12!} = 5200300.$$

За допомогою біноміальної теореми можна довести ще **дві властивості біноміальних коефіцієнтів.**

Теорема 6. Нехай n – натуральне число. Тоді $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

Доведення. За теоремою 5 маємо $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$.

Теорема 7. Нехай n – натуральне число. Тоді $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$.

Доведення. За теоремою 5 можемо записати

$$0 = [1+(-1)]^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k.$$

Поліноміальна теорема

Як узагальнення бінома розглянемо вираз вигляду $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n$. Основний результат сформульовано в наведеній нижче теоремі.

Теорема 8 (поліноміальна теорема). Вираз $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n$ дорівнює сумі всіх можливих доданків вигляду

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) \cdot x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdot ... \cdot x_k^{n_k}, \text{ де } n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n,$$

Тобто

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1 \geq 0, ..., n_k \geq 0 \\ n_1 + ... + n_k = n}} P_n(n_1, ..., n_k) \cdot x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdot ... \cdot x_k^{n_k}.$$

Доведення. Запишемо $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n$ у вигляді добутку n співмножників і розкриємо дужки. Коефіцієнт при $x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k}$ дорівнює кількості перестановок із повтореннями таких, що елемент x_1 входить n_1 разів, x_2 входить n_2 разів, …, x_k входить n_k разів, а всього елементів є $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Очевидно, що цей коефіцієнт дорівнює $P_n(n_1, \ldots, n_k)$.

Отриману формулу називають *поліноміальною формулою*. Вона, зокрема, дає змогу доводити деякі властивості чисел $P_n(n_1,\ldots,n_k)$. Зазначимо дві з них.

1. Нехай $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 1$, тоді $\sum\limits_{\substack{n_1 \ge 0,\ldots,n_k \ge 0 \\ n_1+\ldots+n_k = n}} P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = k^n$.

2. Помножимо обидві частини поліноміальної формули, якщо її записати для $n-1$, на $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)$ і порівняємо коефіцієнти при однакових доданках. Тоді отримаємо таке співвідношення:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = P_{n-1}(n_1 - 1, n_2, \ldots, n_k) + P_{n-1}(n_1, n_2 - 1, \ldots, n_k) + \ldots + P_{n-1}(n_1, n_2, \ldots, n_k - 1).$$

Задача про цілочислові розв'язки

Цю задачу формулюють так: знайти кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$ у цілих невід'ємних числах, де r – ціле невід'ємне число.

Якщо взяти невід'ємні цілі числа x_1, x_2, …, x_n такі, що $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$, то можна одержати сполучення з повтореннями з n елементів по r, а саме: елементів першого типу – x_1 одиниць, другого типу – x_2 одиниць, …, n-го типу – x_n одиниць. Навпаки, якщо є сполучення з повтореннями з n елементів по r, то кількості елементів кожного типу задовольняють рівнянню $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$ у цілих невід'ємних числах. Отже, кількість цілих невід'ємних розв'язків цього рівняння дорівнює

$$H_n^r = C_{n+r-1}^r$$

Приклад. Знайдемо кількість невід'ємних цілих розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 = 11$. Безпосереднє використання попередньої формули дає

$$H_3^{11} = C_{3+11-1}^{11} = C_{13}^{11} = \frac{13!}{11!\,2!} = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78.$$

Кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$ у невід'ємних цілих числах можна визначити й тоді, коли на змінні накладено певні обмеження.

Приклад. Знайдемо кількість невід'ємних цілих розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ за умов $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 3$. Очевидно, що ця задача еквівалентна рівнянню $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ уже без обмежень. Справді, потрібно взяти щонайменше 1 елемент першого типу, 2 елементи другого типу, 3 елементи третього типу – разом $1 + 2 + 3 = 6$ елементів; отже, $11 - 6 = 5$ елементів залишаться для довільного вибору,

$$H_3^5 = C_{3+5-1}^5 = C_7^5 = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21.$$

Приклад. Визначмо кількість розв'язків у невід'ємних цілих числах нерівності $x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$. Уведемо допоміжну змінну x_4, яка може набувати невід'ємних цілих значень, і перейдемо до еквівалентної задачі: визначити кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$ у невід'ємних цілих числах. Отже,

$$H_4^{11} = C_{4+11-1}^{11} = C_{14}^{11} = \frac{14!}{11!\,3!} = 364.$$