Якуляк Андрій, ПМІ-11

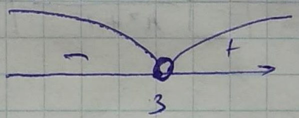
1	2	3	4	5	6а	6б	6в	6г	7а	7б	8	9	10

11	12	13	14	Σ

1\. $A = \{x \in R : \frac{-7}{x-3} < 0\}$, $B = \{x \in R : |x-4| \le 2$

$\frac{-7}{x-3} < 0$;

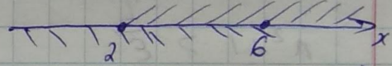
$\frac{7}{x-3} > 0$



$x - 4 \le 2$

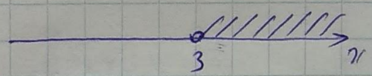
$x - 4 \ge -2$

$\begin{cases} x \le 6 \\ x \ge 2 \end{cases}$

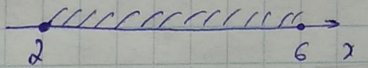


$x \in [2; 6]$

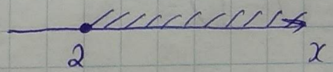
A



B

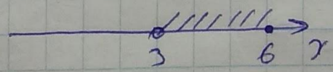


$A \cup B$



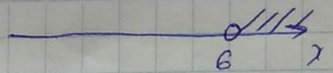
$x \in [2; +\infty)$

$A \cap B$



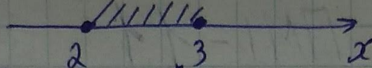
$x \in (3; 6]$

$A \setminus B$



$x \in (6; +\infty)$

$B \setminus A$



$x \in [2; 3]$

№4. $A = \left\{ \frac{2 - (-1)^n}{3},\ n \in \mathbb{N} \right\}$

$1)\ n = 2k: \quad \frac{2 - (-1)^{2k}}{3} = \frac{1}{3}$

$2)\ n = 2k - 1: \quad \frac{2 - (-1)^{2k-1}}{3} = 1$

$\sup A = 1$ $\qquad$ $\max A = 1$

$\inf A = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\min A = \frac{1}{3}$

№5. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2 - 5n^2}{n^2 + 1} = -5$. Довести за означенням

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\{|x_n - a| < \varepsilon\}$$

$$|x_n - a| = \left| \frac{2 - 5n^2}{n^2+1} + 5 \right| = \left| \frac{2 - 5n^2 + 5n^2 + 5}{n^2+1} \right| = \left| \frac{7}{n^2+1} \right| =$$

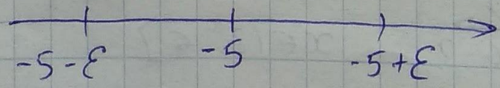
$$= \frac{7}{n^2+1} < \varepsilon$$

$$n^2 + 1 > \frac{7}{\varepsilon}$$

$$n^2 > \frac{7}{\varepsilon} - 1$$

$$n > \sqrt{\frac{7}{\varepsilon} - 1}$$

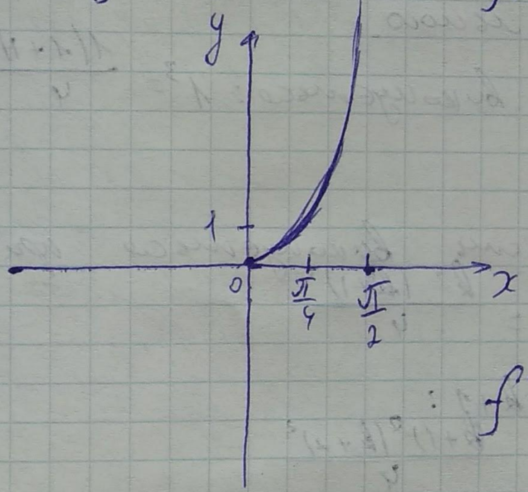
$$N = \max\left(1; \left[\sqrt{\frac{7}{\varepsilon} - 1}\right]\right)$$



№9. Нехай $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ - нескінченно великі послідовності.

Послідовність $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ може мати скінченну ненульову границю, може її зовсім не мати, а також може бути нескінченно малою або нескінченно великою.

№3. $f: [0; \frac{\pi}{2}) \rightarrow R$; $f(x) = tg\, x$; $A = [1; +\infty)$



Відображення є ін'єктивне; не є сюр'єктивне; не є бієктивне.

$f^{-1}(A) = [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$

№1. Прообразом множини A при відображенні f називають множину:

$$f^{-1}(A) \overset{def}{=} \{x \mid \exists y \in A : f(x) = y\} \cancel{= \{f(x) : x \in} = \{x \in X : f(x) \in A\}$$

№12. Найменшу верхню межу множини $A \subset R$ називають її точною верхньою межею і позначають $\sup A$.

$$(M = \sup A) \overset{def}{\equiv} \begin{cases} 1) (\forall x \in A) \{x \le M\} \\ 2) (\forall \varepsilon > 0)(\exists x' \in A) \{x' > M - \varepsilon\} \end{cases}$$

№13. Критерій Коші: для того, щоб послідовність збігалася, необхідно і достатньо, щоб вона була фундаментальною.

№2. 1) При $n = 1$ рівність виконується: $1^3 = \frac{1(1+1)^2}{4}$,

$1 = 1$

2) Припустимо, що рівність виконується при $n = k$: $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2 (k+1)^2}{4}$

3) Довести, що при $n = k+1$:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4}$$

$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2 (k+1)^2}{4}$ за припущенням індукції, тоді $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2 (k+1)^2}{4} +$

$$+ (k+1)^3 = \frac{k^2 (k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2 (k^2 + 4k + 4)}{4} =$$

$$= \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4}$$

Доведено!

№10. Елемент $a \in M$ називають мінімальним, якщо для будь якого елемента $b \in M$, $b \geq a$.

№6. а) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1+3+5+\ldots+(2n+1)}{3n^2} =$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\frac{1+(2n+1)}{2} \cdot n}{3n^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)n}{3n^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3}$

~~б) $\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{1+2n+n^2}$ -~~

б) $\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{4n^4+13n^2+7} - 2n^2) = n^2\sqrt{4+\underbrace{\frac{13}{n^2}}_{0}+\underbrace{\frac{7}{n^4}}_{0}} - 2n^2 =$

$= 2n^2 - 2n^2 = 0$

в) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{7^{n-1}+5^n}{2^n - 7^{n+1}} = \frac{\frac{7^n}{7}+5^n}{2^n - 7\cdot 7^n} = \frac{7^n\left(\frac{1}{7}+\left(\frac{5}{7}\right)^n\right)}{7^n\left(\left(\frac{2}{7}\right)^n - 7\right)} = \frac{\frac{1}{7}}{-7} = -\frac{1}{49}$

г) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n^3-2}{n^3+1}\right)^{n^3-2} = \left(\frac{n^3+1-3}{n^3+1}\right)^{n^3-2} = \left(1-\underbrace{\frac{3}{n^3+1}}_{\to 0}\right)^{n^3-3+1} =$

$= \left(\left(1-\frac{3}{n^3+1}\right)^{-(n^3+1)}\right)^{\frac{n^3-2}{-(n^3+1)}} = e^{\frac{n^3-2}{-n^3-1}} = e^{\frac{n^3\left(1-\frac{2}{n^3}\right)}{n^3\left(-1-\frac{1}{n^3}\right)}} = e^{\frac{1}{-1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

№7. б) $\frac{(-5)^{n+1}}{2^n\ 3^{n+2}}$

1) $n = 2k$: $x_{2k} = \frac{-5}{\underbrace{2^{2k}\cdot 3^{2k+2}}_{\to\infty}} = 0$ – часткова границя

2) $n = 2k-1$: $x_{2k-1} = \frac{5}{\underbrace{2^{2k-1}\cdot 3^{2k+1}}_{\to\infty}} = 0$ – часткова границя

$\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} = \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} = \lim\limits_{n \to \infty} = 0$

№8. $x_n = \frac{n^2}{3^n}$. Довести збіжність

Доведемо монотонність

$\frac{n^2}{3^n} < 1$

$n^2 < 3^n$

$n > 2$

Починаючи з $n=2$, $\frac{n^2}{3^n} > \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}$ Доведено!

Доведемо обмеженість

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0$, при $N=1$, оскільки

послідовність монотонно спадна, $3^n \to +\infty$

Отже, послідовність збіжна.