ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. $\int 0\,dx = C\,.$

2. $\int 1\,dx = x + C\,.$

3. $\displaystyle\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C\,,\ (p \neq -1)\,.$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C\,.$

5. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\,,\ \int e^x\,dx = e^x + C\,.$

6. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C\,.$

7. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C\,.$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\mathrm{ctg}\,x + C\,.$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg}\,x + C\,.$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C\,,\ (a > 0).$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C\,,\ (a \neq 0).$

Крім того, неважко переконатись у справджуваності наступних тверджень

12. $\displaystyle\int \mathrm{sh}\,x\,dx = \mathrm{ch}\,x + C\,.$

13. $\displaystyle\int \mathrm{ch}\,x\,dx = \mathrm{sh}\,x + C\,.$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\,x + C\,.$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\,x + C\,.$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|\,x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C\,,\ (a > 0).$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\,\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C\,,\ (a \neq 0).$

Зауважимо, що $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\,\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\,,\ (a \neq 0).$

18. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln|\,a^2 \pm x^2| + C\,.$

Зауважимо, що $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}\ln|\,a^2 \pm x^2| + C\,.$

19. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C\,,\ (a > 0).$

−−−

20. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\,\arcsin\frac{x}{a} + C\,,\ (a > 0).$

21. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\,\ln|\,x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C\,,\ (a > 0).$

ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

1) $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^\alpha \ (x > 0)\,.$

Зокрема, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}\,, \quad (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,.$

2) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)\,;$

3) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a \ \ (0 < a \neq 1)\,.$

Зокрема, $(e^x)' = e^x\,.$

4) $(\sin x)' = \cos x\,;$

5) $(\cos x)' = -\sin x\,;$

6) $(tg\ x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n\,,\ n \in \mathbb{Z}\right)\ ;$

7) $(ctg\ x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq \pi n\,,\ n \in \mathbb{Z})\ ;$

8) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1)\ ;$

9) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1)\ ;$

10) $(arctg\, x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}\,;$

11) $(arcctg\, x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}\,;$

12) $(sh\, x)' = ch\, x\,;$

13) $(ch\, x)' = sh\, x\,;$

14) $(th\, x)' = \dfrac{1}{ch^2 x}\,;$

15) $(cth\, x)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}\,.$

Нагадаємо, що $d(f(x)) = f'(x)\, dx\,.$

✓ *A*

$$\int \mathrm{R}\left(x,\, x^{\frac{p_1}{q_1}},\, x^{\frac{p_2}{q_2}},\, \ldots,\, x^{\frac{p_k}{q_k}}\right) dx \;\Rightarrow\; \text{підстановка } x = t^m \text{, де } m = \text{НСК } \{q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_k\}\,.$$

✓ *B*

$\displaystyle\int \mathrm{R}\left(x,\, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}},\, \ldots,\, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right) dx \Rightarrow$ підстановка $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$ де $m = \text{НСК } \{q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_k\}\,.$

✓ *C*

Теорема Чебишева

Інтеграли від диференціального біному $\displaystyle\int x^m(a+bx^n)^p\,dx,$ де $m, n, p \in \mathbf{Q}$ можуть бути зведені до інтергування раціональних функцій лише у ТРЬОХ наступних випадках:

1. $p \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\;$ підстановка $x = z^N$, де N — спільний знаменник дробів m і n;
2. $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\;$ підстановка $a + bx^n = z^N$, де N — знаменник p;
3. $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\;$ підстановка $ax^{-n} + b = z^N$, де N — знаменник p.

✓ *D*

$\displaystyle\int \mathrm{R}\left(x,\, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx \;\Rightarrow\;$ одна з трьох підстановок Ейлера:

1. $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x,$ при $a > 0$;
2. $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c},$ при $c > 0$;
3. $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_1),$ де x_1 — один з дійсних коренів рівняння $ax^2+bx+c = 0$.

✓ *E*

Підстановки Абеля

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)^{m+1}} \Rightarrow$ підстановка $t = \left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)'$;
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+\alpha)^m\sqrt{ax^2+b}} \Rightarrow$ підстановка $t = \left(\sqrt{ax^2+b}\right)'$.

ДЕЯКІ КОРИСНІ ФОРМУЛИ

1. $\int e^{ax} \sin bx \, dx = e^{ax} \frac{a \cdot \sin bx - b \cdot \cos bx}{a^2+b^2} + C$.

2. $\int e^{ax} \cos bx \, dx = e^{ax} \frac{b \cdot \sin bx + a \cdot \cos bx}{a^2+b^2} + C$.

3. $I_{n+1} = \int \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{1}{2na} \left(\frac{x}{(x^2+a)^n} + (2n-1) \cdot I_n \right)$.