Змістовий модуль 2. ЛОГІКА ПЕРШОГО ПОРЯДКУ (ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ)

Тема 5. Закони логіки першого порядку. Логічний наслідок

План лекції.

- Закони логіки першого порядку
- Логічний наслідок у логіці першого порядку
- Готлоб Фреге

2.8. Закони логіки першого порядку

Еквівалентні формули пропозиційної логіки залишаються такими й у логіці першого порядку. Окрім них існують інші еквівалентності для формул, які містять квантори.

Нижче наведено такі еквівалентності. Зазначимо, що у формулах показано лише зв'язані змінні, а вільні змінні не показано.

Закони 1 і 2 показують, як заперечення можна внести всередину формули з кванторами (це – аналоги законів де Моргана).

1. $\neg\forall xA(x)\equiv\exists x\neg A(x)$.
2. $\neg\exists xA(x)\equiv\forall x\neg A(x)$.

Закони 3 і 4 показують, що квантор загальності можна розподілити за кон'юнкцією, а квантор існування – за диз'юнкцією.

3. $\forall x(A(x)\wedge B(x))\equiv\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$.
4. $\exists x(A(x)\vee B(x))\equiv\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$.

Природно сформулювати питання, чи можна розподілити квантор загальності за диз'юнкцією, а квантор існування – за кон'юнкцією? Виявляється, що ні. Однак, якщо одна з формул A або B не містить змінної x, то це зробити можна.

5. $\forall x(A(x)\wedge B)\equiv\forall xA(x)\wedge B$.
6. $\forall x(A(x)\vee B)\equiv\forall xA(x)\vee B$.
7. $\exists x(A(x)\wedge B)\equiv\exists xA(x)\wedge B$.
8. $\exists x(A(x)\vee B)\equiv\exists xA(x)\vee B$.

Закони 9 і 10 стверджують, що однойменні квантори можна переставляти.

9. $\forall x\forall yA(x,y)\equiv\forall y\forall xA(x,y)$.
10. $\exists x\exists yA(x,y)\equiv\exists y\exists xA(x,y)$.

Закони 1 і 2 довести неважко. Нехай $\boldsymbol{I}$ – довільна інтерпретація з областю M. Якщо $\neg\forall xA(x)$ істинна при $\boldsymbol{I}$, то $\forall xA(x)$ фальшива при $\boldsymbol{I}$. Це означає, що існує такий елемент $e\in M$, що $A(e)$ фальшива, тобто $\neg A(e)$ істинна при $\boldsymbol{I}$. Отже, $\exists x\neg A(x)$ істинна при $\boldsymbol{I}$. З іншого боку, якщо $\neg\forall xA(x)$ фальшива при $\boldsymbol{I}$, то $\forall xA(x)$ істинна при $\boldsymbol{I}$. Це означає, що $A(x)$ істинна для кожного елемента x із M, тобто $\neg A(x)$ фальшива для кожного елемента x із M. Отже, $\exists x\neg A(x)$ фальшива при $\boldsymbol{I}$. Оскільки $\neg\forall xA(x)$ і $\exists x\neg A(x)$ завжди отримують одне й те саме значення при довільній інтерпретації, то за означенням $\neg\forall xA(x)\equiv\exists x\neg A(x)$. Тому закон 1 доведено. Аналогічно можна довести закон 2.

Доведемо закон 3. Нехай $\boldsymbol{I}$ – довільна інтерпретація на області M. Якщо $\forall x(A(x)\wedge B(x))$ істинна при $\boldsymbol{I}$, то для довільного $a\in M$ істинна $A(a)\wedge B(a)$. Тому $A(a)$ і $B(a)$ одночасно істинні для довільного a, тобто $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$ істинна. Якщо ж $\forall x(A(x) \wedge B(x))$ фальшива при ***I***, то існує таке $e \in M$, що фальшива принаймні одна з формул $A(e)$ або $B(e)$. Це означає, що фальшива принаймні одна з формул $\forall xA(x)$ або $\forall xB(x)$, тобто формула $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$ фальшива при ***I***. Оскільки $\forall x(A(x) \wedge B(x))$ і $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$ завжди отримують одне й те саме значення в довільній інтерпретації, то за означенням $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$. Закон 3 доведено. Закон 4 доводять аналогічно.

Закони 5 – 8 очевидно справджуються, бо формула B не містить x і, отже, її можна внести в область дії квантора.

Зазначимо, що в законах 9 і 10 змінні в предикатах зв'язані однойменними кванторами, і їх можна переставляти. Доведення цих законів пропонуємо як вправу. Якщо ж квантори різні, то $\forall x\exists yA(x, y)$ та $\exists y\forall xA(x, y)$ не є еквівалентними. Наведемо приклад, який ілюструє це зауваження.

Приклад 2.31. Розглянемо двомісний предикат $P(x, y)$: «$x \geq y$» на різних предметних областях. Формула $\exists x\forall yP(x, y)$ означає, що в предметній області існує максимальний елемент. Ця формула істинна на області, що являє собою будь-яку скінченну підмножину множини цілих чисел, але фальшива, наприклад, на множині $\{1/2, 2/3, 3/4, \ldots, n/(n+1), \ldots\}$. Висловлення $\forall y\exists xP(x, y)$ стверджує, що для довільного елемента y існує елемент x, не менший від y. Таке висловлення істинне на довільній непорожній множині. Отже, переставлення кванторів існування та загальності може змінити зміст висловлення та значення його істинності.

Ми вже зазначали, що квантор загальності неможна розподіляти за диз'юнкцією, а квантор існування – за кон'юнкцією, тобто

$\forall x(A(x) \vee B(x))$ не еквівалентно $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$,

$\exists x(A(x) \wedge B(x))$ не еквівалентно $\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$.

При еквівалентних перетвореннях у випадках, подібних цьому, потрібно поступати спеціальним чином. Оскільки кожну зв'язану змінну у формулі можна розглядати лише як місце для підстановки якої завгодно змінної, то кожну зв'язану змінну можна перейменувати в z і формула $\forall xB(x)$ перетвориться в $\forall zB(z)$, тобто $\forall xB(x) \equiv \forall zB(z)$. Припустимо, що ми вибираємо змінну z, яка не зустрічається в $A(x)$. Тоді

$$\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \equiv \forall xA(x) \vee \forall zB(z) \equiv \forall x\forall z(A(x) \vee B(z));$$

тут двічі використано закон 6.

Аналогічно,

$$\exists xA(x) \wedge \exists xB(x) \equiv \exists xA(x) \wedge \exists zB(z) \equiv \exists x\exists z(A(x) \wedge B(z)).$$

В останньому випадку двічі використано закон 7.

Отже, для цих двох випадків ми все ще можемо винести всі квантори цієї формули вліво. Таку ж методику використовують і при еквівалентних перетвореннях формул виду

$$\forall xA(x) \vee \exists xB(x) \equiv \forall xA(x) \vee \exists zB(z) \equiv \forall x\exists z(A(x) \vee B(z))$$

або

$$\exists xA(x) \wedge \forall xB(x) \equiv \exists xA(x) \wedge \forall zB(z) \equiv \exists x\forall z(A(x) \wedge B(z)).$$

У пропозиційній логіці застосовують два способи доведення еквівалентності формул: побудову спільної таблиці істинності та перехід від однієї формули до іншої за допомогою законів. У випадку логіки предикатів залишається лише другий спосіб. Покажемо його застосування на такому прикладі.

Приклад 2.32. Доведемо логічну еквівалентність формул

$$\neg\forall x\exists y((P(x) \wedge \neg Q(x, y)) \vee \forall z(S(z) \wedge T(x, z)))$$

та

$$\exists x\forall y((\neg P(x) \vee Q(x, y)) \wedge \exists z(\neg S(z) \vee \neg T(x, z))).$$

Використовуючи закони логіки першого порядку послідовно матимемо

$\neg\forall x\exists y((P(x)\wedge\neg Q(x,y))\vee\forall z(S(z)\wedge T(x,z)))\equiv$ закони 1 і 2
$\equiv\exists x\forall y\neg((P(x)\wedge\neg Q(x,y))\vee\forall z(S(z)\wedge T(x,z)))\equiv$ закон де Моргана
$\equiv\exists x\forall y(\neg(P(x)\wedge\neg Q(x,y))\wedge\neg\forall z(S(z)\wedge T(x,z)))\equiv$ закон 1
$\equiv\exists x\forall y(\neg(P(x)\wedge\neg Q(x,y))\wedge\exists z\neg(S(z)\wedge T(x,z)))\equiv$ закон де Моргана
$\equiv\exists x\forall y((\neg P(x)\vee Q(x,y))\wedge\exists z(\neg S(z)\vee\neg T(x,z)))$.

Отже, для доведення еквівалентності двох формул логіки першого порядку використовують закони цієї логіки. Для доведення того, що дві формули не є еквівалентними, достатньо знайти *контрприклад*, тобто побудувати інтерпретацію, у яркій одна формула істинна, а інша фальшива.

Приклад 2.33. Раніше ми зазначили, що $\forall x(G(x)\vee H(x))$ не еквівалентно $\forall xG(x)\vee\forall xH(x)$. Доведемо це.

Розглянемо таку інтерпретацію на області $M=\{1, 2\}$:

$G(1)$	$G(2)$	$H(1)$	$H(2)$
T	F	F	T

У цій інтерпретації $\forall x(G(x)\vee H(x))$ має значення T, а $\forall xG(x)\vee\forall xH(x)$ має значення F.

Коротко зупинимось на випадку, коли предметна область скінченна. Якщо $M=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – *скінченна* предметна область предиката $P(x)$, то можна скористатись логічними еквівалентностями

$\forall x\ P(x)\equiv P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\ldots\wedge P(a_n)$ та $\exists x\ P(x)\equiv P(a_1)\vee P(a_2)\vee\ldots\vee P(a_n)$.

У такому разі заперечення квантифікованої формули дає той самий результат, що й застосування відповідного закону де Моргана. Це випливає з того, що

$$\neg\forall xP(x)\equiv\neg(P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\ldots\wedge P(a_n))\equiv\neg P(a_1)\vee\neg P(a_2)\vee\ldots\vee\neg P(a_n),$$

остання формула еквівалентна $\exists x\neg P(x)$.

Аналогічно,

$$\neg\exists xP(x)\equiv\neg(P(a_1)\vee P(a_2)\vee\ldots\vee P(a_n))\equiv\neg P(a_1)\wedge\neg P(a_2)\wedge\ldots\wedge\neg P(a_n),$$

що еквівалентно $\forall x\neg P(x)$.

2.9. Логічний наслідок

Формулу B називають *логічним наслідком* формул A_1, A_2, …, A_n, якщо при кожній інтерпретації, у якій виконуються всі формули A_1, A_2, …, A_n, формула B також виконується.

Як і в пропозиційній логіці, в логіці першого порядку формули A_1, A_2, …, A_n називають *гіпотезами* (*припущеннями*, *фактами*, *засновками*, *аксіомами*), а формулу B – *висновком*.

Співвідношення між загальнозначущою формулою і логічним наслідком та суперечністю і логічним наслідком, які сформульовано в теоремах 1.6, 1.7 і 1.8 для формул пропозиційної логіки, залишаються правильними й у логіці першого порядку. Насправді логіку першого порядку можна розглядати як розширення пропозиційної логіки. Якщо формула в логіці першого порядку не містить змінних і кванторів, то її можна розглядати як формулу в пропозиційній логіці.

Тут ми подамо три приклади, які проілюструють застосування логіки першого порядку до розв'язування задач.

Приклад 2.34. Розглянемо формули

$A_1:\ \forall x\,(P(x)\to Q(x))$,

$A_2:\ P(a)$

Доведемо, що формула $Q(a)$ – логічний наслідок формул A_1 та A_2.

Розглянемо будь-яку інтерпретацію ***I***, яка задовольняє $\forall x\,(P(x)\to Q(x))\wedge P(a)$. Звичайно при цій інтерпретації $P(a)$ є істинною. Нехай $Q(a)$ фальшива при цій інтерпретації, тоді $\neg P(a)\vee Q(a)$, тобто $P(a)\to Q(a)$ фальшива при інтерпретації ***I***. Це означає, що $\forall x\,(P(x)\to Q(x))$ фальшива в ***I***, що неможливо. Отже, $Q(a)$ має бути істинною при кожній інтерпретації, яка задовольняє $\forall x\,(P(x)\to Q(x))\wedge P(a)$. Це означає, що $Q(a)$ є логічним наслідком формул A_1 та A_2.

Приклад 2.35. Дано дві гіпотези

A_1: $\forall x(\textit{ЛЮДИНА}(x)\to \textit{СМЕРТНИЙ}(x))$,

A_2: $\textit{ЛЮДИНА}(\textit{Конфуцій})$.

Із A_1 і A_2 потрібно одержати, що Конфуцій смертний, тобто довести, що $\textit{СМЕРТНИЙ}(\textit{Конфуцій})$ – логічний наслідок A_1 і A_2.

Маємо

$$A_1\wedge A_2:\ \forall x(\textit{ЛЮДИНА}(x)\to \textit{СМЕРТНИЙ}(x))\wedge \textit{ЛЮДИНА}(\textit{Конфуцій}).$$

Якщо $A_1\wedge A_2$ істинна при інтерпретації ***I***, то обидві формули A_1 і A_2 істинні при ***I***. Оскільки формула $(\textit{ЛЮДИНА}(x)\to \textit{СМЕРТНИЙ}(x))$ істинна для всіх *x*, то, коли *x* замінити на «Конфуцій», отримаємо формулу

$$\textit{ЛЮДИНА}(\textit{Конфуцій})\to \textit{СМЕРТНИЙ}(\textit{Конфуцій}),$$

істинну при інтерпретації ***I***, тобто формула

$$\neg\textit{ЛЮДИНА}(\textit{Конфуцій})\vee \textit{СМЕРТНИЙ}(\textit{Конфуцій})$$

істинна при ***I***. Проте $\neg\textit{ЛЮДИНА}(\textit{Конфуцій})$ фальшива при ***I***, оскільки $\textit{ЛЮДИНА}(\textit{Конфуцій})$ істинна при інтерпретації ***I***.

Отже, $\textit{СМЕРТНИЙ}(\textit{Конфуцій})$ має бути істинною при ***I***. Ми довели, що $\textit{СМЕРТНИЙ}(\textit{Конфуцій})$ істинна при інтерпретації ***I***, якщо $A_1\wedge A_2$ – істинна при ***I***. За означенням $\textit{СМЕРТНИЙ}(\textit{Конфуцій})$ є логічним наслідком A_1 і A_2.

Приклад 2.36. Деякі пацієнти довіряють усім своїм лікарям. Жоден пацієнт не довіряє знахарю. Отже, жодний лікар не є знахарем. Уведемо позначення:

$P(x)$: *x* – пацієнт,

$D(x)$: *x* – лікар,

$Q(x)$: *x* – знахар,

$L(x,y)$: *x* довіряє *y*.

Тоді гіпотези й висновок можна записати у вигляді формул так:

A_1 : $\exists x(P(x)\wedge \forall y(D(y)\to L(x,y)))$,

A_2: $\forall x(P(x)\to \forall y(Q(y)\to \neg L(x,y)))$,

B: $\forall x(D(x)\to \neg Q(x))$.

Зараз ми доведемо, що B є логічним наслідком A_1 і A_2. Нехай ***I*** – довільна інтерпретація на області *M*. Припустимо, що A_1 і A_2 істинні при ***I***. Оскільки A_1, тобто

$$\exists x(P(x)\wedge \forall y(D(y)\to L(x,y)))$$

істинна при ***I***, то в *M* існує такий елемент e, що $(P(e)\wedge \forall y(D(y)\to L(e,y)))$ істинна при ***I***. Це означає, що як $P(e)$, так і $\forall y(D(y)\to L(e,y))$ істинні при ***I***.

З іншого боку, оскільки A_2, тобто $P(x)\to \forall y(Q(y)\to \neg L(x,y))$ істинна при ***I*** для всіх елементів *x* із *M*, то, безсумнівно, $P(e)\to \forall y(Q(y)\to \neg L(e,y))$ істинна при ***I***. Оскільки $P(e)$ істинна при інтерпретації ***I***, то й $\forall y(Q(y)\to \neg L(e,y))$ має бути істинною при ***I***. Отже, ми знаємо, що для кожного елемента y із M як $(D(y) \to L(e,y))$, так і $(Q(y) \to \neg L(e,y))$ істинні при інтерпретації ***I***. Якщо $D(y)$ фальшива при ***I***, то $(D(y) \to \neg Q(y))$ істинна при ***I***. Якщо ж $D(y)$ істинна при інтерпретації ***I***, то $L(e,y)$ має бути істинною при цій інтерпретації, бо $(D(y) \to L(e,y))$ – істинна. Отже, $Q(y)$ має бути фальшивою при ***I***, бо $(Q(y) \to \neg L(e,y))$ істинна при інтерпретації ***I***. Звідси доходимо висновку, що $(D(y) \to \neg Q(y))$ істинна при ***I***. Це означає, що $(D(y) \to \neg Q(y))$ істинна для кожного y із M, тобто $\forall y(D(y) \to \neg Q(y))$ істинна при ***I***. Отже, ми довели, що коли A_1 і A_2 істинні при інтерпретації ***I***, то й $\forall y(D(y) \to \neg Q(y))$ істинна при ***I***. Тим самим доведено, що формула B – логічний наслідок формул A_1 і A_2.

У трьох наведених прикладах ми показали, що *висновок* випливає з *гіпотез* (говорять також *фактів*, *аксіом*). Обґрунтування того, як висновок випливає з гіпотез, називають *доведенням*.

Далі ми розглянемо правила виведення висновку із гіпотез і покажемо, як їх можна використати для доведення теорем.

2.10. Готлоб Фреге

Готлоб Фреге (Friedrich Ludwig Gottlob Frege) (1848 – 1925) – німецький логік, математик і філософ. Навчався в Йенському і Геттінгенському університетах. Сформулював ідею логіцизму, тобто напрямку в основах математики і філософії математики, основною тезою якого є твердження про «можливість зведення математики до логіки». Він, по суті справи, винайшов і аксіоматизував логіку предикатів, завдяки своєму відкриттю кванторів, використання яких поступово поширилося на всю математику, побудував першу систему формалізованої арифметики.