Змістовий модуль 2. ЛОГІКА ПЕРШОГО ПОРЯДКУ (ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ)

Тема 6. Правила виведення в логіці першого порядку. Нормальні форми

План лекції.

- Правила виведення в логіці першого порядку
- Приклади розв'язування задач
- Нормальні форми в логіці першого порядку (випереджена нормальна форма, сколемівська нормальна форма)
- Питання для самоконтролю до лекцій 4 – 6

2.11. Правила виведення в логіці першого порядку

Усі правила виведення, розглянуті в пропозиційній логіці, діють і в логіці першого порядку. Але в логіці першого порядку є ще чотири нових правила виведення, зумовлені появою кванторів.

Табл. 2.1

	Правило виведення	Назва
1.	$\dfrac{\forall x\, A(x)}{A(c) \text{ для будь - якого } c}$	Універсальна конкретизація
2.	$\dfrac{A(c) \text{ для будь - якого } c}{\forall x\, A(x)}$	Універсальне узагальнення
3.	$\dfrac{\exists x\, A(x)}{A(c) \text{ для якогось елемента } c}$	Екзистенційна конкретизація
4.	$\dfrac{A(c) \text{ для якогось елемента } c}{\exists x\, A(x)}$	Екзистенційне узагальнення

Універсальна конкретизація (*УК*) – це правило виведення того, що $A(c)$ істинне для довільного елемента c із предметної області за умови, що формула $\forall x A(x)$ істинна. Наприклад, універсальну конкретизацію можна використати тоді, коли із твердження «Всі люди смертні» потрібно дійти висновку «Сократ – смертний». Тут Сократ – елемент предметної області, яка складається з усіх людей.

Універсальне узагальнення (*УУ*) – це правило виведення, згідно з яким $\forall x A(x)$ істинне, якщо істинне $A(c)$ для довільного c із предметної області. Це правило використовують тоді, коли на підставі істинності $A(c)$ для кожного елемента c із предметної області стверджують, що $\forall x A(x)$ істинне. Вибраний елемент c має бути довільним і не конкретизованим. Універсальне узагальнення неявно застосовують у багатьох математичних доведеннях і рідко згадують явно.

Екзистенційна конкретизація (*ЕК*) – це правило, яке дає змогу дійти висновку про те, що на підставі істинності $\exists x A(x)$ можна твердити, що в предметній області є елемент c, для якого $A(c)$ істинне. Зазвичай про елемент c відомо тільки те, що він існує. Із цього випливає, що його можна якось позначити та продовжувати міркування.

Екзистенційне узагальнення (*ЕУ*) – це правило виведення, використовуване для того, щоб на підставі істинності $A(c)$ на якомусь елементі c із предметної області дійти висновку, що $\exists x A(x)$ істинне.

Правила виведення в логіці першого порядку зведено в таблиці 2.1.

Важливо зазначити, що в правилах 1 і 2 елемент c із предметної області довільний, а в правилах 3 та 4 в предметній області має бути принаймні один такий елемент.

2.12. Приклади розв'язування задач

Розглянемо різні приклади логічного виведення в логіці першого порядку.

Приклад 2.37. Доведемо, що гіпотези «Кожний, хто вивчає комп'ютерні науки, слухає курс математичної логіки» та «Марія вивчає комп'ютерні науки» дають змогу сформулювати висновок «Марія слухає курс математичної логіки».

Нехай предикат $P(x)$ означає «x вивчає комп'ютерні науки», $Q(x)$ – «x слухає курс математичної логіки». Тоді гіпотези – це формули $\forall x(P(x)\to Q(x))$ і P(Марія), а висновок – Q(Марія). Доведення висновку для заданої множини гіпотез виконаємо в такій послідовності.

1.	$\forall x(P(x)\to Q(x))$	– Гіпотеза.
2.	P(Марія)$\to Q$(Марія)	– Універсальна конкретизація до 1.
3.	P(Марія)	– Гіпотеза.
4.	Q(Марія)	– Modus ponens до 2 і 3.

Приклад 2.38. Доведемо, що з гіпотез «У групі є студент, який не читав підручник» та «Всі студенти групи склали іспит» можна дійти висновку «Хтось із тих, хто склав іспит, не читав підручник».

Нехай $Q(x)$ означає «x вчиться в групі», $R(x)$ – «x читав підручник» та $P(x)$ – «x склав іспит». Гіпотези – це $\exists x(Q(x)\wedge\neg R(x))$ та $\forall x(Q(x)\to P(x))$, а висновок – $\exists x(P(x)\wedge\neg R(x))$. Доведення – це така послідовності кроків.

1.	$\exists x(Q(x)\wedge\neg R(x))$	– Гіпотеза.
2.	$Q(a)\wedge\neg R(a)$	– Екзистенційна конкретизація до 1.
3.	$Q(a)$	– Вилучення кон'юнкції до 2.
4.	$\forall x(Q(x)\to P(x))$	– Гіпотеза.
5.	$Q(a)\to P(a)$	– Універсальна конкретизація до 4.
6.	$P(a)$	– Modus ponens до 3 і 5.
7.	$\neg R(a)$	– Вилучення кон'юнкції до 2.
8.	$P(a)\wedge\neg R(a)$	– Уведення кон'юнкції до 6 і 7.
9.	$\exists x(P(x)\wedge\neg R(x))$	– Екзистенційне узагальнення до 8.

Приклад 2.39. Доведемо, що з гіпотези $\exists y\ \forall x\ P(x, y)$ можна дійти висновку $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$.

1)	$\exists y\ \forall x\ P(x, y)$	Гіпотеза.
2)	$\forall x\ P(x, c)$	Екзистенційна конкретизація до 1.
3)	$P(a, c)$	Універсальна конкретизація до 2.
4)	$\exists y\ P(a, y)$	Екзистенційне узагальнення до 3.
5)	$\forall x\ \exists y\ P(x, y)$	Універсальне узагальнення до 4.

Приклад 2.40. Знайти помилку в «доведенні»:

1) $\forall x\, \exists y\, P(x, y)$ Гіпотеза.
2) $\exists y\, P(a, y)$ Універсальна конкретизація до 1.
3) $P(a, c)$ Екзистенційна конкретизація до 2.
4) $\forall x\, P(x, c)$ Універсальне узагальнення до 3).
5) $\exists y\, \forall x\, P(x, y)$ Екзистенційне узагальнення до 4.

Отже, «доведено», що з гіпотези $\forall x\, \exists y\, P(x, y)$ випливає $\exists y\, \forall x\, P(x, y)$, *що неправильно*. Справді, розглянемо таку інтерпретацію на області $M = \{1,2\}$:

$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(2,1)$	$P(2,2)$
T	F	F	T

У цій інтерпретації $\forall x\, \exists y\, P(x, y)$ має значення T, а $\exists y\, \forall x\, P(x, y)$ – F.

Розв'язання. Зазначимо, що c в кроці 3) залежить від a, а тому правило «універсальне узагальнення» в кроці 4 застосовано некоректно.

Повернемося до прикладів, які ми вже розглядали (приклади 2.35 і 2.36).

Приклад 2.41. Дано дві гіпотези

A_1 : $\forall x\big(ЛЮДИНА(x) \to СМЕРТНИЙ(x)\big)$,

A_2 : $ЛЮДИНА(Конфуцій)$.

Із A_1 і A_2 потрібно одержати, що Конфуцій смертний, тобто довести, що

B : $СМЕРТНИЙ(Конфуцій)$ – логічний наслідок A_1 і A_2.

1. $\forall x\big(ЛЮДИНА(x) \to СМЕРТНИЙ(x)\big)$ – Гіпотеза.
2. $ЛЮДИНА(Конфуцій) \to СМЕРТНИЙ(Конфуцій)$ – Універсальна конкрет. до 1.
3. $ЛЮДИНА(Конфуцій)$ – Гіпотеза.
4. $СМЕРТНИЙ(Конфуцій)$ – Modus ponens до 2 і 3.

Приклад 2.42.. Деякі пацієнти довіряють усім своїм лікарям. Жоден пацієнт не довіряє знахарю. Отже, жодний лікар не є знахарем.

Використаємо позначення:

$P(x)$: x – пацієнт,

$D(x)$: x – лікар,

$Q(x)$: x – знахар,

$L(x, y)$: x довіряє y.

Тоді гіпотези й висновки можна записати у вигляді формул так:

A_1 : $\exists x\big(P(x) \wedge \forall y\big(D(y) \to L(x, y)\big)\big)$,

A_2 : $\forall x\big(P(x) \to \forall y\big(Q(y) \to \neg L(x, y)\big)\big)$,

B : $\forall x\big(D(x) \to \neg Q(x)\big)$.

Зараз ми доведемо, що B є логічним наслідком A_1 і A_2.

1.	$\exists x(P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))),$	– Гіпотеза.
2.	$P(e)\wedge\forall y(D(y)\to L(e,y))$	– Екзистенційна конкретизація до 1.
3.	$P(e)$	– Вилучення кон'юнкції до 2.
4.	$\forall x(P(x)\to\forall y(Q(y)\to\neg L(x,y)))$	– Гіпотеза.
5.	$P(e)\to\forall y(Q(y)\to\neg L(e,y))$	– Універсальна конкретизація до 4.
6.	$\forall y(Q(y)\to\neg L(e,y))$	– Modus ponens до 3 і 5.
7.	$\forall y(D(y)\to L(e,y))$	– Вилучення кон'юнкції до 2.
8.	$Q(a)\to\neg L(e,a)$	– Універсальна конкретизація до 6.
9.	$D(a)\to L(e,a)$	– Універсальна конкретизація до 7.
10.	$L(e,a)\to\neg Q(a)$	– Контрапозиція до 8.
11.	$D(a)\to\neg Q(a)$	– Гіпотетичний силогізм до 9 і 10.
12.	$\forall x(D(x)\to\neg Q(x))$	– Універсальне узагальнення до 11.

У подальшому ми розглянемо такий метод, який для *пошуку* доведення *механічно* використовує тільки одне правило виведення. Цей метод – *метод резолюцій* – дуже ефективний. Ми переконаємося, що розглянуті приклади надзвичайно легко довести, якщо використати цей метод. Більше того, він дуже зручний для реалізації на комп'ютері.

2.13. Випереджена нормальна форма

Формула логіки першого порядку є у *випередженій нормальній формі*, якщо вона має вигляд $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\,\Phi$, де кожне Q_ix_i (i=1, 2, …, n) – це або $\forall x_i$, або $\exists x_i$, а формула Φ не містить кванторів. Вираз $Q_1x_1\ldots Q_nx_n$ називають *префіксом*, а Φ – *матрицею* формули, записаної у випередженій нормальній формі.

Приклад 2.43. Надамо приклади формул, записаних у випередженій нормальній формі:

а) $\forall x\forall y(P(x, y)\wedge Q(y))$;

б) $\forall x\exists y(\neg P(x)\vee Q(y))$;

в) $\forall x\forall y\exists z(Q(x, y)\wedge R(z))$;

г) $\forall x\exists y\forall z((P(x, y)\vee Q(x, z))\wedge\neg R(y, z))$;

д) $\forall x\forall y\forall z\exists u(\neg P(x, z)\vee\neg P(y, z)\vee Q(x, y, u))$.

Нижче наведено алгоритм зведення довільної формули логіки першого порядку до випередженої нормальної форми. *Тут використано закони, розглянуті у підрозділі 2.8.*

Алгоритм зведення довільної формули логіки першого порядку до випередженої нормальної форми

Крок 1. Усунути логічні операції ↔ та →, для чого застосувати логічні закони:

- $A\leftrightarrow B\equiv(A\to B)\wedge(A\to B)$; (2.1)
- $A\to B\equiv\neg A\vee B$. (2.2)

Крок 2. Занести знак заперечення безпосередньо до атомів, для чого використати закони:

- подвійного заперечення $\neg(\neg A)\equiv A$; (2.3)
- де Моргана $\neg(A\vee B)\equiv\neg A\wedge\neg B$, (2.4а)

  $\neg(A\wedge B)\equiv\neg A\vee\neg B$; (2.4б)
- і закони $\neg\forall xA(x)\equiv\exists x\neg A(x)$, (2.5а)

$$\neg\exists xA(x) \equiv \forall x\neg A(x). \qquad (2.5б)$$

Крок 3. Перейменувати зв'язані змінні, якщо це необхідно.
Крок 4. Винести квантори у префікс, для чого для чого використати закони:

- $\forall xA(x) \wedge B \equiv \forall x(A(x) \wedge B),$ (2.6)
- $\forall xA(x) \vee B \equiv \forall x(A(x) \vee B),$ (2.7)
- $\exists xA(x) \wedge B \equiv \exists x(A(x) \wedge B),$ (2.8)
- $\exists xA(x) \vee B \equiv \exists x(A(x) \vee B),$ (2.9)
- $\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \equiv \forall xA(x) \vee \forall zB(z) \equiv \forall x\forall z(A(x) \vee B(z)),$ (2.10)
- $\exists xA(x) \wedge \exists xB(x) \equiv \exists xA(x) \wedge \exists zB(z) \equiv \exists x\exists z(A(x) \wedge B(z)),$ (2.11)
- $\forall xA(x) \vee \exists xB(x) \equiv \forall xA(x) \vee \exists zB(z) \equiv \forall x\exists z(A(x) \vee B(z)),$ (2.12)
- $\exists xA(x) \wedge \forall xB(x) \equiv \exists xA(x) \wedge \forall zB(z) \equiv \exists x\forall z(A(x) \wedge B(z)).$ (2.13)

Приклад 2.44. Зведемо формулу $\forall xP(x) \to \exists yQ(y)$ до випередженої нормальної форми.

$$\forall xP(x) \to \exists yQ(y) \equiv \neg\forall xP(x) \vee \exists yQ(y) \qquad \text{(за 2.2)}$$
$$\equiv \exists x\neg P(x) \vee \exists yQ(y) \qquad \text{(за 2.5а)}$$
$$\equiv \exists x\exists y(\neg P(x) \vee Q(y)). \qquad \text{(двічі за 2.9)}$$

Приклад 2.45. Побудуємо випереджену нормальну форму для формули

$$\forall x\forall y(\exists z(P(x,z) \wedge P(y,z)) \to \exists uQ(x,y,u)).$$

Нижче подано процес побудови формули.

$$\forall x\forall y(\exists z(P(x,z) \wedge P(y,z)) \to \exists uQ(x,y,u))$$
$$\equiv \forall x\forall y(\neg\exists z(P(x,z) \wedge P(y,z)) \vee \exists uQ(x,y,u)) \qquad \text{(за 2.2)}$$
$$\equiv \forall x\forall y(\forall z\neg(P(x,z) \wedge P(y,z)) \vee \exists uQ(x,y,u)) \qquad \text{(за 2.5б)}$$
$$\equiv \forall x\forall y(\forall z(\neg P(x,z) \vee \neg P(y,z)) \vee \exists uQ(x,y,u)) \qquad \text{(за 2.4б)}$$
$$\equiv \forall x\forall y\forall z\exists u(\neg P(x,z) \vee \neg P(y,z) \vee Q(x,y,u)) \qquad \text{(за 2.7 і 2.9 у винесено } \forall z \text{ та } \exists u\text{).}$$

2.14. Сколемівська нормальна форма

Перейдемо до вивчення сколемівської нормальної форми. Принагідно зазначимо, що *в логіці першого порядку поняття кон'юнктивної нормальної форми для безкванторної формули вводять так само, як і в пропозиційній логіці. Зберігається повністю й алгоритм зведення формули до КНФ*. (Аналогічне твердження стосується і ДНФ.)

Формула A має *сколемівську нормальну форму*, якщо

$$A = \forall x_1 \ldots \forall x_n \Phi,$$

де формула Φ не містить кванторів *і є в кон'юнктивній нормальній формі*.

Будь-яку формулу логіки першого порядку можна звести до формули в сколемівській нормальній формі. Цей процес називають *сколемізацією* формули.

Алгоритм сколемізації формули

Крок 1 – крок 4. Ті самі, що й у попередньому алгоритмі.

Крок 5. Матрицю Φ (безкванторну частину) формули привести до кон'юнктивної нормальної форми.

Крок 6. Вилучити квантори існування. Цей процес опишемо окремо.

Вилучення кванторів існування (процес реалізації *кроку 6*). Нехай $Q_1x_1Q_2x_2...Q_nx_n\Phi$ – випереджена нормальна форма, у якій матриця Ф є у кон'юнктивній нормальній формі, а Q_r – квантор існування в її префіксі $Q_1x_1Q_2x_2...Q_nx_n$, $1 \le r \le n$. Якщо в префіксі зліва від Q_r немає жодного квантора загальності, то сталою c, відмінною від інших сталих у Ф, замінимо всі входження змінної x_r у матрицю Ф і вилучимо Q_rx_r із префікса. Якщо $Q_{s_1},...,Q_{s_m}$ – квантори загальності, які розташовані зліва від Q_r, $1 \le s_1 \le s_2 \le ... \le s_m < r$, то виберемо новий m-місний функціональний символ f, відмінний від інших функціональних символів. Замінимо всі x_r у Ф на $f(x_{s_1},...,x_{s_m})$ і вилучимо Q_rx_r із префікса.

Цей процес застосуємо зліва направо до всіх кванторів існування в префіксі; остання з отриманих формул є результатом виконання кроку 6.

Сталі та функції, які використано для заміни змінних, зв'язаних кванторами існування, називають *сколемівськими функціями* (сталу розглядають як 0-місну функцію).

Приклад 2.46. Побудуємо сколемівську нормальну форму формули

$$\exists x\forall y\forall z\exists u\forall v\exists w\, P(x, y, z, u, v, w).$$

У цій формулі $P(x, y, z, u, v, w)$ – матриця, а $\exists x\forall y\forall z\exists u\forall v\exists w$ – префікс, тобто задана формула записана у випередженій нормальній формі. Виконаємо такі дії.

1. Переглядаємо послідовно зліва направо квантори у формулі. Оскільки зліва від $\exists x$ немає жодного квантора загальності, замінимо змінну x на сколемівську сталу a та вилучимо $\exists x$ із заданої формули. Отримаємо $\forall y\forall z\exists u\forall v\exists w\, P(a, y, z, u, v, w)$.

2. Зліва від $\exists u$ стоять $\forall y$ та $\forall z$. Тому замінимо змінну u на двомісну сколемівську функцію $f(y, z)$, вилучимо $\exists u$ із формули та отримаємо $\forall y\forall z\forall v\exists w\, P(a, y, z, f(y, z), v, w)$.

3. Зліва від $\exists w$ стоять $\forall y$, $\forall z$ та $\forall v$. Замінимо змінну w на тримісну сколемівську функцію $g(y, z, v)$, вилучимо $\exists w$ із формули та остаточно отримаємо сколемівську нормальну форму $\forall y\forall z\forall v\, P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v))$ заданої формули.

Приклад 2.47. Побудуємо сколемівську нормальну форму формули

$$\forall x\exists y\exists z\, ((\neg P(x, y)\wedge G(x, z))\vee R(x, y, z)).$$

Цю формулу записано у випередженій нормальній формі із префіксом $\forall x\exists y\exists z$ та матрицею $((\neg P(x, y)\wedge G(x, z))\vee R(x, y, z))$.

Запишемо матрицю в кон'юнктивній нормальній формі, тоді отримаємо $\forall x\exists y\exists z\, ((\neg P(x, y)\vee R(x, y, z))\wedge(G(x, z)\vee R(x, y, z)))$. Оскільки перед $\exists y$ та $\exists z$ розміщений $\forall x$, то змінні y та z замінимо одномісними сколемівськими функціями $f(x)$ та $g(x)$, відповідно. У результаті одержимо: $\forall x((\neg P(x, f(x))\vee R(x, f(x), g(x)))\wedge(G(x, g(x))\vee R(x, f(x), g(x))))$ – сколемівську нормальну форму.

Нагадаємо, що *літерал* – це атом чи його заперечення, а *диз'юнкт* (*елементарна диз'юнкція*) – це літерал або диз'юнкція літералів.

У побудованій в останньому прикладі формі диз'юнктами є $\neg P(x, f(x))\vee R(x, f(x), g(x))$ та $G(x, g(x))\vee R(x, f(x), g(x))$, а кожна змінна зв'язана квантором загальності. Цю нормальну форму можна записати у вигляді множини диз'юнктів

$$S = \{\neg P(x, f(x))\vee R(x, f(x), g(x)),\quad G(x, g(x))\vee R(x, f(x), g(x))\}.$$

Вважатимемо, що множина диз'юнктів S – це інша форма запису кон'юнкції всіх диз'юнктів з S, причому кожна предметна змінна є в області дії квантора загальності. *Отже, завдяки цій домовленості, сколемівська нормальна форма може бути подана множиною диз'юнктів.*

Множину диз'юнктів S називають *суперечною* (*невиконуваною*), якщо для кожної інтерпретації в ній знайдеться диз'юнкт, фальшивий у цій інтерпретації.

Теорема 2.1. Нехай S – множина диз'юнктів, яка подає сколемівську форму формули A. Формула A є суперечністю тоді й тільки тоді, коли суперечна множина S.

Доведення. Нехай формулу A записано у випередженій нормальній формі $A = Q_1x_1\, Q_2x_2 \ldots Q_nx_n\, \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та x_r – перша змінна в префіксі в разі перегляду його зліва направо, яка зв'язана квантором існування. Розглянемо

$$A_1 = \forall x_1 \ldots \forall x_{r-1}\, Q_{r+1}x_{r+1} \ldots Q_nx_n\, \Phi(x_1, \ldots, x_{r-1}, f(x_1, \ldots, x_{r-1}), x_{r+1}, \ldots, x_n),$$

де $f(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1})$ – сколемівська функція, яка відповідає змінній x_r, $1 \le r \le n$.

Покажемо, що формула A – суперечність тоді й тільки тоді, коли формула A_1 – суперечність.

Необхідність. Припустимо, що формула A – суперечність. Якщо A_1 виконувана, то існує така інтерпретація $\boldsymbol{I}$, у якій A_1 істинна. Тому для всіх $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$ існує принаймні один елемент, а саме $f(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1})$, для якого формула

$$Q_{r+1}x_{r+1} \ldots Q_nx_n\, \Phi(x_1, \ldots, x_{r-1}, f(x_1, \ldots, x_{r-1}), x_{r+1}, \ldots, x_n)$$

істинна при інтерпретації $\boldsymbol{I}$. Отже, формула A істинна при $\boldsymbol{I}$, а це суперечить припущенню, що формула A – суперечність. Отже, A_1 має бути фальшивою при інтерпретації $\boldsymbol{I}$.

Достатність. Тепер припустимо, що формула A_1 – суперечність. Якщо A виконувана, то існує така інтерпретація $\boldsymbol{I}$, що A істинна при $\boldsymbol{I}$. Тобто, для всіх $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$ існує такий елемент x_r, що формула

$$Q_{r+1}x_{r+1} \ldots Q_nx_n \Phi(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$$

істинна при $\boldsymbol{I}$. Нехай $\boldsymbol{I}'$ є розширенням інтерпретації $\boldsymbol{I}$ функцією $f(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1})$ такою, що $f(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}) = x_r$ для всіх $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$ з предметної області M. Зрозуміло, що для всіх $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$ формула

$$Q_{r+1}x_{r+1} \ldots Q_nx_n\, \Phi(x_1, \ldots, x_{r-1}, f(x_1, \ldots, x_{r-1}), x_{r+1}, \ldots, x_n)$$

істинна при інтерпретації $\boldsymbol{I}'$, тобто A_1 істинна при $\boldsymbol{I}'$. Це суперечить припущенню, що формула A_1 суперечність. Отже, формула A має бути суперечністю.

Завершимо доведення. Припустимо, що формула A має m кванторів існування. Нехай $A_0 = A$, а A_k, $(k=1, 2, \ldots, m)$, отримують з A_{k-1} заміною першого квантора існування в A_{k-1} сколемівською функцією. Очевидно, що $S = A_m$. Використовуючи ті самі міркування, що й наведено вище, можна показати, що формула A_{k-1} суперечність тоді й тільки тоді, коли формула A_k суперечність. Звідси доходимо висновку, що формула A суперечність тоді й тільки тоді, коли множина диз'юнктів S суперечна.

Нехай B – сколемівська нормальна форма формули A. Якщо формула A суперечність, то за теоремою 2.1 буде $A \equiv B$. Якщо ж A довільна формула, то B може і не бути еквівалентною A. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 2.48. Нехай через A позначено $\exists x P(x)$, а через B позначено $P(a)$, тобто, B – сколемівська нормальна форма формули A. Визначимо інтерпретацію $\boldsymbol{I}$ на області $M = \{1, 2\}$ так: $a = 1$, $P(1)$ є F, $P(2)$ є T. Тоді A істинна при інтерпретації $\boldsymbol{I}$, а B фальшива при $\boldsymbol{I}$. Отже, A не еквівалентна B.

Надалі для множини диз'юнктів S ми будемо використовувати термін «невиконувана» замість «суперечна».

2.15. Питання для самоконтролю до лекцій 4 – 6

1. Сформулюйте означення n-місного предиката.
2. Сформулюйте означення чотирьох типів символів, які використовують для запису атомів логіки першого порядку.
3. Сформулюйте означення атома логіки першого порядку.
4. Сформулюйте означення кванторів загальності й існування.
5. Сформулюйте означення формули логіки першого порядку (логіки предикатів).
6. Що таке область дії квантора?
7. Що таке зв'язане входження змінної у формулу? Що таке вільне входження.

8. Сформулюйте означення вільної змінної і означення зв'язаної змінної у формулі.
9. Сформулюйте формальне означення інтерпретації формули у логіці першого порядку.
10. Що таке закрита формула у логіці першого порядку?
11. Сформулюйте означення виконуваної, суперечної та загальнозначущої формул у логіці першого порядку. Які синоніми є для термінів «суперечність» та «загальнозначуща формула»?
12. У чому полягає метод семантичних таблиць у логіці першого порядку?
13. Що таке еквівалентні формули у логіці першого порядку?
14. Наведіть закони для формул з кванторами.
15. Що таке логічний наслідок у логіці першого порядку?
16. Сформулюйте правила виведення в логіці першого порядку, зумовлені наявністю кванторів.
17. Сформулюйте означення випередженої нормальної форми в логіці першого порядку.
18. Опишіть алгоритм зведення довільної формули логіки першого порядку до випередженої нормальної форми.
19. Сформулюйте означення сколемівської нормальної форми в логіці першого порядку.
20. Опишіть алгоритм сколемізації формули логіки першого порядку.
21. Як сколемівську нормальну форму записати у вигляді множини диз'юнктів?
22. Сформулюйте теорему про сколемівську нормальну форму.
23. Чи є правильною така теорема: «Формула A є загальнозначущою тоді і тільки тоді, коли є загальнозначущою її сколемівська нормальна форма B»? Якщо так, то обґрунтувати це, а ні, то навести контрприклад.