Змістовий модуль 2. ЛОГІКА ПЕРШОГО ПОРЯДКУ (ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ)

Тема 4. Предикати. Квантори. Формули логіки першого порядку. Семантичні таблиці з кванторами

План лекції.

- Поняття предиката.
- Квантори загальності й існування. Формули логіки першого порядку
- Формальна граматика для формул логіки першого порядку
- Методи перекладу з природної мови на математичну і навпаки
- Використання предикатів та кванторів для опису технічних характеристик системи
- Інтерпретація формул у логіці першого порядку. Еквівалентність формул. Виконуваність, загальнозначущість та суперечність
- Семантичні таблиці з кванторами

Тема 2. ЛОГІКА ПЕРШОГО ПОРЯДКУ (ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ)

2.1. Поняття предиката

Початкові елементи у пропозиційній логіці – це атоми. Із атомів ми будуємо формули. Після цього використовуємо формули, щоб формалізувати процес міркування. Як ми бачили, у цій простій логіці (пропозиційній логіці або логіці висловлень) атом являє собою оповідальне речення, котре може бути або істинним, або фальшивим, але не одним і іншим разом. Атом розглядають як єдине ціле. Його структуру не аналізують. Проте є багато міркувань, які не можна описати таким простим способом.

Приклад 2.1. Розглянемо таке класичне міркування.

Кожна людина смертна.

Оскільки Конфуцій людина, то він смертний.

Наведене міркування є інтуїтивно правильним. Проте, якщо ми введемо позначення

p: кожна людина смертна,

q: Конфуцій – людина,

r: Конфуцій смертний,

то r не є логічним наслідком p і q у рамках пропозиційної логіки. Це відбувається тому, що у пропозиційній логіці структура p, q, r не розглядається.

Тут ми розглянемо *логіку першого порядку*, яка порівняно з пропозиційною логікою має ще три нових логічних поняття: терм, предикат і квантор. Більшу частину природної та математичної мов можна формалізувати логікою першого порядку.

Так само, як і в пропозиційній логіці, ми спочатку визначимо поняття атома логіки першого порядку, а потім – формули. Але перед формальним означенням атома розглянемо декілька прикладів.

Приклад 2.2. Існують речення, які не є висловленнями та містять змінні. Раніше було наведено приклад такого речення – «x+1=3». Речення зі змінними – це не висловлення, але вони перетворюються на висловлення, якщо надати змінним певних значень. Речення зі змінними дуже поширені. Вони містяться в математичних формулах і комп'ютерних програмах. Зокрема, у мовах програмування є оператори у вигляді: «Повторювати цикл доти, доки змінні x та y не стануть рівними, або припинити обчислення циклу після 10000 повторень».

Позначивши як i лічильник повторень, умову закінчення циклу можна задати виразом «$(x = y)\vee(i > 10000)$». Тоді оператор циклу матиме вид: «Повторювати, якщо $\neg((x = y)\vee(i > 10000))$». Розглянуті в цьому прикладі речення називають предикатами. Дамо строге означення цього важливого поняття.

Предикатом (точніше, *n-місним предикатом*) $P(x_1,\ldots x_n)$ називають функцію $P\colon M^n \to \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$, де M – довільна множина. Інакше говорячи, *n-місний* предикат, визначений на M, – це двозначна функція від n аргументів, які набувають значення в довільній множині M. Цю множину M називають *предметною областю* предиката, а змінні $x_1, \ldots, x_n$ – *предметними змінними*. У принципі можна визначити предикат у більш загальному виді як функцію

$$P\colon M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n \to \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\},$$

тобто дозволити різним аргументам набувати значення з різних множин. Іноді це виявляється зручним; проте, здебільшого, у логіці предикатів виходять з першого означення.

Областю істинності предиката $P(x_1,\ldots x_n)$ називають множину $R \subset M^n$ таку, що значення $P(a_1,\ldots,a_n)$ дорівнює T для $(a_1,\ldots,a_n)\in R$.

Для довільних M і n існує взаємно однозначна відповідність між n-місними відношеннями на множині M і n-місними предикатами на M: *а*) кожному n-місному відношенню R відповідає предикат P, такий, що значення $P(a_1,\ldots,a_n)$ дорівнює T, якщо й тільки якщо $(a_1,\ldots a_n)\in R$; *б*) всякий предикат $P(x_1,\ldots x_n)$ визначає відношення R, таке, що $(a_1,\ldots a_n)\in R$ якщо й тільки якщо значення $P(a_1,\ldots,a_n)$ дорівнює T. При цьому R задає область істинності предиката P. Предикат від однієї змінної визначає *відношення приналежності* до деякої множини.

Приклад 2.3. Нехай ми хочемо представити твердження «x більше 3». Спочатку ми введемо предикат *БІЛЬШЕ*(x, y), який означає «x більше y». Тоді вираз «x більше 3» подається як *БІЛЬШЕ*$(x, 3)$.

Приклад 2.4. Аналогічно ми подамо «x любить y» предикатом *ЛЮБИТЬ*(x, y). Тоді «Іван любить Марію» можна подати виразом *ЛЮБИТЬ*(Іван, Марія).

У логіці першого порядку також можна використовувати функціональні символи.

Приклад 2.5. Можна використати *плюс*(x, y) щоб позначити «$x + y$», і *батько*(x), що означає «батько людини x». Речення «$x + 1$ більше x» можна подати як *БІЛЬШЕ*(*плюс*$(x, 1)$, x), а «Батько Івана любить Івана» – як *ЛЮБИТЬ*(*батько*(Іван), Іван).

У поданих вище прикладах усі вирази *БІЛЬШЕ*$(x, 3)$, *ЛЮБИТЬ*(Іван, Марія), *БІЛЬШЕ*(*плюс*$(x, 1)$, x), *ЛЮБИТЬ*(*батько*(Іван), Іван) є атомами логіки першого порядку. Причому, *БІЛЬШЕ* та *ЛЮБИТЬ* – *предикатні символи*; x – *змінна*; 3, Іван і Марія – *індивідні символи* (*сталі*); *плюс* і *батько* – *функціональні символи*.

За аналогією з пропозиційною логікою, сформулюємо означення *формули логіки першого порядку*. Для цього спочатку сформулюємо означення *атома логіки першого порядку*.

Для запису атомів логіки першого порядку використовують такі чотири типи символів.

- *Індивідні символи,* або *сталі*. Це імена об'єктів, які починаються з великої букви, та сталі, наприклад, Іван, Марія, Математична_логіка, 3.
- *Предметні символи*, *предметні змінні*, або просто *змінні*. Це імена, якими позначають змінні та записують малими буквами x, y, z, …, можливо, з індексами.
- *Функціональні символи*. Функціональні символи позначають малими буквами f, g, h, …, або змістовними словами, записаними малими буквами, такі як *батько*, *плюс*.
- *Предикатні символи*. Це імена, якими позначають предикати та які записують великими буквами (P, Q, R, ...) або змістовними словами, які записують великими буквами (*БІЛЬШЕ*, *ЛЮБИТЬ*, …).

Якщо функціональний символ f має n аргументів, то f називають *n-місним функціональним символом*. Зазначимо, що індивідний символ (сталу) можна розглядати як функціональний символ без аргументів. Аналогічно, якщо предикатний символ P має n аргументів, то P називають *n-місним предикатним символом*. Наприклад, *батько* – одномісний функціональний символ, а *БІЛЬШЕ* і *ЛЮБИТЬ* – двомісні предикатні символи.

Функція є відображенням, яке ставить у відповідність набору сталих певну сталу.

Приклад 2.6. Функція *батько* відображає людину на ім'я Іван у людину, яка є батьком Івана. Отже, *батько*(Іван) означає людину, навіть коли її ім'я невідоме. У логіці першого порядку вирази типу *батько*(Іван), *плюс*(x, 1) називають *термами*.

Уведемо поняття *терму* формально, використавши рекурсивне означення:

1) стала є термом;
2) змінна є термом;
3) якщо f – n-місний функціональний символ та $t_1, t_2, ..., t_n$ – терми, то $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ – терм.
4) жодних інших термів, крім породжених застосуванням пунктів 1–3, немає.

Приклад 2.7. Вираз «x+1» запишемо у виді *плюс*(x,1). Тут x та 1 – терми, «*плюс*» – двомісний функціональний символ. Тому *плюс*(x,1) є термом; *плюс*(*плюс*(x,1),x) та *батько*(*батько*(Іван)) – також терми, з яких перший означає (x+1)+x, а другий – Іванового дідуся.

Якщо P – n-місний предикатний символ і $t_1, t_2, …, t_n$ – терми, то $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ – *атом* (або *атомарна формула*) *логіки першого порядку*.

Літералом, як і в пропозиційній логіці, називають атом або його заперечення.

Приклад 2.8. Вираз «$x + y$» можна зобразити функцією *плюс*(x, y), а *батько*(x) означає «батько людини x». Речення «$x + 1 > x$» записують за допомогою функцій та предикатних символів у виді *БІЛЬШЕ*(*плюс*(x, 1), x), речення «батько Івана любить Івана» як *ЛЮБИТЬ*(*батько*(Іван), Іван), а речення «Іван любить Марію» як *ЛЮБИТЬ*(Іван, Марія). Тут *БІЛЬШЕ*(x, 3), *ЛЮБИТЬ*(Іван, Марія), *БІЛЬШЕ*(*плюс*(x, 1), x) та *ЛЮБИТЬ*(*батько*(Іван), Іван) – атоми логіки першого порядку, де *БІЛЬШЕ* та *ЛЮБИТЬ* – предикатні символи; x – змінна; 1, 3, Іван, Марія – індивідні символи (сталі); *батько* та *плюс* – функціональні символи.

Тепер ми готові дати означення формули логіки першого порядку, але попередньо потрібно означити поняття квантора.

2.2. Квантори загальності й існування. Формули логіки першого порядку

Нехай $P(x)$ – предикат, M – предметна область. Використовують два спеціальні символи $\forall$ та $\exists$, які називають, відповідно, *квантором загальності* (або *усезагальності*) та *квантором існування*. Якщо x – предметна змінна, то вираз $\forall x$ читають «для всіх x», «для кожного x» або «для будь-якого x». Вираз $\forall xP(x)$ означає, що $P(x)$ істинний для всіх значень x з предметної області M; його читають як «$P(x)$ *для всіх* x».

Вираз $\exists x$ читають «існує x», «для деяких x» або «принаймні для одного x». Вираз $\exists xP(x)$ означає, що в області M існує таке x, що $P(x)$ – істинний, або що в області M існує принаймні одне x таке, що предикат $P(x)$ істинний, або що предикат $P(x)$ істинний для якогось x із області M.

Означимо *область дії* квантора, що входить у формулу, як ту формулу, до якої цей квантор застосовано.

Наприклад, область дії квантора існування у формулі $\forall x\,\exists y\, МЕНШЕ(x, y)$ є $МЕНШЕ(x, y)$, а область дії квантора загальності – формула $\exists y\, МЕНШЕ(x, y)$. В області дії квантора загальності у формулі $\forall x\ (Q(x)\to R(x))$ є формула $(Q(x)\to R(x))$.

Входження змінної x у формулу називають *зв'язаним* тоді й тільки тоді, коли воно збігається із входженням у кванторний комплекс $\forall x$ або $\exists x$ або є в області дії такого комплексу. Входження змінної у формулу називають вільним тоді й тільки тоді, коли воно не є зв'язаним.

Змінна ***вільна*** у формулі, якщо хоча б одне її входження у формулу є вільним.

Змінна ***зв'язана*** у формулі, якщо хоча б одне її входження у формулу є зв'язаним.

Приклад 2.9. У формулі $\forall x\, P(x, y)$ змінна x зв'язана, бо *обидва* входження x зв'язані. Проте змінна y вільна, бо єдине входження y вільне (предикат $P(x, y)$ не є в області дії квантора зі змінною y).

Зазначимо, що змінна може бути вільною та зв'язаною одночасно.

Приклад 2.10. Змінна y і вільна і зв'язана у формулі $\forall x\, P(x, y)\wedge \forall yQ(y)$, бо є і вільне і зв'язане входження y у цю формулу.

Означимо поняття формули логіки першого порядку (логіки предикатів).

Правильно побудовані формули логіки першого порядку, або *формули логіки першого порядку*, визначають так:

1. атом – це формула;
2. якщо A і B – формули, то $(\neg A)$, $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\to B)$, $(A\leftrightarrow B)$ та $(A\oplus B)$ – формули;
3. якщо A формула, а x – вільна змінна у формулі A, то $\forall x\ A$ та $\exists x\ A$ – формули;
4. формули породжуються тільки скінченною кількістю застосувань правил 1 – 3.

У цьому означенні і в подальшому як схеми формул використовуємо букви A, B, C, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, … з предметними змінними або без них. Надалі залишаються в силі домовленості щодо застосування термінів «формула» і «схема формул».

Повернемося до прикладу 2.1, але на цей раз скористаємося можливостями логіки першого порядку.

Приклад 2.11. Запишемо твердження «Кожна людина смертна. Конфуцій – людина. Отже, Конфуцій смертний» у виді формули.

Позначимо «x є людиною» як $ЛЮДИНА(x)$ та «x смертний» як $СМЕРТНИЙ(x)$. Тоді твердження «Кожна людина смертна» можна подати формулою

A_1 $$\forall x\big(ЛЮДИНА(x)\to СМЕРТНИЙ(x)\big),$$

твердження «Конфуцій – людина» – формулою

A_2 $\qquad$ $ЛЮДИНА(Конфуцій)$

та «Конфуцій смертний» – формулою

B $\qquad$ $СМЕРТНИЙ(Конфуцій)$.

Твердження в цілому тепер можна подати формулою

$$\forall x\,(ЛЮДИНА(x) \to СМЕРТНА(x)) \wedge ЛЮДИНА(Конфуцій) \to СМЕРТНИЙ(Конфуцій)$$

У подальшому ми переконаємося, що із припущень A_1 і A_2 логічно випливає висновок B.

2.3. Формальна граматика для формул логіки першого порядку

Як і в пропозиційній логіці (див. підрозділ 1.4), формули в логіці першого порядку можна визначити як рядки, які породжуються контекстно вільною граматикою.

Нижче подано продукції цієї граматики у формі Бекуса – Наура (BNF).

Нехай $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{A}$ та $\mathcal{V}$ – відповідно, зліченні множини предикатних символів, функціональних символів, символів констант та змінних. Через f^n позначено n-арний функціональний символ, $f^n \in \mathcal{F}$.

$\langle term\rangle ::= x$	для будь-якого $x \in \mathcal{V}$
$\langle term\rangle ::= a$	для будь-якого $a \in \mathcal{A}$
$\langle term\rangle ::= f^0$	для будь-якого $f^0 \in \mathcal{F}$
$\langle term\rangle ::= f^n\ (\langle term\_list\rangle)$	для будь-якого $f^n \in \mathcal{F}$, $n \ge 1$
$\langle term\_list\rangle ::= \langle term\rangle$	
$\langle term\_list\rangle ::= \langle term\rangle, \langle term\_list\rangle$	
$\langle atomic\_formula\rangle ::= P\ (\langle term\_list\rangle)$	для будь-якого $P \in \mathcal{P}$
$\langle formula\rangle ::= \langle atomic\_formula\rangle$	
$\langle formula\rangle ::= (\neg\ \langle formula\rangle)$	
$\langle formula\rangle ::= (\langle formula\rangle\langle op\rangle\langle formula\rangle)$	
$\langle op\rangle ::= \mid \wedge \mid \vee \mid \to \mid \leftrightarrow \mid \oplus$	
$\langle formula\rangle ::= \forall\ x\ \langle formula\rangle$	для будь-якого $x \in \mathcal{V}$
$\langle formula\rangle ::= \exists\ x\ \langle formula\rangle$	для будь-якого $x \in \mathcal{V}$

2.4. Переклад з природної мови на математичну і навпаки

Розглянемо приклади перекладу речень, записаних українською мовою, на мову формул логіки першого порядку. Головна проблема такого перекладу полягає в правильному використанні кванторів. Кожне речення може мати декілька способів такого подання, і не існує загального алгоритму, який дає змогу будувати його крок за кроком.

Приклад 2.12. Запишемо речення «Кожний студент групи вивчає математичну логіку» у вигляді формули логіки першого порядку.

Спочатку перепишемо речення так, щоб було зрозуміло, як розставити квантори: «Про кожного студента групи відомо, що цей студент вивчає математичну логіку». Тепер уведемо змінну x, і речення набере вигляду: «Про кожного студента x групи відомо, що x вивчає математичну логіку». Уведемо предикат $P(x)$: «x вивчає математичну логіку». Якщо предметна область змінної x – усі студенти групи, то можна записати задане речення як $\forall x\, P(x)$.

Є й інші коректні подання з різними предметними областями та предикатами. Зокрема, можна вважати, що нас цікавлять інші групи людей, окрім тих, які вчаться в одній академічній групі. Узявши як предметну область усіх людей, можна записати задане речення так «Для кожної особи x, якщо ця особа x – студент групи, то x вивчає математичну логіку». Якщо предикат $Q(x)$ означає «особа x вчиться в групі», то задане речення треба записати у вигляді $\forall x\,(Q(x) \to P(x))$. Зазначимо, що задане речення *некоректно* записати як

$\forall x\,(Q(x) \wedge P(x))$, бо тоді це означало б, що всі особи з предметної області вчаться в групі та вивчають математичну логіку.

Іще один спосіб записати задане речення – це ввести двомісний предикат $R(x, y)$: «Студент x вивчає дисципліну y». Тоді можна замінити $P(x)$ на $R(x$, Математична_логіка), що дасть можливість переписати наведені формули у вигляді

$$\forall x\, R(x, \text{Математична\_логіка}) \text{ або } \forall x\,(Q(x) \to R(x, \text{Математична\_логіка})).$$

Приклад 2.13. Запишемо речення «Деякі студенти групи відвідали Париж» за допомогою предикатів і кванторів.

Це речення можна переписати так: «У групі є такий студент, що цей студент відвідав Париж». Якщо ввести змінну x, то матимемо: «У групі є такий студент x, що x відвідав Париж». Уведемо предикат $P(x)$, який відповідає реченню «x відвідав Париж». Якщо предметна область x складається тільки зі студентів певної групи, то можна записати це речення як $\exists x\, P(x)$.

Якщо ж нас цікавлять інші особи, окрім студентів зазначеної групи, то запропоноване речення матиме інший вигляд: «Є така особа x, що x – студент групи й x відвідав Париж». У такому разі предметна область складається з усіх людей. Нехай предикат $Q(x)$ означає «x – студент групи». Тоді речення має такий вигляд: $\exists x\,(Q(x) \wedge P(x))$, бо воно містить повідомлення про те, що хтось – студент групи та відвідав Париж. Це речення *некоректно* подати формулою $\exists x\,(Q(x) \to P(x))$, оскільки вона істинна навіть тоді, коли особа x – не студент групи.

Приклад 2.14. Запишемо речення «Кожний студент групи відвідав Париж або Рим» за допомогою предикатів і кванторів. Задане речення можна переписати так: «Для кожного x із групи відомо, що x відвідав Париж або x відвідав Рим». Позначимо як $P(x)$ речення «x відвідав Париж», а $R(x)$ – «x відвідав Рим». Припустивши, що предметна область складається зі студентів певної групи, задане речення можна записати у вигляді $\forall x\,(P(x) \vee R(x))$. Якщо ж предметна область складається з усіх людей, то позначимо $Q(x)$ «особа x вчиться в групі». Тоді речення «Кожний студент групи відвідав Париж або Рим» можна записати як

$$\forall x\,(Q(x) \to (P(x) \vee R(x)).$$

Підсумуємо.
«Усі P є Q» перекладається як $\forall x\,(P(x) \to Q(x))$.
«Деякі P є Q» перекладається як $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$.
Можна сказати, що квантори змушують змінну «пробігти» всю предметну область.
Квантор $\forall$ узгоджується зі зв'язкою $\to$, а квантор $\exists$ – зі зв'язкою $\wedge$.

Розглянемо приклади, які ілюструють подання речень природної мови та містять вкладені квантори, тобто в області дії одних кванторів є інші квантори.

Приклад 2.15. Подамо речення «Якщо певний чоловік – один із батьків, то він – тато» у вигляді формули логіки предикатів. Предметна область кожної змінної – усі люди. Переформулюємо задане речення так: «Для кожної особи x за умови, що x – чоловік та x – один із батьків, існує така особа y, що x – тато y». Якщо ввести предикати $M(x)$: «x – особа чоловічої статі», $P(x)$ – «x є одним із батьків», $D(x, y)$: «x – тато y», то задане речення можна записати так:

$$\forall x\,((M(x) \wedge P(x)) \to \exists y\, D(x, y)).$$

Приклад 2.16. Подамо речення «Кожна людна має одного найкращого друга» формулою, яка містить предикатні символи, квантифіковані змінні, логічні операції, а предметна область складається з усіх людей. Задане речення переформулюємо так: «Для кожної особи x справджується, що особа x має точно одного найкращого друга». Якщо особа

x має точно одного найкращого друга, то це означає, що існує єдина особа y, яка є найкращим другом x. Крім того, кожна особа z, відмінна від y, не є найкращим другом x. Уведемо предикат $H(x, y)$, який означає «y – найкращий друг x». Тоді формулу, зміст якої полягає в тому, що людина x має точно одного найкращого друга, можна записати як

$$\exists y\ (H(x, y) \wedge \forall z((z \neq y) \rightarrow \neg H(x, z))),$$

а задане речення – як

$$\forall x\ \exists y\ (H(x, y) \wedge \forall z\ ((z \neq y) \rightarrow \neg H(x, z))).$$

Приклад 2.17. Запишемо формулою логіки предикатів речення «Сума двох додатних чисел – додатне число». Спочатку перепишемо це речення так: «Два довільні додатні числа дають у сумі додатне число». Уведемо змінні x та y і отримаємо речення «Будь-які додатні числа x та y утворюють суму $x + y$, яка є додатним числом». Запишемо його формулою

$$\forall x\ \forall y\ (((x > 0) \wedge (y > 0)) \rightarrow (x + y > 0)).$$

Тут предметна область кожної змінної – усі дійсні числа.

Приклад 2.18. Запишемо речення «Кожне дійсне число, окрім нуля, має обернене» у вигляді формули. Спочатку перепишемо це речення так: «Якщо число x дійсне та відмінне від нуля, то число x має обернене». Далі перепишемо це речення у такий спосіб: «Для кожного дійсного числа x, відмінного від нуля, існує таке дійсне число y, що $xy = 1$». Останнє речення можна записати формулою логіки предикатів

$$\forall x\ ((x \neq 0) \rightarrow \exists y\ (xy = 1)).$$

Переклад формул із вкладеними кванторами українською мовою може бути доволі складним. Він полягає у виписуванні змісту предикатів і кванторів, після чого необхідно переписати задану формулу реченням української мови.

Приклад 2.19. Подамо українською мовою формулу

$$\forall x\ \forall y\ (((x > 0) \wedge (y < 0)) \rightarrow (xy < 0)),$$

істинну для дійсних чисел x та y. Ця формула означає, що для дійсних чисел x та y таких, що x – додатне число, а y – від'ємне, їхній добуток xy – від'ємне число. Це можна записати реченням «Добуток додатного та від'ємного дійсних чисел – від'ємне число».

Приклад 2.20. Подамо формулу

$$\forall x\ (C(x) \vee \exists y\ (C(y) \wedge F(x, y)))$$

українською мовою, якщо $C(x)$ означає «x має комп'ютер», $F(x, y)$ – «x та y – друзі», а предметна область для x і y – усі студенти певного курсу. Зміст формули можна так подати українською мовою так: «Кожний студент курсу має комп'ютер або має друга, у якого є комп'ютер».

Приклад 2.21. Подамо формулу

$$\exists x\ \forall y\ \forall z\ ((F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \neg F(y, z))$$

українською мовою, якщо $F(a, b)$ означає, що a та b – друзі, а предметна область – усі студенти університету.

Спочатку проаналізуємо формулу

$$(F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \neg F(y, z)$$

яка означає, що коли студенти x і y друзі та студенти x і z друзі, а y і z різні особи, то y і z не друзі.

У наведеній формулі кванторами зв'язані всі змінні. Якщо врахувати зміст кожного квантора, то задану формулу можна прочитати так: «Є такий студент x, що для всіх студентів y і для всіх студентів z, відмінних від y, якщо x і y друзі та x і z друзі, то y і z не друзі». Іншими словами, є студент, жодні двоє друзів якого не товаришують між собою.

2.5. Використання предикатів та кванторів для опису технічних характеристик системи

У підрозділі 1.7 ми використовували мову пропозиційної логіки для представлення специфікацій системи. Проте багато системних специфікацій включають предикати та квантифікації. Це показано в прикладі 2.22.

Приклад 2.22. Використаємо предикати та квантори для вираження системних специфікацій «Кожне поштове повідомлення, яке більше ніж один мегабайт, буде стиснуто» і «Якщо користувач активний, принаймні одне мережеве з'єднання має бути доступним».

Нехай $S(m, y)$ буде «Поштове повідомлення m більше ніж y мегабайт», де предметна область змінної x – множина усіх поштових повідомлень, а змінна y є додатним дійсним числом, і нехай $C(m)$ позначає «Поштове повідомлення m буде стиснуто». Тоді специфікація «Кожне поштове повідомлення, розмір якого перевищує один мегабайт, буде стиснуто» можна подати як $\forall m\ (S(m, 1) \to C(m))$.

Нехай $A(u)$ позначає «Користувач u активний», де предметна область змінної u – множина усіх користувачів. Нехай $S(n, x)$ позначає «мережеве з'єднання n перебуває в стані x», де n має предметною областю множину з'єднань усієї мережі, x має предметною областю множину усіх можливих станів для мережевого з'єднання. Тоді специфікація «Якщо користувач активний, принаймні одне мережеве з'єднання буде доступним» може бути подана як $\exists u\ A(u) \to \exists n\ S(n, available)$.

2.6. Інтерпретація формул у логіці першого порядку. Еквівалентність формул. Виконуваність, загальнозначущість та суперечність

Інтерпретація формул у пропозиційній логіці полягає в наданні атомам значень істинності. Це дає змогу знайти значення істинності цих формул. Щоб визначити інтерпретацію для формули логіки першого порядку, ми маємо вказати предметну область – множину M – і значення констант, функціональних і предикатних символів, які зустрічаються у формулі.

Нижче дано формальне означення інтерпретації формули A логіки першого порядку.

Інтерпретація формули логіки першого порядку – це система, яка складається з непорожньої множини M – предметної області – і відповідності $\boldsymbol{I}$, яка:

1) кожній константі ставить у відповідність елемент із M;
2) кожному n-місному функціональному символу ставить у відповідність відображення з M^n в M (зазначимо, що $M^n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_1 \in M, \ldots, x_n \in M\}$);
3) кожному n-місному предикатному символу ставить у відповідність відображення з M^n в $\{T, F\}$.

Зауваження. Замість терміна «предметна область» часто використовують терміни «область інтерпретації», «домен».

Іноді, щоб акцентувати увагу на області M, ми говоримо *про інтерпретацію формули на M*. Коли ми визначаємо значення істинності в інтерпретації на області M, $\forall x$ інтерпретують як «для всіх елементів x із M», а $\exists x$ – як «існує елемент x із M».

Для кожної інтерпретації формули на області M формула A може отримати значення істинності T або F за такими правилами.

1. Якщо задані значення істинності формул A та B, то значення істинності формул , $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$ та $(A \oplus B)$ отримують із таблиць істинності для логічних операцій.
2. Формула $\forall xA$ отримує значення T, якщо A отримує значення T для кожного $x \in M$, інакше вона отримує значення F.
3. Формула $\exists xA$ отримує значення T, якщо A отримує значення T принаймні для одного $x \in M$, інакше вона отримує значення F.

Зазначимо, що формула, яка містить вільні змінні, не може отримати значення істинності. Далі всюди будемо вважати, що формула логіки першого порядку або не містить вільних змінних (таку формулу називають *закритою*), або вільні змінні розглядаються як константи.

Формули A і B логіки першого порядку називають *еквівалентними*, або *рівносильними, тотожними*, тоді й тільки тоді, коли значення істинності A і B збігаються при кожній інтерпретації A і B.

Логічну еквівалентність формул A та B записують як $A \equiv B$ (або $A \Leftrightarrow B$).

Приклад 2.23. Знайдемо значення істинності формул $\forall xP(x)$ та $\exists x\neg P(x)$ при інтерпретації $\boldsymbol{I}$ на області $M = \{1, 2\}$, значення одномісного предикатного символу P визначено таблицею:

$P(1)$	$P(2)$
T	F

Тоді $\forall xP(x)$ є F при цій інтерпретації, бо $P(x)$ не є T для $x = 2$. З іншого боку, оскільки $\neg P(2)$ є T при цій інтерпретації, то $\exists x\neg P(x)$ отримує значення T (при цій інтерпретації).

Приклад 2.24. Знайдемо значення істинності формули $\forall x\exists yP(x,y)$ при інтерпретації $\boldsymbol{I}$ на області $M = \{1, 2\}$; значення двомісного предикатного символу P визначено таблицею:

$P(1, 1)$	$P(1, 2)$	$P(2, 1)$	$P(2, 2)$
T	F	F	T

Якщо $x = 1$, то існує такий y (а саме, 1), що $P(1, y)$ є *T*. Якщо $x = 2$, то також існує такий y (а саме, 2), що $P(2, y)$ є T. Отже, при цій інтерпретації для кожного x з M існує такий y, що $P(x, y)$ є T, тобто $\forall x\exists yP(x, y)$ є T при цій інтерпретації.

Приклад 2.25. Розглянемо формулу A: $\forall x(P(x)\to Q(f(x),a))$. У формулі A є одна константа a, один одномісний функціональний символ f, один одномісний предикатний символ P і один двомісний предикатний символ Q.

Розглянемо інтерпретацію $\boldsymbol{I}$ формули A на області $M = \{1, 2\}$, задану такими таблицями значень для константи a, одномісного функціонального символу f, одномісного предикатного символу P і двомісного предикатного символу Q.

a
1

$f(1)$	$f(2)$
2	1

$Q(1, 1)$	$Q(1, 2)$	$Q(2, 1)$	$Q(2, 2)$
T	T	F	T

$P(1)$	$P(2)$
F	T

Якщо $x = 1$, то

$$P(x)\to Q(f(x),a) \equiv P(1)\to Q(f(1),a) \equiv P(1)\to Q(2,1) \equiv \mathbf{F}\to\mathbf{F} \equiv \mathbf{T}.$$

Якщо $x = 2$, то

$$P(x)\to Q(f(x),a) \equiv P(2)\to Q(f(2),a) \equiv P(2)\to Q(1,1) \equiv \mathbf{T}\to\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}.$$

Оскільки $P(x)\to Q(f(x),a)$ істинне для всіх елементів x із M, то формула $\forall x(P(x)\to Q(f(x),a))$ істинна в даній інтерпретації.

Щойно визначено поняття інтерпретації, усі поняття, визначені у пропозиційній логіці, такі як *еквівалентність* (рівносильність), *виконуваність*, *загальнозначущість*, *невиконуваність* формул можна аналогічно визначити для формул логіки першого порядку.

Формули A і B називають *еквівалентними*, або *рівносильними, тотожними* (позначають $A \equiv B$, або $A \Leftrightarrow B$), тоді й тільки тоді, коли значення істинності A і B збігаються при кожній інтерпретації A і B.

(Іншими словами, формули логіки першого порядку еквівалентні, якщо й тільки якщо вони набувають однакових значень істинності незалежно від того, які конкретні предикати та функції підставлені у ці формули і які області інтерпретації використані.)

Формулу A називають *виконуваною* тоді й тільки тоді, коли існує така інтерпретація $\boldsymbol{I}$, що A має значення T при інтерпретації $\boldsymbol{I}$. Коли формула A є T при інтерпретації $\boldsymbol{I}$, то говорять, що $\boldsymbol{I}$ є *моделлю* формули A, та $\boldsymbol{I}$ *задовольняє* A.

Формулу A називають *суперечністю* (або *невиконуваною*) тоді й тільки тоді, коли не існує інтерпретації, яка задовольняє A.

Формулу A називають *загальнозначущою* (або *тавтологією*) тоді й тільки тоді, коли кожна інтерпретація задовольняє A (тобто кожна інтерпретація є моделлю A).

Як і в пропозиційній логіці, у логіці першого порядку справджується твердження: формули A та B еквівалентні тоді й тільки тоді, коли формула $A \leftrightarrow B$ загальнозначуща (тавтологія).

Оскільки в логіці першого порядку є безмежно багато областей, то є безмежно багато інтерпретацій формули. Отже, на відміну від пропозиційної логіки, неможливо довести загальнозначущість або суперечність формули знаходженням її значення при всіх можливих інтерпретаціях.

Загальнозначущі та суперечні формули є важливими для логіки тому, що вони не залежать від конкретної формалізації предметної області М. Далі, застосування загальнозначущих формул надає загальні засоби виведення й перетворення формул. Нарешті, для перевірки загальнозначущості є достатньо ефективний у багатьох змістовних випадках метод – семантичні таблиці.

2.7. Семантичні таблиці з кванторами в логіці першого порядку

На відміну від таблиць істинності, метод семантичних таблиць можна узагальнити на всю логіку першого порядку. Тут технічне покращення, яким видавалося вилучення зайвих випадків із перебору, перейшло в принципове.

Розглянемо умови істинності та фальшивості для виразів з кванторами. Формула $\forall x\, A(x)$ істинна тоді й тільки тоді, коли $A(x)$ істинна для будь-якого конкретного c. Отже, якщо наявне $\models \forall x\, A(x)$, ми можемо отримати $\models A(c_i)$ щоразу, коли в таблиці чи підтаблиці з'являється **об'єкт** c_i. Якщо ж $=\!| \; \forall x\, A(x)$, то ми знаємо тільки те, що існує такий об'єкт a, для якого $A(a)$ фальшиве. Щоб це відобразити, уважатимемо $=\!|\; A(c_{n+1})$ для нового об'єкта c_{n+1}, який раніше не зустрічався (c_{n+1} називають *допоміжною константою*). Отже, ми можемо сформулювати такі правила декомпозиції для кванторів.

$$\frac{\models \forall x\, A(x)}{\models A(c_i)} \qquad \frac{=\!|\; \forall x\, A(x)}{=\!|\; A(c_{n+1})}$$

$$\frac{\models \exists x\, A(x)}{\models A(c_{n+1})} \qquad \frac{=\!|\; \exists x\, A(x)}{=\!|\; A(c_i)}$$

Приклад 2.26. Перевіримо формулу на загальнозначущість:

$$\exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \to \exists x\, (P(x) \wedge Q(x)).$$

$$=\!|\; \exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \to \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$$
$$\models \exists x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$$
$$=\!|\; \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$$
$$\models \exists x\, P(x)$$
$$\models P(c_1)$$
$$\models \forall x\, Q(x)$$
$$\models Q(c_1)$$
$$=\!|\; P(c_1) \wedge Q(c_1)$$

$$\begin{array}{c|c} =\!|\; P(c_1) & =\!|\; Q(c_1) \\ = & = \end{array}$$

Ми отримали дві підтаблиці, і обидві закрилися. Отже, наведена формула з кванторами загальнозначуща.

У подальшому для одноманітності допоміжні константи позначатимемо як c_1, c_2, … Ми ввели **об'єкт** c_1, коли розглянули $\models \exists x\, P(x)$, після чого підставили його в дві інші кванторні формули: це можливо, бо в цих формулах можна використати будь-які c_i, зокрема, уже використане c_1. Наступний приклад свідчить, що не завжди можна обійтися одним об'єктом.

Приклад 2.27. Перевіримо формулу на загальнозначущість:

$$\forall x\,(P(x) \lor Q(x)) \to \forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x)$$

$$\dashv \forall x\,(P(x) \lor Q(x)) \to \forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x)$$
$$\dashv \forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x)$$
$$\models \forall x\,(P(x) \lor Q(x))$$
$$\dashv \forall x\, P(x)$$
$$\dashv P(c_1)$$
$$\dashv \forall x\, Q(x)$$
$$\dashv Q(c_2)$$
$$\models P(c_1) \lor Q(c_1)$$
$$\models P(c_2) \lor Q(c_2)$$

<table>
<tr><td rowspan="2">$\models P(c_1)$
══</td><td colspan="2">$\models Q(c_1)$</td></tr>
<tr><td>$\models P(c_2)$</td><td>$\models Q(c_2)$
══</td></tr>
</table>

Тут довелося використати $\models \forall x\,(P(x) \lor Q(x))$ двічі: для c_1 і c_2. (Це можливо, бо за правилами декомпозиції для кванторів тут можна використати будь-який об'єкт – ми використали c_1 і c_2.) Саме через відмінність цих двох значень таблиця не закрилася, формула не є загальнозначущою. Незакрита підтаблиця дає таку спростовуючу інтерпретацію:

$M = \{c_1, c_2\}$,

$P(c_1)$	$P(c_2)$	$Q(c_1)$	$Q(c_2)$
F	T	T	F

Приклад 2.28. Перевіримо формулу на загальнозначущість:

$$\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x) \to \forall x\,(P(x) \lor Q(x))$$

$$\dashv \forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x) \to \forall x\,(P(x) \lor Q(x))$$
$$\models \forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x)$$
$$\dashv \forall x\,(P(x) \lor Q(x))$$
$$\dashv P(c_1) \lor Q(c_1)$$
$$\dashv P(c_1)$$
$$\dashv Q(c_1)$$

<table>
<tr><td>$\models \forall x\, P(x)$
$\models P(c_1)$
══</td><td>$\models \forall x\, Q(x)$
$\models Q(c_1)$
══</td></tr>
</table>

Всі підтаблиці закрилися. Отже, наведена формула загальнозначуща.

Приклад 2.29. Перевіримо формулу на загальнозначущість:

$$(\exists x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)) \to \exists x\,(P(x) \to Q(x)).$$

$$\dashv (\exists x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)) \to \exists x\, (P(x) \to Q(x))$$

$$\boxed{\models \exists x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)}$$

$$\dashv \exists x\, (P(x) \to Q(x))$$

$$\dashv (P(c_i) \to Q(c_i))$$

$$\models P(c_i)$$

$$\dashv Q(c_i)$$

$\boxed{\dashv \exists x\, (P(x)}$ $\boxed{\dashv P(c_i)}$	$\boxed{\models \exists x\, Q(x)}$ $\boxed{\models Q(c_1)}$

Акцентовані подвійними рамками фрагменти семантичної таблиці виділяють декомпозицію формули $\models \exists x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)$. На місці c_i може бути будь-який об’єкт, ми використали c_1. Обидві підтаблиці закрилися. Отже, наведена формула загальнозначуща.

Приклад 2.30. Перевіримо формулу на загальнозначущість:

$$\exists x\, (P(x) \to Q(x)) \to (\exists x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)).$$

$$\dashv \exists x\, (P(x) \to Q(x)) \to (\exists x\, P(x) \to \exists x\, Q(x))$$

$$\models \exists x\, (P(x) \to Q(x))$$

$$\dashv \exists x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)$$

$$\boxed{\models P(c_1) \to Q(c_1)}$$

$$\models \exists x\, P(x)$$

$$\dashv \exists x\, Q(x)$$

$$\models P(c_2)$$

$$\dashv Q(c_i)$$

$\boxed{\dashv P(c_1)}$	$\boxed{\models Q(c_1)}$

Акцентовані подвійними рамками фрагменти семантичної таблиці виділяють декомпозицію формули $\models P(c_1) \to Q(c_1)$. На місці c_i може бути будь-який об’єкт, ми використали c_1. У виразі $\models P(c_2)$ використано c_2, бо c_1 до цього моменту вже використано. Незакрита підтаблиця дає таку спростовуючу інтерпретацію:

$$M = \{c_1, c_2\},$$

$P(c_1)$	$P(c_2)$	$Q(c_1)$	$Q(c_2)$
F	T	F	F