Змістовий модуль 4. Метод резолюцій

Тема 10. Метод резолюцій у логіці першого порядку

План лекції.

- Опис методу резолюцій у логіці першого порядку
- Приклади застосування методу резолюцій у логіці першого порядку
- Теорема про повноту методу резолюцій для логіки першого порядку

4.5. Опис методу резолюцій у логіці першого порядку

Правилом резолюції у логіці першого порядку називають таке виведення.

Із диз'юнктів $\neg P(t_1,\dots,t_n)\vee G$ і $P(s_1,\dots,s_n)\vee H$, які не містять жодних спільних змінних, виводимо диз'юнкт $G\sigma\vee H\sigma$, де σ – найзагальніший уніфікатор множини літералів $\{\neg P(t_1,\dots,t_n), P(s_1,\dots,s_n)\}$.

Диз'юнкт $G\sigma\vee H\sigma$ називають *бінарною резольвентою* диз'юнктів $\neg P(t_1,\dots,t_n)\vee G$ і $P(s_1,\dots,s_n)\vee H$, а літерали $\neg P(t_1,\dots,t_n)$ і $P(s_1,\dots,s_n)$ – *відрізними літералами*.

Приклад 4.14. За допомогою правила резолюції із диз'юнктів $\neg Q(a, f(x))\vee R(x)$ і $Q(u,z)\vee\neg P(z)$ можна вивести диз'юнкт $R(x)\vee\neg P(f(x))$, використавши підстановку $\sigma=\{a/u, f(x)/z\}$.

Приклад 4.15. Розглянемо тепер такі диз'юнкти: $P(x)\vee Q(x)$ та $\neg P(a)\vee R(x)$. Оскільки зміна x входить в обидва диз'юнкта, то замінимо її в другому диз'юнкті: $\neg P(a)\vee R(y)$. Найзагальніший уніфікатор $P(x)$ і $\neg P(a)$ такий: $\sigma=\{a/x\}$. Отже, бінарною резольвентою диз'юнктів $P(x)\vee Q(x)$ та $\neg P(a)\vee R(x)$ є $Q(a)\vee R(y)$.

На відміну від пропозиційної логіки, у логіці предикатів нам буде потрібним ще одне правило – *правило склейки*. Це правило, за яким із диз'юнкта

$$*P(t_1,\dots,t_n)\vee\dots\vee *P(s_1,\dots,s_n)\vee G \tag{4.1}$$

виводимо диз'юнкт $*P(t_1,\dots,t_n)\sigma\vee G\sigma$, де σ – найзагальніший уніфікатор множини $\{P(t_1,\dots,t_n),\dots,P(s_1,\dots,s_n)\}$, * – знак заперечення або його відсутність. Диз'юнкт $*P(t_1,\dots,t_n)\sigma\vee G\sigma$ називають *склейкою* диз'юнкта (4.1). <u>Звертаємо особливу увагу на те, що коли знак заперечення стоїть перед одним із записаних атомів, то він стоїть і перед іншими (на місці *).</u>

Приклад 4.16. Нехай задано диз'юнкт $\neg P(x)\vee\neg P(f(y))\vee Q(x)$. Тоді перший і другий літерали мають найзагальніший уніфікатор $\sigma=\{f(y)/x\}$. Отже, $\neg P(f(y))\vee Q(f(y))$ є склейкою заданого диз'юнкта.

Означення виведення в логіці першого порядку дещо відрізняється від аналогічного означення в пропозиційній логіці.

Нехай S – множина диз'юнктів. *Виведенням із множини диз'юнктів* S називають послідовність диз'юнктів

$$D_1, D_2, \dots, D_n$$

таку, що кожний диз'юнкт D_i або належить S, або виводиться із попередніх диз'юнктів за правилом резолюції, або виводиться з якогось попереднього диз'юнкта за правилом склейки.

Як і в пропозиційній логіці, диз'юнкт D *є вивідним із множини диз'юнктів* S, якщо існує виведення із S, останнім диз'юнктом якого є D.

Приклад 4.17. Нехай $S=\{\neg P(x)\vee\neg Q(x)\vee R(f(x)),\ Q(y)\vee R(f(z)),\ P(a)\}$. Тоді послідовність

$$D_1=\neg P(x)\vee\neg Q(x)\vee R(f(x)),$$
$$D_2=Q(y)\vee R(f(z)),$$

$$D_3 = \neg P(x) \vee R(f(x)) \vee R(f(z)),$$
$$D_4 = \neg P(x) \vee R(f(x)),$$
$$D_5 = P(a),$$
$$D_6 = R(f(a))$$

є виведенням із S. Зазначимо, що диз'юнкти $D_1, D_2, D_5 \in S$, диз'юнкт D_3 виводиться з D_1 і D_2 за правилом резолюції, диз'юнкт D_6 виводиться з D_4 і D_5 за тим же правилом, а D_4 виводиться з D_3 за правилом склейки.

Ми не будемо записувати літерали, які повторюються. Це дає змогу, якщо потрібно, ототожнювати диз'юнкт з множиною літералів. Якщо розглядати диз'юнкт як множину літералів, то результат застосування правила резолюції до диз'юнктів D_1 і D_2 із відрізними літералами L_1 і L_2 можна записати так:

$$D = (D_1\sigma - L_1\sigma) \cup (D_2\sigma - L_2\sigma),$$

де σ – найзагальніший уніфікатор L_1 і $\neg L_2$.

Резольвентою диз'юнктів D_1 *і* D_2 називають одну з бінарних резольвент:

1) бінарна резольвента D_1 та D_2;
2) бінарна резольвента D_1 та склейки D_2;
3) бінарна резольвента D_2 та склейки D_1;
4) бінарна резольвента склейки D_1 та склейки D_2.

Приклад 4.18. Нехай

$$D_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y)) \text{ та } D_2 = \neg P(f(g(a))) \vee Q(f(b)).$$

Склейкою D_1 є диз'юнкт $D_1' = P(f(y)) \vee R(g(y))$, а бінарною резольвентою диз'юнктів D_1' та D_2 – диз'юнкт $R(g(g(a))) \vee Q(f(b))$. Отже, останній диз'юнкт є резольвентою диз'юнктів D_1 *і* D_2.

Нагадаємо, що доведення невиконуваності множини диз'юнктів S називають *спростуванням* цієї множини.

Розглянемо приклади застосування методу резолюцій.

4.6. Приклади застосування методу резолюцій у логіці першого порядку

Для доведення того, що з формула B є логічним наслідком формул $A_1, \ldots, A_k$, метод резолюцій застосовують майже так, як і в пропозиційній логіці. Спочатку утворюють множину формул $\{A_1, \ldots, A_k, \neg B\}$. Після цього кожну з формул зводять до сколемівської нормальної форми; в отриманих формах викреслюють квантори загальності і символи операції кон'юнкції, отримують множину диз'юнктів $S = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$. На останньому етапі знаходять виведення порожнього диз'юнкта із множини S. Зазначимо, що всі змінні в диз'юнктах вважаються такими, що зв'язані кванторами загальності.

Приклад. 4.19. Задано формули:

A_1: $\forall x(P(x) \to (W(x) \wedge R(x)))$;

A_2: $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$;

B: $\exists x(Q(x) \wedge R(x))$.

Довести, що формулу B можна вивести з формул A_1 та A_2.

Утворимо множину формул $\{A_1, A_2, \neg B\}$. Кожну з цих формул зведемо до сколемівської нормальної форми; в отриманих формах викреслимо квантори загальності і символи операції кон'юнкції. Одержимо такі п'ять диз'юнктів (однакові змінні у диз'юнктах замінено різними):

(1) $\neg P(x) \vee W(x)$ отримано з A_1;

(2) $\neg P(y) \vee R(y)$ отримано з A_1;

(3) $P(a)$ отримано з A_2;

(4) $Q(a)$ отримано з A_2;

(5) $\neg Q(z) \vee \neg R(z)$ отримано із $\neg B$.

Методом резолюцій доведемо невиконуваність цієї множини диз'юнктів.

(6) $R(a)$ бінарна резольвента (3) і (2), підстановка $\{a/y\}$;

(7) $\neg R(a)$ бінарна резольвента (5) і (4) підстановка $\{a/z\}$;

(8) $\square$ бінарна резольвента (6) і (7).

Отже, доведено, що B є логічним наслідком A_1 та A_2.

Приклад 4.20. Розглянемо таке міркування. «Студенти є громадянами. Отже, голоси студентів є голосами громадян». Обґрунтуємо це міркування методом резолюцій.

Нехай $S(x)$ означає «x – студент», $C(x)$ – «x – громадянин», $V(x, y)$ – «x є голосом y». Тоді гіпотеза і висновок запишуться так:

A: $\forall y(S(y) \rightarrow C(y))$

B: $\forall x\, (\exists y(S(y) \wedge V(x, y)) \rightarrow \exists z\, (C(z)) \wedge V(x, z))$.

Із сколемівської нормальної форми гіпотези A отримаємо такий диз'юнкт

(1) $\neg S(y) \vee C(y)$.

Обчислимо $\neg B$.

$$\neg(\forall x\, (\exists y(S(y) \wedge V(x, y)) \rightarrow \exists z\, (C(z)) \wedge V(x, z))) \equiv$$
$$\equiv \neg(\forall x\, \forall y\, \exists z\, ((\neg S(y) \vee \neg V(x, y)) \vee (C(z)) \wedge V(x, z))) \equiv$$
$$\equiv \neg(\forall x\, \forall y\, \exists z\, (\neg S(y) \vee \neg V(x, y) \vee (C(z)) \wedge V(x, z))) \equiv$$
$$\equiv \exists x\, \exists y\, \forall z\, (S(y) \wedge V(x, y) \wedge (\neg C(z)) \vee \neg V(x, z))).$$

Тоді маємо три диз'юнкта для заперечення висновку

(2) $S(b)$,

(3) $V(a, b)$,

(4) $\neg C(z)) \vee \neg V(a, z)$.

Завершуємо доведення:

(5) $C(b)$ із (1) і (2), підстановка $\{b/y\}$,

(6) $\neg V(a, b)$ із (5) і (4), підстановка $\{b/z\}$,

(7) $\square$ із (6) і (3).

Приклад 4.21. Нехай маємо таке твердження: кожний, хто зберігає гроші, отримує проценти. Висновок: якщо не існує процентів, то ніхто не зберігає грошей.

Нехай $S(x, y)$ означає «x зберігає y», $M(x)$ – «x є грошима», $P(x)$ – «x є процентами», $E(x, y)$ – «x отримує y». Тоді твердження можна записати у вигляді

$$\forall x\, (\exists y\, S(x, y) \wedge M(y)) \rightarrow \exists y\, (P(y) \wedge E(x, y))),$$

а висновок – у вигляді

$$\neg \exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, \forall y\, (S(x, y) \rightarrow \neg M(y)) \equiv \exists x\, P(x) \vee \forall x\, \forall y\, (\neg S(x, y) \vee \neg M(y)).$$

Переведемо твердження у диз'юнкти

(1) $\neg S(x, y) \vee \neg M(y) \vee P(f(x))$,

(2) $\neg S(x, y) \vee \neg M(y) \vee E(x, f(x))$.

Знайдемо заперечення висновку:

$$\neg(\exists x\, P(x) \vee \forall x\, \forall y\, (\neg S(x, y) \vee \neg M(y))) \equiv$$
$$\equiv \forall x\, \neg P(x) \wedge \exists x\, \exists y\, (S(x, y) \wedge M(y))$$

і запишемо його сколемівську стандартну форму: $\forall x\, \neg P(x) \wedge (S(a, b) \wedge M(b))$.

Тепер заперечення висновку запишемо у вигляді диз'юнктів (у $\neg P(x)$ змінна x замінена на нову змінну z):

(3) $\neg P(z)$,

(4) $S(a, b)$,

(5) $M(b)$.

Завершуємо доведення:

(6) $\neg S(x, y) \vee \neg M(y)$ (3), (1) – підстановка $\{f(x)/z\}$,

(7) $\neg M(b)$ (6), (4) – підстановка $\{a/x, b/y\}$,

(8) $\square$. (7), (5).

Отже, висновок обґрунтовано.

Повернемося до прикладу (Чень, Лі), для розв'язування якого ми використовували різні методи. Продемонструємо, як для його розв'язування можна ефективно використати метод резолюцій.

Приклад 4.22. Деякі пацієнти довіряють усім своїм лікарям. Жоден пацієнт не довіряє знахарю. Отже, жодний лікар не є знахарем.

Як і в попередньому, використаємо позначення:

$P(x)$: x – пацієнт,

$D(x)$: x – лікар,

$Q(x)$: x – знахар,

$L(x, y)$: x довіряє y.

Тоді гіпотези й висновки запишемо у вигляді формул:

A_1: $\exists x(P(x)\wedge \forall y(D(y)\rightarrow L(x, y)))$,

A_2: $\forall x(P(x)\rightarrow \forall y(Q(y)\rightarrow \neg L(x, y)))$,

B: $\forall x(D(x)\rightarrow \neg Q(x))$.

Зараз методом резолюцій доведемо, що B є логічним наслідком A_1 і A_2. Перетворимо A_1, A_2 і $\neg B = \exists x(D(x)\wedge Q(x))$ у такі диз'юнкти (тобто сформуємо множину диз'юнктів S):

(1)	$P(a)$	отримано з A_1;
(2)	$\neg D(y)\vee L(a, y)$	отримано з A_1;
(3)	$\neg P(x)\vee\neg Q(z)\vee\neg L(x, z)$	отримано з A_2;
(4)	$D(b)$	отримано із $\neg B$;
(5)	$Q(b)$	отримано із $\neg B$.

Для спростування (тобто доведення невиконуваності) цієї множини застосуємо метод резолюцій у поєднанні з уніфікацією:

(6)	$L(a, b)$	бінарна резольвента (4) і (2), підстановка $\{b/y\}$;
(7)	$\neg Q(z)\vee\neg L(a, z)$	бінарна резольвента (3) і (1), підстановка $\{a/x\}$;
(8)	$\neg L(a, b)$	бінарна резольвента (5) і (7), підстановка $\{b/z\}$.
(9)	$\square$	бінарна резольвента (6), (8).

Отже, доведено, що B – логічний наслідок A_1 і A_2.

4.7. Теорема про повноту методу резолюцій для логіки першого порядку

У цьому підрозділі ми сформулюємо й доведемо теорему про повноту методу резолюцій. Ми покажемо, що резолюція забезпечує повноту спростування (refutation completeness). Це означає, що коли множина диз'юнктів логіки першого порядку невиконувана, то резолюція завжди дає змогу дійти суперечності. Резолюцію неможливо використати для вироблення всіх можливих наслідків із множини формул, але її можна використати для доведення того, що дана конкретна формула випливає з множини формул. Тому резолюція може слугувати для пошуку відповідей на дане конкретне запитання за допомогою методу заперечення цілі (див. п.3.2).

Почнемо з важливої леми, яка істотно використовується в доведенні цієї теореми. Назва леми – *лема підняття* – зумовлена тим, що дає змогу «підняти» будь-який етап доведення від прикладів виразів до загальних виразів у логіці першого порядку.

Лема підняття. Якщо D_1' – приклад диз'юнкту D_1, D_2' – приклад диз'юнкту D_2, а D' – резольвента D_1' і D_2', то існує резольвента D диз'юнктів D_1 і D_2 така, що D' – приклад D.

Нагадаємо поняття прикладу і основного прикладу диз'юнкту.

Якщо $\sigma = \{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$ – підстановка, а $D(x_1, \ldots, x_n)$ – диз'юнкт, то диз'юнкт $D\sigma$, отриманий із D *одночасною* заміною змінної x_i на терм t_i ($i = 1, \ldots, n$) називають *прикладом диз'юнкту* D.

Основним прикладом диз'юнкту D називають диз'юнкт, отриманий із D заміною предметних змінних на елементи ербранівського універсуму H_∞.

Означення прикладу узгоджується з означенням основного прикладу. Зазначимо, що основний приклад диз'юнкту не має предметних змінних, а приклад диз'юнкту може мати предметні змінні.

Доведення леми. Вважатимемо, що диз'юнкти D_1 і D_2 (так само, як і D_1', D_2') не мають спільних змінних, а ні, то замінимо змінні в одному з диз'юнктів.

За умовою леми для D_1' і D_2' резольвента $D' = (D_1'\sigma - L_1'\sigma) \cup (D_2'\sigma - L_2'\sigma)$, де σ – найзагальніший уніфікатор L_1' та $\neg L_2'$, а L_1' та L_2' – відрізні літерали, причому $L_1' \in D_1'$, $L_2' \in D_2'$. Оскільки D_1' і D_2' не мають спільних змінних, то підстановку σ можна подати як об'єднання двох підстановок $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, де σ_1 містить тільки змінні із D_1', а σ_2 – із D_2'. Оскільки D_1' і D_2' є прикладами D_1 і D_2 відповідно, то для якихось підстановок θ_1 і θ_2 маємо $D_1' = D_1\theta_1$, $D_2' = D_2\theta_2$. Тоді резольвента

$$D' = (D_1\theta_1\sigma_1 - L_1'\sigma_1) \cup (D_2\theta_2\sigma_2 - L_2'\sigma_2).$$

Виділимо в D_i всі літерали, котрі підстановка θ_i склеює в один літерал. Тоді

$$L_i^1\theta_i = \ldots = L_i^{r_i}\theta_i = L_i'\sigma_i,\ i = 1, 2.$$

Оскільки множина літералів $\{L_i^1\theta_i, \ldots, L_i^{r_i}\theta_i\}$, $i = 1, 2$, уніфікується, то для неї існує найзагальніший уніфікатор λ_i, тоді як $\theta_i\sigma_i$ – якийсь уніфікатор. Отже, існує така підстановка ρ_i, що $\theta_i\sigma_i = \lambda_i\rho_i$. Тому резольвента

$$D' = \left(D_1\lambda_1\rho_1 - \{L_1^1, \ldots, L_1^{r_1}\}\lambda_1\rho_1\right) \cup \left(D_2\lambda_2\rho_2 - \{L_2^2, \ldots, L_2^{r_2}\}\lambda_2\rho_2\right).$$

Нехай $L_i = L_i^1\lambda_i$, $i = 1, 2$. (Оскільки λ_i – найзагальніший уніфікатор для множини $\{L_i^1, \ldots, L_i^{r_i}\}$, то всі літерали $L_i^1\lambda_i, \ldots, L_i^{r_i}\lambda_i$ співпадають.) Тоді L_i – літерал у склейці $D_i\lambda_i$ для D_i. Оскільки змінні в D_1 та D_2 не перетинаються, об'єднаємо відповідні підстановки: $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$ та $\rho = \rho_1 \cup \rho_2$. Тоді $D' = (D_1\lambda\rho - L_1\rho) \cup (D_2\lambda\rho - L_2\rho)$, де ρ – якась підстановка, що уніфікує L_1 та L_2.

Нехай τ – найзагальніший уніфікатор L_1 та L_2. За означенням найзагальнішого уніфікатора знайдеться підстановка ν, для якої $\rho = \tau\nu$. Тоді

$$D' = ((D_1\lambda)\tau\nu - L_1\tau\nu) \cup ((D_2\lambda)\tau\nu - L_2\tau\nu) =$$
$$= \left(D_1(\lambda \circ \tau \circ \nu) - L_1^1(\lambda \circ \tau \circ \nu)\right) \cup \left(D_2(\lambda \circ \tau \circ \nu) - L_2^1(\lambda \circ \tau \circ \nu)\right).$$

Тепер побудуємо резольвенту D для диз'юнктів D_1 та D_2 так

$$D = \left((D_1\lambda)\tau - (L_1^1\lambda)\tau\right) \cup \left((D_2\lambda)\tau - (L_2^1\lambda)\tau\right) =$$
$$= \left(D_1(\lambda \circ \tau) - L_1^1(\lambda \circ \tau)\right) \cup \left(D_2(\lambda \circ \tau) - L_2^1(\lambda \circ \tau)\right).$$

Оскільки $(\lambda \circ \tau)$ є більш загальним уніфікатором ніж $(\lambda \circ \tau \circ \nu)$, то D' є прикладом D. Лему підняття доведено.

Проілюструємо застосування цієї леми (на *основних* прикладах) так:

$D_1 = \neg P(x, f(x,a)) \vee \neg Q(x,a) \vee R(x,b)$

$D_2 = \neg N(g(y), z) \vee P(h(y), z)$

$D_1' = \neg P(h(b), f(h(b),a)) \vee \neg Q(h(b),a) \vee R(h(b),b)$

$D_2' = \neg N(g(b), f(h(b),a)) \vee P(h(b), f(h(b),a))$

$D' = \neg N(g(b), f(h(b),a)) \vee \neg Q(h(b),a) \vee R(h(b),b)$

$D = \neg N(g(y), f(h(y),a)) \vee \neg Q(h(y),a) \vee R(h(y),b).$

Очевидно, що диз'юнкт D' – основний приклад диз'юнкту D. Загалом, щоб диз'юнкти D_1' і D_2' мали якісь резольвенти, вони мають бути отримані шляхом попереднього застосування до диз'юнктів D_1 і D_2 найзагальнішого уніфікатора для пари контрарних літералів у D_1 і D_2.

Із леми підняття можна легко отримати аналогічне, подане нижче твердження щодо довільної послідовності застосувань правила резолюції.

Для будь-якого диз'юнкту D′ у резолютивному замиканні множини диз'юнктів S′ існує диз'юнкт D у резолютивному замиканні множини диз'юнктів S, такий, що D′ – основний приклад диз'юнкту D і логічне виведення D має таку ж довжину, як і логічне виведення D′.

Тут S'– скінченна підмножина множини **всіх основних прикладів диз'юнктів** із S.

Переходимо до формулювання і доведення теореми про повноту методу резолюцій.

Теорема 4.3 (про повноту методу резолюцій для логіки першого порядку). У логіці першого порядку множина диз'юнктів S невиконувана тоді й тільки тоді, коли із S вивідний порожній диз'юнкт.

Доведення.

Необхідність.

1. Припустимо, що множина диз'юнктів S логіки першого порядку невиконувана. Тоді **за теоремою Ербрана** існує така скінченна підмножина S' множини основних прикладів диз'юнктів із S, яка також невиконувана.
2. Використаємо **основну теорему резолюції для пропозиційної логіки** (теорема 4.2). Із необхідності умов цієї теореми випливає, що коли множина диз'юнктів пропозиційної логіки невиконувана, то її резолютивне замикання містить порожній диз'юнкт □. Цю теорему застосуємо до множини S', яка, вочевидь, складається із диз'юнктів пропозиційної логіки.
3. Після цього використаємо лему підняття для обґрунтування, що для будь-якого доведення за методом пропозиційної резолюції, у якому використовується підмножина S' основних прикладів диз'юнктів, існує відповідне доведення за методом резолюції першого порядку з використанням тих диз'юнктів логіки першого порядку, із яких були отримані основні приклади, що утворюють множину S'. Із цього випливає, що коли в резолютивному замиканні множини диз'юнктів S' з'явиться порожній диз'юнкт □, то він також має з'явитися у резолютивному замиканні множини диз'юнктів S логіки першого порядку. Адже порожній диз'юнкт □ не може бути основним прикладом жодного іншого диз'юнкта, окрім самого себе.

Достатність.

Нехай існує виведення □ із S. Нехай $R_1, R_2, \ldots, R_k$ – резольвенти у цьому виведенні, а інтерпретація $\boldsymbol{I}$ задовольняє S. Але якщо інтерпретація задовольняє диз'юнкти D_1 і D_2, то вона задовольняє також їхню резольвенту (див. теорему 4.1). Отже, інтерпретація $\boldsymbol{I}$ задовольняє $R_1, R_2, \ldots, R_k$, але це неможливо, бо одна з цих резольвент є □. Тому множина S невиконувана, що і потрібно було довести.

Підведемо підсумок. Ми показали, що коли множина диз'юнктів логіки першого порядку невиконувана, то для неї існує скінченна процедура логічного виведення порожнього диз'юнкта □ за допомогою правила резолюції. ***Підняття*** *способу доведення від основних прикладів диз'юнктів до диз'юнктів логіки першого порядку забезпечує величезне збільшення ефективності доведення. Це пов'язано з тим фактом, що тепер в доведенні в логіці першого порядку конкретизація змінних має виконуватися лише коли це стає потрібним для самого процесу доведення, тоді як при безпосередньому застосуванні теореми Ербрана доводилося використовувати величезну кількість довільних конкретизацій (див. п. 3.9).*

© Ю.М. Щербина, 2022