Змістовий модуль 1. ПРОПОЗИЦІЙНА ЛОГІКА

Тема 2. Закони пропозиційної логіки. Нормальні форми пропозиційної логіки.

План лекції.

- Закони пропозиційної логіки
- Алгебра Буля
- Джордж Буль
- Ауґустус де Морган
- Кон’юнктивні і диз’юнктивні нормальні форми
- Досконала кон’юнктивна і досконала диз’юнктивна нормальні форми

1.9. Закони пропозиційної логіки

Розглянемо еквівалентні формули, які задають правила перетворень. Такі логічні еквівалентності називають *законами пропозиційної логіки*.

Табл. 1.10

	Назва закону	Формулювання закону
(1)	Закони комутативності	*а*) $A \lor B \equiv B \lor A$ *б*) $A \land B \equiv B \land A$
(2)	Закони асоціативності	*а*) $(A \lor B) \lor C \equiv A \lor (B \lor C)$ *б*) $(A \land B) \land C \equiv A \land (B \land C)$
(3)	Закони дистрибутивності	*а*) $A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)$ *б*) $A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$
(4)	Закон подвійного заперечення	$\neg(\neg A) \equiv A$
(5)	Закони ідемпотентності	*а*) $A \lor A \equiv A$ *б*) $A \land A \equiv A$
(6)	Закони де Моргана	*а*) $\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$ *б*) $\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$
(7)	Закони поглинання	*а*) $(A \lor B) \land A \equiv A$ *б*) $(A \land B) \lor A \equiv A$
(8)	Закони тотожності	*а*) $A \land \mathbf{T} \equiv A$ *б*) $A \lor \mathbf{F} \equiv A$
(9)	Закони домінування	*а*) $A \lor \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ *б*) $A \land \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
(10)	Закони заперечення	*а*) $A \lor \neg A \equiv \mathbf{T}$ *б*) $A \land \neg A \equiv \mathbf{F}$

Перетворення виконують заміною якоїсь формули в складі іншої формули на еквівалентну їй формулу. Цю процедуру повторюють доти, доки не буде отримано формулу в потрібній формі. Основні закони пропозиційної логіки наведено в таблиці 1.10. У цих законах через **T** позначено складене висловлення, *яке завжди істинне* (має значення T в усіх інтерпретаціях), а через **F** позначено складене висловлення, яке завжди фальшиве (має значення F в усіх інтерпретаціях). Ці позначення будуть використовуватися і далі.

Закони асоціативності дозволяють записувати багатомісні диз’юнкції та кон’юнкції без дужок. Усі наведені в таблиці 1.10 закони можна довести, побудувавши таблиці істинності.

Два наступні закони дають змогу *усувати* логічні операції імплікації та еквіваленції з формул, тобто перетворювати їх у формули, які таких операцій не містять:

(11) $A \to B \equiv \neg A \vee B$,

(12) $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$.

Ці закони можна також використовувати для *введення* імплікації та еквіваленції. Логічні еквівалентності (11), (12) також можна довести за допомогою таблиць істинності.

Застосовуючи закони пропозиційної логіки, можна доводити логічні еквівалентності формул уже без використання таблиць істинності, на основі тотожних перетворень. Покажемо на прикладах, як це робити.

Приклад 1.19. Застосувавши закони пропозиційної логіки, доведемо логічну еквівалентність формул $p \to (q \wedge r)$ і $(p \to q) \wedge (p \to r)$. Запишемо послідовність перетворень і назви використаних законів:

$p \to (q \wedge r) \equiv \neg p \vee (q \wedge r)$ (за законом усунення імплікації 11)

$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$ (за законом дистрибутивності 3*a*)

$\equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$ (за законом уведення імплікації).

Приклад 1.20. За допомогою законів пропозиційної логіки доведемо логічну еквівалентність формул $p \to q$ та $\neg q \to \neg p$. Цю логічну еквівалентність називають *законом контрапозиції*.

$p \to q \equiv \neg p \vee q$ (за законом усунення імплікації 11)

$\equiv q \vee \neg p$ (за законом комутативності 1*a*)

$\equiv \neg(\neg q) \vee \neg p$ (за законом подвійного заперечення 6)

$\equiv \neg q \to \neg p$ (за законом уведення імплікації 11).

1.10. Алгебра Буля

Уявимо тепер теорію, формули якої побудовані із атомарних формул (тобто змінних) за допомогою трьох операцій, які є аналогами $\wedge$, $\vee$, $\neg$ і аналогів двох формул **T** і **F** зі значеннями істинності T і F, відповідно. Якщо формули з таблиці 1.10 залишаються правильними при заміні $\wedge$, $\vee$, $\neg$, **T**, **F** на їхні аналоги, то ми маємо нову абстрактну алгебру, яку називають *алгеброю Буля*.

Отже, алгебра висловлень – це приклад алгебри Буля.

Алгебра висловлень – це булева алгебра логіки. Існують і інші булеві алгебри, наприклад, булева алгебра булевих функцій. Змінні в ній – це булеві змінні, операції $\wedge$, $\vee$, залишаються тими самими, $\neg x$, позначають $\bar{x}$, кожне **F** замінюють на 0, а кожне **T** – на 1. Інший приклад – теорія множин Кантора. Змінні в ній – це підмножини множини *X*. Роль операцій $\wedge$, $\vee$, $\neg$ відіграють перетин $\cap$, об'єднання $\cup$ та доповнення $\setminus$ (до *X*), а замість **T** і **F** потрібно взяти саму множину *X* і порожню множину $\varnothing$.

Зазначимо, що булеві алгебри можуть бути визначені різними способами. Найзагальніше визначення через властивості операцій дано, зокрема, в [*Rosen K.* Discrete Mathematics and Its Applications / Кеппеth H. Rosen. – Seventh Edition. – New York: McGraw-Hill, Inc, 2012.], стор. 817. Там же обговорюється визначення булевої алгебри з використанням поняття решітки.

1.11. Джордж Буль

Джордж Буль (**George Boole**), (2 листопада 1815, Лінкольн, Англія — 8 грудня 1864, Корк, Ірландія). Джордж Буль закінчив лише початкову школу. Він спробував вчитися в комерційному училищі, але незабаром кинув через повну відсутність інтересу до комерції і подальші знання набував самоосвітою. Він самостійно простудіював математичні роботи Ньютона і Лагранжа. На життя Буль заробляв як учитель.

Публікація першої статті («Теорія математичних перетворень», 1839) призвела до дружби між Булем і Д. Ф. Грегорі (редактором «Кембриджського математичного журналу», де стаття була опублікована), що тривала до самої смерті останнього 1844 року. У цей журнал і «Кембриджський і дублінський математичний журнал», що наслідував його, Буль виклав двадцять дві статті. Усього Булем було опубліковано близько п'ятдесяти статей в різних виданнях і декілька монографій.

Другою людиною, підтримка якої виявилася дорогоцінною для Буля, був кембриджський математик, професор університету Авґустус де Морган. Сам де Морган цікавився питаннями логічного обґрунтовування математики, які незабаром стали наріжним каменем усіх роздумів Буля; перші публікації Джорджа Буля зацікавили де Моргана, а коротка брошура «Математичний аналіз логіки, що супроводжується нарисом числення дедуктивних міркувань» (1847) привела його у захват.

У тому ж 1847 р., кількома місяцями пізніше за «Математичний аналіз логіки», вийшов у світ твір самого де Моргана на ту ж тему: «Формальна логіка або числення виводів, необхідних і можливих», де, зокрема, містилися ті логічні закони, які нині називають «законами де Моргана»; ця обставина робила його високу оцінку роботи Буля особливо вагомою. Зусиллями де Моргана, Грегорі й інших друзів і прихильників, Буль став у 1849 р. професором математики знову відкритого католицького коледжу у м. Корк (Ірландія); тут він провів останні 15 років свого життя, нарешті отримавши можливість спокійно, без думок про хліб насущний, займатися наукою.

Джордж Буль ще за життя був визнаний, отримавши багато нагород. У 1844 році йому вручили Першу золоту медаль Королівського співтовариства. У 1857 році його прийняли в члени лондонського Королівського співтовариства. У 1857 році він працював в Оксфордському і Дублінському університетах. У його честь названі кратер на Місяці і *булева* алгебра.

У Корку він одружується з Мері Еверест, родичкою колишнього генерал-губернатора Індії, іменем якого названа найвища вершина світу «Еверест». Мері Буль-Еверест багато допомагала чоловікові по роботі, а після його смерті залишила цікаві спогади про свого чоловіка і його наукову творчість. Вона стала матір'ю п'яти дочок Буля, Чоловіком першої доньки Буля був математик, письменник і винахідник. Їхні діти стали вченими в області ентомології та фізики. Син другої дочки Маргарет, Джеффрі Тейлор, став відомим математиком і механіком. Третя дочка Алісія займалася математикою, мала вчений ступінь. Четверта дочка Люсі стала першою жінкою професором в Англії і керувала кафедрою хімії. П'ята дочка Етель Ліліан була дружиною польського вченого-емігранта Войнича. Вона є автором всесвітньо відомого роману «Овід». У 1911 році в Лондоні вийшла друком невеличка, але досить прикметна книжка «Six Lyrics from Ruthenian of Shevchenko» (Шість віршів з русинської мови Шевченка). Так Войнич назавжди увійшла в історію української культури, ставши першим англомовним перекладачем і популяризатором творчості Шевченка.

1.12. Авґустус де Морган

Авґустус де Морган (Augustus de Morgan) (27 червня 1806 – 18 березня 1871). був британським математиком та логіком. Він сформулював закони Де Моргана і ввів термін математичної індукції.

Де Морган був дуже успішним викладачем математики. У нього був свій план проведення годинної лекцій: в кінці кожної лекції його учні мали отримати завдання і принести йому результати, які він продивлявся і повертав переглянутими до наступної лекції. На думку Де Моргана, ретельне осмислення і розумове засвоєння головних принципів набагато важливіші за значимістю будь-якого аналітичного на половину зрозумілого принципу у застосуванні в конкретних випадках.

Де Морган був блискуче й дотепно писав, незалежно від того, як полеміст або як кореспондент. Він мав трьох синів і чотирьох дочок, одна з дочок – казкарка Марія де Морган.

1.13. Кон'юнктивні і диз'юнктивні нормальні форми

У цьому підрозділі розглянемо спеціальні форми для формул пропозиційної логіки – кон'юнктивні та диз'юнктивні нормальні форми.

Літералом називають атом або його заперечення. Приклади літералів: p, $\neg q$, r. Літерал називають *позитивним*, якщо він не має знака заперечення, і *негативним*, якщо має. Пару літералів $\{p, \neg p\}$ називають *контрарною парою*.

Диз'юнктом (або *елементарною диз'юнкцією*) називають диз'юнкцію літералів. Зокрема, диз'юнкт може складатись з одного літералу. (Завдяки законам асоціативності багатомісні диз'юнкції записуємо без групування дужками.)

Формула A є у *кон'юнктивній нормальній формі* (*КНФ*), якщо вона має вид $A = D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_k$ ($k \geq 1$), де кожна з формул $D_1, D_2, \ldots, D_k$ – диз'юнкт.

Іншими словами, КНФ – це кон'юнкція диз'юнктів (може бути тільки один диз'юнкт).

Приклад 1.21. Нехай p, q й r – атоми. Тоді $A = (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q)$ – формула в КНФ. У ній $D_1 = (p \vee \neg q \vee \neg r)$ і $D_2 = (\neg p \vee q)$, тобто диз'юнкт D_1 – це диз'юнкція літералів p, $\neg q$ та $\neg r$, а D_2 – диз'юнкція літералів $\neg p$ та q.

Теорема 1.2. Для всякої формули A існує еквівалентна до неї формула A_1, яка є у кон'юнктивній нормальній формі.

Кон'юнктом (або *елементарною кон'юнкцією*) називають кон'юнкцію літералів. Зокрема, елементарна кон'юнкція може складатись з одного літералу. (Завдяки законам асоціативності багатомісні кон'юнкції записуємо без групування дужками.)

Формула A є у *диз'юнктивній нормальній формі* (*ДНФ*), якщо вона має вид $A = C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_k$ ($k \geq 1$), де кожна з формул $C_1, C_2, \ldots, C_k$ – кон'юнкт.

Іншими словами, ДНФ – це диз'юнкція кон'юнктів (може бути тільки один кон'юнкт).

Приклад 1.22. Нехай p, q й r – атоми. Тоді $A = (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ – формула в ДНФ. У ній $C_1 = (\neg p \wedge q)$ і $C_2 = (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$; тут C_1 – кон'юнкція літералів $\neg p$ та q, а C_2 – кон'юнкція літералів p, $\neg q$ та $\neg r$.

Теорема 1.3. Для всякої формули A існує еквівалентна до неї формула A_1, яка є у диз'юнктивній нормальній формі.

Доведення теорем 1.2 та 1.3 конструктивне, воно полягає в описі алгоритму побудови відповідної формули; при цьому застосовуються закони пропозиційної логіки (таблиця 1.10).

Домовимося не розрізняти форми, які отримуються одна з одної застосуванням законів комутативності.

Алгоритм приведення формули до КНФ і ДНФ.

Крок 1. Застосувати закони (11) та (12) для усунення логічних операцій $\rightarrow$ та $\leftrightarrow$.

Крок 2. Застосувати закони де Моргана (6) та закон подвійного заперечення (4) для перенесення знака заперечення безпосередньо до атомів.

Крок 3. **Для КНФ.** Якщо формула містить підформулу виду $p \vee (q \wedge r)$, то за дистрибутивним законом (3а) замінити її формулою $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$, тобто всі диз'юнкції мають виконуватись раніше кон'юнкцій.

Для ДНФ. Якщо формула містить підформулу виду $p \wedge (q \vee r)$ то за дистрибутивним законом (3б) замінити її формулою $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, тобто всі кон'юнкції мають виконуватись раніше диз'юнкцій.

Для спрощення отриманих нормальних форм можна також використати інші закони.

Приклад 1.23. Знайдемо КНФ для формули $\neg(p \wedge \neg q) \wedge (p \rightarrow (q \wedge r))$. Послідовно маємо

$\neg(p \wedge \neg q) \wedge (p \rightarrow (q \wedge r)) \equiv \neg(p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \vee (q \wedge r))$ за законом (11)

$\equiv (\neg p \vee \neg(\neg q)) \wedge (\neg p \vee (q \wedge r))$ за законом (6б)

$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee (q \wedge r))$ за законом (4)

$\equiv (\neg p\vee q)\wedge((\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r))$ за законом (3а)
$\equiv (\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)$ за законом (2б)
$\equiv (\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)$. за законом (5б)

Приклад 1.24. Знайдемо ДНФ для формули $\neg(p\leftrightarrow q)\wedge p$. Послідовно обчислюємо
$\neg(p\leftrightarrow q)\wedge p \equiv \neg((p\to q)\wedge(q\to p))\wedge p$ за законом (12)
$\equiv \neg((\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p))\wedge p$ за законом (11)
$\equiv (\neg(\neg p\vee q)\vee\neg(\neg q\vee p))\wedge p$ за законом (6б)
$\equiv (\neg(\neg p)\wedge\neg q)\vee(\neg(\neg q)\wedge\neg p))\wedge p$ за законом (6а)
$\equiv ((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))\wedge p$ за законами (1б) і (4)
$\equiv (p\wedge\neg q\wedge p)\vee(\neg p\wedge q\wedge p)$. за законами (3б) і (2б)

Це вже є ДНФ. Але її можна спростити, використавши закони (5б), (10б), (9б) і закон (8б) з таблиці (10):

$$(p\wedge\neg q\wedge p)\vee(\neg p\wedge q\wedge p) \equiv (p\wedge\neg q).$$

1.14. Досконала кон'юнктивна і досконала диз'юнктивна нормальні форми

Зазначимо, що може бути декілька еквівалентних КНФ чи ДНФ (тобто єдиності немає, див. приклад 1.24). Іноді ця обставина може виявитися незручною. Щоб її виключити, вводять більш вузьке поняття – досконалу кон'юнктивну форму (ДКНФ) і досконалу диз'юнктивну нормальну форму (ДДНФ).

Формула A є у *досконалій кон'юнктивній нормальній формі* (*ДКНФ*) відносно атомарних формул $p_1, p_2, \dots, p_n$, якщо виконані такі умови:

1) $A = A(p_1, p_2, \dots, p_n)$, тобто в запису формули наявні тільки $p_1, p_2, \dots, p_n$.
2) A має кон'юнктивну нормальну форму, тобто $A = D_1\wedge D_2\wedge\dots\wedge D_k$, де $D_1, D_2, \dots, D_k$ – диз'юнкти;
3) кожний диз'юнкт містить один і тільки один із літералів p_i або $\neg p_i$ для будь-якого $i = 1, 2, \dots, k$;
4) A не містить однакових диз'юнктів.

Приклад 1.25. Формули p, $\neg p\vee q$, $(\neg p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)$ є у ДКНФ відносно атомарних формул, які містяться в них, а формули $\neg(p\vee q)$, $(p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)$, $(p\vee q\vee p)\wedge(\neg p\vee\neg q)$, $(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(p\vee q)$ не є у ДКНФ (відносно атомарних формул, які містяться в них). Для першої формули не виконана друга умова, для другої і третьої – третя умова, для четвертої формули не виконана остання умова з означення ДКНФ.

Теорема 1.4. Для будь-якої формули A, яка не є загальнозначущою, існує єдина (з точністю до перестановки диз'юнктів) еквівалентна до неї формула A_1, яка є у досконалій кон'юнктивній нормальній формі.

Доведення.

Існування. Розглянемо табличне подання формули A. У таблиці виберемо рядки з інтерпретаціями, у яких формула має значення F. (Хоча б один такий рядок має бути, бо формула A не є загальнозначущою.) Для кожної з інтерпретацій у вибраних рядках побудуємо диз'юнкт, у який входять усі атоми, за таким правилом: атом береться без заперечення, якщо він має значення F у розглядуваній інтерпретації, та із запереченням, якщо має значення T. Легко побачити, що тільки в інтерпретації, за якою побудований диз'юнкт, він має значення F, а в усіх інших інтерпретаціях – значення T.

Наприклад, для інтерпретації TFF матимемо диз'юнкт $(\neg p\vee q\vee r)$. У цій інтерпретації диз'юнкт $(\neg p\vee q\vee r)$ набуває значення F, а у будь якій іншій інтерпретації – значення T.

Візьмемо кон'юнкцію побудованих диз'юнктів. Отримана формула A_1 є у ДКНФ за побудовою. Розглянемо будь-яку інтерпретацію. Якщо у формулі A_1 є диз'юнкт, який побудований для цієї інтерпретації, то він має значення F, а, отже, і формула A_1 має значення F. (Якщо у багатомісній кон'юнкції один із членів має значення F, то і кон'юнкція має значення F.) Якщо у формулі A_1 немає диз'юнкту, який відповідає розглядуваній інтерпретації, то всі диз'юнкти в A_1 мають значення T, а, отже, і формула A_1 має значення T. Отже, формула A_1 має ту саму таблицю істинності, що й формула A. Це означає, що A_1 еквівалентна A. Отже, A_1 – шукана формула.

Єдиність. Із доведення існування випливає, що кожній інтерпретації, у якій формула A набуває значення F, відповідає певний диз'юнкт. Тому існує взаємно однозначна відповідність між табличним поданням формули A та її ДКНФ. Отже, ДКНФ єдина.

Приклад 1.26. Приведемо формулу $A = p \wedge (q \to r)$ до ДКНФ. Складемо таблицю істинності для цієї формули (таблиця 1.11).

Табл. 1.11

p	q	r	$q \to r$	$p \wedge (q \to r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	F
F	T	F	F	F
F	F	T	T	F
F	F	F	T	F

Виберемо рядки з інтерпретаціями, у яких формула має значення F – це другий, п'ятий, шостий, сьомий і восьмий рядки. Другому рядку таблиці відповідатиме диз'юнкт $(\neg p \vee \neg q \vee r)$, п'ятому – $(p \vee \neg q \vee \neg r)$, шостому – $(p \vee \neg q \vee r)$, сьомому – $(p \vee q \vee \neg r)$, восьмому – $(p \vee q \vee r)$. Тепер запишемо кон'юнкцію отриманих диз'юнктів. Формула

$$A_1 = (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r)$$

є досконалою кон'юнктивною нормальною формою для A.

Аналогічно до попереднього можна ввести поняття досконалої диз'юнктивної нормальної форми.

Формула A є у *досконалій диз'юнктивній нормальній формі* (*ДДНФ*) відносно атомарних формул $p_1, p_2, \ldots, p_n$, якщо виконані такі умови:

1) $A = A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, тобто в запису формули наявні тільки $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
2) A має диз'юнктивну нормальну форму, тобто $A = C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_k$, де $C_1, C_2, \ldots, C_k$ – кон'юнкти;
3) кожний кон'юнкт містить один і тільки один із літералів p_i або $\neg p_i$ для будь-якого $i = 1, 2, \ldots, k$;
4) A не містить однакових кон'юнктів.

Теорема 1.5. Для будь-якої виконуваної формули A існує єдина (з точністю до порядку кон'юнктів) еквівалентна до неї формула A_1, яка є у досконалій диз'юнктивній нормальній формі.

Доведення.

Існування. Розглянемо табличне подання формули A. У таблиці виберемо рядки з інтерпретаціями, у яких формула має значення T. (Хоча б один такий рядок має бути, бо формула A виконувана.) Для кожної з інтерпретацій у вибраних рядках побудуємо кон'юнкт, у який входять усі атоми, за таким правилом: атом береться без заперечення, якщо він має значення T в розглядуваній інтерпретації, та із запереченням, якщо має значення F. Легко побачити, що тільки в інтерпретації, за якою побудований кон'юнкт, він має значення T, а в усіх інших інтерпретаціях – значення F.

Наприклад, для інтерпретації TFF матимемо кон'юнкт $(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$. У цій інтерпретації кон'юнкт $(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$ набуває значення T, а у будь якій іншій інтерпретації – значення F.

Візьмемо диз'юнкцію побудованих кон'юнктів. Отримана формула A_1 є у ДДНФ за побудовою. Розглянемо будь-яку інтерпретацію. Якщо у формулі A_1 є кон'юнкт, який побудований для цієї інтерпретації, то він має значення T, а, отже, і формула A_1 має значення T. (Якщо у багатомісній диз'юнкції один із членів має значення T, то і диз'юнкція має значення T.) Якщо у формулі A_1 немає кон'юнкту, який відповідає розглядуваній інтерпретації, то всі кон'юнкти в A_1 мають значення F, а, отже, і формула A_1 має значення F. Звідси випливає, що формула A_1 має ту саму таблицю істинності, що й формула A. Це означає, що A_1 еквівалентна A. Отже, A_1 – шукана формула.

Єдиність. Із доведення існування випливає, що кожній інтерпретації, у якій формула A набуває значення T, відповідає певний кон'юнкт. Отже, існує взаємно однозначна відповідність між табличним поданням формули A та її ДДНФ. Тому ДДНФ єдина.

Приклад 1.27. Приведемо формулу $A = p \wedge (q\to r)$ до ДДНФ. У таблиці 1.11 виберемо рядки з інтерпретаціями, у яких формула має значення T – це перший, третій і четвертий рядки. Першому рядку відповідає кон'юнкт $\left(p\wedge q\wedge r\right)$, третьому – $\left(p\wedge\neg q\wedge r\right)$, четвертому – $\left(p\wedge\neg q\wedge\neg r\right)$. Формула

$$A_1 = \left(p\wedge q\wedge r\right)\vee\left(p\wedge\neg q\wedge r\right)\vee\left(p\wedge\neg q\wedge\neg r\right)$$

має ДДНФ відносно p, q, r. Отже, A_1 – шукана формула.

Будь яку формулу, яка не є загальнозначущою, можна привести до досконалої кон'юнктивної нормальної форми на основі тотожних перетворень, без використання таблиці. Аналогічно, на основі тотожних перетворень можна привести до досконалої диз'юнктивної нормальної форми будь-яку виконувану формулу. Нижче наведені відповідні алгоритми.

Алгоритм приведення формули до ДКНФ

Крок 1 – Крок 3 – ті самі, що й в алгоритмі приведення до КНФ.

Крок 4. Якщо диз'юнкт D не містить ні атомарної формули p_i, ні її заперечення $\neg p_i$ для деякого $i = 1, 2, \ldots, n$, то замінити D двома диз'юнктами $(D \vee p_i)\wedge(D \vee \neg p_i)$.

Зауваження. Це – *розщеплення диз'юнкту*, при перетвореннях використано закони (9а) і (3а) з таблиці 10: $D \equiv D \vee \mathbf{F} \equiv D \vee (p\wedge\neg p) \equiv (D \vee p_i) \wedge (D \vee \neg p_i)$.

Крок 5. Якщо диз'юнкт D містить два входження одного літералу, то одне з них викреслити. Якщо ж диз'юнкт D містить p_i і $\neg p_i$ для деякого $i = 1, 2, \ldots, n$, то викреслити весь диз'юнкт.

Крок 6. Якщо формула містить однакові диз'юнкти, то залишити тільки один із них.

Приклад 1.28. Знайдемо ДКНФ для формули $\neg(p\wedge\neg q)\wedge(p\to(q\wedge r))$. У прикладі 1.18 ми отримали КНФ для цієї формули, а саме кроки 1 – 3 призвели до такого результату: $(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)$. Ця КНФ не є досконалою, бо не виконана третя умова в означенні ДКНФ. Виконаємо кроки 4 і 6, тоді отримаємо:

$$\begin{aligned}&(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r) \equiv (\neg p\vee q\vee(r\wedge\neg r))\wedge(\neg p\vee(q\wedge\neg q)\vee r) \equiv\\&\equiv (\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r) \equiv\\&\equiv (\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r).\end{aligned}$$

Остання формула є у ДКНФ.

Природно виникає питання, що відбудеться під час тотожних перетворень, якщо формула A виявиться загальнозначущою, тобто буде порушена умова теореми 1.4? Неважко довести, що коли формула A – загальнозначуща, тобто її значення при будь-якій інтерпретації дорівнює T, то після приведення A до КНФ кожний диз'юнкт міститиме хоча б одну контрарну пару літералів $\{p_i, \neg p_i\}$. Але в такому разі на кроці 5 усі диз'юнкти будуть викреслені.

Алгоритм приведення до ДДНФ

Крок 1 – Крок 3 – ті самі, що й в алгоритмі приведення до ДНФ.

Крок 4. Якщо кон'юнкт C не містить ні атомарної формули p_i, ні її заперечення $\neg p_i$ для деякого $i = 1, 2, \ldots, n$, то замінити C двома кон'юнктами $(C \wedge p_i) \vee (C \wedge \neg p_i)$.

Зауваження. Це – *розщеплення кон'юнкту*, при перетвореннях використано закони (9б) і (3б):

$$C \equiv C \wedge \mathbf{T} \equiv C \wedge (p_i \vee \neg p_i) \equiv (C \wedge p_i) \vee (C \wedge \neg p_i).$$

Крок 5. Якщо кон'юнкт C містить два входження одного літералу, то одне з них викреслити. Якщо ж кон'юнкт C містить p_i і $\neg p_i$ для деякого $i = 1, 2, \ldots, n$, то викреслити весь кон'юнкт.

Крок 6. Якщо формула містить однакові кон'юнкти, то залишити тільки один з них.

Приклад 1.29. Знайдемо ДДНФ для формули $(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg r)$. Ця формула є у ДНФ, тому виконання алгоритму приведення до ДДНФ починається з кроку 4.

$(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg r) \equiv (p\wedge q\wedge(r\vee\neg r))\vee(p\wedge(q\vee\neg q)\wedge\neg r) \equiv$

$\equiv (p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r) \equiv$

$\equiv (p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$.

Аналогічно до попереднього виникає питання, що відбудеться під час тотожних перетворень, якщо формула A виявиться суперечністю (невиконуваною формулою), тобто буде порушена умова теореми 1.5? Неважко довести, що коли формула A – суперечність, тобто її значення при будь-якій інтерпретації дорівнює F, то після приведення A до ДНФ кожний кон'юнкт міститиме хоча б одну контрарну пару літералів $\{p_i, \neg p_i\}$. Але в такому разі на кроці 5 усі кон'юнкти будуть викреслені.