Змістовий модуль 1. ПРОПОЗИЦІЙНА ЛОГІКА

Тема 3. Логічне виведення у пропозиційній логіці

План лекції.

- Логічне виведення у пропозиційній логіці.
- Правила виведення у пропозиційній логіці
- Застосування правил виведення для побудови міркувань
- Резолюція
- Питання для самоконтролю по темах 1 - 3

1.15. Логічне виведення у пропозиційній логіці

Почнемо з головного означення.

Формулу B називають *логічним наслідком* (*логічним висновком*) формул $A_1, A_2, \ldots, A_k$, якщо при кожній інтерпретації, у якій виконуються всі формули $A_1, A_2, \ldots, A_k$, формула B також виконується.

Якщо формула B – *логічний наслідок* формул $A_1, A_2, \ldots, A_k$, то говорять також, що B *логічно випливає*, *або виводиться* з $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Формули $A_1, A_2, \ldots, A_k$ називають *гіпотезами* (*припущеннями*, *фактами*, *засновками*, *аксіомами*), а формулу B – *висновком*.

Для логічного наслідку використовують запис $A_1, A_2, \ldots, A_k \models B$.

Теорема 1.6. Нехай дано формули $A_1, A_2, \ldots, A_k$ і формулу B. Тоді B є логічним наслідком $A_1, A_2, \ldots, A_k$ тоді й тільки тоді, коли формула $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to B$ загальнозначуща (тавтологія), тобто $A_1, A_2, \ldots, A_k \models B$ тоді й тільки тоді, коли $\models (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to B$.

Доведення. Необхідність. Нехай B – логічний наслідок формул $A_1, A_2, \ldots, A_k$ та $\boldsymbol{I}$ – довільна їхня інтерпретація. Якщо формули $A_1, A_2, \ldots, A_k$ істинні в інтерпретації $\boldsymbol{I}$, то за означенням логічного наслідку формула B також істинна в $\boldsymbol{I}$. Звідси випливає, що формула $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to B$ істинна в інтерпретації $\boldsymbol{I}$. З іншого боку, якщо не всі формули з $A_1, A_2, \ldots, A_k$ істинні в інтерпретації $\boldsymbol{I}$, тобто принаймні одна з них фальшива в $\boldsymbol{I}$, то й формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ фальшива в інтерпретації $\boldsymbol{I}$, але тоді формула $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to B$ – істинна в $\boldsymbol{I}$. Отже, формула $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to B$ істинна у довільній інтерпретації. Це й означає, що вона загальнозначуща: $\models (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to B$.

Достатність. Припустимо, що формула $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to B$ – загальнозначуща. Для всякої інтерпретації $\boldsymbol{I}$, якщо формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ істинна в $\boldsymbol{I}$, то й формула B має бути істинною в $\boldsymbol{I}$ (властивість імплікації). Отже, B – логічний наслідок формул $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Теорему доведено.

Теорема 1.7 (принцип прямої дедукції). Нехай дано формули $A_1, A_2, \ldots, A_k$ і формулу B. Тоді B є логічним наслідком $A_1, A_2, \ldots, A_k$ тоді й тільки тоді, коли формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B$ – суперечність.

Доведення. За теоремою 1.6 формула B – логічний наслідок формул $A_1, A_2, \ldots, A_k$ тоді й тільки тоді, коли формула $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to B$ загальнозначуща. Отже, B – логічний наслідок формул $A_1, A_2, \ldots, A_k$ тоді й лише тоді, коли формула $\neg((A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to B)$ – суперечність. Далі,

$$\neg((A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to B) \equiv \neg(\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B) \equiv$$
$$\equiv \neg\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \wedge \neg B \equiv A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B.$$

Теореми 1.6 і 1.7 дуже важливі. З них випливає: доведення того, що якась формула є логічним наслідком множини формул, еквівалентне доведенню того, що деяка пов'язана з ними формула є загальнозначущою чи суперечністю.

Якщо B є логічним наслідком формул $A_1, A_2, \dots, A_k$, то формулу $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k) \to B$ називають *теоремою*, а B називають *висновком теореми*. У математиці так само, як і в інших галузях, багато проблем можна сформулювати як проблеми доведення теорем.

Розглянемо простий приклад, який показує, як можна застосувати теореми 1.6 і 1.7.

Приклад 1.30. Розглянемо формули $A_1 = (p \to q)$, $A_2 = \neg q$, $B = \neg p$. Покажемо, що формула B – логічний наслідок формул A_1 і A_2.

Спосіб 1. Скористаємося таблицями істинності, щоб показати, що формула B виконується в кожній інтерпретації, у якій виконується формула $A_1 \wedge A_2$ тобто $(p \to q) \wedge \neg q$. З таблиці 1.12 видно, що є лише одна інтерпретація, у якій $(p \to q) \wedge \neg q$ виконується, а саме $p = \mathrm{F}$, $q = \mathrm{F}$; у цій інтерпретації формула $\neg p$ також виконується. Отже, за означенням формула $\neg p$ є логічним наслідком формул $p \to q$ та $\neg q$.

Табл. 1.12

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$\neg p$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

Спосіб 2. Скористаємося теоремою 1.6. Покажемо, що формула $(A_1 \wedge A_2) \to B$ загальнозначуща. Для цього побудуємо таблицю 1.13 для формули $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$.

Табл. 1.13

p	q	$((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

Оскільки формула $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$ загальнозначуща, то формула $\neg p$ є логічним наслідком формул $p \to q$ та $\neg q$.

Спосіб 3. Скористаємось теоремою 1.7 та покажемо, що формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \neg B$, тобто

$$(p \to q) \wedge \neg q \wedge \neg(\neg p) \equiv (p \to q) \wedge \neg q \wedge p,$$

є суперечністю. Побудуємо таблицю істинності для цієї формули. З таблиці 1.14 видно, що формула $(p \to q) \wedge \neg q \wedge p$ фальшива в кожній інтерпретації.

Табл. 1.14

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$(p \to q) \wedge \neg q \wedge p$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	F

За теоремою 1.7 можна дійти висновку, що формула $\neg p$ логічно випливає з формул $p \to q$ та $\neg q$.

Поняття логічного наслідку тісно пов'язане з поняттям виконуваності множини формул.

Множину формул $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ називають *виконуваною* (або *несуперечною*), якщо ***існує*** інтерпретація ***I***, яка задовольняє ***всі*** формули, тобто всі формули $A_1, A_2, \dots, A_m$ виконуються в інтерпретації ***I***.

Інакше множину формул $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ називають *невиконуваною* (або *суперечною*). Отже, множина формул $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ невиконувана, якщо для ***будь-якої*** інтерпретації в цій множині ***знайдеться*** формула, яка в цій інтерпретації набуває значення F.

Перевірку виконуваності множини формул $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ можна провести побудовою спільної таблиці істинності для цих формул. Якщо знайдеться хоча б один рядок, у якому в стовпцях формул $A_1, A_2, \dots, A_m$ є значення T, то ця множина виконувана. Якщо такого рядка немає, то ця множина формул невиконувана (суперечна). Так, множина формул $\{p \to q, \neg p, \neg q\}$ виконувана, бо в останньому рядку спільної таблиці цих функцій у стовпцях функцій стоять значення T (таблиця 1.15).

Табл. 1.15

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg q$
T	T	T	F	F
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	T	T

Наступна теорема є переформулюванням теореми 1.7 у термінах множини формул.

Теорема 1.8. Нехай дано формули $A_1, A_2, \dots, A_k$ і формулу B. Тоді B є логічним наслідком $A_1, A_2, \dots, A_k$ тоді й тільки тоді, коли множина формул $\{A_1, A_2, \dots, A_k, \neg B\}$ невиконувана (суперечна).

1.16. Правила виведення у пропозиційній логіці

Доведення в математиці – це обґрунтована аргументація, яка встановлює правильність математичних тверджень. Під *аргументацією* ми розуміємо послідовність тверджень, які закінчуються висновком. Під *обґрунтованістю* ми розуміємо те, що істинність кінцевого твердження в аргументації має випливати з істинності попередніх тверджень. Отже, аргументація правильна тоді й тільки тоді, коли неможливо, щоб усі гіпотези (припущення) були істинними, а висновок – фальшивим. Щоб вивести нове твердження із уже наявних тверджень, ми використовуємо *правила виведення* (англ. – *rules of inference*), які є шаблонами для побудови правильних міркувань. Правила виведення – головні інструменти для встановлення істинності тверджень.

У пропозиційній логіці ми завжди можемо використати таблицю істинності, щоб показати правильність твердження. Ми вже робили це у попередніх прикладах, де показували, що в кожній інтерпретації, у якій припущення істинні, висновок також істинний. Однак це утомливий підхід. Наприклад, коли формули містять 10 атомів, таблиця істинності має $2^{10} = 1024$ рядки. На щастя, нам непотрібно вдаватися до таблиць істинності. Замість цього ми можемо спочатку встановити обґрунтованість деяких відносно простих правил аргументації, які називають *правилами виведення*. Ці правила використовують як блоки для конструювання більш складних міркувань.

Розглянемо правила виведення та їх застосування у пропозиційній логіці. Ці правила обґрунтовують кроки доведення теорем, яке полягає у перевірці того, що висновок являє собою логічний наслідок множини гіпотез.

Зазначимо, що з кожним правилом виведення пов’язана відповідна йому загальнозначуща формула (тавтологія) – це випливає з теореми 1.6.

Загальнозначуща формула (тавтологія) $(A\wedge(A\to B))\to B$ є основою правила виведення **modus ponens,** або **правила відокремлення**. Ця загальнозначуща формула приводить до такого правила виведення:

$$\frac{A,\, A \to B}{B}.$$

При використанні цієї нотації гіпотези записують над горизонтальною рискою, а висновок – під нею. Зокрема, modus ponens свідчить нам, що коли умовне твердження та його гіпотеза істинні, то й висновок має бути істинним. Наступний приклад ілюструє використання modus ponens.

Приклад 1.31. Припустимо, що імплікація «якщо сніжить, то ми катаємося на лижах» та її гіпотеза «сніжить» істинні. Тоді за правилом modus ponens висновок імплікації «ми катаємося на лижах» також істинний.

Зазначимо, що правильна аргументація може призвести до неправильного висновку, якщо одна чи більше гіпотез фальшиві. Наступний приклад ілюструє цю ситуацію.

Приклад 1.32. Розглянемо таке міркування. «Якщо $\sqrt{2} > 3/2$, то $\left(\sqrt{2}\right)^2 > (3/2)^2$. Ми вважаємо, що $\sqrt{2} > 3/2$. Отже, $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 > (3/2)^2 = 9/4$». Вихідні дані для нашої аргументації – це $p\to q$ та p, а q – висновок. Аргументація правильна, тому що вона ґрунтується на правилі виведення modus ponens, яке є одним із правил побудови правильних міркувань. Проте, одне з даних, $\sqrt{2} > 3/2$, фальшиве. Отже, ми не можемо стверджувати, що висновок правильний. Більше того, висновок цих міркувань неправильний, бо $2 < 9/4$.

Табл. 1.16

Правило виведення	**Тавтологія**	**Назва правила виведення**
$\dfrac{A, A \to B}{B}$	$(A\wedge(A\to B))\to B$	Modus ponens
$\dfrac{\neg B, A \to B}{\neg A}$	$(\neg B\wedge(A\to B))\to\neg A$	Modus tollens
$\dfrac{A \to B, B \to C}{A \to C}$	$((A\to B)\wedge(B\to C))\to(A\to C)$	Гіпотетичний силогізм
$\dfrac{A \vee B, \neg A}{B}$	$((A\vee B)\wedge\neg A)\to B$	Диз'юнктивний силогізм
$\dfrac{A}{A \vee B}$	$A\to(A\vee B)$	Уведення диз'юнкції
$\dfrac{A \wedge B}{A}$	$(A\wedge B)\to A$	Вилучення кон'юнкції
$\dfrac{A, B}{A \wedge B}$	$((A)\wedge(B))\to(A\wedge B)$	Уведення кон'юнкції
$\dfrac{p \vee A, \neg p \vee B}{A \vee B}$	$((p\vee A)\wedge(\neg p\vee B))\to(A\vee B)$	Резолюція

У пропозиційній логіці існує багато корисних правил виведення. Найуживаніші з них наведено в таблиці 1.16. Там же наведено загальнозначущі формули (тавтології), кожна з яких обґрунтовує відповідне правило. Довести, що наведені формули справді є загальнозначущими, пропонується у вигляді вправи. Зараз ми наведемо приклади міркувань, які використовують правила виведення.

Приклад 1.33. З'ясуємо, яке правило виведення використано в такому міркуванні: «Похолоднішало. Отже, похолоднішало або почав падати дощ.»

Нехай p – висловлення «похолоднішало», а q – висловлення «почав падати дощ». Тоді це міркування можна записати у такій формі

$$\frac{p}{p \vee q}.$$

Отже, наведене міркування використовує правило введення диз'юнкції.

Приклад 1.34. З'ясуємо, яке правило виведення використано в такому міркуванні: «Похолоднішало і почав падати дощ. Отже, похолоднішало.»

Нехай p – висловлення «похолоднішало», а q – висловлення «почав падати дощ». Тоді це міркування можна записати як

$$\frac{p \wedge q}{p}.$$

Це міркування використовує правило вилучення кон'юнкції.

Приклад 1.35. З'ясуємо, яке правило виведення використано в такому міркуванні. «Якщо сьогодні падатиме дощ, то сьогодні ми не поїдемо на пікнік. Якщо ми не поїдемо на пікнік сьогодні, то поїдемо на пікнік завтра. Отже, якщо сьогодні падатиме дощ, то ми поїдемо на пікнік завтра.»

Нехай p – висловлення «Сьогодні падатиме дощ», q – висловлення «Сьогодні ми не поїдемо на пікнік», а r – висловлення «Ми поїдемо на пікнік завтра». Наведене міркування можна подати так:

$$\frac{p \to q, q \to r}{p \to r}$$

Отже, тут використано правило гіпотетичного силогізму.

1.17. Застосування правил виведення для побудови міркувань

Якщо твердження містить багато гіпотез, то потрібно застосувати декілька правил виведення для того, щоб довести істинність висновку. Проілюструємо це такими прикладами.

Приклад 1.36. Покажемо, що з гіпотез «Сьогодні не сонячний день і холодніше, ніж учора», «Ми підемо купатися тільки якщо сьогодні сонячний день», «Якщо ми не підемо купатися, то поїдемо плавати на човні» та «Якщо ми поїдемо плавати на човні, то повернемося пізно ввечері» випливає висновок «Ми повернемося пізно ввечері».

Нехай p – висловлення «Сьогодні сонячний день», q – «Сьогодні холодніше, ніж учора», r – «Ми підемо купатися», s – «Ми поїдемо плавати на човні», t – «Ми повернемося пізно ввечері». Тут гіпотези – $\neg p \wedge q$, $r \to p$, $\neg r \to s$ і $s \to t$, а висновок – t.

Нижче наведено послідовність кроків отримання висновку із заданої множини гіпотез і зазначено застосовані правила виведення.

1. $\neg p \wedge q$ – Гіпотеза.
2. $\neg p$ – Вилучення кон'юнкції до 1.
3. $r \to p$ – Гіпотеза.
4. $\neg r$ – Modus tollens до 2 та 3.
5. $\neg r \to s$ – Гіпотеза.
6. s – Modus ponens до 4 та 5.
7. $s \to t$ – Гіпотеза.
8. t – Modus ponens до 6 та 7.

Висновок отримано.

Приклад 1.37. Покажемо, що з гіпотез «Якщо ти надішлеш мені повідомлення електронною поштою, то я закінчу писати програму», «Якщо ти не надішлеш мені повідомлення електронною поштою, то я рано піду спати», та «Якщо я рано піду спати, то прокинуся бадьорим» випливає висновок «Якщо я не закінчу писати програму, то я прокинуся бадьорим».

Уведемо позначення: p – «Ти надішлеш мені повідомлення електронною поштою», q – «Я закінчу писати програму», r – «Я рано піду спати», s – «Я прокинуся бадьорим». Гіпотези можна записати у виді $p \to q$, $\neg p \to r$, $r \to s$. Потрібно обґрунтувати висновок $\neg q \to s$.

Нижче наведено послідовність кроків для отримання висновку із заданої множини гіпотез. Застосовані правила виведення записано справа.

1. $p \to q$ – Гіпотеза.
2. $\neg q \to \neg p$ – Закон контрапозиції.
3. $\neg p \to r$ – Гіпотеза.
4. $\neg q \to r$ – Гіпотетичний силогізм до 2 та 3.
5. $r \to s$ – Гіпотеза.
6. $\neg q \to s$ – Гіпотетичний силогізм до 4 та 5.

Висновок отримано.

Приклад 1.38. Знову повернемося до прикладу В1 із вступу. Нагадаємо, що в цьому прикладі задано такі вихідні дані.

A_1: Якщо жарко й вологo, то буде дощ.
A_2: Якщо вологo, то жарко.
A_3: Зараз вологo.

Питання: Чи буде дощ?

Наведені твердження записано українською мовою. Для їхнього подання мовою логічних формул ми використаємо символи p, q та r:

p : жарко;
q : вологo:
r : буде дощ.
Дано:
A_1: $(p \wedge q) \to r$;
A_2: $q \to p$;
A_3: q .
Питання: чи буде дощ (r)?

1. q – Гіпотеза.
2. $q \to p$ – Гіпотеза.
3. p – Modus ponens до 1 і 2.
4. $p \wedge q$ – Уведення кон'юнкції до 3 і 1.
5. $(p \wedge q) \to r$ – Гіпотеза.
6. r – Modus ponens до 4 та 5.

Висновок отримано (дощ буде).

1.18. Резолюція

Комп'ютерні програми дають змогу автоматизувати задачу побудови міркувань і доведення теорем. Більшість із цих програм використовує правило виведення відоме як ***резолюція***, воно ґрунтується на такій загальнозначущій формулі (тавтології):

$$((p \vee A) \wedge (\neg p \vee B)) \to (A \vee B).$$

Це правило записують у виді

$$\frac{p \vee A, \neg p \vee B}{A \vee B},$$

висновок – диз'юнкт $A \vee B$ – називають ***резольвентою***.

1.19. Питання для самоконтролю

1. Що таке висловлення?
2. Дайте означення логічних зв'язок (заперечення, диз'юнкції, кон'юнкції, імплікації, еквіваленції).
3. Що таке інтерпретація формули пропозиційної логіки?
4. Як задається значення пропозиційної формули?
5. Дайте означення виконуваної формули.
6. Дайте означення загальнозначущої формули (тавтології).
7. Наведіть приклад загальнозначущої формули. Наведіть приклад виконуваної формули, яка не є загальнозначущою.
8. Дайте означення суперечності. Наведіть приклад.
9. Що таке семантична таблиця для пропозиційної формули? Наведіть правила декомпозиції для зв'язок пропозиційної логіки.
10. Укажіть основні закони (логічні еквівалентності) пропозиційної логіки.
11. Як виражається логічна зв'язка $\to$ через $\neg$ та $\vee$?
12. Як виражається логічна зв'язка $\leftrightarrow$ через $\to$ та $\wedge$?
13. Що таке алгебра Буля?
14. Дайте означення кон'юктивної нормальної форми (КНФ).
15. Дайте означення диз'юнктивної нормальної форми (ДНФ).
16. Наведіть алгоритм приведення формули до КНФ і ДНФ.
17. Дайте означення досконалої кон'юктивної нормальної форми (ДКНФ).
18. Дайте означення досконалої диз'юнктивної нормальної форми (ДДНФ).
19. Наведіть алгоритм приведення формули до ДКНФ.
20. Наведіть алгоритм приведення формули до ДДНФ.
21. Як побудувати ДКНФ на основі таблиці істинності?
22. Як побудувати ДДНФ на основі таблиці істинності?
23. Дайте означення логічного наслідку і логічного виведення для формул пропозиційної логіки.
24. Сформулюйте теорему про зв'язок між логічним наслідком і загальнозначущою формулою.
25. Сформулюйте теорему про принцип прямої дедукції.
26. Що таке виконувана множина формул?
27. Що таке невиконувана (суперечна) множина формул? Сформулюйте теорему про принцип прямої дедукції у термінах множини формул.
28. Наведіть основні правила виведення у пропозиційній логіці і відповідні їм загальнозначущі формули (тавтології).
29. Чи може правильна аргументація привести до неправильного висновку. Якщо так, то наведіть приклад.
30. Що таке резолюція? У чому полягає її значення для застосувань математичної логіки у комп'ютерних науках?

© Ю.М. Щербина, 2022