Змістовий модуль 4. Метод резолюцій

Тема 11. Застосування методу резолюцій у логіці першого порядку

План лекції.

- Застосування методу резолюцій для доведення теорем, пошуку відповідей і планування дій
  - Доведення теорем
  - Пошук відповідей
  - Планування дій
- Стратегії методу резолюцій методу резолюцій
- Джон Алан Робінсон
- Питання для самоконтролю

4.8. Застосування методу резолюцій для доведення теорем, пошуку відповідей і планування дій

4.8.1. Доведення теорем

Доведемо методом резолюцій відому *теорему* зі шкільного курсу геометрії.

Теорема. Внутрішні різносторонні кути, утворені діагоналлю трапеції, рівні.

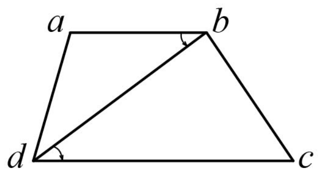

Рис. 4.1

Щоб довести цю теорему, спочатку аксіоматизуємо її. Нехай предикат $T(x, y, u, v)$ означає що $xyuv$ – трапеція з верхньою лівою вершиною x, верхньою правою вершиною y, нижньою правою вершиною u і нижньою лівою вершиною v. Нехай предикат $P(x, y, u, v)$ означає, що відрізок xy паралельний до відрізку uv, а предикат $E(x, y, z, u, v, w)$ – рівність довільних кутів xyz та uvw.

Тоді матимемо такі припущення:

A_1: $\forall x\forall y\forall u\forall v(T(x, y, u, v) \to P(x, y, u, v))$ – означення трапеції;

A_2: $\forall x\forall y\forall u\forall v(P(x, y, u, v) \to E(x, y, v, u, v, y))$ – внутрішні різносторонні кути для паралельних ліній рівні;

A_3: $T(a, b, c, d)$ – задана трапеція $abcd$ (рис. 4.1);

B: $E(a, b, d, c, d, b)$ – рівність кутів abd та cdb.

Тут A_1, A_2 , A_3 – гіпотези, а B – висновок. Як і раніше, утворимо множину формул $\{A_1, A_2, A_3, \neg B\}$. Кожну з цих формул зведемо до сколемівської нормальної форми; в отриманих формах викреслимо квантори загальності і символи операції кон'юнкції. Одержимо таку множину диз'юнктів

$$S = \{\neg T(x, y, u, v)\vee P(x, y, u, v), \neg P(x, y, u, v)\vee E(x, y, v, u, v, y),$$
$$T(a, b, c, d), \neg E(a, b, d, c, d, b)\}.$$

Спростуємо множину S методом резолюцій. Для цього випишемо диз'юнкти:

(1) $\neg T(x, y, u, v)\vee P(x, y, u, v)$;

(2) $\neg P(x, y, u, v)\vee E(x, y, v, u, v, y)$;

(3) $T(a, b, c, d)$;

(4) $\neg E(a, b, d, c, d, b)$.

У процесі побудови послідовності резольвент (5)–(7) застосуємо підстановку $\{a/x, b/y, c/u, d/v\}$.

(5) $\neg P(a, b, c, d)$ (2), (4);

(6) $\neg T(a, b, c, d)$ (1), (5);
(7) $\square$ (3), (6).

Оскільки отримано порожній диз'юнкт, то множину S спростовано. Теорему доведено.

4.8.2. Пошук відповідей

Спочатку розглянемо дуже простий приклад.

Приклад 4.23. Нехай є такий факт «Микола – чоловік Галини». Задамо питання: «Хто чоловік Галини?» Нехай $P(x, y)$ – означає «x – чоловік y». Тоді наведений факт можна записати так:

(1) P(Микола, Галина).

Затим для відповіді на наше запитання ми запишемо такий висновок:

(2) $\exists x\, P(x,$ Галина).

Якщо ми зможемо довести, що (2) є логічним наслідком факту (1), то ми принаймні знатимемо, що відповідь існує. Легко побачити, що, відслідковуючи підстановку, зроблену замість змінної, ми зможемо вирішити, чому дорівнює x.

Як і завжди, починаємо із заперечення цілі. Одразу запишемо сколемівську нормальну форму для заперечення цілі (нагадаємо, що всі предметні змінні вважаються зв'язаними квантором загальності):

(3) $\neg P(x,$ Галина).

Застосовуючи правило резолюції до (1) і (3), отримаємо порожній диз'юнкт $\square$, і теорема доведена. У процесі застосування правила резолюції x заміняється на «Микола». Якщо відслідковувати цей процес, то ми можемо виявити цю інформацію, і нашою відповіддю буде «Микола – чоловік Галини».

Простий спосіб відслідковувати змінну – це додати до диз'юнкту (3) предикат, який називають ANS-предикат (від answer – відповідь). Отже, у наведеному прикладі матимемо

(4) $\neg P(x,$ Галина) $\vee ANS(x)$.

Диз'юнкт (4) означає: «хто б не був чоловіком Галини, він наша відповідь». Зазначимо, що диз'юнкт (4) еквівалентний формулі

(5) $\forall x\, (P(x,$ Галина) $\rightarrow ANS(x))$.

Знову застосуємо резолюцію , але вже до (1) і (4). Тоді замість порожнього диз'юнкта отримаємо

(6) ANS(Микола).

Тому наша відповідь – «Микола – чоловік Галини». Зазначимо, що ANS(Микола) – логічний наслідок диз'юнктів (1) і (4). Отже, ми перетворили початкову задачу доведення теореми у задачу виведення логічного наслідку.

Приклад 4.23. Нехай $P(x, y)$ означає, що x – син y, $Q(x, z)$ означає, що x – внук z.

Розглянемо такі факти:

A_1: $\forall x \forall y \forall z\, (P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow Q(x, z))$

A_2: $\forall x \exists y\, P(x, y)$

B: $\forall x \exists z\, Q(x, z)$

Смисл цих формул зрозумілий. Задамо питання: «Для кого a є внуком?»

Використовуючи метод резолюцій, покажемо, що формула B є логічним наслідком формул A_1 і A_2. Зведемо формули A_1, A_2 та $\neg B \equiv \exists x \forall z\, \neg Q(x, z)$ до сколемівської нормальної форми (до формули $\neg B$ додамо літерал відповіді):

(1) $\neg P(x, y) \vee \neg P(y, z) \vee Q(x, z)$;

(2) $P(x, f(x))$, де $f(x)$, очевидно, означає батька x;

(3) $\neg Q(a, z) \vee ANS(z)$.

Здійснюємо резолютивне виведення.

(4) $\neg P(a, y) \vee \neg P(y, z) \vee ANS(z)$ із (1) і (3), підстановка $\{a/x\}$,

(5) $\neg P(f(a), z) \vee ANS(z)$ із (2) і (4), підстановка $\{a/x, f(a)/y\}$,

(6) $ANS(f(f(a)))$ із (2) і (5), підстановка $\{f(a)/x, f(f(a))/z\}$.

Наша відповідь така: «a є внуком для батька батька a». Отже, метод резолюцій не тільки виявляє факт логічного слідування формули B із формул A_1 і A_2, а ще й підказує, як за даним конкретним x отримати таке z, щоб формула $Q(x, z)$ була істинною.

4.8.3. Планування дій

Як приклад використання методу резолюцій у задачах планування дій розглянемо відому в теорії штучного інтелекту задачу про мавпу і банани []. У кімнаті до стелі підвішені банани, котрі хоче з'їсти мавпа. Зріст мавпи недостатній, щоб дістати банани. Однак у кімнаті є ящик, ставши на який мавпа може дістати банани. Які дії потрібно виконати мавпі, щоб дістати банани?

Формалізуємо задачу. Кімнату з мавпою, ящиком і бананами розглядатимемо як предметну область. Конкретне місцезнаходження у кімнаті мавпи, ящика та бананів називатимемо *станом предметної області*. Розглянемо два предиката: $P(x, y, z, s)$ та $R(s)$.

Нехай:

$P(x, y, z, s)$ означає, що в стані s мавпа є в точці x, банани – у точці y, а ящик – у точці z;

$R(s)$ означає, що в стані s мавпа може схопити банани.

Функції, які беруть участь в описі задачі:

йти(y, z, s) – стан, який отримується з s, якщо мавпа з точки y перейшла в точку z;

нести(y, z, s) – стан, який отримується з s, якщо мавпа перенесла ящик з точки y у точку z;

залізти(s) – стан, який отримується з s, якщо мавпа залізла на ящик.

Ми припускаємо, що в початковій ситуації мавпа була в стані s_1 і знаходилася в точці a, банани – у точці b, ящик – у точці c.

Умови задачі запишемо у вигляді формул:

A_1: $\forall x \forall y \forall z \forall s\ (P(x, y, z, s) \to P(z, y, z, \textit{йти}(x, z, s)))$;

A_2: $\forall x \forall y \forall s\ (P(x, y, x, s) \to P(y, y, y, \textit{нести}(x, y, s)))$;

A_3: $\forall s\ (P(b, b, b, s) \to R(\textit{залізти}(s)))$;

A_4: $P(a, b, c, s_1)$.

Наступна формула описує питання: «У якому стані мавпа може схопити банани?»

B: $\exists s\ R(s)$

Роз'яснимо смисл цих умов. Формула A_1 означає, що в будь-якому стані мавпа може перейти з точки x в точку z. Формула A_2 означає, що коли мавпа є біля ящика, який може бути у будь-якій точці x, тоді вона може перенести його у будь-яку точку y. Формула A_3 означає, що коли ящик і мавпа є під бананами, то вона може залізти на ящик і схопити банани. Формула A_4 описує початкову ситуацію.

Потрібно довести, що формула B – логічний наслідок формул A_1, A_2, A_3, A_4, а також отримати послідовність дій, яка приведе до потрібного результату.

Із множини формул A_1, A_2, A_3, A_4,$\neg B$, приводячи їх до сколемівської нормальної форми й відкидаючи квантори загальності, отримаємо множину диз'юнктів (1) – (5). Тут до диз'юнкта (5), отриманого із $\neg B = \forall s\ \neg R(s)$, додано літерал відповіді $ANS(s)$.

(1) $\neg P(x, y, z, s) \vee P(z, y, z, \textit{йти}(x, z, s))$,

(2) $\neg P(x, y, x, s) \vee P(y, y, y, \textit{нести}(x, y, s))$,

(3) $\neg P(b, b, b, s) \vee R(\textit{залізти}(s))$,

(4) $P(a, b, c, s_1)$,

(5) $\neg R(s) \vee ANS(s)$.

Послідовність диз'юнктів (1) – (5) продовжимо за правилом резолюції до виведення літерала відповіді:

(6) $\neg P(b, b, b, s) \vee ANS(\textit{залізти}(s))$	із (5) і (3)
(7) $\neg P(x, b, x, s) \vee ANS(\textit{залізти}(\textit{нести}(x, b, s)))$	із (6) і (2)
(8) $\neg P(x, b, z, s) \vee ANS(\textit{залізти}(\textit{нести}(z, b, \textit{йти}(x, z, s))))$	із (7) і (1)
(9) $ANS(\textit{залізти}(\textit{нести}(c, b, \textit{йти}(a, c, s_1))))$	із (8) і (4)

Диз’юнкт (9) дає нам відповідь. Його можна інтерпретувати як виконання наступних дій (починаємо з внутрішньої функції в диз’юнкті (9) і рухаємося назовні).

1. Мавпа йде з точки a в точку c.
2. Мавпа йде із c в b і несе з собою ящик.
3. Мавпа залізає на ящик. Після цих дій мавпа схоплює банани.

4.9. Стратегії методу резолюцій

У множині диз’юнктів здебільшого існує не одна пара диз’юнктів, до якої можна застосувати правило резолюції. Спосіб вибору диз’юнктів і літералів у них, до яких застосовують правило резолюції (і правило склейки) для отримання резольвенти, називають стратегією методу. Ми розглянемо три стратегії: стратегію насичення рівнів, стратегію переваги (коротших диз’юнктів) і стратегію викреслювання.

4.9.1. Стратегія насичення рівнів

Найпростіший спосіб вибору диз’юнктів для отримання резольвенти – повний перебір варіантів. Цей перебір можна організувати так. Нехай $S_0 = S$ – задана множина диз’юнктів. Вважатимемо, що S_0 упорядкована. Нехай D_2 пробігає за порядком множину диз’юнктів S_0, починаючи з другого диз’юнкта. У ролі D_1 беремо послідовно диз’юнкти із S_0, які є перед D_2, починаючи з першого, і формуємо упорядковану множину S_1, яка складається із усеможливих резольвент диз’юнктів D_1 і D_2. Порядок на S_1 визначається порядком, у якому диз’юнкти – резольвенти добавляються в S_1. Припустимо, що отримано упорядковані множини диз’юнктів $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Тоді упорядковану множину S_n отримують так. У ролі D_2 беруть за порядком диз’юнкти із S_{n-1}, а в ролі D_1 – диз’юнкти з $S_0 \cup S_1 \cup \ldots \cup S_{n-1}$, які є перед D_2. Тоді множина S_n складатиметься із усеможливих резольвент диз’юнктів D_1 і D_2. Процес породження резольвент припиняють, як тільки отримають порожній диз’юнкт.

Описану процедуру називають *стратегією насичення рівнів*. *Рівні* тут – це упорядковані множини $S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots$

Приклад 4.25. Прослідкуємо роботу цієї стратегії на прикладі множини диз’юнктів пропозиційної логіки

$$S = \{p\vee q, \neg p\vee\neg q, p\vee r, \neg p\vee r, \neg r\}.$$

S_0	(1)	$p\vee q$		S_2	(13)	$p\vee q$	із (1) і (6)
	(2)	$\neg p\vee\neg q$			(14)	$\neg p\vee\neg q$	із (2) і (6)
	(3)	$p\vee r$			(15)	$p\vee q$	із (1) і (7)
	(4)	$\neg p\vee r$			(16)	$\neg p\vee\neg q$	із (2) і (7)
	(5)	$\neg r$			(17)	$p\vee r$	із (3) і (7)
S_1	(6)	$q\vee\neg q$	із (1) і (2)		(18)	$\neg p\vee r$	із (4) і (7)
	(7)	$p\vee\neg p$	із (1) і (2)		(19)	$p\vee r$	із (1) і (8)
	(8)	$\neg q\vee r$	із (2) і (3)		(20)	$\neg q\vee r$	із (6) і (8)
	(9)	$q\vee r$	із (1) і (4)		(21)	$\neg p\vee r$	із (2) і (9)
	(10)	r	із (3) і (4)		(22)	$q\vee r$	із (6) і (9)
	(11)	p	із (3) і (5)		(23)	r	із (8) і (9)
	(12)	$\neg p$	із (4) і (5)		(24)	$\square$	із (5) і (10)

Можна побачити, що породжено багато зайвих диз’юнктів. Зокрема, диз’юнкти (6) і (7) – загальнозначимі (тавтології). Добавлення або вилучення загальнозначимого диз’юнкта не впливає на виконуваність множини диз’юнктів, тому такі диз’юнкти мають бути вилучені із виведення. Окрім того, деякі диз’юнкти породжені неодноразово, наприклад $p\vee q$, $\neg p\vee\neg q$, $q\vee r$. Це означає, що процесом вибору диз’юнктів для отримання резольвенти потрібно управляти.

4.9.2. Стратегія переваги (коротших диз'юнктів)

Ця стратегія є такою модифікацією попередньої. Спочатку в ролі D_2 беруть найкоротший диз'юнкт із S_{n-1} (якщо таких декілька, то вони перебираються за порядком), після цього – довші диз'юнкти і т. д. Така стратегія в застосуванні до тієї ж множини диз'юнктів S дасть такий результат.

S_0	(1)	$p\vee q$			(10)	$\neg q\vee r$	із (2) і (3)
	(2)	$\neg p\vee\neg q$			(11)	$q\vee r$	із (1) і (4)
	(3)	$p\vee r$			(12)	r	із (3) і (4)
	(4)	$\neg p\vee r$		S_2	(13)	$\neg q$	із (2) і (6)
	(5)	$\neg r$			(14)	r	із (4) і (6)
S_1	(6)	p	із (3) і (5)		(15)	q	із (1) і (7)
	(7)	$\neg p$	із (4) і (5)		(16)	r	із (3) і (7)
	(8)	$q\vee\neg q$	із (1) і (2)		(17)	$\square$	із (6) і (7)
	(9)	$p\vee\neg p$	із (1) і (2)				

Виведення виявилося коротшим, але так само містить повторювані та тавтологічні диз'юнкти. Вільним від цих недоліків є виведення, яке отримується за наступною стратегією.

4.9.3. Стратегія викреслювання

Сформулюємо спочатку таке означення.

Диз'юнкт D називають *розширенням* диз'юнкта C, якщо існує підстановка σ така, що $C\sigma\subset D$. (Застосування символу $\subset$ виправдано тим, що диз'юнкт можна розглядати як множину літералів, із яких він складається.)

Приклад 4.26. Нехай $C = P(x)$ і $D = P(a)\vee Q(a)$. Якщо $\sigma = \{a/x\}$, то $C\sigma = P(a)$. Оскільки $C\sigma\subset D$, то диз'юнкт $P(a)\vee \mathrm{Q}(a)$ є розширенням диз'юнкта $P(x)$.

Приклад. 4.27. Диз'юнкт $D = Q(a)\vee P(b, y)\vee R(u)$ є розширенням диз'юнкта $C = P(x, y)\vee Q(z)\vee Q(v)$. Підстановка $\sigma = \{a/z, a/v, b/x\}$ дає $C\sigma = Q(a)\vee P(b, y)$, отже, $C\sigma\subset D$.

Для пропозиційної логіки це просто означає, що $C\subset D$.

Приклад 4.28. Диз'юнкт $p\vee\neg q\vee\neg r$ є розширенням диз'юнкта $\neg q\vee p$.

Стратегія викреслювання, як і стратегія переваги, є модифікацією стратегії насичення рівнів. Стратегію викреслювання реалізують так. Після отримання чергової резольвенти D диз'юнктів D_1 і D_2 перевіряють, чи є вона загальнозначимою формулою (тавтологією) або розширенням якогось диз'юнкта C із $S_0\cup S_1\cup\ldots\cup S_{n-1}$. Якщо так, резольвенту D викреслюють, тобто не заносять у множину S_n.

Застосування стратегії викреслювання до попередньої множини диз'юнктів дасть такий результат.

S_0	(1)	$p\vee q$			(8)	r	із (3) і (4)
	(2)	$\neg p\vee\neg q$			(9)	p	із (3) і (5)
	(3)	$p\vee r$			(10)	$\neg p$	із (4) і (5)
	(4)	$\neg p\vee r$		S_2	(11)	$\neg q$	із (5) і (6)
	(5)	$\neg r$			(12)	q	із (5) і (7)
S_1	(6)	$\neg q\vee r$	із (2) і (3)		(13)	$\square$	із (5) і (8)
	(7)	$q\vee r$	із (1) і (4)				

Розглянуті стратегії є *повними* у тому сенсі, що коли множина диз'юнктів S невиконувана, то із S, використовуючи стратегію, можна вивести порожній диз'юнкт. Для перших двох стратегій це достатньо очевидно. Повнота стратегії викреслювання випливає з того, що коли D і C – диз'юнкти з S і D – розширення C, то множина диз'юнктів S невиконувана тоді і тільки тоді, коли невиконувана множина $S - \{D\}$.

4.10. Джон Алан Робінсон

Джон Алан Робінсон (John Alan Robinson). Народився 9.03 1930, Йоркшир, Велика Британія. Помер 5.08. 2016, Портленд, США. За освітою він філософ. Відомий як математик і вчений – комп'ютерник.

Основний внесок Джона Алана Робінсона полягає в розробці методу автоматизованого доведення теорем. Він також підготував ґрунт для парадигми логічного програмування, зокрема для мови Пролог. У 1996 році Робінсон отримав премію імені Жака Ербрана за видатний внесок у розвиток автоматизації міркувань. У 2000 році він з Андрієм Воронковим відредагували довідник «Handbook of Automated Reasoning», який був опублікований в трьох томах видавництвами Ельзевір (Elsevier) та MIT Press. Ці публікації зараз використовують студенти, вчені, науковці як фундаментальні посібники.

Як людина Джон Алан Робінсон був більше, ніж просто відомим ученим. Він був мислителем, гарним співрозмовником, з великим почуттям гумору і дуже гарним педагогом.

4.11. Питання для самоконтролю до лекцій 9 – 11

1. Що таке літерал?
2. Що таке контрарні літерали?
3. Сформулюйте правило резолюції.
4. Що таке резольвента в пропозиційній логіці?
5. Що таке резолютивне виведення в пропозиційній логіці?
6. Опишіть метод резолюцій для пропозиційної логіки.
7. Що таке підстановка для формул логіки першого порядку?
8. Сформулюйте означення добутку підстановок.
9. Що таке уніфікатор?
10. Що таке найзагальніший уніфікатор?
11. Опишіть алгоритм уніфікації.
12. Що таке бінарна резольвента?
13. Що таке склейка? Сформулюйте правило склейки.
14. Що таке резольвента пари диз'юнктів у логіці першого порядку?
15. Що таке резолютивне виведення в логіці першого порядку?
16. Опишіть метод резолюцій для логіки першого порядку.
17. Сформулюйте теорему про повноту методу резолюцій.
18. Які є стратегії методу резолюцій?
19. Наведіть декілька прикладів застосування методу резолюцій.
20. Як можна використати метод резолюцій для пошуку відповідей і планування дій?