Змістовий модуль 3. Теорема Ербрана

Тема 8. Семантичні дерева. Теорема Ербрана

План лекції.

- Семантичні дерева
- Теорема Ербрана.
- Застосування теореми Ербрана
- Жак Ербран
- Питання для самоконтролю

3.7. Семантичні дерева

Нагадаємо, що літералом називають атом чи його заперечення. Якщо P – атом, то два літерали P та $\neg P$ називають контрарними, а множину $\{P, \neg P\}$ – контрарною парою. Диз'юнкт є загальнозначущою формулою (тавтологією), якщо він містить контрарну пару.

Раніше ми побачили, що для отримання відповіді про виконуваність множини диз'юнктів можна розглядати не всі інтерпретації, а тільки H-інтерпретації. Тут ми підемо далі. <u>Ми фактично покажемо, що для розв'язування цього питання можна обмежитися скінченними підмножинами ербранівського універсуму.</u> Головним поняттям тут є поняття *семантичного дерева* (не плутати із семантичною таблицею).

Нехай S – множина диз'юнктів, $B = \{P_1, P_2, \ldots\}$ – її ербранівський базис (складається з атомарних формул для S без предметних змінних: замість предметних змінних підставлено елементи ербранівського універсуму). Задати ербранівську інтерпретацію (H-інтерпретацію) означає задати істинісні значення для елементів ербранівського базису (див. приклад 3.6). Інтерпретацію подаватимемо як множину літералів, наприклад, множина літералів $\{P_1, \neg P_2, \neg P_3, P_4, \neg P_5, \ldots\}$ означає таку інтерпретацію:

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	…
T	F	F	T	F	…

Сформулюємо означення. Нехай S – множина диз'юнктів і $B = \{P_1, P_2, \ldots\}$ її ербранівський базис. *Семантичне дерево* T для S – це бінарне дерево, на кожному рівні якого із кожної вершини N виходять два ребра, одне з яких позначено як P_i, а інше – як $\neg P_i$ (рис. 3.1).

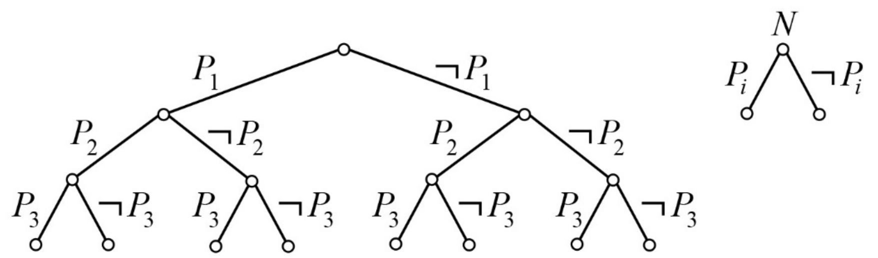

Рис. 3.1

Отже, ребра позначаються літералами, що подають істинісні значення атомів, які є елементами ербранівського базису B для множини диз'юнктів S. ***Нагадаємо, що довільна H-інтерпретація задається наданням значень істинності атомам ербранівського базису.***

Звідси випливає, що всяка гілка дерева T задає деяку H-інтерпретацію. ***Семантичне дерево T вичерпує всі H-інтерпретації для S.***

Вершину N семантичного дерева T називають *вершиною-спростуванням*, якщо шлях у T від кореня до вершини N містить істинісні значення атомів із ербранівського базису B, при яких спростовується якийсь основний приклад деякого диз'юнкту з множини S. *При цьому жодна інша вершина від кореня до N зазначеної властивості спростовування не має.*

Приклад 3.10.

Множина диз'юнктів (з прикладу 3.1): $S = \{P(x),\ \neg P(x) \vee Q(f(y)),\ \neg Q(f(a))\}$.

Ербранівський універсум: $H_\infty = \{a,\ f(a),\ f(f(a)),\ f(f(f(a))), \ldots\}$.

Ербранівський базис: $B = \{P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), P(f(f(a))), Q(f(f(a))), \ldots\}$.

Семантичне дерево T для множини диз'юнктів S зображено на рис. 3.2.

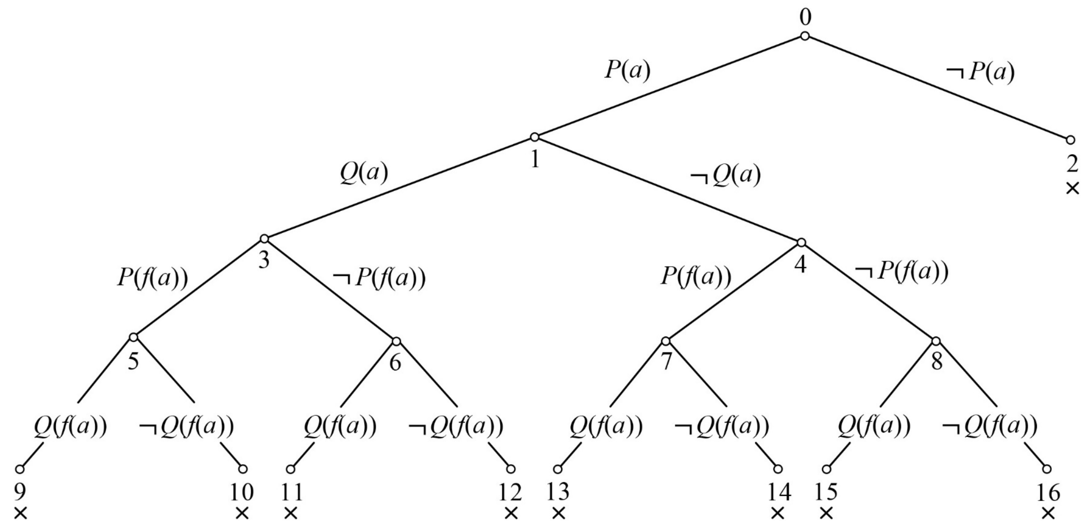

Рис. 3.2

На рис. 3.2 вершини-спростування позначено хрестиками.

У таблиці 3.1 подано відповідні цим вершинам H-інтерпретації, які спростовують розглядувану множину диз'юнктів S.

У вершині 2 спростовується диз'юнкт $D = P(x)$ бо його основний приклад $D' = P(a)$ фальшивий, тобто формула $P(x)$ при інтерпретації $\boldsymbol{IH}_1$ фальшива.

У вершині 9 спростовується диз'юнкт $D = \neg Q(f(a))$ бо його основний приклад – сам цей диз'юнкт – фальшивий при інтерпретації $\boldsymbol{IH}_2$.

У вершині 10 спростовується диз'юнкт $D = \neg P(x) \vee Q(f(y))$ бо його основний приклад $D' = \neg P(a) \vee Q(f(a))$ фальшивий при $\boldsymbol{IH}_3$, тобто формула $\neg P(x) \vee Q(f(y))$ при інтерпретації $\boldsymbol{IH}_3$ фальшива.

Табл. 3.1

Вершина	H-інтер-претація	$P(a)$	$Q(a)$	$P(f(a))$	$Q(f(a))$	…
Вершина 2	$\boldsymbol{IH}_1$	F	…	…	…	…
Вершина 9	$\boldsymbol{IH}_2$	T	T	T	T	…
Вершина 10	$\boldsymbol{IH}_3$	T	T	T	F	…
Вершина 11	$\boldsymbol{IH}_4$	T	T	F	T	…
Вершина 12	$\boldsymbol{IH}_5$	T	T	F	F	…
Вершина 13	$\boldsymbol{IH}_6$	T	F	T	T	…
Вершина 14	$\boldsymbol{IH}_7$	T	F	T	F	…
Вершина 15	$\boldsymbol{IH}_8$	T	F	F	T	…
Вершина 16	$\boldsymbol{IH}_9$	T	F	F	F	…

У вершині 11 спростовується диз'юнкт $D = \neg Q(f(a))$ бо його основний приклад – сам цей диз'юнкт – фальшивий при інтерпретації $\boldsymbol{IH}_4$.

У вершині 12 спростовується диз'юнкт $D = \neg P(x) \vee Q(f(y))$ бо його основний приклад $D' = \neg P(a) \vee Q(f(a))$ фальшивий при $\boldsymbol{IH}_5$.

У вершині 13 спростовується диз'юнкт $D = \neg Q(f(a))$ бо його основний приклад – сам цей диз'юнкт – фальшивий при інтерпретації $\boldsymbol{IH}_6$.

У вершині 14 спростовується диз'юнкт $D = \neg P(x) \vee Q(f(y))$ бо його основний приклад $D' = \neg P(a) \vee Q(f(a))$ фальшивий при $\boldsymbol{IH}_7$.

У вершині 15 спростовується диз'юнкт $D \equiv \neg Q(f(a))$ бо його основний приклад – сам цей диз'юнкт – фальшивий при інтерпретації $\boldsymbol{IH}_8$.

У вершині 16 спростовується диз'юнкт $D = \neg P(x) \vee Q(f(y))$ бо його основний приклад $D' = \neg P(a) \vee Q(f(a))$ фальшивий при $\boldsymbol{IH}_9$.

Множина диз'юнктів *S* невиконувана, бо *S* спростовується при кожній *H*-інтерпретації, тобто будь-яка *H*-інтерпретація спростовує один з диз'юнктів множини *S* (робить фальшивим один із членів у кон'юнкції диз'юнктів множини *S*). Скінченна множина вершин дерева {2, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16} породжує скінченну множину $\{P(a),\ Q(f(a)),\ \neg P(a) \vee Q(f(a))\}$ основних прикладів, невиконувану при будь-якій *H*-інтерпретації (а тому й при довільній інтерпретації). ***Зазначимо, що сама множина основних прикладів диз'юнктів нескінченна, бо нескінченним є ербранівський універсум.***

3.8. Теорема Ербрана

Тут ми розглянемо один із варіантів знаменитої теореми математичної логіки, яка є основою алгоритмів пошуку доведення теорем. Це – теорема Ербрана. Попередньо доведемо такий результат.

Лема 3.2. Нехай *S* – невиконувана множина диз'юнктів. Тоді:

1) кожна гілка семантичного дерева *T* для *S* містить вершину-спростування;

2) множина всіх вершин-спростувань в *S* скінченна.

Доведення. Нехай *V* – гілка в семантичному дереві *T*, $\boldsymbol{IH}_V$ – *H*-інтерпретація, яка відповідає гілці *V*. Множина *S* фальшива при інтерпретації $\boldsymbol{IH}_V$, тобто *S* містить диз'юнкт *D*, для якого існує основний приклад D', фальшивий при *H*-інтерпретації, яка відповідає гілці *V*. Основний приклад D' має скінченну кількість атомів. Тому на шляху від кореня гілкою *V* існує вершина *N* така, що на цьому шляху визначені всі істинісні значення атомів із D'. Оскільки D' фальшивий при інтерпретації $\boldsymbol{IH}_V$, то D' спростовується у вершині *N*. Як вершину-спростування *N* візьмемо на шляху гілкою *V* найближчу до кореня вершину із зазначеною властивістю. Отже, кожна гілка в дереві *T* має вершину-спростування.

Покажемо, що число вершин-спростувань в *T* скінченне. Обрізаємо дерево *T*, відкидаючи в *T* кожне піддерево з коренем у вершині-спростуванні (саму вершину-спростування залишаємо). Отримаємо дерево T'. Покажемо, що дерево T' скінченне (має скінченну кількість вершин). Припустимо, що дерево T' нескінченне. Серед вершин рівня 1 в T' виберемо піддерево T_x з коренем *x*, яке містить нескінченну кількість вершин (у T'). Вершина *x*, очевидно, не є вершиною спростуванням. У дереві T_x виберемо піддерево T_y з коренем *y* серед вершин рівня 2, яке містить нескінченну кількість вершин дерева T'. (Рівень вершин визначається відносно дерева T'.) Вершина *y* не є вершиною-спростуванням. І так далі. Як результат отримаємо нескінченну гілку, яка проходить через вершини *x*, *y*, … і не має вершини-спростування. Суперечність із наявністю вершини-спростування на кожній гілці дерева *T*. Отже, множина вершин-спростувань у дереві *T* скінченна.

Теорема 3.2 (Ербран). Множина диз'юнктів *S* невиконувана (не виконується при всіх інтерпретаціях) тоді й тільки тоді, коли існує **скінченна** невиконувана (не виконується при всіх інтерпретаціях) підмножина S' множини **всіх основних прикладів диз'юнктів** із *S*.

Зауваження. Зверніть увагу, *що множина S є множиною диз'юнктів логіки першого порядку*, а *множина S′ є множиною диз'юнктів пропозиційної логіки*. Саме цей факт буде істотно використаний у наступному розділі для доведення теореми 4.6 (про повноту методу резолюцій у логіці першого прядку).

Доведення. Необхідність. Припустимо, що множина диз'юнктів S невиконувана. Візьмемо семантичне дерево T для S і позначимо в T всі вершини-спростування (їхня кількість скінченна). Для кожної вершини-спростування візьмемо один основний приклад того диз'юнкту із S, який спростовується в цій вершині. Створюється **скінченна** невиконувана при будь-якій H-інтерпретації (а тому й при довільній інтерпретації) підмножина S' основних прикладів диз'юнктів із S, бо для будь-якої H-інтерпретації є фальшивим один із основних прикладів у S' того диз'юнкту із S, який спростовується у вершині-спростуванні на тій гілці семантичного дерева T, яка відповідає цій H-інтерпретації. Наведений вище приклад 3.10 є ілюстрацією ідеї цього доведення.

Достатність. Навпаки, нехай існує скінченна невиконувана (не виконується при всіх інтерпретаціях) підмножина S' множини основних прикладів диз'юнктів із S. Покажемо, що множина диз'юнктів S невиконувана. Допустимо протилежне: множина S виконувана. Тоді існує інтерпретація, а, отже, і деяка H-інтерпретація, у якій ця множина виконується. Тоді будь-який диз'юнкт $D(x_1,\ldots,x_k)$ із множини S виконується у цій H-інтерпретації. Але всі предметні змінні зв'язані кванторами всезагальності, тому виконується і будь-який диз'юнкт $D(t_1,\ldots,t_k)$ для всіх $t_1,\ldots,t_k$ з ербранівського універсуму H_∞ для множини S. Але тоді виконується і множина основних прикладів S', бо всякий основний приклад D' із S' отримується із деякого диз'юнкту D із S підходящою заміною предметних змінних $x_1,\ldots,x_k$ в $D(x_1,\ldots,x_k)$ на деякі елементи $t_1,\ldots,t_k$ ербранівського універсуму H_∞. Суперечність з невиконуваністю S'. Отже, наше припущення хибне, і множина S невиконувана.

Приклад 3.12. Нехай $S=\{\neg P(x)\vee Q(f(x),x),\ \ P(g(b)),\ \ \neg Q(y,z)\}$. Множина S невиконувана. Одна із невиконуваних скінченних множин основних прикладів диз'юнктів множини S така:

$$S'=\{\neg P(g(b))\vee Q(f(g(b)),g(b)),\quad P(g(b)),\quad \neg Q(f(g(b)),g(b))\}.$$

Доведення невиконуваності множини диз'юнктів S називають *спростуванням* цієї множини.

3.9. Застосування теореми Ербрана

Теорема Ербрана дає змогу формально побудувати процедуру спростування (метод Ербрана). Для виявлення невиконуваності множини диз'юнктів S потрібно: 1) утворювати множини S'_0, S'_1, S'_2, …, S'_i, … основних прикладів диз'юнктів для кожного рівня i ербранівського універсуму; 2) послідовно перевіряти їх на невиконуваність. За теоремою Ербрана, якщо S невиконувана, то процедура виявить такий рівень N, що множина S'_N буде невиконуваною.

Гілмор (Gilmore P.C.) одним з перших застосував цю процедуру. У 1960 році він написав машинну програму, яка успішно будувала множини S'_0, S'_1, S'_2, …, де S'_i – множина всіх основних прикладів диз'юнктів, отриманих заміною змінних в S константами з H_i – множини констант i-го рівня для S. Оскільки кожну множину S'_i можна подати як кон'юнкцію основних прикладів диз'юнктів, то можна використати будь-який метод, щоб перевірити її невиконуваність. Гілмор використовував *мультиплікативний* метод: приводив кожну побудовану множину S'_i до *диз'юнктивної* нормальної форми. Після цього кожна кон'юнкція в диз'юнктивній нормальній формі, яка містила контрарні пари, вилучалася. Якщо якесь S'_i виявлялося порожнім, то невиконуваність S виявлялася доведеною.

Приклад 3.12. Нехай $S=\{P(a),\neg P(f(x))\vee Q(x),\neg Q(f(a))\}$.

Тоді $H_0=\{a\}$ – множина констант нульового рівня для S;

$S'_0=\{P(a),\neg P(a)\vee Q(f(a)),\neg Q(f(a))\}$ – множина основних прикладів диз'юнктів для нульового рівня.

Подамо множину S'_0 у вигляді кон'юнкції: $S'_0=P(a)\wedge(\neg P(a)\vee Q(f(a)))\wedge\neg Q(f(a))$.

Після тривіальних перетворень отримаємо:

$$P(a)\wedge(\neg P(a)\vee Q(f(a)))\wedge\neg Q(f(a))\equiv \qquad \text{КНФ}$$

$$\equiv (P(a)\wedge\neg P(a)\wedge\neg Q(f(a)))\vee(P(a)\wedge Q(f(a))\wedge\neg Q(f(a)))\equiv \qquad \text{ДНФ}$$

$$\equiv \mathbf{F}\vee\mathbf{F}\equiv\mathbf{F}. \qquad \text{Результат}$$

Отже, доведено, що множина S невиконувана.

Зазначимо, що мультиплікативний метод неефективний. Легко побачити, що для малопотужної множини із десяти основних диз'юнктів, кожний з яких складається з двох літералів, існує 2^{10} кон'юнкцій. ***Ефективним методом для автоматичного доведення теорем, який зараз використовується, є метод резолюцій.***

3.10. Жак Ербран

Жак Ербран (Jacques Herbrand), 12 лютого 1908 – 27 липня 1931 – французький математик. Хоча він помер в 23 роки, він вважався одним з «найвидатніших математиків молодшого покоління». Його професорами були Гельмут Гассе і Ріхард Курант.

Він працював над **математичною логікою** та теорією полів класів. Увів поняття функціональної рекурсії. *Теорема Ербрана* відноситься до двох зовсім різних тем. Перша теорема (теорема Ербрана) є результатом його **дисертаційної роботи з теорії доведень**, а друга – теорема Ербрана–Рібета, стосується іншої тематики.

Займаючись альпінізмом у французьких Альпах з двома друзями, він насмерть розбився в гранітних горах масиву де Екрінс.

3.11. Питання для самоконтролю до лекцій 7, 8

1. Що таке ербранівський універсум множини диз'юнктів?
2. Що таке ербранівський базис множини диз'юнктів?
3. Що таке основний приклад диз'юнкту?
4. Що таке H-інтерпретація множини диз'юнктів?
5. Сформулюйте теорему про H-інтерпретацію.
6. Що таке семантичне дерево?
7. Що таке вершина-спростування в семантичному дереві?
8. Сформулюйте теорему Ербрана.
9. Опишіть процедуру спростування множини диз'юнктів на основі теореми Ербрана. Чому ця процедура неефективна?