CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

ربيع 2024

د. عدنان محمود عبدالله الشريف
adnan.sherif@uot.edu.ly

1

التعابير المنتظمة و اللغات المنتظمة
Regular Expressions and Languages

- توطئة الضخ (Pumping Lemma)
  - تستخدم توطئة الضخ للتوضيح ان اللغة غير منتظمة.
  - لكل لغة منتظمة $L \subseteq \Sigma^*$ يوجد ثابت $p \geq 1$ يدعى ثابت التوطئة بحيث لكل سلسلة w تنتمي الى L تكون $|w| \geq p$ وعندئذ يمكن إعادة كتابة w بالشكل $w = xyz$ بحيث:
    - $y \neq \varepsilon$ لا يمكن ان تكون السلسلة الفارغة
    - $|xy| \leq p$ طول تتابع السلسلة x و y يجب ان يكون اقل من او يساوي p
    - $\forall k\ k \geq 0 \wedge xy^K z \in L$

  لكل $k \geq 0$ عند تكرار السلسلة y k من المرات السلسلة الناتجة تنتمي الى اللغة L

2

التعابير المنتظمة واللغات المنتظمة
Regular Expressions and Languages

- مثال 1: بين ان اللغة المنتظمة على الابجدية $\Sigma = \{0,1\}$ الناتجة عن التعبير المنتظم $(0+1)^*$ تحقق توطئة الضخ.
- الحل: من التعبير المنتظم نحصل على اللغة التي تعبر عنها

$L\big((0+1)^*\big) = \{\varepsilon, 0,1,00,01,10,11,000,001,010,011,100,101 \ldots\}$

نلاحظ ان اللغة بها عدد لانهائي من السلاسل حيث أطول سلسلة بها يكون طولها ∞

نحدد ثابت التوطئة p بحيث $p \geq 1$ وليكن $p = 1$

يمكن اختيار سلسلة w بحيث $|w| \geq p$ ولتكن $w = 101$

يمكن تقسيم $w = xyz$ بحيث $|xy| \leq p$ عليه $x = \varepsilon \;\; y = 1 \;\; z = 01$

نلاحظ ان تكرار y لاي عدد $k \geq 0$ من المرات ينتج السلاسل التالية

01، 101، 1101، 11101، ...

ونلاحظ ان كل السلاسل الناتجة تنتمي الى اللغة الاصلية.

ملاحظة مهمة: هذا ليس اثبات ان اللغة منتظمة وانما توضيح والاثبات يكون باستخدام الاستنتاج الرياضي

التعابير المنتظمة واللغات المنتظمة
Regular Expressions and Languages

- تستخدم توطئة الضخ لأثبات ان اللغة L غير منتظمة وذلك باستخدام الاثبات بالنقد بالخطوات التالية:
  1. نفرض ان اللغة منتظمة (الفرضية)
  2. نبحث عن ثابت ضخ مناسب p
  3. بأخذ أي سلسلة w حيث $|w| \geq p$
  4. نقسم $w = xyz$ بحيث $|xy| \leq p$
  5. بين ان لقيمة معينة k بحيث $xy^k z \notin L$
  6. هذا تناقض مع الفرضية وعليه اللغة L غير منتظمة

التعابير المنتظمة واللغات المنتظمة
Regular Expressions and Languages

- مثال 2: برهن باستخدام توطئة الضخ ان اللغة $L = \{0^n 1^n | n \geq 0\}$ لغة غير منتظمة.
- الحل: نلاحظ ان اللغة الناتجة تتكون من عدد من 0 متبوع بنفس العدد من 1 أي المجموعة التالية:

$$L = \{\varepsilon, 01,0011,000111,00001111 \ldots\}$$

ومن دراستنا للاوتومات المنتهية بانواعها لا يمكن تكوين اوتوماتا لتمثيل هذه اللغة لان هذا يتطلب تخزين عدد 0 لكي يتم قبول نفس العدد من 1.

ويمكن اثبات ان هذه اللغة غير منتظمة باستخدام توطئة الضخ.

التعابير المنتظمة واللغات المنتظمة
Regular Expressions and Languages

- مثال 2 (تابع):
  - أولا نفرض ان اللغة منتظمة
  - نقوم باختيار ثابت الضخ p
  - نقوم باختيار سلسلة w من اللغة بحيث تحقق $|w| \geq p$ ولتكن $w = 0^p 1^p$
  - نقسم $w = xyz$ بحيث $|xy| \leq p$ ويمكن اختيار $x = 0^q \;\; y = 0^r \;\; z = 0^{p-q-r} 1^p$
  بحيث تحقق الشرط $|xy| \leq p$ أي ان $q + r \leq p$ وقيمة
  - بين ان لقيمة معينة k بحيث $xy^k z \notin L$

$$xy^k z = 0^{\mathrm{q}} (0^{\mathrm{r}})^k 0^{\mathrm{p-q-r}} 1^{\mathrm{p}} = 0^{\mathrm{q}} 0^{\mathrm{rk}} 0^{\mathrm{p-q-r}} 1^{\mathrm{p}}$$
$$= 0^{(\mathrm{q+rk+p-q-r})} 1^{\mathrm{p}}$$
$$= 0^{r(\mathrm{k-1})+\mathrm{p})} 1^{\mathrm{p}}$$

نلاحظ ان شرط اللغة ان عدد 0 يساوي عدد 1 عليه

$$p = (r(k-1) + p)$$

عليه يجب ان تكون المعادلة صحيحة لكل قيم $k \geq 0$ وهذا غير صحيح والمعادلة صحيحة فقط في حال $k = 1$ وخاطئة في كل الحالات الأخرى وعليه السلسلة بعد الضخ لا تنتمي الى اللغة وعليه اللغة غير منتظمة.

التعابير المنتظمة واللغات المنتظمة
Regular Expressions and Languages

- مثال 3: برهن باستخدام توطئة الضخ ان اللغة $L = \{0^n 1^m | n \leq m\}$ لغة غير منتظمة.
- الحل: نلاحظ ان اللغة الناتجة تتكون من عدد من 0 متبوع بعدد اكبر من 1 أي المجموعة التالية:

$$L = \{\varepsilon, 01,011,0111,01111 \ldots, 0011,00111,00111, \ldots 000111,0001111 \ldots\}$$

ويمكن اثبات ان هذه اللغة غير منتظمة باستخدام توطئة الضخ.

التعابير المنتظمة واللغات المنتظمة
Regular Expressions and Languages

- مثال 2 (تابع):
  - أولا نفرض ان اللغة منتظمة
  - لان الفرضية ان اللغة منتظمة عليه يوجد ثابت الضخ p
  - نقوم باختيار سلسلة w من اللغة بحيث تحقق $|w| \geq p$ ولتكن $w = 0^p 1^p$
  - نقسم $w = xyz$ بحيث $|xy| \leq p$ ويمكن اختيار $x = 0^q \;\; y = 0^r \;\; z = 0^{p-q-r} 1^p$
  - وحيث $y \neq \varepsilon$ عليه فإن $r \geq 1$
  - بين ان لقيمة معينة k بحيث $xy^k z \notin L$

$$xy^k z = 0^{\mathrm{q}} 0^{\mathrm{rk}} 0^{\mathrm{p-q-r}} 1^{\mathrm{p}}$$
$$= 0^{(\mathrm{q+rk+p-q-}\;\;)} 1^{\mathrm{p}}$$
$$= 0^{r(\mathrm{k}-1)+\mathrm{p})} 1^{\mathrm{p}}$$

نلاحظ ان شرط اللغة ان عدد 1 اكبر من او يساوي عدد 0 عليه

$$p \geq (r(k-1) + p)$$

عليه يجب ان تكون المتباينة صحيحة لكل قيم $k \geq 0$ وهذا غير صحيح في الحال k>=2 تكون المتباينة خاطئة وعليه السلسلة بعد الضخ لا تنتمي الى اللغة وعليه اللغة غير منتظمة.

تمارين مراجعة

- اثبت ان اللغات التالية غير منتظمة:
  - أ- $L = \{0^n 1 0^n | n \geq 1\}$
  - ب- $L = \{0^{2n} 1^n | n \geq 1\}$
  - ت- $L = \{0^n 1^m 0^{(n+m)} | n \geq m\}$
  - ث- $L = \{0^n 1^m | n \neq m\}$
  - ج- $L = \{xy \,||x| = |y| \wedge x \neq y\}$