

# CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages



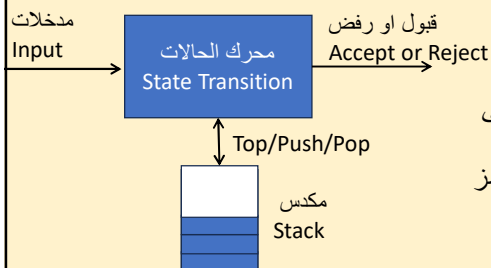
ربيع 2024  
د. عدنان محمود عبدالله الشريف  
[adnan.sherif@uot.edu.ly](mailto:adnan.sherif@uot.edu.ly)



1

## الآوتومات المنتهية لا حتمية بمكدس Pushdown Automata (PDA)

- يستخدم هذا النوع من الآوتومات في وصف اللغات خارج السياق
- يختلف عن الآوتومات المنتهية التي درسناها بوجود مكدس (Stack) يعمل كذاكرة ويمكن استرجاع ما تم إضافته إلى المكدس أو إضافة عناصر جديدة إلى المكدس عند كل نقلة من حالة إلى أخرى.



- الشكل التالي يُلخص تركيبة هذا النوع من الآوتومات
- عند قراءة رمز من المدخلات تقوم الآوتومات باختيار الحالات التي تنتقل لها من الحالة الحالية ليس فقط على الرمز المدخل، ولكن على الرمز الموجود في أعلى المكدس
- عند الانتقال من حالة إلى أخرى يتم استبدال الرمز أعلى المكدس برمز جديد يعني أن الانتقال لا يعني تغيير الحالة فقط، ولكن تغيير الرمز أعلى المكدس كذلك.
- تقبل السلسلة في حالة انتهاء السلسلة والوصول إلى حالة النهاية

2

## الآوتومات المنتهية لا حتمية بمكدس Pushdown Automata

• يعرف الآوتومات المنتهية لا حتمية بمكدس كالتالي:  
 $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

حيث :

- $Q$  مجموعة منتهية من الحالات وهي مجموعة غير خالية
- $\Sigma$  الأبجدية المستهدفة
- $\Gamma$  مجموعة من الرموز التي يمكن إضافتها للمكدس
- $q_0$  الحالة الابتدائية ويجب ان تكون أحد عناصر  $Q$  يعني  $q_0 \in Q$
- $Z_0$  الحالة الابتدائية للمكدس (عند بداية الآوتومات هذا الرمز يكون أعلى المكدس) حيث  $Z_0 \in \Gamma$
- $F$  هي مجموعة الحالات النهائية (حالات القبول) وتكون  $F \subseteq Q$

## الآوتومات المنتهية لا حتمية بمكدس Pushdown Automata

•  $\delta$  دالة التتابع لآوتومات حيث يتم وصفها

$$\delta: (Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma) \rightarrow P(Q \times \Gamma^*)$$

$$\delta(q_0, a, 0) \rightarrow \{(q_1, 1), (q_2, \varepsilon), (q_3, 10)\}$$

يعني عندما تكون الآوتومات في الحالة  $q$  وتم إدخال الرمز  $a$  وأعلى المكدس الرمز 0 الحالات الجديدة التي تنتقل لها الآوتومات هي

- $(q_1, 1)$  تنتقل إلى الحالة  $q_1$  ويتم استبدال (Pop and Push(1)) الرمز أعلى المكدس بـ 1
- $(q_2, \varepsilon)$  تنتقل إلى الحالة  $q_2$  ويتم اخراج العنصر أعلى المكدس (Pop)
- $(q_3, 10)$  تنتقل إلى الحالة  $q_3$  ويتم اخراج العنصر أعلى المكدس (Pop) وإضافة العنصر في السلسلة 10 من اليمين أي انه يتم إضافة العنصر 0 (Push(0)) أولاً ثم العنصر 1 (Push(1))

## الآوتومات المنتهية لا حتمية بمكدس Pushdown Automata

• مثال 1: ما هي اللغة التي تصفها الآوتومات المنتهية لا حتمية بمكدس التالية:

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

حيث

$$\begin{aligned} Q &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \\ \Sigma &= \{a, b\}, \\ \Gamma &= \{0, 1\}, \\ Z_0 &= 0, \\ F &= \{q_3\}, \\ \delta(q_0, a, 0) &= \{(q_1, 10)\}, \\ \delta(q_0, \varepsilon, 0) &= \{(q_3, \varepsilon)\}, \\ \delta(q_1, a, 1) &= \{(q_1, 11)\}, \\ \delta(q_1, b, 1) &= \{(q_2, \varepsilon)\}, \\ \delta(q_2, b, 1) &= \{(q_2, \varepsilon)\}, \\ \delta(q_2, \varepsilon, 0) &= \{(q_3, \varepsilon)\}, \end{aligned}$$

05/07/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

5

5

## الآوتومات المنتهية لا حتمية بمكدس Pushdown Automata

• مثال 1: الحل:

نلاحظ من الدالة  $\delta$

1. عند حالة البداية  $q_0$  يمكن ان تقبل  $a$  على ان يكون الرمز اعلى المكدس 0 في هذه الحالة يتم إخراج 0 من اعلى المكدس والانتقال الى الحالة  $q_1$  بعد إضافة 0 ثم 1 الى المكدس او يقبل السلسلة الفارغة  $\varepsilon$  على ان يكون الرمز اعلى المكدس 0 وفي هذه الحالة يقوم بالانتقال الى حالة النهاية  $q_3$  بعد اخراج الرمز اعلى الكدس.
2. عند الحالة  $q_1$  يمكن قبول الرمز  $a$  على ان يكون الرمز اعلى المكدس 1 في هذه الحالة يتم إخراج 1 من اعلى المكدس والبقاء في الحالة  $q_1$  بعد إضافة 1 ثم 1 الى المكدس.
3. عند الحالة  $q_1$  يمكن قبول الرمز  $b$  على ان يكون الرمز اعلى المكدس 1 في هذه الحالة يتم إخراج 1 من اعلى المكدس والانتقال الى الحالة  $q_2$ .
4. عند الحالة  $q_2$  يمكن قبول الرمز  $b$  على ان يكون الرمز اعلى المكدس 1 في هذه الحالة يتم إخراج 1 من اعلى المكدس والبقاء في الحالة  $q_2$ .
5. عند الحالة  $q_2$  يمكن قبول الرمز  $\varepsilon$  على ان يكون الرمز اعلى المكدس 0 في هذه الحالة يتم إخراج 0 من اعلى المكدس والانتقال الى حالة النهاية  $q_3$ .

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, 0) &= \{(q_1, 10)\}, \\ \delta(q_0, \varepsilon, 0) &= \{(q_3, \varepsilon)\}, \\ \delta(q_1, a, 1) &= \{(q_1, 11)\}, \\ \delta(q_1, b, 1) &= \{(q_2, \varepsilon)\}, \\ \delta(q_2, b, 1) &= \{(q_2, \varepsilon)\}, \\ \delta(q_2, \varepsilon, 0) &= \{(q_3, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

05/07/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

6

6

## الآوتومات المنتهية لا حتمية بمكدس Pushdown Automata

### • مثال 1: الحل:

من الشرح السابق نلاحظ ان عن حالة البداية (خطوة رقم 1) يمكن قبول الرمز  $a$  في السلسلة او السلسلة الفارغة هذا يعني ان كل سلاسل اللغة يجب ان تبدأ بالرمز  $a$ .  
كما نلاحظ في الخطوة رقم 1 و 2 انه عند قبول الرمز  $a$  يتم إضافة 1 الى اعلى المكدس. إذن عدد 1 يكون في المكدس بعدد مرات ظهور الرمز  $a$  في السلسلة.  
من الخطوة 3 و 4 نلاحظ انه لا يستطيع قبول الرمز  $b$  لو لم يكن اعلى المكدس 1. وكما وضحنا ان عدد 1 في المكدس هو عدد مرات قبول الرمز  $a$  أي انه يمكن قبول نفس العدد من الرمز  $b$ .  
ولا ينتقل الى حالة النهاية إلا لو كان اعلى المكدس 0 ونستنتج انه لا يمكن قبول السلسلة إلا بعد قبول عدد من الرمز  $b$  بنفس عدد 1 في المكدس أي بنفس عدد الرمز  $a$  في السلسلة.  
نستنتج ان اللغة التي تمثلها الآوتومات هي

$$L = \{a^n b^n | n \geq 0\}$$

## الآوتومات المنتهية لا حتمية بمكدس Pushdown Automata

• كما يمكن تمثيل الآوتومات المنتهية لا حتمية بمكدس بنفس الاشكال التي تم تمثيل الآوتومات بفرق ان على كل سهم بين الحالة والأخرى توجد ثلاث قيم بدل قيمة واحدة كالتالي:

$$(a, b, c)$$

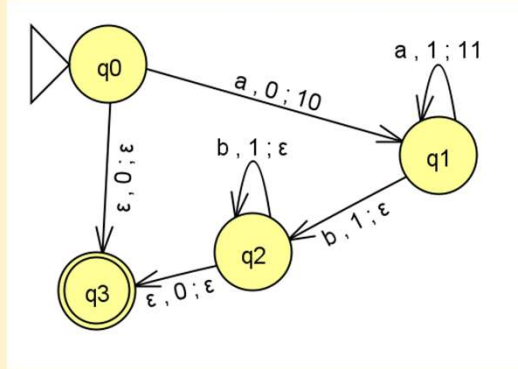
حيث

- $a \in \Sigma$  هو رمز الذي تم قبوله للانتقال من حالة الى أخرى.
- $b \in \Gamma \cup \{\epsilon\}$  هو الرمز الذي يجب ان يكون اعلى المكدس للانتقال.
- $c \in \Gamma^*$  هي سلسلة الرموز التي يتم إضافتها الى اعلى المكدس، ويتم ذلك بإدخال الرموز في السلسلة من اليمين.

## الآوتومات المنتهية لا حتمية بمكدس Pushdown Automata

- مثال 2: ارسم شكل الآوتومات المنتهية لا حتمية بمكدس التي تم عرضها في المثال رقم 1  
الحل :

$$\begin{aligned}\delta(q_0, a, 0) &= \{(q_1, 10)\}, \\ \delta(q_0, \varepsilon, 0) &= \{(q_3, \varepsilon)\}, \\ \delta(q_1, a, 1) &= \{(q_1, 11)\}, \\ \delta(q_1, b, 1) &= \{(q_2, \varepsilon)\}, \\ \delta(q_2, b, 1) &= \{(q_2, \varepsilon)\}, \\ \delta(q_2, \varepsilon, 0) &= \{(q_3, \varepsilon)\}\end{aligned}$$



05/07/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

9

9

## الآوتومات المنتهية لا حتمية بمكدس Pushdown Automata

- الآوتومات المنتهية الأخرى كان بالإمكان استخدام دالة  $\delta$  لمعرفة ما إذا كانت السلسلة مقبولة أم مرفوضة. تتبع حالة آوتومات منتهية لا حتمية بمكدس يختلف حيث يجب تتبع حالة المكدس.
- يمكن معرفة ما إذا كانت السلسلة مقبولة أو مرفوضة في هذا النوع من الآوتومات بطريقة شبيهة للإشتقاق في القواعد حيث نحتاج في كل حالة إلى المعلومات التالية  
( $q, w, u$ )

حيث  $q$  هي الحالة التي عندها الآوتومات،  $w$  هي باقي السلسلة التي لم يتم إدخالها بعد و  $u$  حالة المكدس كسلسلة حيث العنصر أعلى المكدس هو أول رمز من اليسار.

يمكن استخدام الرمز  $\vdash$  للدلالة على الانتقال من حالة إلى أخرى

مثال لو كان لدينا عنصر في الدالة  $\delta(q_0, a, 0) = \{(q_1, 10)\}$  ولدينا سلسلة مثل  $ab$  العملية التالية توضح الانتقال في هذه السلسلة في حال كان أعلى المكدس 0  
( $q_0, ab, 0$ )  $\vdash$  ( $q_1, b, 10$ )

05/07/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

10

10

## الآوتومات المنتهية لا حتمية بمكدس Pushdown Automata

- مثال 3: بين أي من السلاسل التالية مقبولة أو مرفوضة من قبل الآوتومات المنتهية لا حتمية بمكدس في المثال رقم 1
1.  $aaabbb$
2.  $aba$
- الحل: نستخدم تتابع الحالات ونستطيع ان نتأكد من الوصول الى حالة النهاية ام لا
- $$\delta(q_0, a, 0) = \{(q_1, 10)\},$$
- $$\delta(q_0, \varepsilon, 0) = \{(q_3, \varepsilon)\},$$
- $$\delta(q_1, a, 1) = \{(q_1, 11)\},$$
- $$\delta(q_1, b, 1) = \{(q_2, \varepsilon)\},$$
- $$\delta(q_2, b, 1) = \{(q_2, \varepsilon)\},$$
- $$\delta(q_2, \varepsilon, 0) = \{(q_3, \varepsilon)\}$$
- $$(q_0, aaabbb, 0) \vdash (q_1, aabbb, 10) \vdash (q_1, abbb, 110) \vdash (q_1, bbb, 1110)$$
- $$\vdash (q_2, bb, 110) \vdash (q_2, b, 10) \vdash (q_2, \varepsilon, 0) \vdash (q_3, \varepsilon, \varepsilon)$$
- تمكنا من الوصول الى حالة النهاية عليه السلسلة مقبولة ونقول
- $$(q_0, aaabbb, 0) \vdash^* (q_3, \varepsilon, \varepsilon)$$
- للدلالة عن انه من حالة البداية وبالمحتوى الابتدائي للمكدس والسلسلة باستخدام عدد من خطوات الانتقال من حالة الى أخرى يمكن الوصول الى حالة النهاية والمكدس فارغ وبالتالي السلسلة مقبولة

05/07/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

11

11

## الآوتومات المنتهية لا حتمية بمكدس Pushdown Automata

- مثال 3(تابع): اما في حالة السلسلة  $aba$

$$(q_0, aba, 0) \vdash (q_1, ba, 10) \vdash (q_2, a, 0)$$

لم نتمكن من الوصول الى حالة النهاية عليه السلسلة مرفوضة

$$\delta(q_0, a, 0) = \{(q_1, 10)\},$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, 0) = \{(q_3, \varepsilon)\},$$

$$\delta(q_1, a, 1) = \{(q_1, 11)\},$$

$$\delta(q_1, b, 1) = \{(q_2, \varepsilon)\},$$

$$\delta(q_2, b, 1) = \{(q_2, \varepsilon)\},$$

$$\delta(q_2, \varepsilon, 0) = \{(q_3, \varepsilon)\}$$

05/07/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

12

12

## الآتومات المنتهية لا حتمية بمكدس Pushdown Automata

- مثال 4: عرف آتومات منتهية لا حتمية بمكدس  $M$  للتعرف على لغة كل السلاسل بها عدد متساوي من الرمز  $a$  و  $b$ .

الحل:

المطلوب ان يكون بالسلسلة التي تنتمي الى هذه اللغة ان يكون بها عدد من رمز  $a$  مساوي لعدد الرمز  $b$  في السلسلة بغض النظر عن الترتيب. يمكن حل هذه باستخدام مكدس حيث كل مرة يتم فيها قراءة الرمز  $a$  يتم إضافة 0 الى المكدس وعند قراءة الرمز  $b$  يتم استخراج الرمز 0 من اعلى المكدس. المشكلة هي لو عدد  $b$  في بداية السلسلة أكثر من عدد  $a$ ، يمكن حل هذه المشكلة باستخدام رمز اخر ، وليكن 1، وإضافته الى المكدس للدلالة على قراءة الرمز  $b$  قبل قراءة  $a$  في السلسلة وعند قراءة الرمز  $a$  يتم استخراجه.

05/07/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

13

13

## الآتومات المنتهية لا حتمية بمكدس Pushdown Automata

- مثال 4 تابع: نقوم أولاً باختيار رمز وليكن  $z$  كالرمز الابتدائي للمكدس ( $Z_0 = z$ ). نبدأ بحالة البداية وهي ان المكدس فارغ (أي ان الرمز اعلى المكدس  $z$ ) وتم قراءة بداية السلسلة إما الرمز  $a$  او  $b$ .

$$\delta(q_0, a, z) = \{(q_0, 0z)\}$$

$$\delta(q_0, b, z) = \{(q_0, 1z)\}$$

نلاحظ عدم الانتقال الى حالة جديدة والبقاء في نفس حالة البداية  $q_0$  وتم إضافة الرمز المناسب الى اعلى المكدس.

في حال اعلى المكدس 0 او 1 يدل على ان اخر رمز تم قراءته هو  $a$  او  $b$  وتم قراءة نفس الرمز في السلسلة يتم إضافة 0 او 1 الى اعلى المكدس

$$\delta(q_0, a, 0) = \{(q_0, 00)\}$$

$$\delta(q_0, b, 1) = \{(q_0, 11)\}$$

05/07/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

14

14

## الآوتومات المنتهية لا حتمية بمكدس Pushdown Automata

- مثال 4 تابع: في حال أعلى المكدس 0 أو 1 يدل على أن آخر رمز تم قراءته هو  $a$  أو  $b$  وتم قراءة رمز مخالف في السلسلة يتم استخراج الرمز من أعلى المكدس

$$\delta(q_0, a, 1) = \{(q_0, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_0, b, 0) = \{(q_0, \varepsilon)\}$$

- وحالة النهاية وهي أن لا يوجد رموز جديدة في السلسلة ويكون أعلى المكدس الرمز  $z$  للدلالة على أن المكدس فارغ أي تم قراءة عدد مساوي من  $a$  ومن  $b$ .

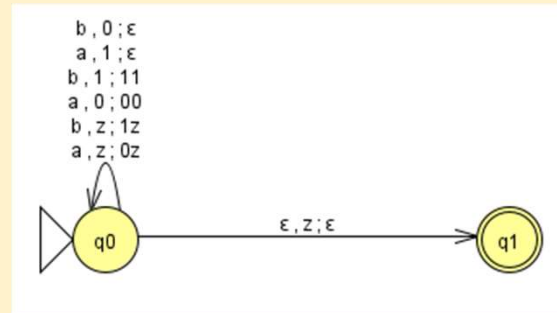
$$\delta(q_0, \varepsilon, z) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

## الآوتومات المنتهية لا حتمية بمكدس Pushdown Automata

- مثال 4 تابع: عليه يمكن وصف الآوتومات كالتالي:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, Z_0, q_0, F) = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{0, 1, z\}, \delta, z, q_0, \{q_1\})$$

- حيث تم تعريف الدالة  $\delta$  وشكل الآوتومات كالتالي:





## الآوتومات المنتهية لا حتمية بمكدس Pushdown Automata

• مثال 5: كون آوتومات منتهية لاحتمية بمكدس  $M$  للغة التالية:

$$L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^+\}$$

حيث  $w^R$  هو معكوس السلسلة  $w$  بحيث لو  $w = aabb$  فإن  $w^R = bbaa$   
الحل:

يمكن استخدام المكدس لعكس السلسلة  $w$  أي عند قراءة الجزء الأول من السلسلة  $ww^R$  يقوم بوضع الرموز التي تم قراءتها أعلى المكدس في الترتيب الذي تم قراءتها. وعند بلوغ نهاية السلسلة  $w$  أي منتصف السلسلة الأصلية  $ww^R$  نقوم بحركة لا حتمية إلى حالة أخرى تقوم بقراءة السلسلة المعكوسة أي أن الرموز لا بد أن تطابق أعلى المكدس. نلاحظ كذلك أن السلسلة  $w \in \{a, b\}^+$  أي أن السلسلة لا يمكن أن تكون خالية.

05/07/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

17

17

## الآوتومات المنتهية لا حتمية بمكدس Pushdown Automata

• مثال 5 (تابع): في حالة البداية نقوم بقراءة الرموز  $a$  و  $b$  ووضعها أعلى المكدس بغض النظر على ما يمكن أن يكون أعلى المكدس ونستخدم الرموز التالية للمكدس  $\Gamma = \{a, b, z\}$  حيث الرمز  $z$  يدل على أن المكدس فارغ وهو رمز البداية أي أن  $Z_0 = z$  عليه يمكن القيام بالحركات التالية:

$$\begin{aligned}\delta(q_0, a, z) &= \{(q_0, az)\} \\ \delta(q_0, b, z) &= \{(q_0, bz)\} \\ \delta(q_0, a, a) &= \{(q_0, aa)\} \\ \delta(q_0, a, b) &= \{(q_0, ab)\} \\ \delta(q_0, b, a) &= \{(q_0, ba)\} \\ \delta(q_0, b, b) &= \{(q_0, bb)\}\end{aligned}$$

05/07/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

18

18

## الآتومات المنتهية لا حتمية بمكدس Pushdown Automata

- مثال 5 (تابع): للانتقال إلى الحالة  $q_1$  نضيف حركة لا حتمية باستخدام  $\epsilon$  حيث هذه الحركة لا يجب أن تؤثر على المكدس عليه يجب إرجاع الي رمز اعلى المكدس كالتالي:

$$\delta(q_0, \epsilon, a) = \{(q_1, a)\}$$

$$\delta(q_0, \epsilon, b) = \{(q_1, b)\}$$

وتمثل هذه الحركة الوصول إلى منتصف السلسلة  $ww^R$  نلاحظ أن هذه الحركة غير ممكنة لو لم يكن أعلى المكدس إما الرمز  $a$  أو الرمز  $b$  وبهذا لا يتم قبول السلسلة الفارغة.

الآن في الحالة  $q_1$  يمكن قبول الرموز المدخلة حسب ترتيبها في المكدس.

$$\delta(q_1, a, a) = \{(q_1, \epsilon)\}$$

$$\delta(q_1, b, b) = \{(q_1, \epsilon)\}$$

05/07/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

19

19

## الآتومات المنتهية لا حتمية بمكدس Pushdown Automata

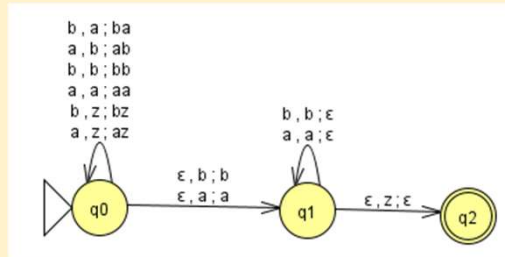
- مثال 5 (تابع): أخيرا عند الانتهاء من قراءة كل الرموز الممكن قبولها من أعلى المكدس يمكن الانتقال إلى حالة النهاية (القبول) في حال كان أعلى المكدس الرمز  $z$  كالتالي:

$$\delta(q_1, \epsilon, z) = \{(q_2, \epsilon)\}$$

يمكن الآن وصف الآتومات  $M$  كالتالي

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, Z_0, q_0, F) = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{a, b, z\}, z, q_0, \{q_2\})$$

وشكل الآتومات كالتالي:



05/07/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

20

20