جامعة طرابلس – كلية العلوم

قسم الحاسب الآلي

الامتحان النصفي الثاني

الإجابة النموذجية

مقرر نظرية الاتمتة (CS241/CS441)

الفصل الدراسي ربيع 2024

اجب على جميع الأسئلة التالية:

سؤال رقم 1: **(4 درجات)**

كون اوتومات منتهية لا حتمية بمكدس على الابجدية $\Sigma = \{0,1\}$ للغة كل السلاسل بها عدد زوجي من 0 وعدد فردي من 1.

الحل: هنا تكمن الفكرة فيما هو الرمز اعلى المكدس وما هي دلالته، في الأمثلة السابقة استعملنا المكدس للدلالة على ان رمز معين تم قراءته على سبيل المثال عن قراءة الرمز 0 نضع a اعلى المكدس كي نستطيع ان نتعرف على عدد الرموز 0 التي تم قراءتها في السلسلة.

في منطوق السؤال شرط القبول ان يكون عدد الرمز 0 زوجي في السلسلة وعدد الرمز 1 فردي في السلسلة. نستطيع ان نحصر الاحتمالات لكل حالات الرموز 0 و1 في السلسلة كالتالي:

1- عدد 0 زوجي وعدد 1 زوجي
2- عدد 0 فردي وعدد 1 زوجي
3- عدد 0 زوجي وعدد 1 فردي
4- عدد 0 فردي وعدد 1 فردي

نلاحظ ان الاحتمال رقم 3 هو المطلوب بينما كل الاحتمالات الأخرى مرفوضة

عليه يمكن ان نستخدم رموز المكدس للدلالة على هذه الاحتمالات كما هو مبين في الجدول التالي

الاحتمال	الرمز اعلى المكدس
عدد 0 زوجي وعدد 1 زوجي	a
عدد 0 فردي وعدد 1 زوجي	b
عدد 0 زوجي وعدد 1 فردي	c
عدد 0 فردي وعدد 1 فردي	d

يمكن الان تكوين اوتومات منتهية لا حتمية بمكدس M بالتعريف التالي:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F) = (\{q_0, q_1\}, \{0,1\}, \{a, b, c, d\}, \delta, q_0, a, \{q_1\})$$

نلاحظ ان رمز البداية اعلى المكدس هو a للدلالة على ان عدد 0 وعدد 1 هو صفر أي عدد زوجي.

يمكن تعريف الدالة δ للحالات التالية:

1- اعلى المكدس a وتم قراءة الرمز 0 وفي هذه الحالة يتم استبدال الرمز اعلى المكدس بالرمز b للدلالة على ان عدد 0 فردي وعدد 1 زوجي وبنفس الطريقة في حال تم قراءة الرمز 1 واعلى المكدس a يتم استبدال الرمز اعلى المكدس بالرمز c ما يدل على ان عدد 0 زوجي وعدد 1 فردي

$$\delta(q_0, 0, a) = (q_0, b)$$
$$\delta(q_0, 1, a) = (q_0, c)$$

2- اعلى المكدس b وتم قراءة الرمز 0 في هذه الحالة يتم استبدال الرمز اعلى المكدس بالرمز a للدلالة على ان عدد 0 زوجي وعدد 1 زوجي وبنفس الطريقة في حال تم قراءة الرمز 1 واعلى المكدس b يتم استبداله بالرمز d ما يدل على ان عدد 0 فردي وعدد 1 فردي.

$$\delta(q_0, 0, b) = (q_0, a)$$

$$\delta(q_0, 1, b) = (q_0, d)$$

3- اعلى المكدس c وتم قراءة الرمز 0 في هذه الحالة يتم استبدال الرمز اعلى المكدس بالرمز d للدلالة على ان عدد 0 فردي وعدد 1 فردي وبنفس الطريقة في حال تم قراءة الرمز 1 واعلى المكدس c يتم استبداله بالرمز a ما يدل على ان عدد 0 زوجي وعدد 1 زوجي.

$$\delta(q_0, 0, c) = (q_0, d)$$

$$\delta(q_0, 1, c) = (q_0, a)$$

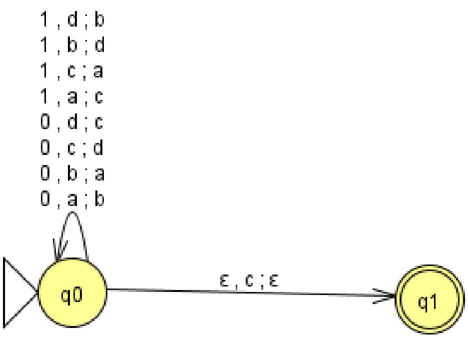
4- اعلى المكدس d وتم قراءة الرمز 0 في هذه الحالة يتم استبدال الرمز اعلى المكدس بالرمز c للدلالة على ان عدد 0 زوجي وعدد 1 فردي وبنفس الطريقة في حال تم قراءة الرمز 1 واعلى المكدس d يتم استبداله بالرمز b ما يدل على ان عدد 0 فردي وعدد 1 زوجي.

$$\delta(q_0, 0, c) = (q_0, d)$$

$$\delta(q_0, 1, c) = (q_0, a)$$

نلاحظ ان كل الحالات السابقة لم تتضمن الانتقال الى حالة النهاية ويمكن إضافة قيمة أخيرة للدالة δ في حال كان اعلى المكدس c عن الحالة q_0 ولا يتم قراءة أي رمز من السلسلة والانتقال الى حالة النهاية q_1 وإخراج الرمز c من اعلى المكدس.

$$\delta(q_0, \varepsilon, c) = (q_1, \varepsilon)$$



ويكون شكل الاوتومات كالتالي:

سؤال رقم 2: **(4 درجات)**

كون قاعدة خارج السياق (*Context Free Grammar*) للغة التالية:

$$L = \{ww^r \mid w \in \Sigma^*\}$$

حيث $\Sigma = \{a, b\}$ و w^r هي السلسلة المعكوسة لـw (لو $w = aabb$ فإن $w^r = bbaa$)

الحل:

$$P: \ S \to aSa \mid bSb \mid \varepsilon$$

$$G = (V, \Sigma, \mathrm{P}, \mathrm{S}) = (\{\mathrm{S}\}, \{\mathrm{a.b}\}, \mathrm{P}, \mathrm{S})$$

سؤال رقم 3: **(4 درجات)**

حول القاعدة خارج السياق التالية الى صيغة جريباغ ثم بين (باستخدام شجرة الاشتقاق على القاعدة في صيغة جريباغ) لو السلسلة *aabb* تنتمي الى للغة:

$S \to aA|aBB$

$A \to aaA|\ \varepsilon$

$B \to bB|bbC$

$C \to B$

الحل:

نلاحظ ان القواعد في السؤال ليست على صيغة جريباغ وكذلك تحتوي على حركة ε وكذلك على حركة أحادية عليه يتم إتباع الخطوات التالية:

1) التخلص من كل حركة في ε حيث يوجد في قواعد الاشتقاق $A \to \varepsilon$ وعليه نقوم باستبدال المتغير A في الطرف الأيمن من قواعد الاشتقاق وإضافة القواعد الجديدة الناتجة لتصبح القاعدة على النحو التالي:

$S \to a|aA|aBB$

$A \to aaA \mid aa$

$B \to bB|bbC$

$C \to B$

2) التخلص من القواعد الأحادية وتوجد قاعدة واحدة في هذه الحالة وهي $C \to B$ لتصبح القاعدة على النحو التالي:

$S \to a|aA|aBB$

$A \to aaA \mid aa$

$B \to bB|bbC$

$C \to bB|bbC$

بعد هذه الخطوة نلاحظ ان القاعدة قريبة جدا من صيغة جريباغ ولكن قواعد الاشتقاق التالية ليست على صيغة جريباغ

$A \to aaA \mid aa$

$B \to bbC$

$C \to bbC$

ولتحويل القاعدة الى صيغة جريباغ نجد أن هناك طريقتين:

الطريقة الأولى:

وهنا يمكن استخدام الخطوات التي درسناها في المقرر بتحويل القواعد الى صيغة تشومسكي تم تحويلها الى صيغة خريباغ.

باتباع خطوات تحويل القواعد الى صيغة تشومسكي نحصل على التالي:

$$S \rightarrow a|DA|XB$$
$$X \rightarrow DB$$
$$D \rightarrow a$$
$$A \rightarrow DY \mid DD$$
$$Y \rightarrow DA$$
$$B \rightarrow EB|EZ$$
$$Z \rightarrow EC$$
$$C \rightarrow EB|EZ$$
$$E \rightarrow b$$

ويمكن الان تحويل القاعدة على صيغة جريباغ باتباع الخطوات:

تغيير أسماء المتغيرات الى A_i حيث i هو ترتيب ظهور المتغيرات في القواعد أعلاه لتصبح

$$A_1 \rightarrow a|A_2A_3|A_4A_5$$
$$A_4 \rightarrow A_2A_5$$
$$A_2 \rightarrow a$$
$$A_3 \rightarrow A_2A_6|A_2A_2$$
$$A_6 \rightarrow A_2A_3$$
$$A_5 \rightarrow A_7A_5|A_7A_8$$
$$A_8 \rightarrow A_7A_9$$
$$A_9 \rightarrow A_7A_5|A_7A_8$$
$$A_7 \rightarrow b$$

حيث $A_1 = S, A_2 = D, A_3 = A, A_4 = X, A_5 = B, A_6 = Y, A_7 = E, A_8 = Z, A_9 = C$

نلاحظ ان الشرط ان لكل اشتقاق من النوع $A_i \rightarrow A_jx$ يجب ان تكون $i < j$ لا يتحقق في قواعد اشتقاق المتغيرات A_4, A_3, A_6, A_8, A_9 عليه يمكن تغير A_j او في هذه الحالات A_2 و A_7 بالطرف الأيمن لهذه الاشتقاقات لتصبح القاعدة على النحو التالي:

$$A_1 \rightarrow a|A_2A_3|A_4A_5$$

$$A_4 \rightarrow aA_5$$

$$A_2 \rightarrow a$$

$$A_3 \rightarrow aA_6|aA_2$$

$$A_6 \rightarrow aA_3$$

$$A_5 \rightarrow A_7A_5|A_7A_8$$

$$A_8 \rightarrow bA_9$$

$$A_9 \rightarrow bA_5|bA_8$$

$$A_7 \rightarrow b$$

القاعدة الناتجة ليست على صيغة جريباغ بعد حيث الاشتقاق $A_1 \rightarrow A_2A_3|A_4A_5$

والاشتقاق $A_5 \rightarrow A_7A_5|A_7A_8$ وفي كلتا الحالتين يمكن استبدال المتغير الأول في قواعد الاشتقاق بالطرف الأيمن لهذا المتغير بحيث تصبح القاعدة النهائية على الشكل التالي:

$$A_1 \rightarrow a|aA_3|aA_5A_5$$

$$A_4 \rightarrow aA_5$$

$$A_2 \rightarrow a$$

$$A_3 \rightarrow aA_6|aA_2$$

$$A_6 \rightarrow aA_3$$

$$A_5 \rightarrow bA_5|bA_8$$

$$A_8 \rightarrow bA_9$$

$$A_9 \rightarrow bA_5|bA_8$$

$$A_7 \rightarrow b$$

نلاحظ ان المتغير A_4 والمتغير A_7 لا يظهر في الطرف الأيمن لاي من قواعد الاشتقاق وعليه هذه المتغيرات والاشتقاقات المصحابة لها أصبحت غير المفيدة ويمكن الغائها من القواعد لتصبح القاعدة النهائية على الشكل التالي:

$$A_1 \rightarrow a|aA_3|aA_5A_5$$

$$A_2 \rightarrow a$$

$$A_3 \rightarrow aA_6|aA_2$$

$$A_6 \rightarrow aA_3$$

$$A_5 \rightarrow bA_5|bA_8$$

$$A_8 \rightarrow bA_9$$

$$A_9 \rightarrow bA_5|bA_8$$

الخطوة التالية اختيارية وهي إعادة كتابة القاعدة باستخدام المتغيرات الاصلية ونحصل على القاعدة النهائية على صيغة جريباغ كالتالي :

$$S \rightarrow a|aA|aBB$$

$$D \rightarrow a$$

$$A \rightarrow aY|aD$$

$$Y \rightarrow aA$$

$$B \rightarrow bB|bZ$$

$$Z \rightarrow bC$$

$$C \rightarrow bB|bZ$$

الطريقة الثانية:

كما ذكرنا في السابق الاشتقاقات التي ليست على صيغة جريباغ هي:

$$A \rightarrow aaA \mid aa$$
$$B \rightarrow bbC$$
$$C \rightarrow bbC$$

وحيث ان كل هذه الاشتقاقات المشكلة في ان الرموز aa و bb يجب ان يكون رمز واحد فقط عليه يمكن إضافة متغير جديد ليحل محل باقي الاشتقاق بعد الرمز الأول وإضافة قاعدة اشتقاق مناسبة على النحو التالي :

$D \rightarrow a$ لتحل محل a الثانية في الاشتقاق $A \rightarrow aa$ لتصبح $A \rightarrow aD$

$Y \rightarrow aA$ ليحل محل aA في الاشتقاق $A \rightarrow aaA$ لتصبح $A \rightarrow aY$

$Z \rightarrow bC$ ليحل محل bC في الاشتقاق $C \rightarrow bbC$ لتصبح $C \rightarrow bZ$

وفي الاشتقاق $B \rightarrow bbC$ لتصبح $B \rightarrow bZ$

لتصبح القاعدة الجديدة

$$S \rightarrow a|aA|aBB$$

$$D \rightarrow a$$

$$A \rightarrow aY|aD$$

$$Y \to aA$$

$$B \to bB|bZ$$

$$Z \to bC$$

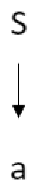
$$C \to bB|bZ$$

وهذه نفس النتيجة التي توصلنا لها باستخدام الخطوات في الطريقة الأولى.

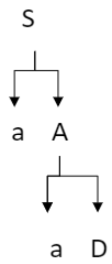
ثم بين (باستخدام شجرة الاشتقاق على القاعدة في صيغة جريباغ) لو السلسلة *aabb* تنتمي الى للغة

هذه السلسلة لا تنتمي الى اللغة كما هو مبين في التالية

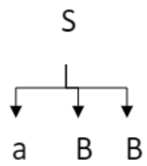
انطلاقا من *S* يمكن اختيار ثلاث قواعد تبدأ بالرمز *a* ولكل حالة شجرة اشتقاق كالتالي



وفي هذه الحالة السلسلة ليست مقبولة لإنها لا تنتهي عند *a*



وفي هذه الحالة نستطيع قراءة *aa* ولكن لا يوجد اشتقاق مناسب لـ *b* عليه السلسلة ليست مقبولة



وفي هذه الحالة نستطيع قراءة *a* الأولى ولكن لا يوجد اشتقاق من *B* يمكن ان يقبل الـ *a* الثانية عليه السلسلة ليست مقبولة

وبالتالي السلسلة *aabb* لا تنتمي الى اللغة التي تعبر عنها هذه القاعدة.

سؤال رقم 4: **(4 درجات)**

باستخدام توطئة الضخ بين ان اللغة في السؤال رقم 2 غير منتظمة.

الحل:

اللغة المطلوب اثبات انها غير منتظمة هي

$$L = \{ww^r \mid w \in \Sigma^*\}$$

ونلاحظ ان كل السلاسل في هذه اللغة ناتجة عن تعاقب سلسلة w ومعكوسها w^r

من شرح المعكوس نعرف انه في حال طول السلسلة w هو i

$$|w| = i$$

فإن طول المعكوس w^r هو i كذلك

$$|w^r| = i$$

عليه فإن

$$|ww^r| = 2i$$

من هذا نستنتج ان طول كل سلسلة تنتمي الى هذه اللغة دائما عدد زوجي (مسلمة رقم 1)

يمكن الان اتباع خطوات الاثبات بالنقد كالتالي:

1- نفرض ان اللغة منتظمة

2- نقوم باختيار توطئة ضخ ولتكن p

3- نقوم باختيار سلسلة تنتمي الى اللغة ولتكن w بشرط ان $|w| \geq p$ وحيث من المسلمة رقم 1 نعرف ان طول هذه السلسلة يجب ان يكون عدد زوجي عليه نختار السلسلة بحيث يكون طولها $2p$

$$|w| = 2p$$

4- نقوم بتقسيم السلسلة w الى ثلاثة أجزاء كالتالي

$$w = xyz$$

بحيث

$$|x| = q$$
$$|y| = r$$
$$|z| = 2p - q - r$$

بشرط ان $|xy| \leq p$ أي ان $(q + r) \leq p$

كما يشترط ان $y \neq \varepsilon$ أي ان $r \neq 0$ ويمكن هنا لتبسيط الحل نختار قيمة للمتغير r وليكن $r = 1$ (فرضية رقم 1)

5- للإثبات بالنقد نبحث عن قيمة $k \geq 0$ بحيث $xy^kz \notin L$

بالاستناد على المسلمة رقم 1، علينا إذا إيجاد قيمة $k \geq 0$ بحيث $|xy^kz|$ عدد فردي

$$|xy^kz| = |x| + |y^k| + |z|$$
$$= q + rk + 2p - q - r$$
$$= 2p + rk - r$$
$$= 2p + r(k - 1)$$

ومن الفرضية رقم 1

$$|xy^kz| = 2p + (k - 1)$$

نستنتج انه في حال k عدد زوجي فإن $(k-1)$ عدد فردي وبالتالي من نظام الاعداد الصحيحة نعرف ان $2p+(k-1)$ عدد فردي وعليه كل السلاسل الناتجة عن ضخ السلسلة الاصلية بعدد k زوجي ينتج سلسلة لا تنتمي الى اللغة
وعليه اللغة L غير منتظمة #

الحل بطريقة أخرى (بالمثال)
هذه الطريقة تستند على ان توطئة الضخ تعتمد على ان النظرية يجب ان تكون صحيحة لكل سلاسل اللغة عليه يكفي اختيار سلسلة واحدة تنتمي الى اللغة وتقسيم السلسلة الى ثلاث سلاسل وضخ هذه السلسلة وتكون السلسلة الناتجة لا تنتمي الى اللغة لإثبات ان اللغة غير منتظمة كالتالي:

1- نفرض ان اللغة منتظمة
2- نختار ثابت الضخ مناسب وليكن $p=3$
3- نختار سلسلة من اللغة $w=aaaaaa$ نلاحظ هذه السلسلة تحقق الشرط ان $|w|\geq p$ كما يمكن تقسيمها الى جزئين بحيث الجزء الثاني معكوس الجزء الأول.
4- نقسم السلسلة w الى xyz على انحو التالي:

$$x=a \quad y=a \quad z=aaaa$$

بحيث $|xy|\leq p$ وهذا يتحقق حيث $2\leq 3$
5- نقوم باختيار معامل الضخ $k\geq 0$ بحيث $xy^kz\notin L$
نلاحظ عند $k=2$

$$xy^2z=aaaaaaa$$

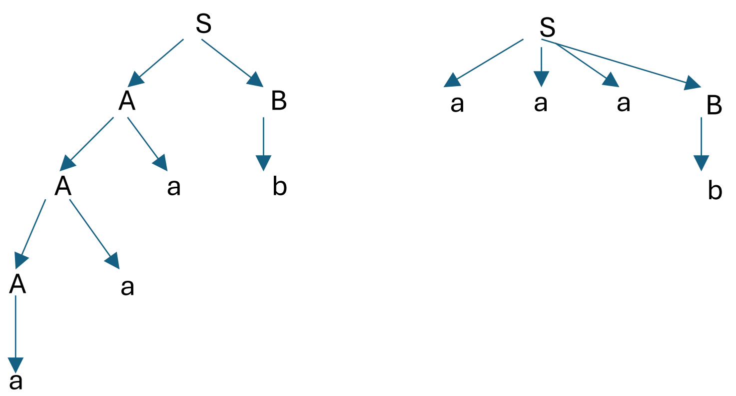
وهذه السلسلة لا يمكن تقسيمها الى جزئين بحيث يكون الجزء الثاني معكوس الجزء الأول حيث ان طولها فردي ولا يمكن تقسيمها الى جزئين متساويين.
عليه اللغة غير منتظمة#

سؤال رقم 5(الأخير): **(4 درجات)**

بين ان القواعد خارج السياق التالية مبهمة ثم حولها الى قاعدة خارج السياق غير مبهمة

$$S\rightarrow AB|aaaB$$
$$A\rightarrow a|Aa$$
$$B\rightarrow b$$

الحل:
عند دراسة القواعد نجد ان القاعدة تنتج سلاسل تبدا بعدد غير محدد من a متبوع برمز b وقاعدة الاشتقاق $S\rightarrow AB|aaaB$ تنتج سلاسل اما بها 1 او اكثر من الرمز a متبوع برمز b في حال الاشتقاق $(S\rightarrow AB)$ او سلسلة تتكون من ثلاث a متبوع بالرمز b في حال قاعدة الاشتقاق $S\rightarrow aaaB$ ، وهذا ما يجعل القاعدة مبهمة حيث في حالة السلسلة $aaab$ نجد طريقتان لاشتقاقها باستخدام القواعد كما هو مبين في شجرة الاشقاق التالية:



عليه يمكن شطب احد هذه القواعد وحيث ان قاعدة الاشتقاق $S \rightarrow aaaB$ خاصة والقاعدة الأخرى عامة وتشمل الحالة الخاصة فيمكن شطبها دون ان أي تأثير على اللغة التي تعرفها القاعدة لتصبح قواعد الاشتقاق على الصورة التالية:

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow a|Aa$$

$$B \rightarrow b$$

وبهذا تصبح القاعدة غير مبهمة.

تمنياتي للجميع بالتوفيق