CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

خريف 2024

د. عدنان محمود عبدالله الشريف
adnan.sherif@uot.edu.ly

1

مراجعة لبعض التركيبات الرياضية

- الفئات (المجموعات): الفئة مجموعة من العناصر غير المرتبة (لا تخضع لترتيب معين) وتسمى عناصر الفئة. ونقول ان الفئة تحوي عناصرها. كما نكتب $a \in A$ للدلالة على ان العنصر a ينتمي الى فئة A كما نكتب $a \notin A$ للدلالة على ان العنصر a لا ينتمي الى الفئة A.
- وصف الفئة:

$$A = \{x | x \text{ is a positive integer less than or equal to } 10\}$$

او

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

يرمز للفئة التي لا تحتوي على أي عنصر بالرمز $\emptyset$ (فأي)

2

مراجعة لبعض التركيبات الرياضية

- العمليات على الفئات (المجموعات):
  - تساوي الفئات:

الفئتان A و B متساويتان إذا كان لهم نفس العناصر بغض النظر عن ترتيبهم.

$$\forall x\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

ونعبر عن هذه العلاقة بان $A = B$

  - الفئة الجزئية (Subsets):

الفئة A فئة جزئية من الفئة B إذا كان كل عنصر من A عنصر من الفئة B.

نرمز لعلاقة الفئة الجزئية بالرمز $\subseteq$ أي ان: $A \subseteq B$

$$A \subseteq B \equiv \forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$$

نلاحظ ان الفئة الخالية $\emptyset$ هي فئة جزئية لاي فئة أخرى.

مراجعة لبعض التركيبات الرياضية

- العمليات على الفئات (المجموعات):
  - رتبة الفئة (Cardinality):

رتبة الفئة هي عدد عناصر الفئة ونرمز له بالرمز $|A|$.

  - فئة القوة (Power Set):

هي الفئة التي عناصرها جميع الفئات الجزئية للفئة الاصلية. إذا كان لدينة فئة A فإن فئة القوة ونرمز لها بالرمز $\mathcal{P}(A)$ هي فئة جميع الفئات الجزئية للفئة A.

$$\mathcal{P}(A) = \{x |\ x \subseteq A\}$$

  - ضرب الفئات (الضرب الكارتيزي) (Cartesian Product):

دع A و B فئتان، حاصل الضرب الكارتيزي لهما هو فئة جميع الأزواج المرتبة (a,b) حيث $a \in A$ و $b \in \mathrm{B}$

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

مراجعة لبعض التركيبات الرياضية

- العمليات على الفئات (المجموعات):
  - الاتحاد (Union):

دع A و B فئتان. فإن اتحاد الفئتان ونرمز له بالرمز $A \cup B$ هي فئة تحوي على عناصر من الفئة A او من الفئة B او من كلاهما.

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

  - التقاطع (Intersection):

دع A و B فئتان. فإن تقاطع الفئتان ونرمز له بالرمز $A \cap B$ هي فئة تحوي على العناصر المشتركة بين الفئة A والفئة B.

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

  - الفرق (Difference):

دع A و B فئتان. فإن الفرق بين الفئتان ونرمز له بالرمز $A - B$ هي فئة تحوي على العناصر التي تنتمي الى الفئة الأولى A ولا تنتمي الى الفئة الثانية B.

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

مراجعة لبعض التركيبات الرياضية

- الدوال:

دع A و B فئتان غير خاليتان، الدالة f علاقة من الفئة A الى الفئة B بحيث لكل عنصر من الفئة A عنصر واحد فقط في الفئة B. ونكتب $f(a) = b$ للدلالة على ان b هو العنصر من الفئة B المقابل للعنصر a في الفئة A باستخدام الدالة f. ونكتب $f\colon A \to B$ للدلالة عن ان الدالة f علاقة من الفئة A الى الفئة B.

- الدالة المركبة (composite function):
  - إذا كان لدينا دالتان f و g بحيث

$$f : B \to A$$
$$g : A \to B$$

يمكن تعريف دالة نرمز لها $f \circ g$ حيث

$$f \circ g\ (a) = f(g(a))$$

مراجعة لبعض التركيبات الرياضية

- العلاقات

العلاقة الثنائية من الفئة A الى الفئة B (Binary Relation from A to B)

هي فئة جزئية من الفئة $A \times B$ أي انها مجموعة من الأزواج المرتبة (a,b) حيث $a \in A$ و $b \in B$ مثال:

R	a	b
0	X	X
1	X	
2		X

$$A = \{0,1,2\}$$
$$B = \{a,b\}$$
$$R = \{(0,a),(0,b),(1,a),(2,b)\}$$
$$(0,a) \in R$$
$$(1,b) \notin R$$

مراجعة لبعض التركيبات الرياضية

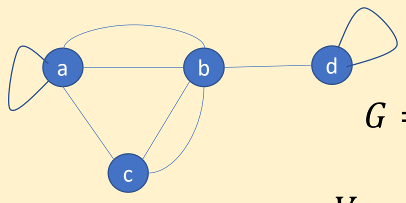
- الاشكال

تعريف الشكل غير الموجه: الشكل $G = (V,E)$ حيث V فئة غير خالية من الرؤوس و E فئة من الأزواج المرتبة (a,b) حيث $a \in V$ و $b \in V$ حيث a و b نهايات الحافة ونقول ان الحافة تربط الرؤوس a و b.

تعرف الشكل الموجه: التعريف: الشكل $G = (V,E)$ حيث V فئة غير خالية من الرؤوس و E فئة من الأزواج المرتبة $(a\ ,b)$ حيث $a \in V$ و $b \in V$ حيث a بداية الحافة و b نهاية الحافة.

مراجعة لبعض التركيبات الرياضية

مثال: الشكل الغير الموجه التالي :



يمكن تمثيلها كالتالي:

$$G = (V, E)$$

حيث

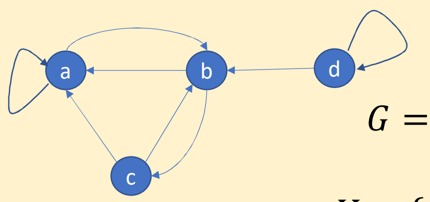
$$V = \{a, b, c, d\}$$

$$E = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, b), (d, d)\}$$

9

مراجعة لبعض التركيبات الرياضية

مثال: الشكل الموجه:



يمكن تمثيلها كالتالي:

$$G = (V, E)$$

حيث

$$V = \{a, b, c, d\}$$

$$E = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, b), (d, d)\}$$

10

مراجعة لبعض التركيبات الرياضية

- الأشجار:

الشجرة عبارة عن شكل متصل (Connected) غير موجه (Undirected) لا يوجد به مسار دائري (Circular Path).

تعريفات

- الرمز (Symbol): هو رمز لا يقبل التجزئة مثل حروف اللغة الإنجليزية (A,B…Z) او الأرقام مثل (0,1,2,3…9) او حروف اللغة العربية (أ، ب، ت ... ي) او الرموز الرياضية (+,-,*,/…).

نلاحظ ان كل من الأمثلة السابقة لا يمكن تقسيم الرمز الى أكثر من جزاء

ولا يعتبر ab رمز حيث يمكن تجزئته الى جزئين a و b.

تعريفات

- الأبجدية (Alphabet): هي فئة محددة وغير خالية من الرموز ونستخدم الحرف الاغريقي سيغما Σ للدلالة على الابجدية.
- امثلة:
  - الابجدية للغة الإنجليزية $\Sigma = \{a,b,c, \dots z,A,B,C, \dots Z\}$
  - الابجدية للأعداد الثنائية $\Sigma = \{0,1\}$
  - الابجدية لنظام الاعداد العشري $\Sigma = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

ملاحظات :

الفئة {0,1,01} ليس ابجدية لان العنصر 01 ليس رمز حيث يمكن تجزئته الى الرمز 0 والرمز 1.

تعريفات

- السلسلة (الكلمة) (String): هي تسلسل عدد محدد من الرموز لأبجدية محددة.

مثال:

لو لدينا ابجدية $\Sigma = \{a,b\}$

فإن aba هي سلسلة من الابجدية Σ كما ان aaabbbaaa سلسلة من نفس الابجدية

بينما abc ليست سلسلة من الابجدية Σ حيث الرمز c غير موجود من ضمن رموز الابجدية.

نرمز للسلسلة بالأحرف $(x,y,z,w,r,v, \dots)$

مثال: السلسلة aba يمكن ان نرمز لها

$$x = \text{aba}$$

تعريفات

- **طول السلسلة (Length of String):** هو عدد الرموز المشكلة للسلسلة ونرمز لطول السلسلة w بـ $|w|$.

مثال(1): إذا كانت لدينا سلسلة $x = \text{abb}$ هي سلسلة مشكلة من الأبجدية $\Sigma = \{a,b\}$

يكون $|x| = 3$ لان عدد الرموز المكونة للسلسلة 3.

مثال(2): إذا كانت لدينا سلسلة $y = 00110$ هي سلسلة مشكلة من الأبجدية $\Sigma = \{0,1\}$

يكون $|y| = 5$ لان عدد الرموز المكونة للسلسلة 5.

- **السلسلة الفارغة (Empty String):** هي سلسلة ليس بها أي رمز وطولها يساوي صفر نرمز لها بـ ε

$$|\varepsilon| = 0$$

العمليات على السلاسل (Operations on Strings)

- **التعاقب بين السلاسل (Concatenation):** تعاقب سلسلتين x و y هو سلسلة جديدة مكونة من رموز السلسلة الأولى متبوعة مباشرة برموز السلسلة الثانية. نرمز لعملية التعاقب أحيانا بالرمز (·).

مثال: لتكن لدينا الأبجدية $\Sigma = \{\text{a,b}\}$ ولتكن السلسلة $x = \text{aba}$ والسلسة $y = \text{bbb}$ فإن

$$x \cdot y = xy = \text{ababbb}$$
$$y \cdot x = yx = \text{bbbaba}$$

بعض خصائص التعاقب:

$$x \cdot y \neq y \cdot x$$
$$x \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot x = x$$
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

العمليات على السلاسل (Operations on Strings)

- **بادئة سلسلة (Prefix):** تكون السلسلة u هي بادئة السلسة v إذا وجدت سلسلة w بحيث يتحقق $v = u \cdot w$

مثال: لتكن لدينا السلسلة $v = \text{ababbb}$ فإن مجموعة بادئات هذه السلسلة هي $\{\varepsilon, \text{a}, \text{ab}, \text{aba}, \text{abab}, \text{ababb}, \text{ababbb}\}$

- **لاحقة سلسلة (Postfix):** تكون السلسة u هي لاحقة السلسة v إذا وجدت سلسلة w بحيث يتحقق $v = w \cdot u$

مثال: لتكن لدينا السلسلة $v = \text{ababbb}$ فإن مجموعة لاحقات هذه السلسلة هي $\{\varepsilon, \text{b}, \text{bb}, \text{bbb}, \text{abbb}, \text{babbb}, \text{ababbb}\}$

17

العمليات على السلاسل (Operations on Strings)

- **السلسلة الجزئية (Sub String):** تكون السلسلة u سلسلة جزئية من السلسلة v إذا وجدت سلسلة w تكون سلسلة بادئة للسلسلة v وسلسلة أخرى r تكون سلسلة لاحقة للسلسلة v بحيث يتحقق $v = w \cdot u \cdot r$

مثال: لتكن لدينا السلسلة $v = \text{ababbb}$، هل السلسة $u = \text{ab}$ سلسلة جزئية من v ؟

الإجابة: نعم حيث يمكن إيجاد قيم للسلسلة w و r تحقق الشرط عند:

1) $w = ab$ و $r = bb$ يحقق الشرط $v = w \cdot u \cdot r$

2) $w = \varepsilon$ و $r = abbb$ يحقق الشرط $v = w \cdot u \cdot r$

تعريف اخر: تكون السلسلة u سلسلة جزئية من السلسلة v إذا كانت كل رموز السلسة u موجودة في السلسلة v مع المحافظة على ترتيب الرموز.

18

العمليات على السلاسل (Operations on Strings)

- **قوة السلسلة (Power of String):** قوة سلسلة w من الدرجة n هي عبارة عن تعاقب السلسلة w لـ n من المرات.

$$w^n = \underbrace{w \cdot w \cdot w \cdot w \ldots w}_{\text{n مرة}}$$

مثال: لتكن لدينا السلسلة $v = \mathrm{ab}$ عليه:

$$v^1 = v = \mathrm{ab}$$
$$v^2 = \mathrm{abab}$$
$$v^3 = \mathrm{ababab}$$

يمكن استخدام القوة مع الرموز $y = \mathrm{aaabbbba} = \mathrm{a^3b^4a}$

قوة ابجدية (Power of Alphabet)

- التعريف: هي مجموعة السلاسل المولدة من الابجدية Σ ذات الطول n ونرمز لها بـ Σ^n

مثال: لتكن $\Sigma = \{0,1\}$ أبجدية فيكون:

$$\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$$
$$\Sigma^1 = \Sigma = \{0,1\}$$
$$\Sigma^2 = \{00,01,10,11\}$$
$$\Sigma^3 = \{000,001,010,011,100,101,110,111\}$$

نلاحظ : عدد عناصر Σ^n هو عدد عناصر الابجدية Σ مرفوع الى القوة n

$$|\Sigma^n| = (|\Sigma|)^n$$

قوة ابجدية (Power of Alphabet)

- نعرف Σ^* على انها مجموعة كل السلاسل التي يمكن تكوينها من الابجدية Σ وهي مجموعة غير منتهية أي:

$$\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \ \ldots$$

مثال: لتكن $\Sigma = \{0,1\}$ أبجدية فتكون مجموعة كل السلاسل التي يمكن تكوينها من الأبجدية هي:

$$\Sigma^* = \{\varepsilon, 0,1,00,01,10,11,000,001,010,011,100,101,110,111 \ldots\}$$

أحيانا يلزمنا تعريف كل السلاسل المكونة من الأبجدية Σ ماعدا السلسلة الفارغة ε ونعرف هذه المجموعة بـ Σ^+ حيث :

$$\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\varepsilon\}$$

اللغة (Language)

- هي مجموعة السلاسل المختارة من المجموعة Σ^* والمتكونة من الابجدية Σ ونرمز لها بالرمز (L) بحيث $L \subseteq \Sigma^*$. يتم وصف اللغة بتحديد شروط تكوين السلاسل التي تنتمي الى اللغة.

مثال: لتكن $\Sigma = \{a,b\}$ أبجدية واللغة L تحتوي على كلمات تنتهي بالرمز a:

$$L = \{a, aa, ba, aaa, bba, aba, baa, \ldots\}$$

نلاحظ ان :

$$\varepsilon \notin L$$
$$b \notin L$$
$$bb \notin L$$
$$ab \notin L$$

اللغة (Language)

مثال: لتكن $\Sigma = \{a,b\}$ أبجدية واللغة L_1 تحتوي على كلمات تحتوي على الرمز a مرتين على الاقل:

$$L_1 = \{aa, baa, aaa, aba, aab, baaa, bbaa, abaa \dots\}$$

مثال: لتكن $\Sigma = \{a,b\}$ أبجدية واللغة L_2 تحتوي على كلمات تحتوي على الرمز a مرتين فقط:

$$L_2 = \{aa, baa, aba, aab, bbaa, \dots\}$$

نلاحظ ان $L_2 \subseteq L_1$

العمليات على اللغات (Operations on Languages)

- اتحاد لغتين (Union): اتحاد لغتين L_1 و L_2 ويمثل بـ $L_1 \cup L_2$ هي اللغة التي تحتوي على السلاسل الموجودة في L_1 او L_2 او كلاهما:

$$L_1 \cup L_2 = \{x | x \in L_1 \vee x \in L_2\}$$

مثال: لتكن لدينا لغتين L_1 و L_2 على ابجدية $\Sigma = \{a,b\}$ بحيث :

$$L_1 = \{a, aa, ab, bb\}$$
$$L_2 = \{b, ab, ba, aa\}$$

فإن

$$L_1 \cup L_2 = \{a, b, aa, ab, ba, bb\}$$

العمليات على اللغات (Operations on Languages)

- تقاطع لغتين (Intersection): تقاطع لغتين L_1 و L_2 ويمثل بـ $L_1 \cap L_2$ هي اللغة التي تحتوي على السلاسل الموجودة في L_1 و L_2 :

$$L_1 \cap L_2 = \{x | x \in L_1 \land x \in L_2\}$$

مثال: لتكن لدينا لغتين L_1 و L_2 على ابجدية $\Sigma = \{a,b\}$ بحيث :

$$L_1 = \{a, aa, ab, bb\}$$
$$L_2 = \{b, ab, ba, aa\}$$

فإن

$$L_1 \cap L_2 = \{aa, ab\}$$

العمليات على اللغات (Operations on Languages)

- فرق لغتين (Difference): فرق لغتين L_1 و L_2 ويمثل بـ $L_1 - L_2$ هي اللغة التي تحتوي على السلاسل الموجودة في L_1 و غير موجودة في L_2 :

$$L_1 - L_2 = \{x | x \in L_1 \land x \notin L_2\}$$

مثال: لتكن لدينا لغتين L_1 و L_2 على ابجدية $\Sigma = \{a,b\}$ بحيث :

$$L_1 = \{a, aa, ab, bb\}$$
$$L_2 = \{b, ab, ba, aa\}$$

فإن

$$L_1 - L_2 = \{a, bb\}$$

العمليات على اللغات (Operations on Languages)

- متمم لغة (Complement): متمم اللغة L المعرفة على الابجدية Σ هي اللغة التي تحوي السلاسل الموجودة في Σ^* وغير موجودة في L ونرمز لمتمم اللغة L بـ $\bar{L}$:

$$\bar{L} = \{x | x \in \Sigma^* \land x \notin L\} = \Sigma^* - \mathrm{L}$$

مثال: لتكن لدينا لغة L معرفة على ابجدية $\Sigma = \{a,b\}$ بحيث :

$$L = \{a, aa, ab, bb\}$$

فإن

$$\bar{L} = \{\varepsilon, b, ba, bb, aaa, aab, \dots\}$$

العمليات على اللغات (Operations on Languages)

- تعاقب لغتين (Concatenation): تعاقب لغتين L_1 و L_2 ويمثل بـ $L_1.L_2$ هي اللغة التي تحتوي على السلاسل المشكلة من تعاقب السلاسل في L_1 بجميع السلاسل في L_2 :

$$L_1 \cdot L_2 = \{x \cdot y | x \in L_1 \land y \in L_2\}$$

مثال: لتكن لدينا اللغتين L_1 و L_2 على ابجدية $\Sigma = \{a,b\}$ بحيث :

$$L_1 = \{a, aa, ab, bb\}$$
$$L_2 = \{b, ab, ba, aa\}$$

فإن

$$L_1.L_2 = \left\{\begin{matrix} ab, aab, aba, aaa, \\ aaab, aaba, aaaa, \\ abb, abab, abba, abaa, \\ bbb, bbab, bbba, bbaa \end{matrix}\right\}$$

العمليات على اللغات (Operations on Languages)

- إغلاق لغة (Closure): إغلاق اللغة L المعرفة على الابجدية Σ هي اللغة الناتجة عن تعاقب كل سلاسل اللغة L ونرمز لإغلاق اللغة L بـ L^*:

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \ldots$$

حيث

$$L^0 = \{\varepsilon\}$$
$$L^1 = L$$
$$L^2 = L \cdot L$$
$$L^3 = L \cdot L \cdot L = L^2 \cdot L$$
$$\ldots$$

العمليات على اللغات (Operations on Languages)

- إغلاق لغة (تابع):

مثال: لتكن لدينا لغة L معرفة على ابجدية $\Sigma = \{a,b\}$ بحيث :

$$L = \{a, aa, ab, bb\}$$

إغلاق اللغة L ويرمز له بالرمز L^* معرفة كالتالي:

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \ldots$$
$$L^0 = \{\varepsilon\}$$
$$L^1 = L = \{a, aa, ab, bb\}$$
$$L^2 = L \cdot L = \left\{\begin{matrix} aa, aaa, aab, abb, \\ aaaa, aaab, aabb, \\ aba, abaa, abab, abbb, \\ bba, bbaa, bbab, bbbb \end{matrix}\right\}$$

تمارين مراجعة

1. أي من المجموعات التالية ابجدية مع شرح السبب:
   - أ- $\{a,b,c\}$
   - ب- $\{a,b,ab,ba,aa,bb\}$
   - ج- $\{a,b,0,1\}$
   - د- $\{+,-,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
2. لتكن السلسلة $x = 10011001$ معرفة على الابجدية $\Sigma = \{0,1\}$ اوجد كل من:
   - أ- مجموعة بادئات السلسلة
   - ب- مجموعة لاحقات السلسلة
   - ج- مجموعة السلاسل الجزئية للسلسلة x
   - د- $x \cdot x$
   - ه- Σ^2

تمارين مراجعة

3. لتكن لدينا اللغتين L_1 و L_2 على ابجدية $\Sigma = \{0,1\}$ بحيث :

$$L_1 = \{00,01,10,11\}$$
$$L_2 = \{0,1,00,11,000,111\}$$

اوجد كل من:
   - أ- $L_1 \cup L_2$
   - ب- $L_1 \cap L_2$
   - ج- $L_1 - L_2$
   - د- $L_2 - L_1$
   - ه- $L_1 \cdot L_2$
   - و- $L_2 \cdot L_1$
   - ز- $\overline{L_1}$
   - ح- L_1^2