

# CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages



ربيع 2024  
د. عدنان محمود عبد الله الشريف  
[adnan.sherif@uot.edu.ly](mailto:adnan.sherif@uot.edu.ly)



1

## قواعد خارج السياق Context Free Grammars

- صيغة جريباغ (Greibach Normal Form)
- صيغة جريباغ تحتم على ان تكون جميع قواعد الاشتقاق على الصور التالية  

$$A \rightarrow aC_1C_2C_3 \dots C_n$$

او

$$A \rightarrow a$$

مثال: القاعدة التالية على صيغة جريباغ

$$S \rightarrow aA \mid a$$

$$A \rightarrow bAS \mid b$$

بينما القاعدة التالية ليست على صيغة جريباغ

$$S \rightarrow aS \mid \textcolor{red}{AAS}$$

$$A \rightarrow bA \mid \textcolor{red}{aa}$$

2

## قواعد خارج السياق Context Free Grammars

- خطوات تحويل قواعد خارج السياق الى صيغة جريباغ :
  1. قم بالتخلص من القواعد التي تنتهي بـ  $\epsilon$ .
  2. قم بالتخلص من كل القواعد الأحادية.
  3. قم بإعادة كتابة القواعد في صيغة تشومسكي في حال لم تكن على هذه الصيغة.
  4. غير مسمى المتغيرات في قواعد الاشتقاق بحيث تكون مرقمة  $A_i$  حيث  $i$  يكون حسب ترتيب ظهور المتغيرات في قواعد الاشتقاق.
  5. تأكد من ان جميع قواعد الاشتقاق على الصورة  $A_i \rightarrow A_j x$  تكون  $i < j$  في حال إحدى القواعد لا تحقق الشرط فيجب تغييرها باستبدال  $A_j$  بالطرف الأيمن لقواعد الاشتقاق الخاصة بها.
  6. في حال ظهور قواعد على الصورة  $A_i \rightarrow A_i x$ ، تعرف هذه القواعد بقواعد اشتقاق معرفة بالتكرار من اليسار ويجب التخلص منها.
  7. قم بإعادة وصف القاعدة بتحديث الرباعية وقيم المجموعة  $V$  بالمتغيرات الجديدة التي تم إضافتها.

29/06/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

3

3

## قواعد خارج السياق Context Free Grammars

- مثال 1: حول القاعدة خارج السياق التالية الى صيغة جريباغ:  
 $G = (V, \Sigma, P, S) = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$

حيث

 $P:$ 

$$\begin{aligned} S &\rightarrow CA \mid BB \\ B &\rightarrow b \mid SB \\ C &\rightarrow b \\ A &\rightarrow a \end{aligned}$$

29/06/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

4

4

## قواعد خارج السياق Context Free Grammars

$S \rightarrow CA \mid BB$   
 $B \rightarrow b \mid SB$   
 $C \rightarrow b$   
 $A \rightarrow a$

• مثال 1:

الحل: نلاحظ ان القواعد خالية من قواعد اشتقاق تنتهي بـ  $\epsilon$  كما لا توجد قواعد أحادية (الخطوة رقم 1 و 2)

كما نلاحظ ان جميع قواعد الاشتقاق إما على الصورة  $A \rightarrow BC$  او  $A \rightarrow a$  إذا القاعدة على صيغة تشومسكي (الخطوة 3)

الخطوة 4: تغيير أسماء المتغيرات حسب ترتيب ظهورها في قواعد الاشتقاق كالتالي:

$A_1 \rightarrow A_2A_3 \mid A_4A_4$	$S = A_1$
$A_4 \rightarrow b \mid A_1A_4$	$C = A_2$
$A_2 \rightarrow b$	$A = A_3$
$A_3 \rightarrow a$	$B = A_4$

29/06/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

5

5

## قواعد خارج السياق Context Free Grammars

$A_1 \rightarrow A_2A_3 \mid A_4A_4$   
 $A_4 \rightarrow b \mid A_1A_4$   
 $A_2 \rightarrow b$   
 $A_3 \rightarrow a$

• مثال 1 (تابع):

الخطوة 5: تأكد من ان جميع قواعد الاشتقاق على الصورة  $A_i \rightarrow A_jx$  تكون  $i < j$ .  
 نلاحظ ان الاشتقاق  $A_1 \rightarrow A_2A_3$  و  $A_1 \rightarrow A_4A_4$  يحقق الشرط بينما  $A_4 \rightarrow A_1A_4$  لا يحقق الشرط وعليه يمكن استبدال  $A_1$  باشتقاقاتها الممكنة وإضافة هذه الاشتقاقات الى القاعدة بحيث تصبح  $A_4 \rightarrow A_1A_4$  كالتالي:

$$A_4 \rightarrow b \mid A_2A_3A_4 \mid A_4A_4A_4$$

نلاحظ ان الشرط لا يتحقق في القاعدة  $A_4 \rightarrow A_2A_3A_4$  يمكن استبدال  $A_2$  بقاعدة الاشتقاق  $A_2 \rightarrow b$  لتصبح القاعدة على الشكل:

$A_1 \rightarrow A_2A_3 \mid A_4A_4$	$S = A_1$
$A_4 \rightarrow b \mid bA_3A_4 \mid A_4A_4A_4$	$C = A_2$
$A_2 \rightarrow b$	$A = A_3$
$A_3 \rightarrow a$	$B = A_4$

29/06/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

6

6

## قواعد خارج السياق Context Free Grammars

$$\begin{aligned} A_1 &\rightarrow A_2A_3 \mid A_4A_4 \\ A_4 &\rightarrow b \mid A_1A_4 \\ A_2 &\rightarrow b \\ A_3 &\rightarrow a \end{aligned}$$

• مثال 1 (تابع) :

الخطوة 6: نلاحظ ان الاشتقاق التالي:

$$A_4 \rightarrow b \mid bA_3A_4 \mid A_4A_4A_4$$

يعرف هذا النوع من الاشتقاق بالاشتقاق المعرف بالتكرار من اليسار ويمكن التخلص منه بإضافة متغير جديد وليكن  $Z$  ويكون الاشتقاق الخاص بها هو

$$\begin{aligned} S &= A_1 \\ C &= A_2 \\ A &= A_3 \\ B &= A_4 \\ Z &\rightarrow A_4A_4Z \mid A_4A_4 \end{aligned}$$

ويتم تغيير قاعدة الاشتقاق المعرفة بالتكرار لتكون على الصورة التالية

$$\begin{aligned} A_1 &\rightarrow A_2A_3 \mid A_4A_4 \\ A_4 &\rightarrow b \mid bA_3A_4 \mid bZ \mid bA_3A_4Z \\ Z &\rightarrow A_4A_4Z \mid A_4A_4 \\ A_2 &\rightarrow b \\ A_3 &\rightarrow a \end{aligned}$$

29/06/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

7

7

## قواعد خارج السياق Context Free Grammars

• مثال 1 (تابع) :

الخطوة 7: بعد الخطوة 6 نجد ان القاعدة على الصيغة التالية

$$\begin{aligned} A_1 &\rightarrow A_2A_3 \mid A_4A_4 \\ A_4 &\rightarrow b \mid bA_3A_4 \mid bZ \mid bA_3A_4Z \\ Z &\rightarrow A_4A_4Z \mid A_4A_4 \\ A_2 &\rightarrow b \\ A_3 &\rightarrow a \end{aligned}$$

نلاحظ ان قواعد الاشتقاق باللون الأحمر ليست على صيغة جريباغ ولكن نلاحظ أيضا ان كل قواعد الاشتقاق للمتغير الأول في صيغة جريباغ وبالتالي يمكن التعويض عن المتغير الأول بالطرف الأيمن من كل اشتقاق لتصبح كالتالي:

$$\begin{aligned} A_1 &\rightarrow bA_3 \mid bA_4 \mid bA_3A_4A_4 \mid bZA_4 \mid bA_3A_4ZA_4 \\ A_4 &\rightarrow b \mid bA_3A_4 \mid bZ \mid bA_3A_4Z \\ Z &\rightarrow bA_4Z \mid bA_3A_4A_4Z \mid bZA_4Z \mid bA_3A_4ZA_4Z \mid \\ &\quad bA_4 \mid bA_3A_4A_4 \mid bZA_4 \mid bA_3A_4ZA_4 \\ A_2 &\rightarrow b \\ A_3 &\rightarrow a \end{aligned}$$

29/06/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

8

8

$A_1 \rightarrow bA_3 | bA_4 | bA_3A_4A_4 | bZA_4 | bA_3A_4ZA_4$   
 $A_4 \rightarrow b | bA_3A_4 | bZ | bA_3A_4Z$   
 $Z \rightarrow bA_4Z | bA_3A_4A_4Z | bZA_4Z | bA_3A_4ZA_4Z |$   
 $bA_4 | bA_3A_4A_4 | bZA_4 | bA_3A_4ZA_4$   
 $A_2 \rightarrow b$   
 $A_3 \rightarrow a$

## قواعد خارج السياق Context Free Grammars

• مثال 1 (تابع) :

الخطوة 7: بما إن كل قواعد الاشتقاق على صيغة جريباغ يمكن إعادة كتابة القواعد بالمتغيرات الأصلية لتصبح كالتالي:

$S = A_1$   
 $C = A_2$   
 $A = A_3$   
 $B = A_4$

$S \rightarrow bA | bB | bABB | bZB | bABZB$   
 $B \rightarrow b | bAB | bZ | bABZ$   
 $Z \rightarrow bBZ | bABBZ | bZBZ | bABZBZ |$   
 $bB | bABB | bZB | bABZB$   
 $C \rightarrow b$   
 $A \rightarrow a$

نلاحظ أيضا عدم ظهور المتغير  $C$  في الطرف الأيمن لأي من قواعد الاشتقاق وبالتالي يمكن حذف هذا الاشتقاق لتصبح القاعدة النهائية

$S \rightarrow bA | bB | bABB | bZB | bABZB$   
 $B \rightarrow b | bAB | bZ | bABZ$   
 $Z \rightarrow bBZ | bABBZ | bZBZ | bABZBZ |$   
 $bB | bABB | bZB | bABZB$   
 $A \rightarrow a$

29/06/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

9

9

## قواعد خارج السياق Context Free Grammars

• مثال 2: اكتب قواعد خارج السياق بصيغة جريباغ للتعبير عن اللغة التالية

$$L = \{0^n 1^n | n \geq 1\}$$

الحل: أولاً نحاول إيجاد قاعدة خارج السياق للتعبير عن اللغة ثم نقوم بتحويلها إلى صيغة جريباغ.

يمكن التعبير عن هذه اللغة بالقاعدة التالية

$$G = (V, \Sigma, P, S) = (\{S\}, \{0, 1\}, P, S)$$

حيث

$$P: S \rightarrow 0S1 | 01$$

29/06/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

10

10

## قواعد خارج السياق Context Free Grammars

$P: S \rightarrow 0S1|01$

- مثال 2) (تابع): نلاحظ ان قواعد الاشتقاق لا تحتوي على قواعد اشتقاق تنتهي بـ  $\epsilon$  كما لا توجد قواعد أحادية إذن يمكن اتباع خطوات تحويل القاعدة الى صيغة تشومسكي لتصبح:

$$S' \rightarrow AB|AC$$

$$S \rightarrow AB|AC$$

$$A \rightarrow 0$$

$$B \rightarrow SC$$

$$C \rightarrow 1$$

يمكن اتباع الخطوات من 4 الى 7 للحصول على صيغة جريباغ

29/06/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

11

11

## قواعد خارج السياق Context Free Grammars

$$S' \rightarrow AB|AC$$

$$S \rightarrow AB|AC$$

$$A \rightarrow 0$$

$$B \rightarrow SC$$

$$C \rightarrow 1$$

- مثال 2) (تابع): الخطوة رقم 4 إعادة تسمية المتغيرات حسب ترتيب ظهور هذه المتغيرات في قواعد الاشتقاق لتصبح القاعدة على النحو التالي:

$$A_1 \rightarrow A_2A_3|A_2A_4$$

$$A_5 \rightarrow A_2A_3|A_2A_4$$

$$A_2 \rightarrow 0$$

$$A_3 \rightarrow A_5A_4$$

$$A_4 \rightarrow 1$$

حيث

$$S' = A_1$$

$$S = A_5$$

$$A = A_2$$

$$B = A_3$$

$$C = A_4$$

29/06/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

12

12

$$\begin{array}{ll}
A_1 \rightarrow A_2 A_3 | A_2 A_4 & S' = A_1 \\
A_5 \rightarrow A_2 A_3 | A_2 A_4 & S = A_5 \\
A_2 \rightarrow 0 & A = A_2 \\
A_3 \rightarrow A_5 A_4 & B = A_3 \\
A_4 \rightarrow 1 & C = A_4
\end{array}$$

## قواعد خارج السياق Context Free Grammars

- مثال 2) تابع ):
- الخطوة رقم 5: تأكد من أن جميع قواعد الاشتقاق على الصورة  $A_i \rightarrow A_j x$  تكون  $i < j$  في حال إحدى القواعد لا تحقق الشرط فيجب تغييرها باستبدال  $A_j$  بالطرف الأيمن لقواعد الاشتقاق الخاصة بها.

- نلاحظ أن قاعدة الاشتقاق  $A_5 \rightarrow A_2 A_3 | A_2 A_4$  لا تحقق الشرط بالتالي علينا استبدال قاعدة الاشتقاق الخاصة بها لتصبح على النحو التالي:

$$\begin{array}{l}
A_1 \rightarrow A_2 A_3 | A_2 A_4 \\
A_5 \rightarrow 0 A_3 | 0 A_4 \\
A_2 \rightarrow 0 \\
A_3 \rightarrow A_5 A_4 \\
A_4 \rightarrow 1
\end{array}$$

29/06/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

13

13

$$\begin{array}{ll}
A_1 \rightarrow A_2 A_3 | A_2 A_4 & S' = A_1 \\
A_5 \rightarrow 0 A_3 | 0 A_4 & S = A_5 \\
A_2 \rightarrow 0 & A = A_2 \\
A_3 \rightarrow A_5 A_4 & B = A_3 \\
A_4 \rightarrow 1 & C = A_4
\end{array}$$

## قواعد خارج السياق Context Free Grammars

- مثال 2) تابع ):
- نلاحظ أن قاعدة الاشتقاق  $A_1 \rightarrow A_2 A_3 | A_2 A_4$  ليست على صيغة جريباغ علينا استبدال  $A_2$  بقاعدة الاشتقاق الخاصة بها لتصبح على النحو التالي:

$$\begin{array}{l}
A_1 \rightarrow 0 A_3 | 0 A_4 \\
A_5 \rightarrow 0 A_3 | 0 A_4 \\
A_2 \rightarrow 0 \\
A_3 \rightarrow A_5 A_4 \\
A_4 \rightarrow 1
\end{array}$$

- كما نلاحظ أن القاعدة  $A_3 \rightarrow A_5 A_4$  ليست على صيغة جريباغ علينا استبدال  $A_5$  بقاعدة الاشتقاق الخاصة بها لتصبح على النحو التالي:

$$\begin{array}{l}
A_1 \rightarrow 0 A_3 | 0 A_4 \\
A_5 \rightarrow 0 A_3 | 0 A_4 \\
A_2 \rightarrow 0 \\
A_3 \rightarrow 0 A_3 A_4 | 0 A_4 A_4 \\
A_4 \rightarrow 1
\end{array}$$

29/06/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

14

14

## قواعد خارج السياق Context Free Grammars

$$\begin{array}{ll} A_1 \rightarrow 0A_3|0A_4 & S' = A_1 \\ A_5 \rightarrow 0A_3|0A_4 & S = A_5 \\ A_2 \rightarrow 0 & A = A_2 \\ A_3 \rightarrow 0A_3A_4|0A_4A_4 & B = A_3 \\ A_4 \rightarrow 1 & C = A_4 \end{array}$$

• مثال 2) تابع ):

• نلاحظ ان جميع قاعدة الاشتقاق على صيغة جيرباغ كما نلاحظ ان  $A_2$  و  $A_5$  لا يمكن الوصول اليهما من متغير البداية  $A_1$  وبالتالي هذه المتغيرات واشتقاقاتها غير مفيدة ويمكن التخلص منها لتصبح على النحو التالي:

$$\begin{array}{l} A_1 \rightarrow 0A_3|0A_4 \\ A_3 \rightarrow 0A_3A_4|0A_4A_4 \\ A_4 \rightarrow 1 \end{array}$$

يمكن الان إعادة كتابة القواعد باستخدام المتغيرات الاصلية على النحو التالي:

$$\begin{array}{l} S' \rightarrow 0B|0C \\ B \rightarrow 0BC|0CC \\ C \rightarrow 1 \end{array}$$

حيث  $G = (V, \Sigma, P, S) = (\{S', B, C\}, \{0, 1\}, P, S')$

29/06/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

15

15

## اللغات خارج السياق Context Free Languages

- توطئة الضخ في اللغات خارج السياق (Pumping Lemma in Context Free Languages)
- مثل توطئة الضخ في اللغات المنتظمة، تستخدم توطئة الضخ للتوضيح ان لغة ليست من اللغات خارج السياق.
- لكل لغة خارج السياق  $L$  يوجد ثابت  $p \geq 1$  يدعى ثابت التوطئة بحيث لكل سلسلة  $w$  تنتمي الى  $L$  تكون  $|w| \geq p$  وعندئذ يمكن إعادة كتابة  $w$  بالشكل  $w = uvxyz$  بحيث:
  - $vy \neq \epsilon$  لا يمكن ان تكون  $v$  و  $y$  السلسلة الفارغة
  - $|vxy| \leq p$  طول تتابع السلسلة  $v$  و  $x$  و  $y$  يجب ان يكون اقل من او يساوي  $p$
  - $\forall k \ k \geq 0 \wedge uv^kxy^kz \in L$
- لكل  $k \geq 0$  عند تكرار السلسلة  $v$  و  $y$  من المرات السلسلة الناتجة تنتمي الى اللغة  $L$

29/06/2024

CS441/CS241 Automata Theory and Formal Languages

اعداد د. عدنان محمود الشريف ، قسم الحاسب الآلي - كلية العلوم - جامعة طرابلس

16

16



## اللغات خارج السياق Context Free Languages

• تستخدم توطئة الضخ لأثبت ان اللغة  $L$  ليست لغة خارج السياق باستخدام الاثبات بالنقد بالخطوات التالية:

1. نفرض ان اللغة  $L$  لغة خارج السياق (الفرضية)
2. نبحت عن ثابت ضخ مناسب  $p$
3. بأخذ أي سلسلة  $w$  حيث  $|w| \geq p$
4. نقسم  $w = uvxyz$  بحيث  $|vxy| \leq p$
5. بين ان لقيمة معينة  $k$  بحيث  $uv^kxy^kz \notin L$
6. هذا تناقض مع الفرضية وعليه اللغة  $L$  غير منتظمة

## اللغات خارج السياق Context Free Languages

• مثال 3: برهن باستخدام توطئة الضخ ان اللغة  $L = \{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$  ليست لغة خارج السياق.

• الحل: نلاحظ ان اللغة الناتجة تتكون من سلاسل بها عدد من  $a$  متبوع بنفس العدد من  $b$  متبوع بنفس العدد من  $c$  أي المجموعة التالية:

$$L = \{\varepsilon, abc, aabbcc, aaabbbccc, \dots\}$$

لا نستطيع تكوين قواعد اشتقاق لهذه اللغة  
ويمكن اثبات ان هذه اللغة ليست لغة خارج السياق باستخدام توطئة الضخ.

## اللغات خارج السياق Context Free Languages

### • مثال 3 (تابع):

- أولاً نفرض ان اللغة خارج السياق
- نقوم باختيار ثابت الضخ  $p$
- نقوم باختيار سلسلة  $w$  من اللغة بحيث تحقق  $|w| \geq p$  ولتكن  $w = a^p b^p c^p$
- نقسم  $w = uvxyz$  بحيث  $|vxy| \leq p$  وهذا الشرط مهم جدا حيث السلسلة  $w$  التي تم اختيارها طولها  $3p$  عليه يوجد احتمالين هما:
  1. يتم اختيار  $vxy$  بحيث تكون في حرفين يعني كان تكون  $v = a^r$   $x = b^q$   $y = b^s$  او  $v = b^r$   $x = c^q$   $y = c^s$  ولا يمكن ان تحتوي على ثلاثة حروف لان طول السلسلة  $(r + q + p)$  يجب ان تكون اقل من او تساوي  $p$
  2. يتم اختيار  $vxy$  بحيث تكون في حرف واحد فقط كان تكون  $v = a^r$   $x = a^q$   $y = a^s$  او  $v = b^r$   $x = b^q$   $y = b^s$  او  $v = c^r$   $x = c^q$   $y = c^s$

## اللغات خارج السياق Context Free Languages

### • مثال 3 (تابع):

- اثبات الاحتمال الأول: تقسيم السلسلة  $w = a^p b^p c^p$  على النحو التالي  $w = uvxyz$  حيث
 
$$u = a^{p-r} \quad v = a^r \quad x = b^q \quad y = b^s \quad z = b^{p-q-s} c^p$$
 حيث من الشرط  $vy \neq \epsilon$  نعرف ان  $r \neq 0$  او  $s \neq 0$   
 علينا إيجاد قيمة  $k$  بحيث  $k \geq 0$  وتكون  $uv^k xy^k z \notin L$  بالتعويض عن قيم المتغيرات نحصل على
 
$$\begin{aligned} uv^k xy^k z &= a^{p-r} (a^r)^k b^q (b^s)^k b^{p-q-s} c^p \\ &= a^{p-r} a^{rk} b^q b^{sk} b^{p-q-s} c^p \\ &= a^{p-r+rk} b^{q+sk+p-q-s} c^p \\ &= a^{p-r+rk} b^{p-s+sk} c^p \end{aligned}$$
 من وصف اللغة يجب ان تكون المعادلة التالية صحيحة لكل قيم  $k$ 

$$p - r + rk = p - s + sk = p$$
 وهذه المعادلة صحيحة فقط في حال  $k = 1$  وخاطئة في كمال القيم الأخرى  $k \neq 1$   
 عليه هذا تناقض مع الفرضية وعليه الفرضية خاطئة واللغة ليست لغة خارج السياق #

## اللغات خارج السياق Context Free Languages

• مثال 3 (تابع):

• اثبات الاحتمال الثاني : تقسيم السلسلة  $w = a^p b^p c^p$  على النحو التالي  $w = uvxyz$  حيث  
 $u = a^{p-r-q-s}$   $v = a^r$   $x = a^q$   $y = a^s$   $z = b^p c^p$

حيث من الشرط  $vy \neq \varepsilon$  نعرف ان  $r \neq 0$  او  $s \neq 0$   
 علينا إيجاد قيمة  $k$  بحيث  $k \geq 0$  وتكون  $uv^k xy^k z \notin L$   
 بالتعويض عن قيم المتغيرات نحصل على

$$\begin{aligned} uv^k xy^k z &= a^{p-r-q-s} (a^r)^k a^q (a^s)^k b^p c^p \\ &= a^{p-r-q-s} a^{rk} a^q a^{sk} b^p c^p \\ &= a^{p-r-q-s+rk+q+sk} b^p c^p \\ &= a^{p-r+rk-s+sk} b^p c^p \end{aligned}$$

من وصف اللغة يجب ان تكون المعادلة التالية صحيحة لكل قيم  $k$

$$p - r + rk - s + sk = p$$

وهذه المعادلة صحيحة فقط في حال  $k = 1$  وخاطئة في كالم القيم الأخرى  $k \neq 1$   
 عليه هذا تناقض مع الفرضية وعليه الفرضية خاطئة واللغة ليست لغة خارج السياق #