6-ma'ruza.Kombinatorikaning asosiy qoidalari. Takroriy bo'lmagan o'rinlashtirish, o'rin almashtirish va guruhlashlar

Kombinatorikaning 1-qoidasi, Kombinatorikaning 2-qoidasi. Tartiblangan va tartiblanmagan tanlashlar. Kombinatorika elementlari: o'rinlashtirish, o'rin almashtirish va guruhlashlar soni. Guruhlash qoidalari. Misollar. Nyuton binomi. Binomial koeffiesientlarning xossalari.

Kombinatorikaning asosiy qoidalari.

Kombinatorika – diskret matematikaning bo'limlaridan biri bo'lib, ehtimollar nazariyasi, matematik mantiq, sonlar nazariyasi, hisoblash texnikasi va kibernetikada ko'p qo'llanilgani uchun muhim ahamiyatga ega bo'ldi.

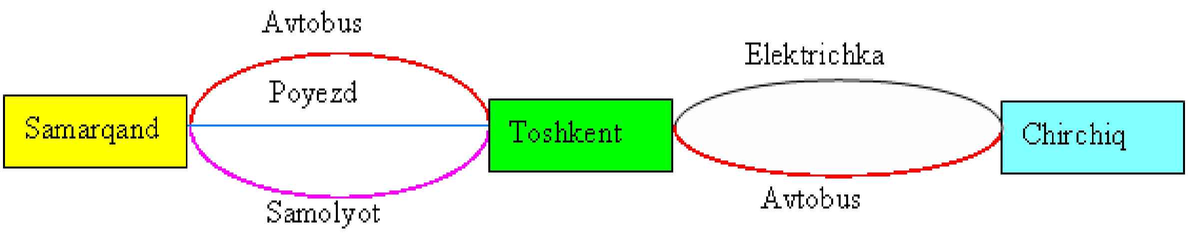
Insoniyat juda ko'p marotaba ayrim predmetlarni barcha joylashtirish usullari sonini sanab chiqish yoki biror bir harakatni amalga oshirishdagi barcha mavjud usullar sonini aniqlash kabi masalalarga duch keladi.

Masalan: 50 kishini kassadagi navbatga necha xil usulda joylashtirish mumkin? Futbol bo'yicha jahon chempionatida necha xil usulda oltin, kumush, bronza medallarni taqsimlash mumkin. Bunday tipdagi masalalar kombinator masalalar deyiladi.

Kombinator hisoblashlarda ko'p qo'llaniladigan juda **muhim qoidani** o'rnataylik.

1-masala. Samarqanddan Toshkentga samolyot, avtobus, poyezdda yetib borish mumkin; Toshkentdan Chirchiqqa esa avtobus yoki elektrichkada borish mumkin.

Samarqand - Toshkent – Chirchiq yo'nalishi bo'yicha necha xil usulda sayoxat uyushtirish mumkin.



Yechilishi: Tushunarliki Samarqanddan Chirchiqqacha borish usullari $3\times 2=6$ ga teng, chunki Samarqanddan Toshkentgacha 3 xil borish usullariga, Toshkentdan Chiqchiqqacha 2 xil borish usullari mos keladi. Ushbu mulohazalar quyidagi **kombinatorikaning asosiy qoidasi** deb nomlanadigan sodda tasdiqni isbotlaydi.

Kombinatorikaning 1-qoidasi: *Agar qandaydir **A** tanlashni **m** usul bilan, bu usullarning har biriga biror bir boshqa **B** tanlashni **n** usulda amalga oshirish mumkin bo'lsa, u holda **A va B** tanlashni (ko'rsatilgan tartibda) $m\times n$ usulda amalga oshirish mumkin.*

2-masala. Futbol bo'yicha mamlakat chempionatida 18 ta komanda qatnashadi.

Necha xil usulda oltin va kumush medallar taqsimlanishi mumkin?

Yechilishi: Oltin medalni 18 ta komandadan biri egallashi mumkin. Oltin medal sohibi aniqlangandan keyin, kumush medalni qolgan 17 ta komandani biri egallashi mumkin. Demak oltin va kumush medallarni $18\times 17=306$ xil usulda taqsimlash mumkin.

Endi kombinatorikaning asosiy qoidasini (**ko‘paytirish formulasini**) umumiy holda keltiramiz.

*Aytaylik birin-ketin **k** ta harakatni amalga oshirish talab qilngan bo‘lsin. Agar birinchi harakatni -* $\boldsymbol{n_1}$ *usulda, ikkinchi harakatni -* $\boldsymbol{n_2}$ *usulda, va hokazo **k** – harakatni -* $\boldsymbol{n_k}$ *usulda amalga oshirish mumkin bo‘lsa, u holda barcha **k** ta harakatni*

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times ... \times n_k$$

usulda amalga oshirish mumkin bo‘ladi.

masala. $p_1, p_2, ..., p_n$ – turli sodda sonlar, $\alpha_1,\ \alpha_2, ..., \alpha_n$ qandaydir natural sonlar bo‘lgan quyida berilgan son

$$m = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_n^{\alpha_n}$$

Nechta turli bo‘luvchilarga ega? $3^5 \times 5^4$ sonchi?

Yechilishi: $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times .... \times (\alpha_n + 1)$ ta umumiy bo‘luvchiga ega; $3^5 \times 5^4$ son esa $6 \times 5 = 30$ ta bo‘luvchiga ega.

Berilgan to‘plamning *k*-elementli to‘plam ostilari soni.

Agar A to‘plam berilgan bo‘lsa, u holda biz yangi to‘plam uning barcha to‘plam ostilar to‘plami M(A) ni ko‘rib chiqishimiz mumkin. M_k (A) – deb A to‘plamning baarcha *k* – elementli to‘plam ostilar to‘plamini belgilaymiz. Shunday qilib agar B $\subset$M(A) va N(B)=*k* bo‘lsa, B$\subset M_k$(A) bo‘ladi.
Misol. Aytaylik A={*a, b, c, d,*} to‘plam berilgan bo‘lsin.
U holda barcha to‘plam ostilar quyidagicha
M(A)={{∅}, {*a*}, {*b*}, {*c*}, {*d*}, {*a,b*},{*a, c*}, {*a, d*}, {*b, c*}, {*b,d*}, {*c, d*}, {*a,b,c*}, {*a,b,d*}, {*a,d,c*}, {*b,d,c*}, { *a, b, c, d,*}}.
Barcha masalan 2-elementli to‘plam ostilar to‘plami esa
M_2(A)={{*a,b*},{*a, c*}, {*a, d*}, {*b, c*}, {*b,d*}, {*c, d*}}
bo‘ladi.
N (M(A)) =2^4=16, *N* (M_2(A))=6 bo‘ladi.
Ushbu natijalarni ozgina tahlil qilaylik. 4 ta elementli to‘plamlardan 2 ta elementli to‘plam ostilar olish protsesida 1- element olishda 4 xil imkoniyatga egamiz, 2-elementni olishda endi 3 xilimkoniyatga ega bo‘lamiz. Natijada barcha 2 ta elementli 4*3=12 ta to‘plamga ega bo‘lamiz, lekin to‘plamlarda {*a,b*}element bilan {*b,a*} bitta element hisoblangani uchun va to‘plamda bitta element faqat bir marta yoziladi degan qoida borligi uchun bunday 2 taliklar soni 2 baravarga qisqaradi: $\frac{4*3}{2} = \frac{12}{2} = 6$ ta turli xil 2 talik to‘plam ostilar mavjud ekanligi aniqlanadi. Qonuniyat chiqarishga harakat qilamiz:

$$\frac{4*3}{2} = \frac{4*3*2*1}{1*2*1*2} = \frac{4!}{2!*2!} = \frac{4!}{2!*(4-2)!}$$

Tabiiy savol tug‘iladi: *n* – elementli to‘plam nechta *k* – elementli to‘plam ostiga ega bo‘ladi ?

Teorema. n – elementli to‘plamning barcha k – elementli to‘plam ostilar soni

$$N(M_k(A)) = \frac{n*(n-1)*(n-2)*.....*(n-(k-1))}{1*2*3*....*k} = \frac{n*(n-1)*....*(n-(k-1))*(n-k)*....*2*1}{1*2*3*...*k*(n-k)*....*2*1} =$$

$$= \frac{n!}{k!*(n-k)!} = C_n^k$$

teng bo‘ladi.

n – elementli to‘plamning ixtiyoriy k – elementli to‘plam ostilari ***n* – *elementdan k tadan guruhlash*** deb nomlanadi. Ayrim hollarda guruhlash so‘zini o‘rniga ***kombinatsiya n elementdan k tadan*** termini ham ishlatiladi.

Masala 1. Necha xil usulda 5 ta kitobdan 3 tadan qilib tanlab olish mumkin?

Masala 2. Necha xil usulda 7 odamdan 3 kishidan qilib komissiya tuzish mumkin?

Masala 3. Turnirda ***n*** ta shaxmatchi qatnashdi, agar ixtiyoriy 2 ta shaxmatchi o‘zaro faqat

bir marta uchrashgan bo‘lsa, turnirda nichta partiya o‘yin o‘tqazilgan?

Masala 4. Qavariq ***n*** **–** burchak dioganallari nechta nuqtada kesishadi, agar ularning

ixtiyoriy 3 tasi bir nuqtada kesishmasa.

Quyidagi tengliklar o‘rinli:

$$C_{n+m}^{n} = C_{n+m}^{m}$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

Ularning to‘g‘riligiga kombinatsiyalarni faktoriallar orqali yozib chiqib ishonch hosil qilish mumkin.

Masala 5. Quyidagi ayniyatni isbotlang

$$C_{2n}^{n} = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2 .$$

Teorema. ***n*** elementli to‘plamning barcha to‘plam ostilar soni 2^n ga teng va quyidagi tenglik o‘rinli

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^k \quad .$$

Haqiqatdan ham C_n^k - ***n*** elementli to‘plamning barcha ***k*** – elementli to‘plam ostilari soni bo‘lgani uchun, tushunarliki barcha to‘plam ostilar soni esa

$$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$$

yig‘indiga teng bo‘lib ularning yig‘indisi 2^n ga teng bo‘ladi.

Berilgan to‘plamni o‘rinalmashtirish.

To‘plamning har bir elementiga 1 dan ***n*** gacha sonlardan birortasi mos qo‘yilgan bo‘lib, turli elementlarga turli sonlar mos qo‘yilgan bo‘lsa, to‘plam

tartiblashtirilgan deyiladi, bu erda n – to‘plamdagi elementlar soni. Agar masalan to‘plam elementlarini biror bir ro‘yxatda yozib, keyin har bir elementga ro‘yxatda turgan joy nomerini mos qo‘yilsa har qanday chekli to‘plamni tartiblashtirish mumkin. A to‘plamdan hosil qilingan tartiblashtirilgan to‘plamni $\vec{A}$ kabi belgilanadi. Tushunarliki bittadan ortiq elementi bor to‘plamni bir nechta usullar bilan tartiblashtirish mumkin. Tartiblashtirilgan to‘plamlar turli hisoblanadi agar ular yoki elementlari bilan farq qilsa, yoki ulatning tartibi bilan farq qilsa. Faqat elementlar tartibi bilan farq qiladigan turli tartiblashtirilgan turli to‘plamlar ushbu to‘plamninig ***o‘rin almashtirishi*** deyiladi.

Misol. Uchta elementdan iborat A=$\{a, b, c\}$ to‘plam o‘rin almashtirishlari quyidagicha bo‘ladi:

$$(a, b, c), \quad (a, c, b), \quad (b, a, c),$$
$$(b, c, a), \quad (c, a, b), \quad (c, b, a).$$

O‘rin almashtirishlar soni 6 ta bo‘ldi. Agar A to‘plam n ta elementdan iborat bo‘lsa, u holda ularning barcha o‘rin almashtirishlar sonini P_n kabi belgilaymiz.

Teorema. n ta elementdan iborat A to‘plam uchun

$$P_n = n!$$

bo‘ladi.

Masala 1. Tokchada 5 ta kitobni necha xil usulda joylashtirish mumkin.

$$P_5=1*2*3*4*5=5!=120$$

Masala 2. $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ to‘plam elementlarini juft sonlari juft o‘rinlarda keladigan qilib necha xil usulda tartiblashtirish mumkin?

Juft sonlarni juft nomerli o‘rinlarda (bunday joylar n ta) $n!$ ta usulda qo‘yib chiqish mumkin, bu usullarning har biriga toq sonlarni toq nomerli o‘rinlarda $n!$ ta usulda qo‘yib chiqish mos keladi. Shuning uchun ham ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra barcha o‘rniga qo‘yishlar soni $n!*n! = (n!)^2$ ga teng bo‘ladi.

Masala 3. n ta elementdan berilgan ikkita elementi yonma-yon turmaydigan nechta o‘rin almashtirish yasash mumkin.

a va b elementlar berilgan bo‘lsin. Bu elementlar yonma-yon turgan o‘rin almashtirishlar sonini aniqlaymiz. Bunda birinchi hol a element b elementdan oldin kelishi mumkin, bunda *a* birinchi o‘rinda, ikkinchi o‘rinda, va hokazo (*n*-1)-o‘rinda turishi mumkin. Ikkinchi hol *b* element *a* elementdan oldin kelishi mumkin, bunday holatlar ham (*n*-1) ta bo‘ladi. Shunday qilib *a* va *b* elementlar yonma-yon keladigan holatlar soni 2* (*n*-1) ta bo‘ladi. Bu usullarning har biriga qolgan (*n*-2) ta elementning (*n*-2)! ta o‘rin almashtirishi mos keladi. Demak *a* va *b* elementlar yonma-yon keladigan barcha o‘rin almashtirishlar soni 2* (*n*-1)*(*n*-2)! =2*(*n*-1)! ta bo‘ladi. Shuning uchun ham izlanayotgan o‘rin almashtirishlar soni

$$n! - 2*(n - 1)! = (n -1)!*(n - 2)$$

Berilgan to‘plamning tartiblashtirilgan to‘plam ostilari (joylashtirish)

Endi berilgan A to‘plamning tartiblashtirilgan to‘plam ostilarini ko‘rib chiqamiz. A to‘plamni o‘zi tartiblashmagan hisoblaymiz, shuning uchun ham uning har bir to‘plam ostisi biror bir usul orqali tartiblashtirish mumkin. A to‘plamninig barcha *k* elementli to‘plam ostilari C_n^k ta bo‘ladi. Bu to‘plamlarning har birini *k*! ta usulda tartiblashtiriladi. Shunday qilib A to‘plamning barcha tartiblashtirilgan *k*-elementli to‘plam ostilari soni *k*!* C_n^k ta bo‘ladi.

Teorema. *n* ta elementdan iborat to‘plamning tartiblashtirilgan *k* – elementli to‘plam ostilari soni

$$A_n^k = k!*C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n*(n-1)*(n-2)*....*(n-(k-1))$$

ta bo‘ladi.

n elementli to‘plamning tartiblashtirilgan *k*-elementli to‘plam ostilari *n* ta elementdan *k* tadan ***joylashtirish*** deyiladi. Turli xil joylashtirishlar elementlar soni yoki ularning tartibi bilan farq qiladi. Shunday qilib *n* ta elementdan *k* tadan ***joylashtirishlar*** soni

$$A_n^k = n*(n-1)*(n-2)*....*(n-(k-1)).$$

ga teng bo‘ladi.

Masala 4. 5 ta talabani 10 ta joyga necha xil usulda joylashtirib chiqish mumkin?

Qidirilayotgan usullar soni 25 ta elementdan 4 tadan joylashtirishlar soniga teng.

$$A_{10}^5 = 10*9*8*7*6 = 30240$$

Masala 5. Talaba 4 ta imtixonni 7 kun davomida topshirishi kerak. Buni necha xil usulda amalga oshirish mumkin?

$$A_7^4 = 7*6*5*4 = 840$$

Agar oxirgi imtixon 7-kun topshirilishi aniq bo‘lsa, u holda usullar soni

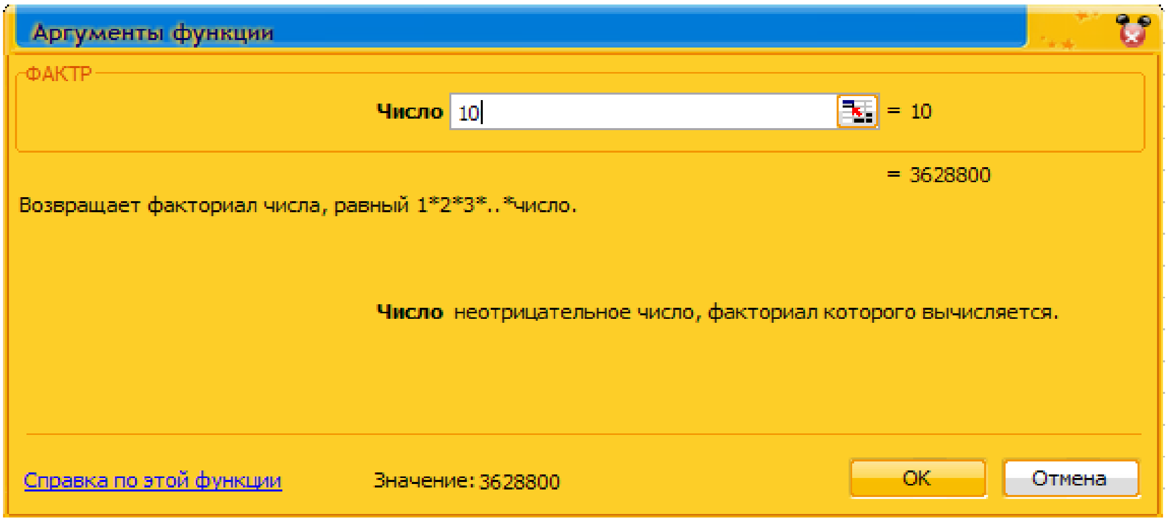
$$4*A_6^3 = 4*6*5*4 = 480$$

Masala 6. Futbol chempionatida 16 ta komanda qatnashadi. Komandalarning oltin, kumush, bronza medallar va oxirgi ikkita o‘rinni egallaydigan variantlari nechta bo‘ladi?

$$A_{16}^3 * A_{13}^2 = 16*15*14*13*12 = 524160$$

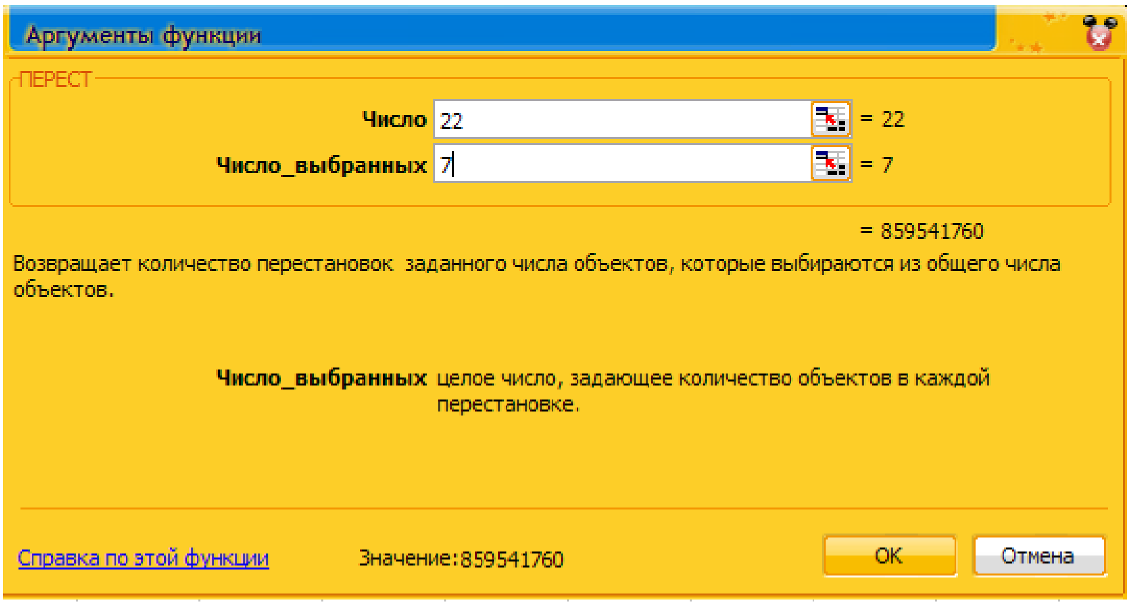
Shu o‘rinda eslatib o‘tamiz BMI, magistrlik dissertatsiyasi yoki ilmiy ishingizda

$\boldsymbol{P_n = n!}$ ***va*** A_n^k



koeffitsiyentlarni hisoblashga to‘g‘ri kelsa, unda Excel dasturlar paketidagi mos ravishda **ФАКТР** va **ПЕРЕСТ** komandalaridan foydalanishlariz mumkin:

Masalan: $P_{10}=10!=3628800$ va A_{22}^7=859541760



ek

anl

igi

ni

tez

lik

bil

an

hisoblash hech qanday qiyinchilik tug‘dirmaydi.