**1-mavzu:To'plamlar va ular ustida amallar. Eyler-Venn diagrammalari. To'plamning quvvatini topishga doir masalalar yechish**

Chekli to‘plamning elementlari soniga shu **to‘plamning quvvati** deyiladi. Berilgan $A$ to‘plamning quvvati $|A|$ ko‘rinishda belgilanadi.

**1- misol.** Ushbu to‘plamlar berilgan bo‘lsin: $A=\{a\}$, $B=\{a,b\}$, $C=\{a,b,c,d,e\}$, $D=\{1,2,3,...,n\}$, $E=\{m\,|\,m=2z\}$, $F=\{2,3,5,7,...,p,...\}$, bu yerda $n$ – natural son, $z$ – butun son, $p$ – tub son. Berilgan oltita to‘plamdan to‘rttasi – $A$, $B$, $C$ va $D$ to‘plamlar chekli, $E$ va $F$ to‘plamlar esa cheksiz to‘plamlardir. Bundan tashqari, $|A|=1$, $|B|=2$, $|C|=5$ va $|D|=n$.

Berilgan $A$ to‘plamga $a$ element tegishliligi $a\in A$ yoki $A\ni a$ ko‘rinishda belgilanadi va “$a$ tegishli $A$” deb o‘qiladi. Masalan, $A=\{2,4,6,8,10\}$ to‘plam uchun $4\in A$, $6\in A$, va $10\in A$ (bularni umumlashtirib, $4,6,10\in A$ ko‘rinishda yozish ham mumkin), lekin $12\notin A$ va $14\notin A$ (ya’ni, $12,14\notin A$).

Agar $B$ to‘plamning har bir elementi $A$ to‘plamda ham bor bo‘lsa, u holda $B$ to‘plam $A$ to‘plamning **qism to‘plami** deb aytiladi. $B$ to‘plam $A$ to‘plamning qism to‘plami ekanligi $B\subseteq A$ yoki $A\supseteq B$ ko‘rinishda belgilanadi. Tabiiyki, bu belgilashlar $A$ va $B$ to‘plamlarning teng bo‘lgan holini ham nazarda tutadi. $A\subseteq B$ va $B\subseteq A$ bo‘lishidan $A=B$ kelib chiqadi.

**2- misol.** $\boldsymbol{N}$ natural sonlar to‘plami $\boldsymbol{R}$ haqiqiy sonlar to‘plamining qism to‘plamini tashkil etadi: $\boldsymbol{N}\subseteq\boldsymbol{R}$. ■

**3- misol.** Nukus shahridagi barcha talabalar to‘plami O‘zbekistondagi barcha talabalar to‘plamining qism to‘plamidir. ■

**4- misol.** O‘nli sanoq tizimidagi yozuvining oxirgi raqami 0, 2, 4, 6 yoki 8 raqamlaridan biri bo‘lgan natural sonlar to‘plami ikkiga qoldiqsiz bo‘linadigan natural sonlar to‘plamining qism to‘plamidir. ■

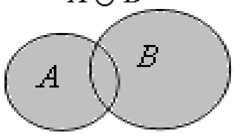
**5- misol.** $A=\{a,b,c,d,e,\}$ to‘plam uchun $B=\{a\}$, $C=\{a,b\}$ to‘plamlarning har biri xos qism to‘plamdir. ■

## To‘plamlar ustida amallar

**To‘plamlarning birlashmasi.** Har qanday ikkita to‘plamning barcha elementlaridan, ularni takrorlamasdan, tuzilgan to‘plamga shu **to‘plamlarning birlashmasi** (yoki **yig‘indisi**) deb aytiladi.

Bu ta’rifdan ko‘rinib turibdiki, to‘plamlarning umumiy elementlari shu to‘plamlarning birlashmasiga faqat bir martadan kiritiladi. Berilgan to‘plamlarning birlashmasidagi har qanday element shu to‘plamlarning hech bo‘lmaganda bittasiga tegishlidir. $A$ va $B$ to‘plamlarning birlashmasi $A\cup B$ kabi belgilanadi. Bu yerda "$A$ va $B$ to'plamlarga birlashma amalini qo'llab (yoki $A$ va $B$ to'plamlar ustida birlashma amali bajarilib), $A\bigcup B$ to'plam hosil qilindi" deyish mumkin. 1-shaklda $A$ va $B$ to'plamlar doiralar ko'rinishida, $A\bigcup B$ to'plam esa bo'yab tasvirlangan.

$A\bigcup B$



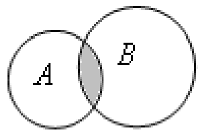

1- shakl

**1- misol.** $A=\{a,b\}$, $B=\{a,b,c\}$ va $C=\{e,f,k\}$ bo'lsin. U holda $E=A\bigcup B=\{a,b,c\}$, $E\bigcup C=\{a,b,c,e,f,k\}$, $C\bigcup B=\{a,b,c,e,f,k\}$, $A\bigcup C=\{a,b,e,f,k\}$ bo'ladi.

**To'plamlarning kesishmasi.** Har qanday ikkita to'plamning barcha umumiy elementlaridan tuzilgan to'plamga **to'plamlarning kesishmasi** (yoki **ko'paytmasi**) deyiladi.

Berilgan $A$ va $B$ to'plamlarning kesishmasi $A\bigcap B$ kabi belgilanadi. Bu yerda "$A$ va $B$ to'plamlarga kesishma amalini qo'llab, $A\bigcap B$ to'plam hosil qilindi" deyish mumkin. 2- shaklda $A$ va $B$ to'plamlar doiralar ko'rinishida, $A\bigcap B$ to'plam esa bo'yab tasvirlangan. To'plamlar ustidagi amallarning yuqorida ta'kidlangan o'ziga xos xususiyatlari to'plamlar ko'paytmasini (kesishmasini) topishda ham namoyon bo'ladi. Masalan, $A\subseteq B$ bo'lsa, u holda $A\bigcap B=A$ va $B\bigcap A=A$ bo'ladi.

$A\bigcap B$




2- shakl

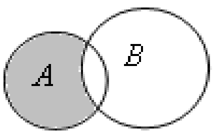
Bitta ham umumiy elementga ega bo'lmagan ikkita to'plamlarning kesishmasi bo'sh to'plam bo'lishi tabiiydir. Kesishmasi bo'sh bo'lgan to'plamlar **o'zaro kesishmaydigan**, kesishmasi bo'sh bo'lmagan to'plamlar esa **o'zaro kesishadigan to'plamlar** deb ataladi.

**2- misol.** $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $C=\{e,f,k\}$ bo'lsa, u holda $D=A\bigcap B=\{a,b,c\}$, $D\bigcap C=\varnothing$, $A\bigcap C=\varnothing$, $B\bigcap C=\varnothing$, $D\bigcap B=\{a,b,c\}$ bo'ladi. ■

**To'plamlarning ayirmasi.** Ixtiyoriy $A$ va $B$ to'plamlar berilgan bo'lsin. $A$ to'plamning $B$ to'plamda bo'lmagan barcha elementlaridan tuziladigan to'plamni hosil qilish $A$ **to'plamdan** $B$ **to'plamni ayirish** deb, tuzilgan to'plam esa, shu $A$ va $B$ **to'plamlarning ayirmasi** deb ataladi.

$A$ to'plamdan $B$ to'plamni ayirish natijasida hosil bo'lgan to'plam, ya'ni $A$ va $B$ to'plamlarning ayirmasi $A\setminus B$ yoki $A-B$ ko'rinishida belgilanadi. Bu yerda "$A$ to'plamdan $B$ to'plamni ayirish amalini qo'llab, $A\setminus B$ to'plam hosil qilindi" deyish mumkin. 3-shaklda $A$ va $B$ to'plamlar doiralar ko'rinishida, $A\setminus B$ to'plam esa bo'yab tasvirlangan.

$A\setminus B$



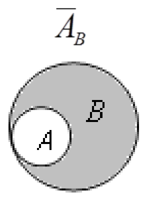

3- shakl

Ixtiyoriy $A$ va $B$ to'plamlar uchun $A\bigcap B=\varnothing$ bo'lsa, u holda $A\setminus B=\varnothing$ va $B\setminus A=\varnothing$ bo'lishi ta'rifdan bevosita kelib chiqadi.

**3- misol.** 1- misoldagidek, $A=\{a,b\}$, $B=\{a,b,c\}$, $C=\{e,f,k\}$ bo'lsa, u holda $A\setminus B=\varnothing$, $B\setminus A=\{c\}$, $B\setminus C=\varnothing$ bo'ladi. ■

**To‘ldiruvchi to‘plam.** Faraz qilaylik, $A$ va $B$ to‘plamlar berilgan va $A \subseteq B$ bo‘lsin. Bu holda $B$ to‘plamning $A$ to‘plamga kirmagan barcha elementlaridan tashkil topgan $B \setminus A$ to‘plam $A$ **to‘plamning** $B$ **to‘plamgacha to‘ldiruvchi to‘plami** deb ataladi.

$A$ to‘plamning $B$ to‘plamgacha to‘ldiruvchi to‘plami, odatda, $\overline{A}_B$ ko‘rinishda belgilanadi. Bu yerda “$\overline{A}_B$ to‘plam $A$ to‘plamni $B$ to‘plamgacha to‘ldiradi” yoki “$A$ to‘plamni $B$ to‘plamgacha to‘ldirish amalini qo‘llab, $\overline{A}_B$ to‘plam hosil qilindi” deyish mumkin. 4- shaklda $A$ to‘plam kichik doira, $B$ to‘plam katta doira ko‘rinishida, $\overline{A}_B$ to‘plam esa bo‘yab tasvirlangan.



4- shakl

To‘plamlar ustidagi yuqorida keltirilgan birlashma, kesishma va to‘ldiruvchi to‘plam tushunchalari ta’riflarini bevosita qo‘llab, $A \cup \overline{A}_B = B$, $A \cap \overline{A}_B = \varnothing$, $A \setminus \overline{A}_B = A$ va $\overline{A}_B \setminus A = \overline{A}_B$ tengliklarni hosil qilish qiyin emas.

**4- misol.** Barcha juft sonlar to‘plamini $A = \{2, 4, ..., 2n, ...\}$ ($n \in \boldsymbol{N}$) deb belgilasak, $A$ to‘plamni $\boldsymbol{N}$ to‘plamgacha to‘ldirish amalini qo‘llab $\overline{A}_N = \{1, 3, ..., 2n-1, ...\}$ to‘plamni, ya’ni barcha toq sonlar to‘plamini hosil qilamiz. Demak, barcha toq sonlar to‘plami barcha juft sonlar to‘plamini natural sonlar to‘plamigacha to‘ldiradi. Xuddi shunga o‘xshash, barcha toq sonlar to‘plamini natural sonlar to‘plamigacha to‘ldirish amalini qo‘llab, barcha juft sonlar to‘plamini hosil qilish mumkin.

**Universal to‘plam.** To‘plamlar nazariyasida, odatda, to‘plamlar orasidagi turli munosabatlarni hisobga olishga to‘g‘ri keladi. Masalan, qaralayotgan to‘plamlarning barchasi qandaydir boshqa bir to‘plamning qism to‘plami bo‘lishi mumkin. Bu holda qaralayotgan barcha to‘plamlarni o‘zida qism to‘plam sifatida saqlovchi to‘plamga **universal to‘plam** deb aytiladi.

Universal to‘plam, odatda, $\boldsymbol{U}$ deb belgilanadi. Universal to‘plamni **universum** deb ham atashadi.

**Mustaqil ishlash uchun misollar**

1. Juft sonlar to‘plamini ifodalashning siz bilgan usullarini keltiring.
2. $\{a,b\} \in \{\{a,b,c\}, \{b,d\}, a, b, \{b,c\}\}$ tasdiqning to‘g‘ri yoki noto‘g‘riligini tekshiring va javobingizni izohlang.
3. $\{\{a,b\}, \{b,c\}\} \neq \{a,b,c\}$ munosabatni isbotlang.
4. $x^2 - 10x + 21 = 0$ kvadrat tenglamaning ildizlari to‘plamini $A$ bilan va $B = \{3, 7\}$ deb belgilasak, $A = B$ bo‘lishini ko‘rsating.
5. $\varnothing = \{\varnothing\}$ va $\varnothing \neq \{\varnothing\}$ munosabatlardan to‘g‘risini ko‘rsating.
6. $A \subseteq \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$ munosabatni isbotlang.

7. Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam yagona ekanligini isbotlang.
8. Bir vaqtning o‘zida $A \in B$, $B \in C$ va $A \notin C$ xususiyatlarga ega bo‘lgan $A$, $B$ va $C$ to‘plamlarga misol keltiring.
9. Quyida keltirilgan to‘plamlarning har birini so‘zlar vositasida ifodalang:
   a) $\{x \in \boldsymbol{N} \mid x \text{ 3ga va 5ga qoldiqsiz bo'linadi}\}$;
   b) $\{x \in \boldsymbol{Z} \mid 0 < x < 9\}$;
   d) $\{x : x = x_1 \text{ yoki } x = x_2, \text{ yoki } x = x_3, \text{ yoki } x = x_4\}$;
   e) $\{\sqrt{x} : x - \text{tub son}\}$;
   f) $\{(x, y) \mid x, y \in \boldsymbol{R},\ x^2 + y^2 \leq 1\}$;
   g) $B = \{x \in A : x - \text{yoshi yigirma birdan oshmagan talaba}\}$, bunda $A$ – Toshkent shahridagi talabalar to‘plami;
10. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e, f, g\}$ va $C = \{a, f, g, k, c\}$ to‘plamlardan har ikkitasining kesishmasi, birlashmasi va ayirmalarini toping.
11. Markazlari bitta nuqtada joylashgan hamda radiuslari 1 va 3ga teng doiralar nuqtalaridan iborat to‘plamlarning kesishmasi, birlashmasi va ayirmalarini toping.
12. To‘plamlarning ayirmasi bilan bog‘liq masala o‘ylab toping va uni hal qiling.
13. Ushbu amallar natijalarini aniqlang: $\varnothing \cap \{\varnothing\}$, $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$, $\{\varnothing\} \cup \{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \varnothing$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \{\{\varnothing\}\}$.
14. Ixtiyoriy $A$ to‘plam uchun $A \cup \varnothing$, $A \cap \varnothing$, $A - \varnothing$, $A - A$, $\varnothing - A$ to‘plamlarni aniqlang.
15. $A - B = B - A$ tenglik o‘rinli bo‘ladigan $A$ va $B$ to‘plamlarga misollar keltiring.
16. O‘zaro kesishmaydigan to‘plamlar bilan bog‘liq masala o‘ylab toping va uni hal qiling.
17. O‘zaro kesishadigan to‘plamlar bilan bog‘liq masala o‘ylab toping va uni hal qiling.
18. Ixtiyoriy $A$ to‘plam uchun $A \cup \overline{A} = \overline{A} \cup A = \boldsymbol{U}$ bo‘lishini ko‘rsating.
19. Ixtiyoriy $A$ va $B$ to‘plamlar uchun quyidagi tasdiqlarning o‘rinli bo‘lishini ko‘rsating:
   a) $A \setminus B = \varnothing \Rightarrow A \subseteq B$;
   b) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \varnothing$ – a) banddagi tasdiqqa teskari tasdiq;
   d) $A \setminus B = B \setminus A = \varnothing \Rightarrow A = B$;
   e) $A = B \Rightarrow A \setminus B = B \setminus A = \varnothing$ – d) banddagi tasdiqqa teskari tasdiq;
   f) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, ya’ni ayirish amali kesishma va to‘ldirish amallari yordamida ifodalanishi mumkin;
   g) $\varnothing \subseteq A \cap B \subseteq A \cup B$.
20. Chekli $A$ va $B$ to‘plamlar uchun $|A|$, $|B|$, $|A \cup B|$ va $|A \cap B|$ sonlar orasidagi bog‘lanishni toping.