9-ma’ruza.Predikatlar. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari. Formulalar. Formulalarning teng kuchliligi.

Predikatlar. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari. Bul funksiyalari. Formulalar. Formulalarning teng kuchliligi.

Bizga natural sonlar to’plami N berilgan bo’lsin.

x element N to’plamning ixtiyoriy elementi bo’lsin. U holda quyidagi jumlalar

A(x)={x soni 7 ga bo’linadi};

B(x)={x>10};

C(x)={x tub son};

D(x)={$(x-5)^2$<10}

darak gaplar bo’lganligi uchun mulohaza hisoblanadi, lekin ularning rost yoki yolg’onligi haqida hech narsa ayta olmaymiz.

Ta’rif. Rost yoki yolg’onligi noma`lum bo’lgan mulohazalar **aniqmas mulohazalar** yoki **predikatlar** deyiladi.

Yuqoridagi misollarda x ning o’rniga turli qiymatlarni qo’ysak, turlicha mulohazalar hosil bo’ladi, ya’ni

A(5)={7 soni 7 ga bo’linadi} =1;

A(13)={10 soni 7 ga bo’linadi}=0

Natural sonlar to’plamida berilgan biror P(x) predikatni olaylik.

Agar P(x) predikat bo’lsa, u holda **(∀x)P(x)** – yozuv N to’plamda ixtiyoriy x uchun P(x) mulohaza o’rinli degan ma`noni bildiradi. Bu mulohaza rost bo’ladi, qachonki x ning ixtiyoriy qiymatida P(x) o’rinli bo’lsa. Agarda x ning bittagina qiymatida o’rinli bo’lmasa, P(x) mulohaza yolg’on bo’ladi. ∀ - belgi **umumiylik kvantori** deyiladi.

Misol 1. A(x)={4^x+1 soni tub son} mulohazani ixtiyoriy x uchun tekshirib ko’ramiz:

A(1)={4^1+1=5 soni tub son}=1;

A(2)={4^2+1=17 soni tub son}=1;

A(3)={4^3+1=257 soni tub son} =1;

A(4)={4^4+1=65537 soni tub son} =1;

A(5)={4^5+1=4294967296+1= 4294967297 soni tub son} =0, demak, $x=5$ da bu mulohaza yolg'on bo'ladi.

Shuning uchun ham $(\forall x)A(x)$ mulohaza yolg'on mulohaza hisoblanadi.

Misol 2. $(\forall x)B(x)=\{x^2-x$ soni 2 ga bo'linadi$\}$ mulohazani ixtiyoriy x uchun tekshirib ko'ramiz:

B(1), B(2), B(3), … larda mulohaza o'rinli, lekin bu usul bilan barcha sonlarni tekshirib chiqishning iloji yo'q, shuning uchun mulohazahi rostligini quyidagicha isbotlash mumkin:

$x^2-x=x(x-1)$ ketma-ket kelgan 2 ta sonning ko'paytmasida bittasi albatta juft son bo'ladi, demak bu ko'paytma har doim 2 ga bo'linadi.

Bundan $(\forall x)B(x)$ mulohazaning rostligi kelib chiqadi.

Agar P(x) predikat bo'lsa, u holda **(∃x)P(x)** – yozuv N to'plamda shunday x element topiladiki, uning uchun P(x) mulohaza o'rinli degan ma`noni bildiradi. Bu mulohaza rost bo'ladi, qachonki x ning kamida bitta qiymatida P(x) o'rinli bo'lsa. ∃ - belgi **mavjudlik kvantori** deyiladi.

Yuqoridagi misollarda $(\exists x)A(x)$ mulohaza ham, $(\exists x)B(x)$ mulihaza ham chin bo'ladi.

Umumiylik va mavjudlik kvantorlari uchun quyidagi xossalar o'rinli:

1^0. $\neg(\forall x)P(x)=(\exists x)\neg P(x)$

2^0. $\neg(\exists x)P(x)=(\forall x)\neg P(x)$

3^0. $(\forall x)[P(x)\&D(x)]=(\forall x)P(x)\&(\forall x)D(x)$

4^0. $(\exists x)[P(x)\&D(x)]\Rightarrow(\exists x)P(x)\&(\exists x)D(x)$

5^0. $(\forall x)P(x)\vee(\forall x)D(x)\Rightarrow(\forall x)[P(x)\vee D(x)]$

6^0. $(\exists x)[P(x)\vee D(x)]\Rightarrow(\exists x)P(x)\vee(\exists x)D(x)$

Ta'rif 1. To'g'ri tuzilgan murakkab mulohazaga **formula** deyiladi.

Formulalar grek harflari bilan belgilanadi: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$.

Agar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mulohazalar α formulada qatnashadigan barcha mulohazalar bo'lsa, $\alpha=\alpha(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ kabi belgilanadi.

Misol 1. a) $\alpha(A)=\neg A$;

b) β(A, B, C)=A&B→C;

c) γ (A, B)=A&B ⋁ ⌐A&⌐B)

bunda A, B, C, … sodda mulohazalar **argument** yoki **mantiqiy o’zgaruvchilar**, α, β, γ, … formulalar esa **funktsiya** deb ham yuritiladi.

Formulaning to’g’ri tuzilgan bo’lishida qavslarning o’rni juda muhim. Mantiqda ham xuddi algebra va arifmetikadagi singari qavslar amallar tartibini belgilab beradi.

Formulalarda qavslarni kamaytirish maqsadida amallarning bajarilish tartibi quyidagicha kelishib olingan. Agar formulada qavslar bo`lmasa,

birinchi inkor amali - ⌐,

ikkinchi kon`yunktsiya - &,

uchinchi bo’lib diz`yunktsiya - ⋁,

undan so’ng implikatsiya - → va

oxirida ekvivalentlik - ~ amali bajariladi.

Agar mulohazada bir xil amal qatnashgan bo`lsa, u holda ularni tartibi bilan ketma-ket bajariladi: $A \to B \to C \to D = (((A \to B) \to C) \to D)$.

Tashqi qavslar qo`yilmaydi. Shuning uchun ham $A \to B$ mulohazani $A \leftrightarrow (B \wedge C)$ ko`rinishda yozish mumkin.

Kon`yunktsiya amali diz`yunktsiyaga qaraganda kuchliroq bog`lovchi hisoblanadi, ya`ni $A \vee B \wedge C = A \vee (B \wedge C)$.

Diz`yunktsiya implikatsiyaga qaraganda kuchliroq bog`laydi, shuning uchun ham quyidagi tenglik o`rinli:

$$A \wedge B \vee C \to D = ((A \wedge B) \vee C) \to D.$$

Implikatsiya ekvivalentlikka qaraganda kuchliroq, ya`ni

$$A \leftrightarrow B \to C = A \leftrightarrow (B \to C).$$

Misol 3.

$$A \to \overline{B \vee C} \leftrightarrow C \leftrightarrow \overline{A} \vee B \to C \cdot \overline{A} \vee B \to A =$$

$$= A \to \overline{B \vee C} \leftrightarrow \overline{A} \vee B \to ((C \cdot \overline{A}) \vee B) \to A =$$

$$= A \to \overline{B \vee C} \leftrightarrow \left(\overline{A} \vee B\right) \to \left(\left(C \cdot \overline{A}\right) \vee B\right) \to A =$$

$$= \left(A \to \overline{B \vee C}\right) \leftrightarrow \left(\left(\overline{A} \vee B\right) \to \left(\left(C \cdot \overline{A}\right) \vee B\right)\right) \to A =$$

$$= \left(\left(A \to \overline{B \vee C}\right) \leftrightarrow \left(\left(\overline{A} \vee B\right) \to \left(\left(C \cdot \overline{A}\right) \vee B\right)\right) \to A\right).$$