

13-ma'ruza. Mantiqiy to'rlar. Mantiq to'rlarini minimallashtirish usullari.

Karno kartalari

Mantiqiy to'rlar. Mantiq to'rlarini minimallashtirish. Ikkilik mantiqiy amallariga mos sxemalar tuzish. Karno kartalari

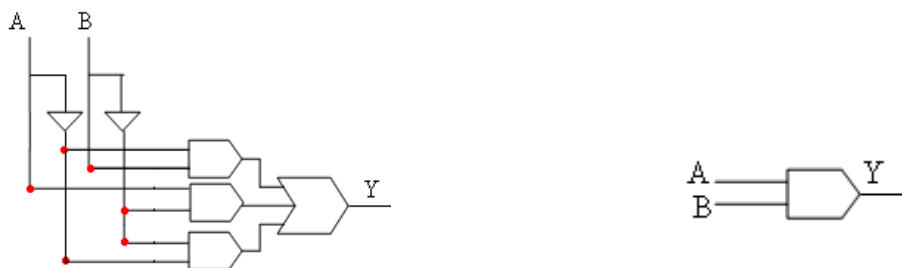
1. Ikkilik mantiqiy elementlarining qo'llanilishi.

Mantiqiy elementlarning shartli belgilanishi, rostlik jadvallari va Bul ifodalari elektrotexnika sohasidagi real masalalarni yechishda juda qo'l keladi.

Har qanday fikrlar algebrasi formulasini \neg , $\&$, \vee amallari orqali yozish mumkin, buning uchun \rightarrow , \sim dan qutilish qoidalarini qo'llash kifoya. \neg , $\&$ va \vee amallaridan iborat formulaga mos paralel va ketma-ket ulash qoidalariga asosan sxema tuzish mumkin va teskari tasdiq o'rinli ixtiyoriy sxemaga mos \neg , $\&$ va \vee amallardan foydalanib mantiqiy elementlardan iborat formula tuzish mumkin. Agar biror bir murakkab sxema berilgan bo'lsa unga mos formulani yoxib, mantiq qonunlariga asosan soddalashtirib, soddalashtirilgan formulaga mos sxema qaytatdan tuzilsa hosil bo'lgan soddalashtirilgan sxema boshlang'ich sxemaning vazifasini bajaradi.

Masalan:

$(\bar{A} \& B) \vee (A \& \bar{B}) \vee (\bar{A} \& \bar{B}) = Y$, Ushbu formulaga mos sxema chapda, mantiq qonunlari bo'yicha soddalashtirilib, keyin chizilgan sxema esa o'ngda.



Ikkala sxema ham bir xil vazifani bajaradi, chunki ikkala sxemaga mos formulalarning rostlik jadvallari bir xil.

Rele kontakt sxemalarida analiz.

Masala: Talabalar 3 kishi ovoz berganda ko'pchilik ovoz bilan qaror qabul qiladigan sxema tuzishmoqchi. Biror bir qarorga ko'pchilik „ha“ deb ovoz berib o'zlariga tegishli tugmachalarni bosganda signal chirog'i yonishi lozim. Ushbu sxema qanday ko'rinishda bo'ladi?

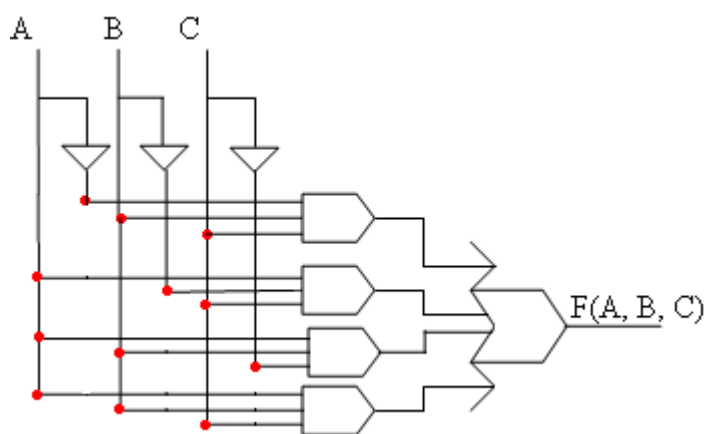
Ushbu masalada ovoz beruvchilar A, B, C fikr o'zgaruvchilari deb olsak bo'ladi, ular 2 xil qiymat qabul qilishi mumkin: ha deb ovoz berishsa – 1, yo'q deb ovoz berishsa – 0. U holda ushbu masala quyidagicha rostlik jadvaliga ega bo'ladi.

Bunday rostlik jadvaliga ega bo'lgan formulaning ko'rinishi esa, quyidagicha bo'ladi:

$$F(A, B, C) = \neg A \& B \& C \vee A \& \neg B \& C \vee A \& B \& \neg C \vee A \& B \& C$$

| A | B | C | F(A, B, C) |
|---|---|---|------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Yuqoridagi formulaga mos sxema esa quyidagicha bo‘ladi:



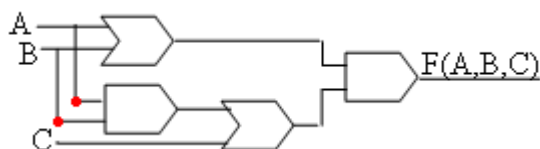
3 ta ivertor, 4 ta uchtdan kirishga ega bo‘lgan “va”, 1 ta to‘rtta kirishga ega bo‘lgan “Yoki”, jami 8 ta elementdan iborat sxema hosil bo‘ladi.

Rele kontakt sxemalarida sintez.

Formulani mantiq qonunlariga ko‘ra soddalashtiramiz:

$$F(A, B, C) = \neg A \& B \& C \vee A \& \neg B \& C \vee A \& B \& \neg C \vee A \& B \& C = A \& B \& (\neg C \vee C) \vee C \& (\neg A \& B \vee A \& \neg B) = (A \& B \vee C) \& (A \& B \vee \neg A \& B \vee A \& \neg B) = (A \& B \vee C) \& (B \vee A \& \neg B) = (A \vee B) \& (A \& B \vee C)$$

Soddalashgan formulaga mos sxema quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lib, soddalashgan



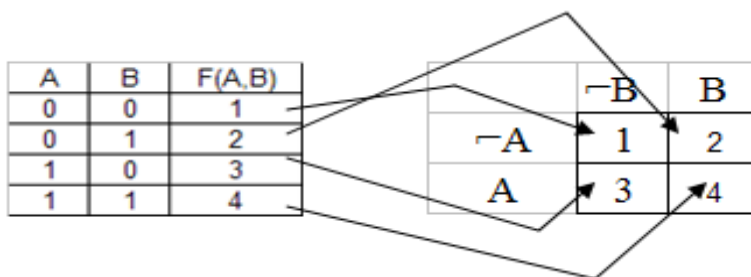
sxema ikki baravar kam elementdan iborat bo'lsada, qiymat jihatdan undan ham ko'proq sarf xarajatni talab qiladi. Ikkala sxema ham bir xil vazifani bajaradi, chunki ularga mos formulalarning rostlik jadvali bir xildir.

3. Karno kartalari

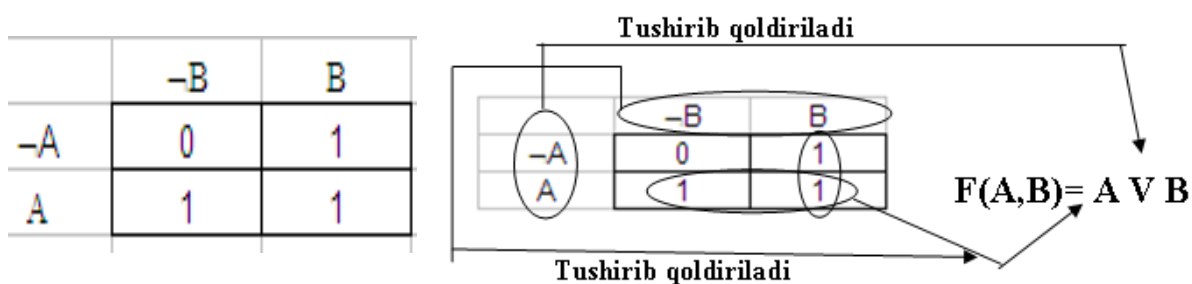
Bul algebrasi Djorj Bul tomonidan (1815-1864) rivojlantirilib, 20-asrning 30-yillarida raqamli mantiqiy sxemalarda qo'llanilgan edi. Raqamli elektron qurilmalarni konstruksiyalash bilan shug'ullanadigan mutaxassislar Bul algebrasini chuqurroq o'rganishi lozim.

Karno kartalari – Bul ifodalarini soddalashtirishning eng amaliy usuli hisoblanadi. Undan tashqari Veych, Venn diagrammalari, jadval usullari mavjud. 1953 yil Moris Karno Bul ifodalarini soddalashtirish va grafik tasvirlash tizimini ishlab chiqqani haqida maqola e'lon qildi.

Ikki o'zgaruvchili Karno kartasi



$F(A,B) = \neg A \& B \vee A \& \neg B \vee A \& B$ formulaga mos Karno kartasi quyidagi ko'rinishni oladi:



Yuqorida keltirilgan sxemaga muvofiq gorizontaliga, vertikaliga bir-biriga qo'shni bo'lgan birlar konturlarga birlashtiriladi. Har bir kontur ikkini darajalaricha birlarni ($2^1, 2^2, 2^3, \dots$) o'z ichiga olishi va kontur olish jarayoni barcha birlar kontur ichida qolguncha davom ettirilishi lozim. Har bir kontur soddalashtirilgan Bul ifodasining yangi a'zosini bildiradi. Har bir konturda qatnashgan bir-birini to'ldiruvchi o'zgaruvchilar tushirib qoldiriladi, har bir konturdan qolgan o'zgaruvchilarning diz'yunksiyasi olinadi. Natijada formula quyidagi soddalashgan ko'rinishni oladi: $F(A, B) = A \vee B$

Uch o'zgaruvchili Karno kartalari

Uch o'zgaruvchili Karno kartalari quyidagicha ko'rinishda bo'ladi:

| A | B | C | F(A, B, C) |
|---|---|---|------------|
| 0 | 0 | 0 | №1 |
| 0 | 0 | 1 | №2 |
| 0 | 1 | 0 | №3 |
| 0 | 1 | 1 | №4 |
| 1 | 0 | 0 | №5 |
| 1 | 0 | 1 | №6 |
| 1 | 1 | 0 | №7 |
| 1 | 1 | 1 | №8 |

| | $\neg C$ | C |
|--------------------|----------|----|
| $\neg A \& \neg B$ | №1 | №2 |
| $\neg A \& B$ | №3 | №4 |
| $A \& B$ | №7 | №8 |
| $A \& \neg B$ | №5 | №6 |

Uch o'zgaruvchili Karno kartalarida ham ikki o'zgaruvchili Karno kartalaridagidek gorizontaliga, vertikaliga bir-biriga qo'shni bo'lgan birlar konturlarga birlashtiriladi. Har bir kontur iloji boricha ko'proq ikkini darajalaricha birlarni ($2^1, 2^2, 2^3, \dots$) o'z ichiga olishi va kontur olish jarayoni barcha birlar kontur ichida qolguncha davom ettirilishi lozim. Har bir kontur soddalashtirilgan

Bul ifodasining yangi a'zosini bildiradi. Har bir konturda qatnashgan bir-birini to'ldiruvchi o'zgaruvchilar tushirib qoldiriladi, har bir konturdan qolgan o'zgaruvchilarning diz'yunksiyasi olinadi. Bundan tashqari uch o'zgaruvchili Karno kartalarida 1- va 4-qatorlar bir-biriga qo'shni hisoblanadi, chunki karta gorizontaliga o'ralganda 1- va 4- qatorlar bir-biriga qo'shni bo'lib qoladi.

Masalan $F(A,B,C)$ formula quyidagicha rostlik jadvali bilan berilgan bo'lsin:

| A | B | C | F(A, B, C) |
|---|---|---|------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

| | $\neg C$ | C |
|--------------------|----------|---|
| $\neg A \& \neg B$ | 1 | 0 |
| $\neg A \& B$ | 1 | 1 |
| $A \& B$ | 1 | 1 |
| $A \& \neg B$ | 1 | 0 |

| | $\neg C$ | C |
|--------------------|----------|---|
| $\neg A \& \neg B$ | 1 | 0 |
| $\neg A \& B$ | 1 | 1 |
| $A \& B$ | 1 | 1 |
| $A \& \neg B$ | 1 | 0 |

$$F(A,B,C) = B \vee \neg C$$

$\neg C$ va C , $\neg A$ va A lar bir-birini to'ldiradi

b) To'rt o'zgaruvchili Karno kartalari

To'rt o'zgaruvchili Karno kartalarida ikki va uch o'zgaruvchili Karno kartalaridagi usullar qo'llaniladi. Faqatgina to'rt o'zgaruvchili Karno kartalarida birinchi va to'rtinchi ustunlar, birinchi va to'rtinchi qatorlar bir-biriga qo'shni hisoblanadi, chunki ular mos ravishda vertikal yoki gorizontal silindrlarga o'ralsa, ushbu ustunlar yoki qatorlar bir-biriga qo'shni bo'lib qoladi. To'rt

| | $\neg C \& \neg D$ | $\neg C \& D$ | $C \& D$ | $C \& \neg D$ |
|--------------------|--------------------|---------------|----------|---------------|
| $\neg A \& \neg B$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $\neg A \& B$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $A \& B$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $A \& \neg B$ | 1 | 0 | 0 | 1 |

o'zgaruvchili Karno kartalarining to'rtta burchagi ham bir-biriga qo'shni hisoblanadi, chunki karta "sferaga" o'ralsa, to'rtta burchak bir-biriga qo'shniga aylanadi.

Masalan; $F(0,0,0,1)=F(0,0,1,1)=F(1,0,0,1)=F(1,0,1,1)=0$

Karno kartasi bo'yicha formulaning soddalashgan ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

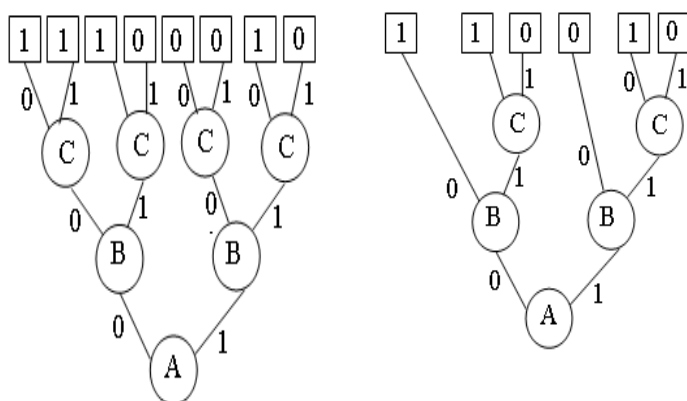
$$F(A,B,C)= B \vee \neg D$$

Yechimlar daraxti

Dasturlashda xotirani va vaqtni tejash nuqtai nazaridan funksiyalar yoki formulalarni (ifodalarni) grafik ko'rinishda "tabiiy" ifodalash (massivlarda) bilan to'g'ridan-to'g'ri bog'liqlikka ega bo'lmagan, lekin amallarni bajarishga maxsus yo'naltirilgan ko'rinishda ifodalash samaraliroq hisoblanadi. N o'zgaruvchili Bul funksiyasi rostlik jadvalini $n+1$ balandlikdagi to'liq binary daraxt ko'rinishida ifodalash mumkin. Daraxt yaruslari (qavatlari) o'zgaruvchilarga mos keladi, daraxt shoxlari esa o'zgaruvlar qiymatlariga mos keladi. Chap shoxga – 0, o'ng shoxga esa – 1 qiymat mos qo'yiladi. Daraxt yaproqlari – oxirgi yarusda esa daraxt ildizidan shu yaproqgacha bo'lgan yo'lga mos kortejdagi funksiya qiymatlari mos qo'yiladi. Bunday daraxt yechimlar daraxti yoki semantik daraxt deyiladi.

Buni quyidagicha misolda ko'rib chiqamiz. $F(A,B,C)$ funksiya quyidagicha rostlik jadvali bilan berilgan bo'lsin:

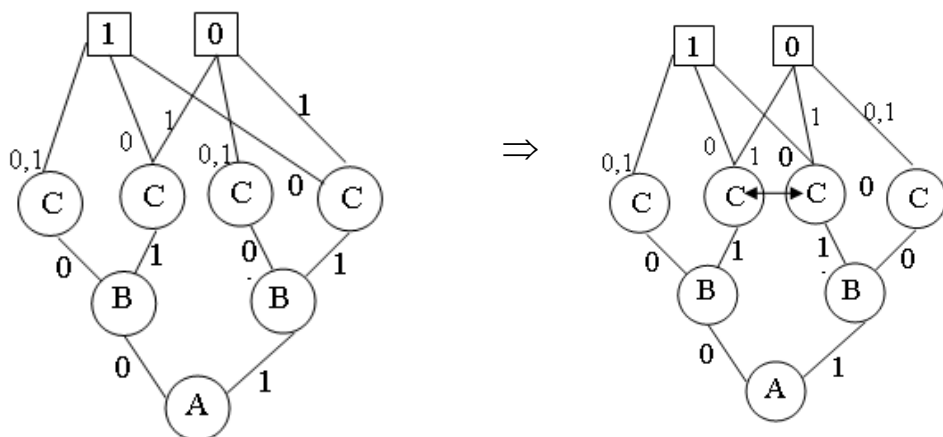
| A | B | C | $F(A, B, C)$ |
|---|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |



1) Yechimlar daraxtini ayrim hollarda barcha barglarni bir xil qiymatga ega bo'lgan daraxt ostilarini, shu qiymat bilan almashtirilsa yechimlar daraxti hajmining sezilarli darajada ixchamlashtiradi.

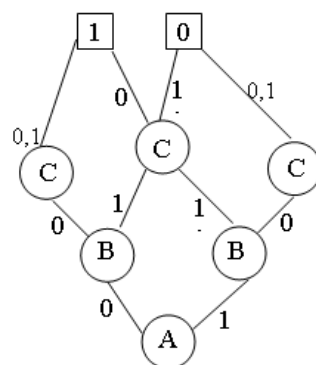
Agar bog'liqliklarning daraxt ko'rinishidan voz kechilsa, yechimlar daraxtini anchagina kompaktlashtirish mumkin. Quyidagicha uchta ketma-ket shakl almashtirishlardan so'ng binary yechimlar daraxtidan binar yechimlar diagrammasi hosil bo'ladi:

1. 0 va 1 qiymatlarni qabul qilgan yaproqlar birlashtiriladi. Natijada daraxt quyidagi ko'rinishni oladi:



2. Diagrammada izomorf diagramma ostilari birlashtiriladi:

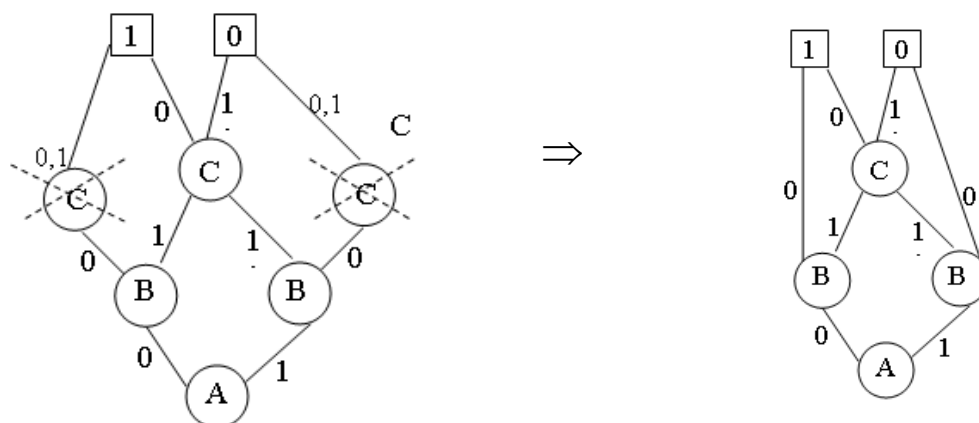
(o'xshash)



3. Ikkala chiquvchi shoxi ham bitta joyga

boradigan

tugunlar ahamiyatsiz o'zgaruvchi sifatida tushirib qoldiriladi va bu tugunga kiruvchi shox chiquvchi shoxlar boradigan tugunlargacha davom ettiriladi.

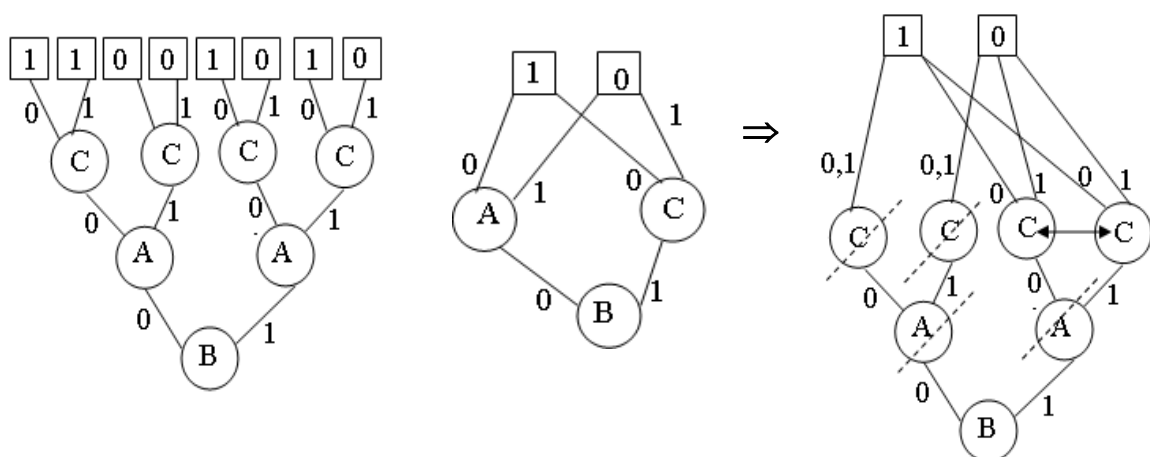


Natijada $F(A,B,C)$ funksiya qiymatlarini yechimlarning binar diagrammasi orqali berish mumkin:

if $A=B=0$ **or** $A=C=0$ **and** $B=1$ **or** $A=B=1$ **and** $C=0$ **then** $F(A,B,C)=1$ **else** $F(A,B,C)=0$

Yechimlar daraxtidan yechimlar diagrammasiga o'tish natijasi boshlang'ich yechimlar daraxtida o'zgaruvchilarni yaruslarga qaysi tartibda qo'yilganligiga ham sezilarli darajada bog'liq.

Yuqoridagi misolda yechimlar daraxtida o'zgaruvchilarni yaruslarga B,A, C tartibida joylashtirilsa, u holda yechimlar diagrammasi yanada ixchamlashadi:



Natijada $F(A,B,C)$ funksiya qiymatlarini yechimlarning binar diagrammasi orqali berish mumkin:

if $B=1$ **then** $F(A,B,C)=\neg C$ **else** $F(A,B,C)=\neg A$

Ushbu ko'rilgan misol shundan dalolat beradiki, ayrim hollarda funksiyalarning shunday maxsus ko'rinishlarini qurish mumkinki, funksiyalarni massivlar yoki formulalar yordamida ifodalash kabi universal usullarga nisbatan, xotirada kam ma'lumot saqlashni va shu bilan birga hisoblashni tezroq amalga oshirish imkonini beradi.