1-ma'ruza.Kirish. Diskret tuzilmalar va ularga misollar. To'plamlar. Qism to'plamlar

Diskret tuzilmalar. Algebraik tuzilmalar, misollar.To'plam tushunchasi, to'plam elementlari. To'plamga tegishlilik tushunchasi. Universal to'plam. Bo'sh to'plam. Chekli (cheksiz) to'plamlar.Xos to'plam. To'plamlarning berilish usullari.

To‘plamlar nazariyasining asosini XIX asr matematiklari yaratishdi. Ular o‘z oldilariga matematik tahlil asosini yaratishni maqsad qilib qo‘yishgan edi. Bu nazariyaning asosini nemis matematigi Georg Kantor yaratdi. Birinchi bo‘lib to‘plam tushunchasiga quyidagicha ta'rif berdi:

To‘plam – bu birgalikda deb idrok etiladigan juda ko‘plikdir.

To‘plamga berilgan bunday ta'rif uch xil simvol kiritishga majbur qildi.

Birinchi simvol to‘plamni birgalikda yagonaligini bildirish uchun bu to‘plpmlarin o‘zini lotin alifbosining bosh harflari **A, B, C, ...** bilan belgilashga kelishib olindi.

Ikkinchi simvol to‘plamning ko‘pligini bildiruvchi, ya'ni to‘plamning elementi deb qaralishi kerak bo‘lgan simvol sifatida lotin alifbosining kichik harflaridan **a, b, c,** ...foydalanishga kelishib olindi.

Uchinchi simvol esa to‘plam elementini to‘plamga tegishliligini bildiruvchi $\in$ belgi kiritildi, bu belgi grekcha $\in \tau \sigma i$ (bo‘lmoq, tegishli) so‘zining birinchi harfidan olingan.

Shunday qilib x element X to‘plamga tegishliligi $x \in X$ kabi, tegishli emasligi esa $x \notin X$ kabi belgilanadi.

Ta'kidlab o‘tish kerakki to‘plamning elementlarini o‘zi ham yana to‘plam bo‘lishi mumkin.Masalan: $A = \{410-05, 411\text{-}05, 412\text{-}05 \text{ гурухлар}\}$

$410-05 \in A, 411\text{-}05 \in \mathrm{A}, 412\text{-}05 \in \mathrm{A}$. Guruhlarning har biri esa 20-25 talabadan iborat to‘plamdir.

To‘plamning berilish usullari.

To‘plamni unga tegishli elementlarni hammasini keltirish orqali yoki to‘plam elementlari qanoatlantiradigan xossalari bilan ham keltirilishi mumkin. Agar $x_1, \mathrm{x}_2,...., \mathrm{x}_n$- A to‘plamning barcha elementlari bo‘lsa, u holda $A = \{x_1, x_2,...., x_n\}$ kabi yoziladi. Aytaylik B to‘plam R-xossaga ega bo‘lgan va ega bo‘lmagan elementlardan iborat to‘plam bo‘lsin. U holda R xossaga ega bo‘lgan B to‘plam elementlaridan iborat A to‘plam quyidagicha belgilanadi:

$$A = \{\exists x \in B : x \text{ lar } R \text{ xossaga ega}\}$$

Misol. Arab raqamlari to‘plamini ikki xil berish mumkin:

$$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$A = \{\exists x : \ x - arab \qquad sonlari\}$$

Lekin to‘plamga berilgan bunday ta'rif yillar o‘tib yetarli emasligi aniqlandi, chunki bir qancha ichki paradokslar kelib chiqdi.

Rassel paradoksi: X to‘plam – biror bir qishloqning soch oldiradigan odamlar to‘plami bo‘lsin. x- shu qishloqning sartaroshi bo‘lsin. Savol $x \in X - ?, \text{ёки}\_x \notin X - ?$

Bu chavolga mantiqan zid bo‘lmagan javobni olishni iloji yo‘q, chunki $x \in X$ desak, ya’ni sartaroshning o‘zi ham sochini oldiradiganlar to‘plamiga kiradi desak, u holda o‘z-o‘zidan $x \notin X$ degan ziddiyatga kelamiz, chunki u o‘zini sochini o‘zi olaolmaydi. Bir vaqtning o‘zida $x \in X$ va $x \notin X$ bo‘lib qolayapti. Agar $x \notin X$ ya’ni sartarosh soch oldiradiganlar to‘plamiga kirmasa, u holda demak u o‘zini sochini o‘zi olishi kelib chiqadi, bu degani esa $x \in X$, yana qarama-qarshilik.

Ta’rif 1. To‘plam deb biror bir umumiy xususiyatga ega bo‘lgan turli tabiatli ob’yektlar majmuasiga aytiladi. Turli tabiatga ega bo‘lgan ob’yektlar esa to‘plamning elementlari deyiladi.

Hozirgi kunda to‘plamlar nazariyasining bir nechta aksiomatik tizimlari mavjud ular nimadandir bir-birini to‘ldirsa, ayrim tasdiqlarda bir-birini inkor qiladi. Ekspertlarning bahosi bo‘yicha mavjud tizimlar ichida eng yaxshisi SERMELO tizimi (Z-tizim) hisoblanadi.

Ta’rif 2. Agar to‘plam elementlari soni chekli bo‘lsa, u holda to‘plam chekli to‘plam deyiladi, aks holda cheksiz to‘plam deyiladi.

Cheksiz to‘plamlar ikkiga bo‘linadi: sanoqli va sanoqsiz to‘plamlar. Quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

Natural sonlar to‘plami $N = \{1,2,3,.......,n,...\}$. Butun sonlar to‘plami $Z = \{0,\pm1,\pm2,\pm3,......\}$.

Ratsional sonlar to‘plami $Q = \left\{\frac{m}{n},\_\,m,n \in Z\right\}$. Haqiqiy sonlar to‘plami $R = (-\infty,+\infty)$

Ta’rif 3. Agar chyeksiz to‘plam elementlarini natural sonlar qatori bilan nomerlab chiqishning iloji bo‘lsa, u holda bu to‘plam sanoqli to‘plam, aks holda sanoqsiz to‘plam deyiladi.

Misol. Juft sonlar to‘plami $\begin{array}{l} M = \{2, 4, 6, 8,.........\} \\ \quad\;\;\; \downarrow\; \downarrow\; \downarrow\; \downarrow \\ N = \{1, 2, 3, 4,..........\} \end{array}$

Haqiqiy sonlar to‘plami $R = (-\infty,+\infty)$ sanoqsiz to‘plam.

Ta’rif 4. Chekli va sanoqli to‘plamlarga Diskret to‘plamlar deyiladi.

Ta’rif 5. Agar **A** to‘plamning har bir elementi B to‘plamning ham elementi bo‘lsa, u holda **A** to‘plam B ning **qismi**, **qism to‘plami**, **to‘plam ostisi** deyiladi va $A \subset B$ kabi belgilanadi, ya’ni $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ bo‘lsa $A \subset B$**.**

Agar A=B bo‘lishi mumkin ekanligi ham rad etilmasa, u holda bu holga urg‘u berish uchun $A \subseteq B$ ko‘rinishda ham yoziladi.

Misol. $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$, bu yerda S-kompleks sonlar to‘plami.

Ta’rif 6. Agar $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo‘lsa, u holda A va B to‘plamlar teng kuchli deyiladi va A=B kabi yoziladi.

Misol. $M_1 = \{\exists x:\_\sin x = 1\}$, $\mathrm{M}_2 = \left\{\exists x:\_\,x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z\right\}$, $\mathrm{M}_1 = M_2$ ligini isbotlang?

Buning uchun $M_1 \subset M_2$ va $M_2 \subset M_1$ ekanligini ko‘rsatish kerak.

$x \in M_1$ bo‘lsin, u holda x element $\sin x = 1$ tenglama yechimi bo‘ladi, bu tenglama yechimini esa $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \_ k \in Z$ ko‘rinishda ifodalash mumkin, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \in M_2$ ham bo‘ladi, bundan $M_1 \subset M_2$ ekanligi kelib chiqadi. Endi $x \in M_2$ bo‘lsin, u holda $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ bo‘ladi, bundan esa $\sin x = 1$ tenglama kelamiz, bu esa $x \in M_1$ ekanligi, natijada $M_2 \subset M_1$ ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib $M_1 = M_2$ ekanligi isbotlandi.

Eslatma: $A \subseteq A,\quad A \subseteq B$ **va** $B \subseteq C$ **bo‘lsa, u holda** $A \subseteq C$ **bo‘ladi.**

Ta’rif 6 A va B to‘plamlar tengligining yetarli sharti bo‘lib, zarur sharti emas. Shuning uchun ham to‘plamlarning tengligidan umuman olganda ularning elementlari o‘zaro bir-birlariga tegishliligi kelib chiqavermaydi.

To‘plamlar nazariyasida to‘plamda bitta element faqat bir marta va to‘plam elementlari kichigidan kattasiga qarab yoziladi.

Misol. $A = \{1,1\}$ va $B = \{1\}$ ular tengmi?

To‘plamlarning sonli qiymatlarining tengligi ularning bir-biriga tegishli ekanligiga kafillik bermaydi, shuning uchun ham ularning tengligi haqida gapirish uchun qoshimcha shart kerak. Quyidagicha shartlar bajarilsin:

$\forall a \in A$ uchun $\exists в \in B$ topilsaki, $a = b$ bolib $a \in B$ va $b \in A$ shart bajarilsa , u holda $A = B$ bo‘ladi.

Lekin A va B larga quyidagi shart qo‘yilgan bo‘lsa, A to‘plam $(x - a_1)*(x - a_2) = 0$ tenglama ildizi, V to‘plam esa $(x - b) = 0$ tenglama ildizi bo‘lsin.

Algebraning asosiy teoremasiga ko‘ra 2-tartibli tenglamaning faqat va faqat bitta ildizi bir vaqtning o‘zida 1-tartibli tenglama ildizi bo‘ladi. Shuning uchun ham A ning bitta elementigina B ga tegishli shuning uchun ham $A \neq B$. A ning ikkala elementi ham turlicha ularning sonli qiymatlari bir xil bo‘lsada.

Ta’rif 7. Birorta ham elementi bo‘lmagan to‘plamga **bo‘sh to‘plam** deyiladi va Ø kabi belgilanadi.

Ø – to‘plam chekli to‘plam bo‘lib, u ixtiyoriy to‘plamning to‘plam ostisi hisoblanadi. Ixtiyoriy A to‘plam o‘ziga-o‘zi qism to‘plam, bunday qism to‘plam **xosmas to‘plam osti** deyiladi. Ø – ham xosmas to‘plam osti hisoblanadi. Boshlangich A to‘plamning boshqa barcha to‘plam ostilari **xos to‘plam ostilar** deyiladi.

Misol. $A = \{2,5,7\}$ to‘plamning barcha to‘plam ostilarini yozamiz

$A_1 = \{2,5,7\},\ A_2 = \{2,5,\},\ A_3 = \{2,7\},\ A_4 = \{5,7\},\ A_5 = \{2\},\ A_6 = \{5\},\ A_7 = \{7\},\ A_8 = \{Ø\}.$

A_1, A_8 - to‘plamlar A to‘plamning xosmas to‘plam ostilari.

$A_2, A_3\ A_4, A_5\ A_6, A_7$ - to‘plamlar A to‘plamning xos to‘plam ostilari.

Agar to‘plam chyekli bo‘lib n ta elementdan iborat bo‘lsa, u holda bu to‘plamning barcha to‘plam ostilari 2^n ta bo‘ladi.

Ta’rif 8. A to‘plamning barcha to‘plam ostilari to‘plamiga **Bulean** yoki **darajali to‘plam** deyiladi va 2^A kabi belgilanadi. Shunday qilib $2^A = \{\exists B, B \subseteq A\}$.

U yoki bu muammoni yechishda biz biror bir to‘plamga asoslanamiz.

Ta’rif 9. Berilgan tadqiqotda duch kelinadigan barcha elementlar to‘plami **universal to‘plam** deyiladi va **U** kabi belgilanadi.

To‘plamda tartib munosabati tushunchasi.

A=<a, b> to‘plam elementlari uchun qo‘shimcha shart: a element **b** dan oldin keladi (yoki **b** element a dan keyin keladi) sharti bajarilsa A ga **tartiblashtirilgan juftlik** deyiladi. Umumiy holda to‘plam elyemyentlari ikki va undan ortiq bo‘lsa, u holda **tartiblashtirilgan to‘plam** tushunchasi kiritiladi.