7-ma'ruza.Takroriy o'rinlashtirish, o'rin almashtirish va guruhlashlar

Takroriy o'rinlashtirish, takroriy o'rin almashtirish va takroriy guruhlashlar. Ularning formulalari. Takroriy o'rinlashtirish, takroriy o'rin almashtirish va takroriy guruhlashlarga doir misollar

Takrorlanuvchi o'rin almashtirishlar.

N ta elementdan iborat A to'plamni *m* ta qism to'plamlar yig'indisi ko'rinishida necha xil usulda yoyish mumkin degan savol qo'yamiz.

$$A = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_m$$

Shunday bo'lishi kerakki $N(B_1)=k_1$, $N(B_2)=k_2$, ... , $N(B_m)=k_m$ bo'lib, k_1, k_2 ,..., k_m berilgan sonlar uchun

$$k_i \geq 0, \quad k_1 + k_2 + ... + k_m = n$$

shartlar bajariladi. $B_1, B_2, ..., B_m$ to'plamlar umumiy elementlarga ega emas.

A to'plamning k_1 elementli B_1 to'plam ostisini $C_n^{k_1}$ usulda tanlash mumkin, n-k_1 qolgan elementlardan k_2 elementli B_2 to'plam ostisini $C_{n-k_1}^{k_2}$ usulda tanlash mumkin va hokazo. Turli xil $B_1, B_2, ..., B_m$ to'plamlarni tanlash usullari ko'paytirish qoidasiga ko'ra

$$C_n^{k_1} * C_{n-k_1}^{k_2} * C_{n-k_1-k_2}^{k_3} * ... * C_{n-k_1-k_2-...-k_{m-1}}^{k_m} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!*(n-k_1)!} * \frac{(n-k_1)!}{k_2!*(n-k_1-k_2)!} * \frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!*(n-k_1-k_2-k_3)!} * .... * \frac{(n-k_1-k_2-....-k_{m-1})}{k_m!*(n-k_1-k_2-...-k_m)!} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!*k_2!*...*k_m!}$$

Demak quyidagi teorema isbotlandi.

Teorema. Aytaylik k_1, k_2 ,..., k_m - butun manfiymas sonlar bo'lib, $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$ va A to'plam *n* ta elementdan iborat bo'lsin. A ni elementlari mos ravishda k_1, k_2 ,..., k_m ta bo'lgan $B_1, B_2, ..., B_m$ *m* ta to'plam ostilar yigindisi ko'rinishida ifodalash usullari soni

$$C_n(k_1,...,k_m)=\frac{n!}{k_1!*k_2!*...*k_m!}$$

ta bo‘ladi.

$C_n(k_1,...,k_m)$ sonlar ***polinomial koeffitsiyentlar*** deyiladi.

Misol 1. “Matematika” so‘zidagi harflardan nechta so‘z yasash mumkin?

K_1=2 (“m”- harfi), k_2 =2 (“a” – harfi), k_3 =2 (“t” – harfi), k_4=1 (“e” – harfi), k_5=1 (“i”-harfi), k_6=1 (“k”- harfi), n=10 (so‘zdagi harflar soni)

$$C_{10}(2,3,2,1,1,1)=\frac{10!}{2!*3!*2!*1!*1!*1!}=151200$$

Misol 2. “Dada” so‘zidagi harflardan nechta so‘z yasash mukin?

$$C_4(2,2)=\frac{4!}{2!*2!}=6$$

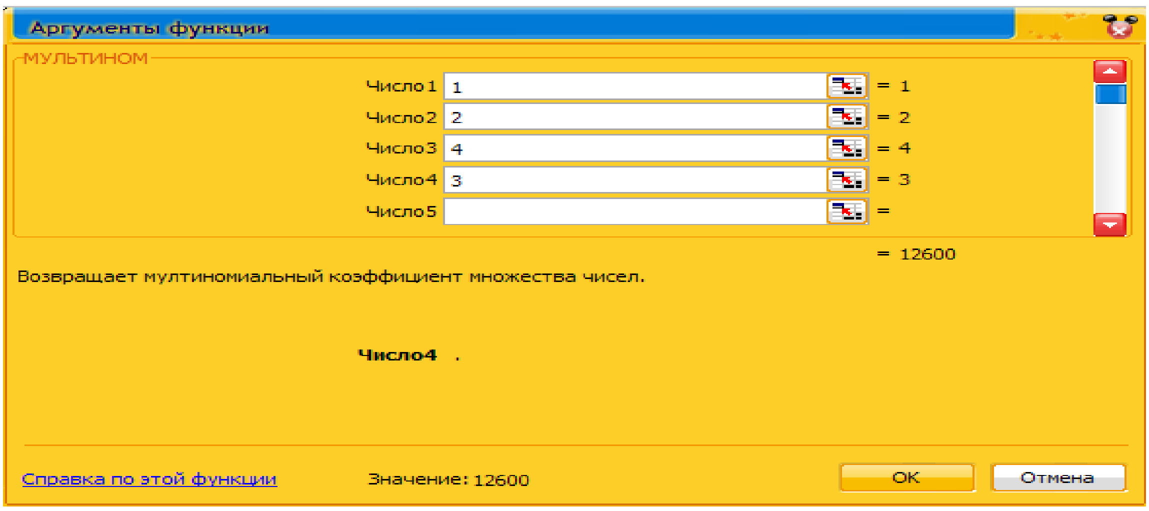
Dada, daad, ddaa, adda, adad, aadd.

Teorema. Elementlarining k_1 tasi 1- tipda, k_2 tasi 2-tipda, va hokazo k_m tasi m-tipda bo‘lgan n elementli to‘plamning barcha ***o‘rin almashtirishlar soni***

$$C_n(k_1,...,k_m)=\frac{n!}{k_1!*k_2!*...*k_m!}$$

ta bo‘ladi.

Shu o‘rinda eslatib o‘tamiz BMI, magistrlik dissertatsiyasi yoki ilmiy ishingizda ko‘p miqdordagi takrorlanuvchi o‘rin almashtirishlarni hisoblashga to‘g‘ri kelsa, unda Excel dasturlar paketidagi МУЛЬТИНОМ komandasidan foydalanish



mumkin: Masalan $C_{10}(1,2,4,3)=\frac{10!}{1!*2!*4!*3!}=12600$ ekanligini tezlik bilan hisoblash hech qanday qiyinchilik tug‘dirmaydi.

Takrorlanuvchi guruhlashlar.

Ta’rif. Har bir elementi n ta xildan biri bolishi mumkin k ta elementli guruxlarga n ta elementdan k ta elementli takrorlanuvchi guruhlashlar deb aytiladi.

Teorema. N ta elementdan k ta elementli takrorlanuvchi guruhlashlar soni

$$f_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^{k}$$

ta bo‘ladi.

$x_1 + x_2 + ... + x_n = k$ ko‘rinishdagi tenglama butun manfiymas yechimlari soni ham f_n^k ta bo‘ladi.

Maktab kursidan ma'lumki,

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Bu formulalarni umumlashtirib $(a+b)^n$ **q**avsni qanday ochish mumkin degan savol tug’ilishi tabiiy.
Bu savolga quyidagi teorema javob beradi:

Teorema (Binomial teorema). Quyidagi tenglik o'rinli

$$(a+b)^n = C_n^0 * a^n * b^0 + C_n^1 * a^{n-1} * b^1 + ... + C_n^k * a^{n-k} * b^k + ... + C_n^n * a^0 * b^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k * a^{n-k} * b^k$$

bu yerda C_n^k sonlarga ***binomial koeffitsiyentlar***, tenglamaga esa ***N’yuton binomi*** deyiladi.
Formulaning bunday nomlanishi tarixiy haqiqat emas, chunki N’yutondan oldin bu formulani O’rta Osiyolik mutafakkir Umar Xayyom (1046-1131), G'iyosiddin Jamshid al-Koshiy o’zlarining ishlarida qo’llashgan.

N’yutonning xizmati shundaki, formulani butun bo'lmagan n uchun umumlashtirgan.

Isboti. (a+b) yig’indini ketma-ket n marta ko’paytiramiz. U holda har bir hadi $d_1,d_2,...d_n$ ko’rinishga ega bo’lamiz, bunda d_i a yoki b ga teng, $i=1,2...$. Barcha qo’shiluvchilarni $B_0, B_1,...B_n$ bo’lgan (n+1) ta guruhlarga ajratamiz, B^k guruhda b ko’paytuvchi k marta, a esa n-k marta uchraydi. B^k dagi ko’paytuvchilar soni

$C^к_n$ ga tengligi tushunarli albatta. Har B^k dagi ko'paytuvchilarning har biri $a^{n-к}$ $b^к$ ga teng, bunday hadlar soni C_n^k ga teng, shu sababli

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k \qquad (1)$$

teorema isbotlandi. Binomial koeffitsientlarning quyidagi muhim xossasini eslatib o'tamiz

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1} \qquad (2)$$

Bu xossa 3-ma'ruzada isbotlangan.
(2) tenglik binomial koeffitsientlarni uchburchakli jadval ko'rinishida ketma-ket yozish
mumkinligini ko'rsatadi.

							1							n=1
						1		2		1				n=2
					1		3		3		1			n=3
				1		4		6		4		1		n=4
			1		5		10		10		5		1	n=5
		1		6		15		20		15		6		1	n=6
1	7	21	35	35	21	7	1							n=7

. . . .

Bu jadval Paskal uchburchagi deb ataladi.
Paskal uchburchagining *n* - satridagi sonlar $(a+b)^n$ yoyilmasining koeffisienti 1 sonlardan boshqa har bir koeffitsient oldingi satrda turgan 2 ta mos koeffisientlar yig'indisiga teng.

Polinomial teorema. $(a_1 + a_2 + ... + a_k)^n$ ifoda, bo'lishi mumkin bo'lgan barcha quyidagi ko'rinishdagi qo'shiluvchilar yig'indisidan iborat bo'lib,

$$\frac{n!}{r_1!*r_2!*...*r_k!} * a_1^{r_1} * a_2^{r_2} * ... * a_k^{r_k} \qquad (2)$$

Bu erda $r_1 + r_2 + ... + r_k = n$, ya'ni

$$(a_1 + a_2 + ... + a_k)^n = \sum_{\substack{r_1 \geq 0, ..., r_k \geq 0 \\ r_1 + r_2 + ... + r_k = n}} \frac{n!}{r_1!*r_2!*...*r_k!} * a_1^{r_1} * a_2^{r_2} * ... * a_k^{r_k} \qquad (3)$$

ga teng bo'ladi.

k=r bo’lganda (3) tenglik quyidagi ko’rinishga keladi:

$$(a_1 + a_2)^n = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r_1!(n-r)!} a_1^{n-r} \cdot a_2^r$$

Demak, xususiy holda N’yuton binomi formulasiga ega bo’lamiz.