笛卡尔定理与一类多圆相切问题

王永喜　　李奋平
（山西大学附属中学，030006）

中图分类号：O123.1　　文献标识码：A　　文章编号：1005－6416(2016)05－0012－05

先从一个非常经典的几何问题谈起.

引例　如图1，圆心为 A、B、C 的三个圆彼此外切，且均与直线 l 相切，设三个圆的半径分别为 a、b、$c(0<c<a<b)$. 证明：

$$\frac{1}{\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}. \qquad ①$$

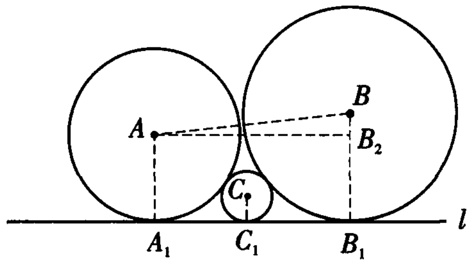

图1

收稿日期：2016－01－06　修回日期：2016－03－03

此问题不难.

注意到，

$A_1B_1=2\sqrt{ab}$，$B_1C_1=2\sqrt{bc}$，$A_1C_1=2\sqrt{ac}$，

$A_1C_1+B_1C_1=A_1B_1$.

因此，式①成立.

事实上，引例正是本文所要介绍的笛卡尔定理的特列.

下面给出该定理的具体表述与证明.

笛卡尔定理[1]　若平面上四个半径为 r_1、r_2、r_3、r_4 的圆两两相切于不同点，则其半径满足以下结论：

（1）若四圆两两外切，则

$$\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i}\right)^2=2\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i^2}; \qquad ①$$

【结构联想】由

$4pq=(p+q)^2-(p-q)^2$

$\leqslant 31^2-1=960$，

则 $pq\leqslant 240$.

故 $(a_i-b_i)+(b_j-a_j)\geqslant\frac{31A}{240}$.

另一方面，不妨设 $i>j$. 则

$(a_i-b_i)+(b_j-a_j)=a_i-(b_i-b_j)-a_j$

$\leqslant(1\ 984+i)-(i-j)-j=1\ 984$.

故 $\frac{31A}{240}\leqslant 1\ 984$

$\Rightarrow A\leqslant 64\times 240=15\ 360$

$\Rightarrow S=2A\leqslant 30\ 720$.

最后，从等号成立的条件入手，可取 $p=15$，$q=16$.

再注意到，

$15\ 360=1\ 024\times 15=960\times 16$.

可构造

$(a_1,a_2,\cdots,a_{31})$

$=(1,2,\cdots;15,2\ 000,2\ 001,\cdots,2\ 015)$，

$(b_1,b_2,\cdots,b_{31})=(1\ 025,1\ 026,\cdots,1\ 055)$，

此时，$S=1\ 024\times 15+960\times 16=30\ 720$，

且　$a_1+a_2+\cdots+a_{31}$

$=b_1+b_2+\cdots+b_{31}=32\ 240$，

符合要求.

综上，S 的最大值为 30 720.

【注】若取 $p=16$，$q=15$，则有如下构造：

$(a_1,a_2,\cdots,a_{31})$

$=(1,2,\cdots,16,2\ 001,2\ 002,\cdots,2\ 015)$，

$(b_1,b_2,\cdots,b_{31})=(961,962,\cdots,991)$.

（2）若半径为 r_1、r_2、r_3 的圆内切于半径为 r_4 的大圆中，则

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}\right)^2=2\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i^2}. \quad ②$$

证明 事实上，平面上四个圆满足两两相切，要么四个圆两两外切，要么其中三个圆两两外切且同时内切于第四个圆中，即有定理中的情形（1）和（2）.

下面分类讨论.

（1）四圆两两外切.

如图2，令

$O_1O_2=r_1+r_2=a$，$O_1O_3=r_1+r_3=b$，

$O_2O_3=r_2+r_3=c$，$OO_3=r_3+r_4=x$，

$OO_2=r_2+r_4=y$，$OO_1=r_1+r_4=z$，

$\angle O_1OO_2=\alpha$，$\angle O_3OO_1=\beta$，$\angle O_2OO_3=\gamma$.

则 $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$.

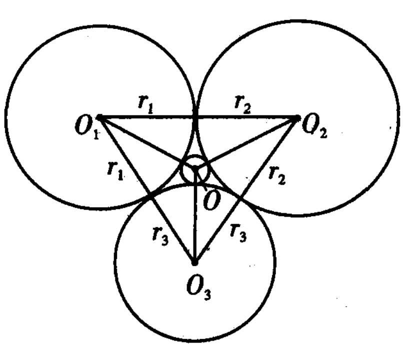

图2

由余弦定理得

$$\cos\alpha=\frac{y^2+z^2-a^2}{2yz}, \quad ③$$

$$\cos\beta=\frac{z^2+x^2-b^2}{2zx}, \quad ④$$

$$\cos\gamma=\frac{x^2+y^2-c^2}{2xy}. \quad ⑤$$

注意到，

$$\cos\gamma=\cos(\alpha+\beta)$$

$$=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sqrt{(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)}.$$

将式③～⑤代入上式，化简得

$$2z^2(x^2+y^2-c^2)+(y^2+z^2-a^2)(z^2+x^2-b^2)$$

$$=\sqrt{[4y^2z^2-(y^2+z^2-a^2)^2][4z^2x^2-(z^2+x^2-b^2)^2]}. \quad ⑥$$

式⑥两边平方并化简，再将 r_1、r_2、r_3、r_4 代入得

$$r_4=\frac{r_1r_2r_3}{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}+r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}. \quad ⑦$$

从而，式①成立.

（2）三个圆内切于半径为 r_4 的大圆中.

用同样的方法，此时，

$x=r_4-r_3$，$y=r_4-r_2$，$z=r_4-r_1$，

a、b、c 不变，代入式⑥得

$$r_4=\frac{r_1r_2r_3}{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}-(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)}. \quad ⑧$$

从而，式②成立.

为什么引例是笛卡尔定理的特列？事实上，由式⑦得

$$\frac{1}{r_4}=2\sqrt{\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_3r_1}+\frac{1}{r_1r_2}}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}.$$

当 $r_3\to+\infty$ 时，

$$\frac{1}{r_4}=2\sqrt{\frac{1}{r_1r_2}}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{r_4}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$

这正是引例的结论.

同样地，由式⑧得

$$\frac{1}{r_4}=2\sqrt{\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_3r_1}+\frac{1}{r_1r_2}}-\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right).$$

此时，令 $r_4\to+\infty$，亦得引例结论.

再给出笛卡尔定理的具体应用.

例1 设在互相内切的两圆间隙中，依次作四个内切圆.若所作四个圆除首末二者外各依次相外切，则所作四个圆的半径 r_1、r_2、r_3、r_4 满足

$$\frac{1}{r_1}-\frac{3}{r_2}+\frac{3}{r_3}-\frac{1}{r_4}=0.$$

例1被称作周达定理.该定理最早出现在文[2]中，文[1]、[3]均给出了详实的证明，其中文[3]用反演变换给出了该定理的

简单证明,并将结论推广到了 n 个圆的情形.

证明 如图3,设已知两圆为$\odot O$、$\odot O'$,半径分别为 a、b. 所作的四个圆依次为$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、$\odot O_4$.

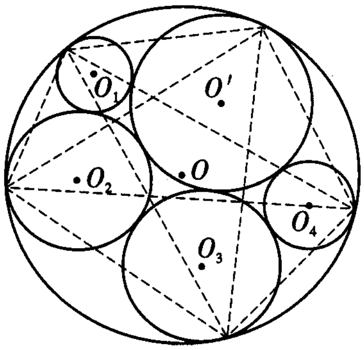

图3

则对$\odot O$、$\odot O'$、$\odot O_1$、$\odot O_2$ 利用笛卡尔定理中的式②得

$$\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)^2=2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right).$$

类似地,对$\odot O$、$\odot O'$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 利用笛卡尔定理得

$$\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)^2=2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}\right).$$

两式相减得

$$\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_3}\right)\left(-\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{r_2}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}\right)$$
$$=2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_3}\right)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}\right),$$

即 $$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}-\frac{2}{r_2}=-\frac{2}{a}+\frac{2}{b}.$$

类似地,$\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}-\frac{2}{r_3}=-\frac{2}{a}+\frac{2}{b}$.

以上两式联立即得结论.

例2 记“$\sum$”表示轮换对称和. 设 a、b、$c\in\mathbf{R}_+$. 试求方程

$$\sum\sqrt{abx(a+b+x)}=\sqrt{abc(a+b+c)}$$

的正根 x. [4]

解 如图4,以 $a+b$、$b+c$、$a+c$ 为边构成$\triangle ABC$,以 A、B、C 为圆心依次以 a、b、c 为半径作圆,设$\odot O$ 与上述三个圆外切,其半径为 x_0.

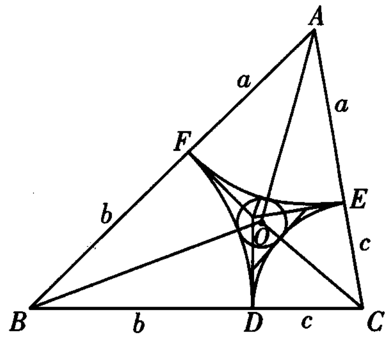

图4

由于 $S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OAC}=S_{\triangle ABC}$,则由海伦公式得

$$\sum\sqrt{abx_0(a+b+x_0)}=\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

因此,x_0 即为所求的正根.

注意到,已知条件正是笛卡尔定理中四个圆两两外切的情形.

由式⑦得

$$x_0=\frac{abc}{ab+bc+ca+2\sqrt{abc(a+b+c)}},$$

即得所求正根.

例3 如图5,设最大半圆半径为1,小半圆半径为$\frac{1}{2}$. 求第 k 个阴影圆的半径.

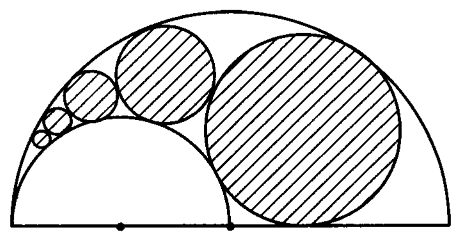

图5

解 假设第 k 个阴影圆的半径为 r_k.

则由笛卡尔定理得

$$\left(2-1+\frac{1}{r_k}+\frac{1}{r_{k+1}}\right)^2=2\left(1+4+\frac{1}{r_k^2}+\frac{1}{r_{k+1}^2}\right).$$

类似地,

$$\left(2-1+\frac{1}{r_k}+\frac{1}{r_{k-1}}\right)^2=2\left(1+4+\frac{1}{r_k^2}+\frac{1}{r_{k-1}^2}\right).$$

两式相减得

$$2\left(\frac{1}{r_{k+1}}-\frac{1}{r_{k-1}}\right)\left(\frac{1}{r_{k+1}}+\frac{1}{r_{k-1}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{r_{k+1}}-\frac{1}{r_{k-1}}\right)\left(2+\frac{2}{r_k}+\frac{1}{r_{k-1}}+\frac{1}{r_{k+1}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_{k+1}}+\frac{1}{r_{k-1}}-\frac{2}{r_k}=2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{r_{k+1}}-\frac{1}{r_k}\right)-\left(\frac{1}{r_k}-\frac{1}{r_{k-1}}\right)=2.$$

累加得

$\frac{1}{r_k}=k^2-k+C$（C 为待定系数）.

因此，$\frac{1}{r_1}=C,\frac{1}{r_2}=2+C.$

由于大圆、小半圆和第一个阴影圆、第二个阴影圆相切，则

$$(-1+2+C+2+C)^2$$
$$=2[1+4+C^2+(C+2)^2]$$
$$\Rightarrow C=\frac{9}{4}\Rightarrow r_k=\frac{4}{4k^2-4k+9}.$$

例4 设△ABC 的半周长为 p，内切圆半径为 r，分别以 BC、CA、AB 为直径在△ABC 的外侧作半圆，设与这三个半圆均相切的圆 Γ 的半径为 t. 证明：

$$\frac{p}{2}<t\leqslant\frac{p}{2}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r. \qquad ⑨$$

证明 如图6，设圆 Γ 的圆心为 O，D、E、F 分别为边 BC、CA、AB 的中点，圆 Γ 与三个半圆的切点分别为 D'、E'、F'，又设这三个半圆的半径分别为 d'、e'、f'. 则 DD'、EE'、FF' 均过点 O，且 $p=d'+e'+f'$.

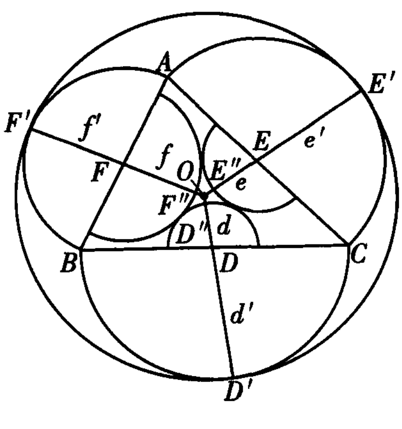

图6

记 $d=\frac{p}{2}-d'=\frac{-d'+e'+f'}{2}$，

$e=\frac{p}{2}-e'=\frac{d'-e'+f'}{2}$，

$f=\frac{p}{2}-f'=\frac{d'+e'-f'}{2}$.

则 $d+e+f=\frac{p}{2}$.

在△ABC 内部，分别以 D、E、F 为圆心依次以 d、e、f 为半径作三个较小的半圆.

因为 $d+e=f'=\frac{1}{2}AB=DE$，

$e+f=d'=\frac{1}{2}BC=EF$，

$f+d=e'=\frac{1}{2}AC=FD$，

所以，这三个较小的半圆两两相切，且这些切点分别为△DEF 的内切圆与其三边的切点.

设 DD'、EE'、FF' 与较小的半圆分别交于点 D''、E''、F''.

因为这些半圆互不重叠，且 O 为这些半圆外部的点，所以，$D'O>D'D''$，即 $t>\frac{p}{2}$.

因此，式⑨左边得证.

设 $g=t-\frac{p}{2}$. 则

$OD''=OE''=OF''=g$.

于是，以 O 为圆心、g 为半径的圆与这三个互切的半圆均相切.

由笛卡尔定理得

$$2\left(\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}+\frac{1}{f^2}+\frac{1}{g^2}\right)=\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{g}=\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+2\sqrt{\frac{d+e+f}{def}}.$$

又 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}=\frac{pr}{4}$

$=\sqrt{(d+e+f)def}$，

则 $\frac{r}{2}=\frac{2}{p}\sqrt{(d+e+f)def}=\sqrt{\frac{def}{d+e+f}}$.

故要证明式⑨右边，即等价证明

$\frac{r}{2g}\geqslant\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$.

注意到,

$$\frac{r}{2g}=\sqrt{\frac{def}{d+e+f}}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+2\sqrt{\frac{d+e+f}{def}}\right)$$

$$=\frac{x+y+z}{\sqrt{xy+yz+zx}}+2,$$

其中,$xd=1,ye=1,zf=1$.

故只要证

$$(x+y+z)^2\geqslant3(xy+yz+zx). \qquad ⑩$$

又$(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)$

$$=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$$

$$\geqslant0,$$

从而,式⑩成立.

因此,式⑨右边也成立.

笛卡尔定理在三维空间中仍有类似的结论:若五个球的半径为 $r_i(i=1,2,\cdots,5)$,满足任意一个球与其他四个球外切,则

$$\left(\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{r_i}\right)^2=3\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{r_i^2}.$$

利用三维的笛卡尔定理,就可以解决下面的例5.

例5 空间有四个球,它们的半径分别为2、2、3、3.每个球均与其余三个球外切,另有一个小球与这四个球均外切.求该小球的半径.

(1995,中国数学奥林匹克)

解 设所求的球的半径为 $r=\frac{1}{x}$.则由笛卡尔定理得

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+x\right)^2$$

$$=3\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+x^2\right)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{5}{3}+x\right)^2=3\left(\frac{13}{18}+x^2\right)$$

$$\Rightarrow x=\frac{11}{6}\Rightarrow r=\frac{6}{11}.$$

参考文献:

[1] 沈文选,杨清桃 编著.几何瑰宝:平面几何500名题暨1 000条定理(上)[M].哈尔滨工业大学出版社,2010.

[2] 梁绍鸿 编著.初等数学复习及研究(平面几何)[M].北京:人民教育出版社,1958.

[3] 萧振纲 著.几何变换与几何证题[M].哈尔滨工业大学出版社,2010.

[4] 中国国家集训队教练组 编.走向IMO:数学奥林匹克试题集锦(2007)[M].上海:华东师范大学出版社,2007.