Quatrième application (un modèle en ressources renouvelables)

Avant de définir le modèle économique nous concernant, nous donnons un bref apperçu sur l'histoire de l'évolution de quelques lois régissant les ressources renouvelables.

1. *Motivation Historique.*

Chaque espèce sur notre terre evolue suivant une certaine loi étalée sur une certaine période de temps, et qui est determinée à partir de plusieurs facteurs. Parmi ces espèces, on trouve les poissons, qui constituent une ressource alimentaire très importante. Soit x_0 la taille initiale de la population (la biomasse) et $x(t)$ sa taille à l'instant $t \geq 0$, alors la façon la plus parfaite pour l'évolution de cette espèce (dans le cas où il y a assez de nourriture et l'environnement est inchangeable), est que le taux de changement de cette taille $\Delta x(t)$, sur une période de temps Δt, est proportionnelle à la taille de la population $x(t)$, ce qui s'exprime par l'équation différentielle : $\dot{x}(t) = r\, x(t)$ où r est une certaine constante positive. Cette équation avec la donnée initiale $x(0) = x_0$ possède la solution unique $x(t) = x_0 \exp(rt)$, une loi qui peut être valable pour des périodes de temps finies, mais une fois la période de planification devient assez large, cette loi n'est plus raisonnable. Notons que si la période du temps est partagée en intervalles égaux, disons, des années, alors la loi précédente s'interprète par le fait que la population croît suivant une progréssion géométrique de raison r (ce cas a été considéré par l'économiste et l'historien anglais Thomas Robert en 1798).

En 1842, le statisticien belge L. A. G. Quetelet a noté qu'une population capable de se reproduire librement et sans obstacles (avec espace et nourriture abondants), évolue suivant une progréssion géométrique, cependant les obstacles font ralentir cette croissance, et forcent la population de s'approcher d'une certaine limite supérieure disons K (voir fig. 3). De telles courbes ont été observées par Edward en 1599 et appelées : les courbes logistiques, un terme qu'on utilise souvent. P. F. Verhulst fut le premier à formuler ce phénomène mathématiquement, en supposant que la croissance de la population est inhibée par un facteur proportionnel au carré de la population. Ainsi l'équation qui régit cette dernière devient : $\dot{x}(t) = r\, x(t) - k\, x(t)^2$, $x(0) = x_0$. Si nous définissons la constante positive $K = r/k$, appelée le niveau de saturation, alors l'équation précédente prend la forme : $\dot{x}(t) = rx(t)(1 - x(t)/K)$, $x(0) = x_0$, celle–ci s'appele l'équation logistique, c'est une simple équation de Riccati, dont la solution unique est donnée par :

$$x(t) = \frac{x_0 K}{x_0 + (K - x_0) \exp(-rt)} .$$

Cette courbe tend exponentiellement vers le niveau de saturation K lorsque t devient assez grand. Avec des choix appropriés des constantes r et K, celle–ci peut décrire plusieurs populations simples (voir par exemple Clark [1976]). Remarquons que pour chaque t fixé $x(t) \longrightarrow x_0\exp(rt)$ lorsque $K \longrightarrow \infty$, ceci affirme que ce modèle est plus réaliste que celui proposé dans le cas où il n'y a aucun obstacle pour la reproduction et la survie de la biomasse et que le premier est le cas limite (parfait) du dernier.

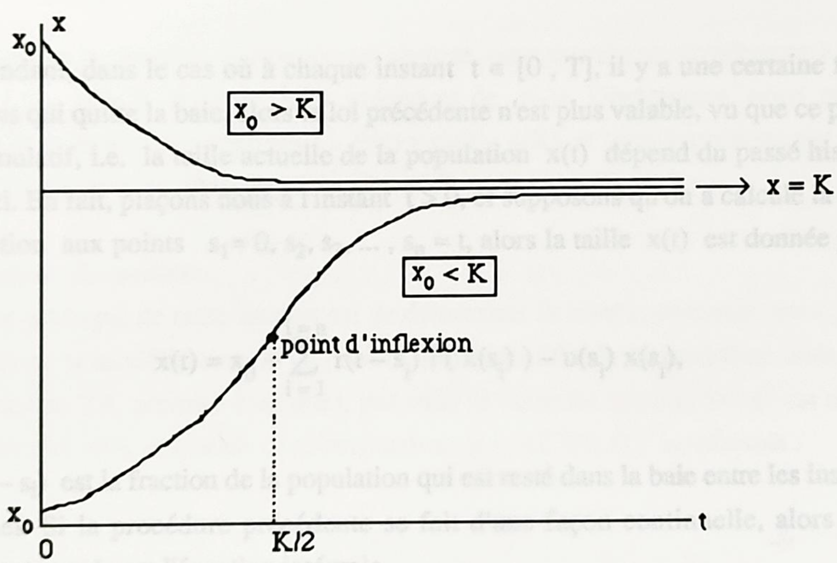

fig. 3

2. *Description du modèle.*

Le phénomène de la dissipation dans les baies est souvent présent, et il est causé par plusieurs facteurs environnementaux et humains (changement dans la nature de climat, polution, et autres). Étant donnée une population de taille $x(t)$ à chaque instant t et de taille initiale $x(0) = x_0$ donnée, où t varie dans un intervalle fini $[0 , T]$ (intervalle de planification), qui évolue suivant une certaine loi de croissance naturelle donnée par la fonction $F(x)$, de plus, un certain effort d'exploitation (de récolte) par unité présenté par la fonction $u(t)$ est appliqué dans le cas de nécessité, cet effort varie dans l'intervalle $[0 , E]$, où la constante E est appelée l'effort maximal. Dans le cas où le phénomène de la dissipation est absent, la loi de croissance de la population est donnée par l'équation différentielle :

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) - x(t)\, u(t), \text{ avec } x(0) = x_0,$$

ce qui est équivalent à l'équation intégrale :

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \{ F(x(s)) - x(s)\, u(s)\}\, ds \quad , t \in [0, T].$$

Cependant, dans le cas où à chaque instant $t \in [0 , T]$, il y a une certaine fraction de poissons qui quitte la baie, alors la loi précédente n'est plus valable, vu que ce phénomène est cumulatif, i.e. la taille actuelle de la population $x(t)$ dépend du passé historique de celle–ci. En fait, plaçons nous à l'instant $t > 0$, et supposons qu'on a calculé la taille de la population aux points $s_1 = 0, s_2, s_3, \dots , s_n = t$, alors la taille $x(t)$ est donnée par :

$$x(t) = x_0 + \sum_{i=1}^{i=n} r(t - s_i)\, F(x(s_i)) - u(s_i)\, x(s_i),$$

où $r(t - s_i)$ est la fraction de la population qui est resté dans la baie entre les instants s_i et t actuel. Si la procédure précédente se fait d'une façon continuelle, alors l'équation précédente tend vers l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \{ r(t - s)\, F(x(s)) - u(s)\, x(s) \}\, ds.$$

La fonction $r(\cdot)$ doit satisfaire aux conditions suivantes : $r(0) = 1$, r est positive, à décroissance lente, de plus elle est continûment dérivable, donc $0 < r(t) \leq 1$ pour tout t dans $[0 , T]$. Un choix convenable de r est la fonction $r(t) := \exp(-\rho t)$, où ρ est un nombre positif. Le négatif de la valeur totale actualisée de revenu net correspondant à un effort $u(\cdot)$ et à une taille $x(\cdot)$ est donné par :

$$J(x, u) = \int_0^T e^{-\delta t}\{c - \pi x(t)\}\, u(t)\, dt,$$

où δ est le taux d'intérêt continuel, les constantes π et c sont le prix et le coût par unité.

Il s'agit dans notre problème de minimiser $J(x, u)$ à travers les (x, u) vérifiant les contraintes :

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \{ r(t-s)\, F(x(s)) - u(s)\, x(s) \}\, ds\,, \quad 0 \le u(t) \le E\,, \quad (t \in [0, T]).$$

Notons que le cas où la dissipation est absente, correspond tout simplement à la fonction $r \equiv 1$, (i.e. $\rho = 0$ pour le choix précédent de $r(\cdot)$). Dorénavant, nous prenons F comme étant la fonction logistique : $F(x) = rx(1 - x/K)$, et nous supposons que la taille de la population $x(\cdot)$ ne dépasse pas le niveau du saturation K.

3. *Analyse du modèle.*

Le but principal de cette section est de déterminer la récolte optimale stratégique $u(\cdot)$. Notons que la modélisation de ce problème est identifiable au problème linéaire normal (voir section 2.4, premier exemple), par suite le contrôle optimal relaxé est un contrôle ordinaire soit $u(\cdot)$, et à celui–ci correspond un $p \in AC^2(T, \mathbb{R})$ satisfaisant :

(3.1) $$-\dot{p}(t) = p(t)\{F'(x(t)) - u(t) + \int_0^t r'(t-s)\, F'(x(s))\, ds\} + \pi u(t)\, e^{-\delta t}$$

(3.2) $$p(T) = 0$$

(3.3) $$\max\left\{ p(t)\{F(x(t)) - x(t)v + \int_0^t r'(t-s)\, F(x(s))\, ds\} - (c - \pi x(t))e^{-\delta t} v \;:\; 0 \le v \le E \right\} \text{ est atteint pour } v = u(t)\,.$$

Cette dernière conclusion est équivalente à : $\min\{\, \sigma(t)v \;:\; 0 \le v \le E \,\}$ est atteint en v

$= u(t)$, où σ est la fonction AC^2 donnée par : $\sigma(t) := p(t)x(t) + (c - \pi x(t))e^{-\delta t}$, ($t \in [0, T]$) et appelée fonction d'échange à raison des conclusions ci–dessous. Par conséquent, on conclut :

- $u(t) = E$ pour $t \in \{ t : \sigma(t) < 0 \} =: I_1$,
- $u(t) = 0$ pour $t \in \{ t : \sigma(t) > 0 \} =: I_2$, et
- pour $t \in \{t : \sigma(t) = 0 \} =: I_3$, $u(t)$ ne peut être déterminé à partir de la conclusion (3.3).

Une première question qui se pose est : existe–t–il un équilibre constant sur un certain sous–intervalle non–nul de $[0, T]$? une chose certaine est que sur I_1 et I_2 si l'un au moins des deux ensembles est non–vide, on ne peut pas avoir un équilibre, puisque dans l'absence de la récolte, la taille de la population doit augmenter (i.e. $\dot{x} > 0$), et dans sa présence, elle doit diminuer (i.e. $\dot{x} < 0$). Une possibilité d'équilibre reste à avoir sur I_3 si celui–ci est non–vide. Tout d'abord, on a d'une part pour tout $t \in I_3$, $p(t) = (\pi - c/x(t))e^{-\delta t}$, et d'autre part, en remplaçant cette expression de p et sa dérivée dans (3.1), et en tenant compte du fait que

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) - u(t)x(t) + \int_0^t r'(t-s)\, F(x(s))\, ds\ , \quad x(0) = x_0\ ,$$

il en résulte que $x(t)$ pour $t \in I_3$ est donnée comme solution de l'équation intégrale (assez compliquée au niveau théorique) :

$$2\pi r\, x(t)^3 + (\delta\pi K - r\pi K - rc)\, x(t)^2 - \delta c K\, x(t) - r x(t)\, (\pi x(t) - c) \int_0^t r'(t-s)\, (K - 2x(s))\, ds$$

$$- cr \int_0^t r'(t-s)\, x(s)\, (K - x(s))\, ds \ = \ 0,$$

(remarquons que dans l'absence de la dissipation, cette équation intégrale se réduit à une équation algébrique, dont la seule solution positive est donnée par

$$x^* = \frac{-(\delta\pi K - \pi r K - cr) + \sqrt{(\delta\pi K - \pi r K - cr)^2 + 8\pi\delta r c K}}{4\pi r}).$$

Donc si il existe un intervalle $[a, b] \subset I_3$ ($b > a \geq 0$), tel que $x(t) \equiv x^*$ pour $t \in [a, b]$, alors x^* doit satisfaire :

(*) $\delta K(\pi x^* - c) + r x^*.[2\pi x^* - (c + K\pi)]\, r(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$, si $a = 0$, et

(**) $2\pi r(1 - r(a))\, x^{*^3} + [(\delta\pi K - \pi r K - cr) + r(a) r.(K\pi + c)]\, x^{*^2} - \delta c K\, x^* +$

$[2\pi r\, x^{*^3} - (r(K\pi + c) + r\pi\rho J_1)\, x^{*^2} - r c\rho J_1\, x^* + c r\rho J_2]\, r(t) = 0, \ \forall\ t \in [a, b]$, si

$a > 0$, où $J_1 = \int_0^a e^{\rho s}(K - 2x(s))\, ds$, $J_2 = \int_0^a e^{\rho s} x(s)(K - x(s))\, ds$.

La condition (*) implique que $x^* = c/\pi = K$, or $K > c/\pi$ (une hypothèse normale), par suite cette eventualité est rejetée, alors que la condition (**) est équivalente au système d'équations algébriques :

$$\begin{cases} 2\pi r(1 - r(a))\, x^{*^2} + [(\delta\pi K - \pi r K - rc) + r(a) r.(K\pi + c)]\, x^* - \delta c K = 0 \\ 2\pi r\, x^{*^3} - [r(\pi K + c) + r\pi\rho J_1]\, x^{*^2} - r c\rho J_1\, x^* + r c\rho J_2 = 0 \end{cases}$$

Par suite, si nous connaissons l'expression de $x(t)$ pour $t \in [0, a]$, ce dernier système en (a, x^*) peut nous donner l'information si il existe un équilibre ou non dans I_3.

Si nous supposons que $I_3 = [a, b]$, où a dans ce cas est le premier point où la fonction σ devient nulle, alors J_1, J_2 s'expriment facilement en fonction de x et p. En fait, on a dans le cas où le contrôle optimal sur $[0, a]$ est $u \equiv 0$

$$x(a) = x_0 + r\int_0^a e^{-\rho(a-s)} x(s)(1 - \frac{x(s)}{K})\, ds\,,$$

$$\text{i.e.}\quad \frac{K}{r} e^{\rho a} x(a) = \frac{K}{r} x_0 e^{\rho a} + J_2\,,\ \text{i.e.}\quad J_2 = \frac{K}{r} e^{\rho a}(x(a) - x_0),$$

et

$$-\dot{p}(a) = p(a)\{\ r(1 - 2\frac{x(a)}{K}) - \int_0^a \rho r\, e^{-\rho(a-s)}(1 - 2\frac{x(s)}{K})\, ds\}\ ,\ \text{i.e.}$$

$$J_1 = \frac{e^{\rho a}}{\rho}\{\ (K - 2x(a)) + \frac{K\dot{p}(a)}{rp(a)}\ \}.$$

Dans le cas où le contrôle optimal sur $[0, a]$ est $u \equiv E$, on a

$$J_2 = \frac{K}{r} e^{\rho a}\{E\int_0^a x(s)\, ds + x(a) - x_0\}\ ,\ \text{et}$$

$$J_1 = \frac{1}{\rho r} e^{\rho a}\{r(K - 2x(a)) - KE\} + \frac{K}{\rho\, r\, p(a)}\{\pi E + \dot{p}(a)e^{\rho a}\}.$$

Si le contrôle optimal est nul sur $[0, a]$, alors l'état correspondant $x(\cdot)$ est solution de l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_0^t r(t-s)\, F(\, x(s)\,)\, ds,$$

qui implique par différentiation que $x(\cdot)$ est solution de l'équation de Riccati :

$$K\dot{x} - K(r - \rho)\, x + rx^2 = K\rho x_0.$$

Notons que cette équation peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\dot{x} = F(\, x(t)\,) + \rho(x_0 - x(t)),$$

et le terme $\rho(x_0 - x(t))$ qui est absent dans le cas où il n'y a pas de dissipation, représente en quelque sorte le taux de décroissance par unité du temps dans la population causé par la dissipation. À partir de cette équation, on conclut facilement que $x(\cdot)$ est strictement croissante sur $[0, a]$, à moins que $x_0 = K$, où x sera identique à x_0 sur $[0, a]$. L'équation de Riccati peut être transformée en une équation de Bernoulli, à savoir :

$$K\dot{y} - \{K(r - \rho) + 2r\alpha\}y + ry^2 = 0,$$

en posant $y = x + \alpha$, où α est la solution de l'équation : $r\alpha^2 + K(r - \rho)\alpha - \rho K x_0 = 0$, i.e. $\alpha \in \{\alpha^-, \alpha^+\}$ avec

$$\alpha^\pm = \frac{K(\rho - r) \pm \sqrt{\Delta}}{2r}, \quad \Delta = \{K(r - \rho)\}^2 + 4Kr\rho x_0 .$$

Par le changement de variable $y = z^{-1}$, l'équation de Bernoulli précédente devient une équation linéaire de premier ordre :

$$K\dot{z} + \{K(r - \rho) + 2r\alpha\}z = r, \text{ avec la donnée } z(0) = 1/(x_0 + \alpha),$$

par suite $z(\cdot)$ est donnée par :

$$z(t) = \left[\frac{1}{x_0 + \alpha} - \frac{\varepsilon r}{\sqrt{\Delta}}\right] e^{-\varepsilon \frac{\sqrt{\Delta}}{K} t} + \frac{\varepsilon r}{\sqrt{\Delta}}, \text{ et } x(t) = \frac{1}{z(t)} - \alpha, \text{ avec } \varepsilon = \pm 1 \text{ si } \alpha = \alpha^\pm.$$

On note par z^+ la fonction z qui correspond à $\alpha = \alpha^+$, par z^- celle qui correspond à $\alpha = \alpha^-$ et par x^+, x^- les fonctions correspondantes à z^+ et z^-.

<u>Étude du signe de $\dot{x}$:</u>

Tout d'abord on a : $\operatorname{sgn} \dot{x} = \operatorname{sgn}(-\dot{z}) = \operatorname{sgn}\left[\frac{\varepsilon\sqrt{\Delta}}{x_0 + \alpha} - r\right]$, et d'autre part on a :

$$x_0 + \alpha^+ > 0, \; x_0 + \bar{\alpha} = \frac{-K F(x_0)}{2rx_0 + K(\rho - r) + \sqrt{\Delta}} \leq 0 \text{ (avec égalité seulement dans le cas } x_0 = K \text{),}$$

et $\varepsilon\sqrt{\Delta} - r(x_0 + \alpha^{\pm}) = -\varepsilon r(x_0 + \alpha^{\mp})$. Donc, on a les conclusions suivantes :

1⁰) cas: $x_0 < K$.

Dans ce cas la population croît strictement sur $[0, a]$ suivant la courbe représentative de x^+ sur $[0, a]$, où $x^+ = 1/z^+ - \alpha^+$. L'arc x^- est rejeté puisque la fonction $x^-(\cdot)$ est strictement décroissante.

2⁰) cas: $x_0 = K$.(donc $\alpha^- = -K$)

Cette situation est un peu extrême, et on aurait pu l'éviter dés le début en supposant que $x_0 < K$. Dans ce cas la population garde sur la période du temps $[0, a]$ la même taille initiale x_0 (Il est à remarquer que pour $x_0 = K$, $y(0) = 0$ pour $\alpha = \alpha^-$, et donc la valeur $z(0)$ n'est pas définie. Dans ce cas, il suffit de retourner à l'équation intégrale dont $x(\cdot)$ est une solution et poser $x_0 = K$. Tenant compte du fait que $x \le K$, on tire que $x(t) \ge K$ pour tout t dans $[0, a]$, et par suite $x \equiv K$ sur $[0, a]$.).

Dans le cas où le contrôle optimal sur $[0, a]$ est égal à l'effort maximal E, alors l'état correspondant $x(\cdot)$ est solution de l'équation intégrale :

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \{r(t-s)\, F(x(s)) - Ex(s)\}\, ds,$$

qui est équivalente à l'équation intégro–différentielle :

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) - Ex(t) - \rho\int_0^t r(t-s)\, F(x(s))\, ds, \text{ avec } x(0) = x_0,$$

qui peut s'écrire aussi :

$$\dot{x}(t) = \rho(x_0 - x(t)) + (r - E)\, x(t) - \frac{r}{K}\, x(t)^2 - \rho E\int_0^t x(s)\, ds$$

Par suite

$$\dot{x}(t) \leq \rho(x_0 - x(t)) + (r - E)\, x(t)$$
$$< \rho(x_0 - x(t)) \quad \text{pour tout } t \text{ dans } [0\,,a], \text{(en supposant que } r < E).$$

De cette inégalité, on conclut que $x(\cdot)$ décroît strictement sur $[0\,,a]$. De la même façon que précédemment (i.e. dans le cas de l'effort nul), on interprète le terme :

$$\rho(x_0 - x(t) - E\int_0^t x(s)\, ds),$$

figurant dans l'expression de $\dot{x}$, comme étant le taux de décroissance par unité du temps dû à l'influence de la dissipation sur l'évolution de la population.

Une possibilité d'extinction est probable sur $[0\,,a]$, quand on applique l'effort maximal E. Si ceci est vrai, alors il existe $a_0 \in (0\,,a]$ tel que $x(a_0) = 0$, par suite $\sigma(a_0) = c.\exp(-\delta a_0) > 0$, i.e. $a_0 \in I_2$, et donc $u(a_0) = 0$; d'où une contradiction (en réalité, la seule valeur possible pour a_0 est bien a, sinon, $0 < a_0 < a$, alors pour $t \in [a_0\,,a]$, $\sigma(t) = c.\exp(-\delta t) > 0$, donc $[a_0, a] \subset I_2$, et par conséquent $u(t) = 0$ pour $t \in [a_0\,,a]$; d'où une contradiction).

En conclusion, les informations que nous avons obtenues à partir des conditions nécessaires d'optimalité, afin d'établir la stratégie optimale pour notre modèle, sont partielles. Ceci est dû essentiellement à la complexité de l'étude théorique de l'équation intégrale impliquée par le cas singulier (i.e. $\sigma(t) = 0$). Dans telles circonstances, on doit peut-être passer au calcul numérique, précisément, celui concernant la résolution des équations intégrales à passé historique, et le calcul intégral aussi.