QUELQUES NOTIONS DE BASE DE LA FINANCE DES PROJETS PLUS CODE SOURCE PYTHON

Par : Abdel YEZZA, Ph.D.

Date : Avril 2011/dernière mise à jour septembre 2019 plus un code source complet en PYTHON !

Contenu

Liste des graphes, formules et illustrations

Liste des exemples

Liste des exemples de code source PYTHON

Résumé

Tout projet de budgétisation d'un projet passe par 4 étapes principales comme indiqué dans le schéma suivant :

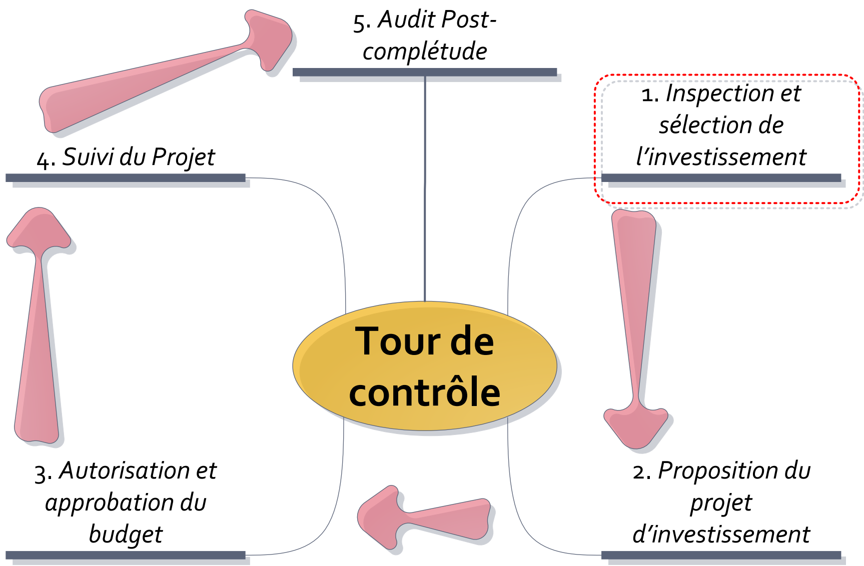


Fig 1. Schéma des étapes de budgétisation d'un projet

Dans cet article nous nous intéressons uniquement à **l'étape 1 (Inspection et sélection de l'investissement)**, plus précisément aux différentes techniques formalisant les critères de sélection de l'investissement pour tout projet.

Nous étudions dans cet article quelques éléments de base relatifs à la finance, notamment ceux en relation avec la gestion financière des projets IT ou business, à savoir répondre aux deux questions fondamentales suivantes :

- Combien devrions-nous dépenser sur les projets et les actifs de l'entreprise ?
- Quels sont les projets que nous devrions lancer et les actifs que nous devrions acquérir ?

Je fournirai également la méthode de calcul des mensualités dues à un prêt de quelque nature qu'il soit (immobilier, achat de voiture etc.). N'étant pas un spécialiste en mathématiques financières, j'ai voulu par cet article vulgariser quelques éléments financiers utilisés dans le cadre de gestion de projets en termes d'investissements, dépenses et performances financières.

Les sujets abordés dans cet article s'adressent principalement aux personnes traitant toute question relative à l'analyse financière des projets en tant qu'une composante essentielle de la stratégie de l'entreprise. Malgré qu'il s'adresse principalement aux analystes financiers et gestionnaires de portefeuilles/projets, Il exige néanmoins une connaissance basique des mathématiques et des fonctions natives de Microsoft EXCEL pour utiliser les exemples fournis, notamment celles qui concernent la finance. Une connaissance de la part du lecteur du cycle de vie d'un projet est un plus. Le livre The Basics Of Finance By PAMELA PETERSON DRAKE and FRANK J. FABOZZI, a été utilisé en partie comme source d'information.

Afin de compléter les notions théoriques enrichies par de nombreux exemples pratiques, pour les lecteurs possédant déjà une bonne base en programmation informatique, la plupart des exemples sont traités également par du code en PYTHON. Le choix de ce langage de programmation se justifie d'abord par sa simplicité et surtout par la disponibilité d'un nombre important de bibliothèques qui le complètent et répondent aux besoins d'automatiser les calculs et l'illustration par des graphes plus parlants ! Le code source PYTHON complet est disponible en annexe 2.

Afin de pouvoir tester le code source PYTHON et les exemples donnés dans cet article, vous devez disposer :

- D'un éditeur ou de préférence d'un IDE supportant PYTHON
- De la version python 3.7 (32bits ou 64bit) ou plus
- Avoir installé les bibliothèques :
  - *Scipy*, *sympy*, *numpy*, *pandas* et *matplotlib* téléchargeables par exemple sur : https://www.scipy.org/
  - Importer ces librairies comme ci-dessous :

```
import sys
from scipy import optimize
import sympy
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Si les éléments suivants :

PV : Present Value
FV : Future Value
NPV : Net Present Value
IRR : Internal Rate of Return
TEG : Taux Effectif Global
MIRR : Modified Internal Rate of Return
PBP : Payback Period
DPBP : Discounted Payback Period
PI : Profitability Index
CFA[1] : Cash Flow Analysis
DCFA[2]: Discounted Cash Flow Analysis
TCO[3] : Total Cost of Ownership
ROI : Return On Investment
ROSI : Return On Security Investment

ne vous parlent pas ou très peu, cet article peut vous apporter des réponses et constituer un résumé et une source d'information pour vous.

[1] Non traité
[2] Non traité
[3] Non traité

1. Critères décisionnels financiers de sélection des projets

Nous présentons dans cette section les critères les plus communs utilisés dans l'analyse quantitative pour sélectionner un ou plusieurs projets concurrents ou tout simplement analyser la profitabilité monétaire d'un projet. On peut les scinder en deux catégories :

- **Critères de capitaux ou durée :** NPV, PBP et DPBP
- **Critère de ratios (ou %) :** IRR, MIRR et PI

Chaque technique possède ses propres avantages et inconvénients par rapport aux autres et répond à des situations différentes en fonction des priorités des projets d'investissement. Selon les exigences du projet on peut combiner plusieurs critères financiers décisionnels à la fois.

1.1 Comment calculer la NPV (Net Present Value) ou la VAN (Valeur Actuelle Nette) en français ?

La NPV en deux mots représente la valeur nette (comprenant les encaissements : InFlows et les décaissements : OutFlows) aujourd'hui d'une somme à recevoir demain (dans un mois, 1 an, 2 ans etc.).

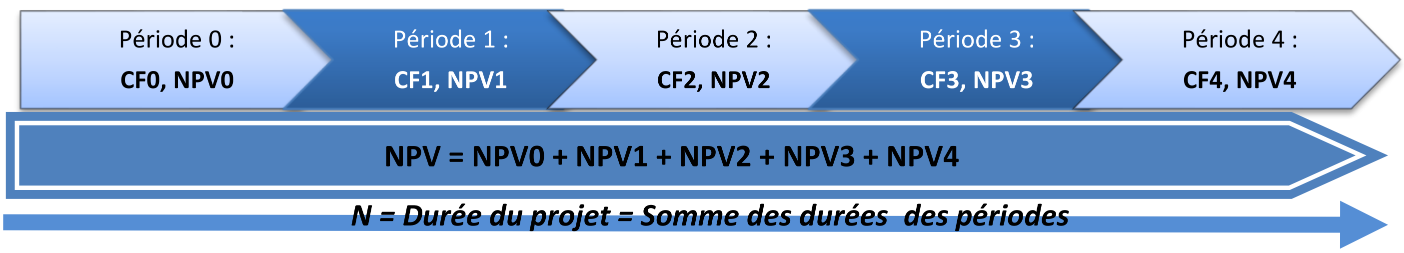
Evidemment, la valeur espérée future n'est pas garantie et dépend de l'évolution de l'économie et des marchés financiers, plus précisément des taux d'intérêt; un EURO aujourd'hui ne vaudra pas un EURO demain et vice-versa, et de la série des opérations effectuées de décaissements (valeurs négatives) ou d'encaissements (valeurs positives) dans le temps. C'est pourquoi, la valeur de l'argent est strictement liée au temps que l'on soit propriétaire ou emprunteur.

Si $\mathbf{CF}\ (\text{Cash} - \text{Flow}) > 0$ il s'agit d'entrée de capital, autrement $(\mathbf{CF} < 0)$ il s'agit de sortie de capital.

Le taux d'escompte (Discount Rate) *r* appliqué sur le *CF* représente le taux d'intérêt généralement fixe par période (il peut être variable aussi). Il est appelé aussi des fois le coût relatif au capital, i.e., ce que vous coûte pour disposer du capital. Généralement le taux d'escompte (d'intérêt) est fourni sur une base annuelle, alors que les opérations sont effectuées sur la base d'une période moins longue (mois, trimestre, semestre etc.) en appliquant un taux d'escompte composé (voir plus loin pour plus de détails). C'est pourquoi, on distingue entre :

- **Le taux d'escompte nominal :** Il s'agit généralement d'un taux annuel inscrit dans le contrat dès le départ dont l'application n'est pas nécessairement annuelle, mais dépend des périodes (des échéances) de capitalisation.
- **Le taux d'escompte effectif :** Représente le taux annuel capitalisé correspondant au taux d'escompte nominal. Voir ici pour comprendre la relation entre les deux taux nominal et effectif.

Schématiquement, on distingue les NPV par période et la NPV cumulative sur toute la durée d'un projet comme suit :



Généralement la période 0 est constituée d'un investissement, autrement dit CF0 < 0 et les autres CF des périodes suivantes sont des encaissements (reviens ou recettes).

L'utilisation de la NPV en tant que critère décisionnel parmi d'autres, est celui que la plupart des économistes privilégient.

La NPV est utilisée entre autres, notamment pour décider de lancer ou non un projet; plus précisément :

Si $NPV > 0$	Le projet est économiquement profitable et peut être lancé
Si $NPV < 0$	Le projet n'est pas économiquement profitable et doit être normalement rejeté
Si $NPV = 0$	Le projet est équilibré et peut ou ne pas être lancé en fonction d'autres éléments supplémentaires éventuellement

Il arrive que pour un projet unique, plusieurs scénarios sont envisageables et possédant des NPV qui ne sont pas les mêmes. La même règle précédente s'applique également dans ce cas sur chaque scénario afin d'en sélectionner qu'un seul. Si plusieurs scénarios possèdent les mêmes barèmes et des NPV positifs, celui ayant la NPV la plus importante doit être logiquement sélectionné.

Formule de calcul de la *NPV* :

$$NPV = \sum_{i=i_0}^{i=N} \frac{CF_i}{(1+r)^i}$$

où :

$$i_0 = \begin{cases} 0 \text{ Si le cash flow est réalisé au début de la période} \\ 1 \text{ Si le cash flow est réalisé à la fin de la période} \end{cases}$$

CF_i = Cash flow en période i ($i = i_0$ correspond à la 1ère période)

r = Discount rate (fixe)

N = Nombre de périodes (+1 si $i_0 = 0$)

Fig 2. Formule de la NPV

Généralement, dans le contexte d'un projet le 1er cash-flow est un investissement (Out Cashflow), donc négatif et la formule précédente prend la forme :

$$NPV = CF_0 + \sum_{i=1}^{i=N} \frac{CF_i}{(1+r)^i} \quad (avec\ CF_0 < 0)$$

Chaque partie dans la somme figurant dans la formule du calcul de la NPV représente la **NPV de la période i** dont la somme représente la **NPV cumulative** sur toute la durée du projet comme nous le verrons dans la section suivante. Une formule **MS EXCEL** unique fournit le même résultat : **VAN** (Valeur Actuelle Nette) pouvant être appliquée à un seul CF ou une plage de CF comme nous le verrons dans l'exemple 1.1 à la section qui suit.

Bien que la NPV soit un bon critère décisionnel, car elle prend en compte la valeur du capital en fonction du temps, ayant comme objectif de maximiser la valeur du business tout en prenant en compte l'ensemble des paramètres, elle ne suffit pas comme indicateur. D'autres critères seront présentés dans les sections suivantes. Voir la section qui suit pour un exemple de calcul de la NPV.

1.2 La NPV en action et utilisation de MS EXCEL et PYTHON

Rappel de la Formule pour calculer la *NPV* :

$$NPV = \sum_{i=i_0}^{i=N} \frac{CF_i}{(1+r)^i}$$

où :

$$i_0 = \begin{cases} 0 \; Si\ le\ cash\ flow\ est\ réalisé\ au\ début\ de\ la\ période \\ 1 \; Si\ le\ cash\ flow\ est\ réalisé\ à\ la\ fin\ de\ la\ période \end{cases}$$

$$CF_i = Cash\ flow\ en\ période\ i\ (i = i_0\ correspond\ à\ la\ 1ère\ période)$$

$$r = Discount\ rate\ (fixe)$$

$$N = Nombre\ de\ périodes\ (+1 \text{ si } i_0 = 0)$$

Fig 3. Formule de la NPV

EXEMPLE 1.1 : CALCUL MANUEL DE LA NPV

Fin de l'année i	Discount rate (r)	Cash Flow CF_i	Discounted cash flows $\frac{CF_i}{(1+r)^i}$	NPV Cumulatif au début de la période	Utilisation de la fonction financière VAN de MS EXCEL	Commentaires
0	5,00%	-100 000,00	-100 000,00	-100 000,00		décaissement de 100 000€
1	5,00%	-20 000,00	-19 047,62	-119 047,62	-119 047,62	décaissement de 20 000€
2	5,00%	10 000,00	9 070,29	-109 977,32	-109 977,32	encaissement de 10 000€
3	5,00%	20 000,00	17 276,75	-92 700,57	-92 700,57	encaissement de 20 000€
4	5,00%	50 000,00	41 135,12	-51 565,45	-51 565,45	encaissement de 50 000€
5	5,00%	60 000,00	47 011,57	-4 553,88	-4 553,88	encaissement de 60 000€
6	5,00%	70 000,00	52 235,08	47 681,20	47 681,20	encaissement de 70 000€
7	5,00%	80 000,00	56 854,51	104 535,71	104 535,71	encaissement de 80 000€
8	5,00%	80 000,00	54 147,15	158 682,85	158 682,85	encaissement de 80 000€
9	5,00%	90 000,00	58 014,80	216 697,66	216 697,66	encaissement de 90 000€
	Total :	340 000	216 697,66	NPV		

Les valeurs de la NPV par ligne (par CF) et la NPV cumulative s'obtiennent par la même fonction MS EXCEL :

$$NPV = VAN(\text{Taux} ;\ \text{Valeurs de la série des CF})$$

$$NPV\ ligne\ 2ème\ année = VAN(5\%;\ -20\,000) = -19\,047{,}62€$$

$$NPV\ Cumulative = VAN(5\%; \{-20\,000, 10\,000, 20\,000, \dots, 90\,000\}) - 100\,000 = 216\,697{,}66€$$

Ci-dessous le code PYTHON traitant ce même exemple (voir en annexe le code source complet).

Code PYTHON 1. Calcul de la NPV

```
def compute_npv(rate, cash_flows):
    """

    :param rate: discount rate (between 0 and 1)
    :param cash_flows: cash flows data array
    :return: NPV value
    """
    if not (0 <= rate <= 1):
        return 0

    return np.npv(rate, cash_flows)

def example_1_1():
    rate = 0.05  # rate = 5%
    cash_flows = [-100000, -20000, 10000, 20000, 50000, 60000, 70000, 80000, 80000, 90000]
    print('Exemple 1: Calcul de la NPV')
    print('Discount rate : ' + str(rate))
    print('cash flows data :' + str(cash_flows) )
    print('NPV = ' + str(round(compute_npv(rate, cash_flows), 2)))
```

Code PYTHON 2. Sortie du calcul de la NPV

```
Exemple 1: Calcul de la NPV
Discount rate: 0.05
cash flows data: [-100000, -20000, 10000, 20000, 50000, 60000, 70000, 80000,
80000, 90000]
NPV = 216697.66
```

1.3 Le PayBack Period (PBP) ou période de récupération

Le **Payback Period (PBP)** correspond à la durée depuis le début des investissements jusqu'au moment de la récupération de l'ensemble des investissements réalisés en prenant en compte les cash inflows (encaissements). Dans le graphe ci-dessous, le **PBP=6,1 mois** approximativement à première vue.

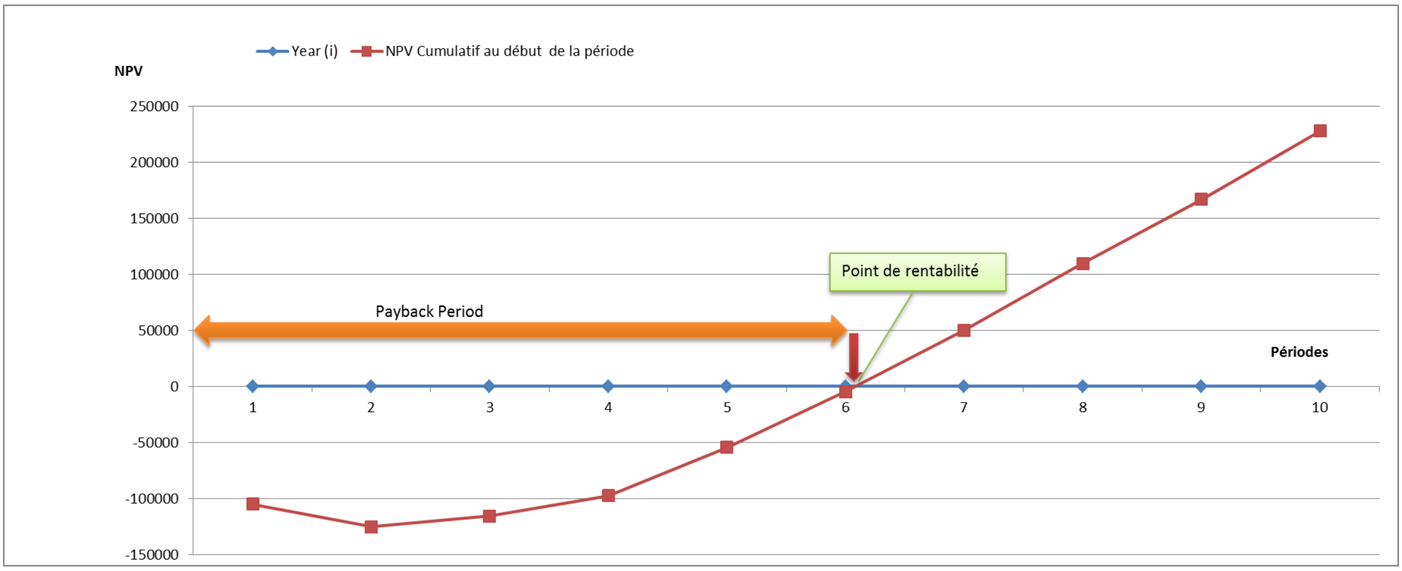


Fig 4. Graphe pour repérer la PBP

Voici une méthode pour calculer le **PBP** d'une manière précise. Un ZOOM sur les périodes 6 et 7 fournit le graphe suivant :

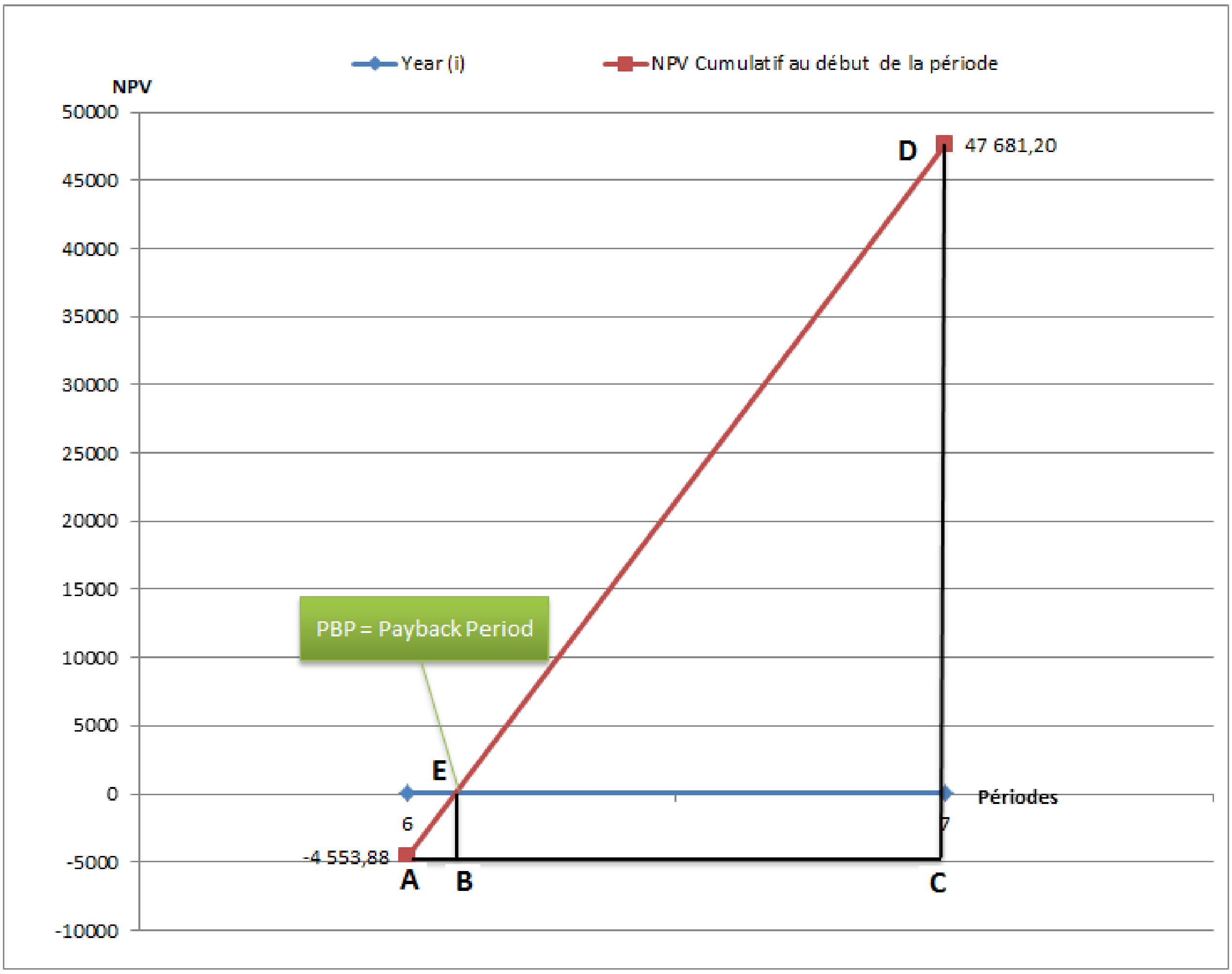


Fig 5. Règle géométrique pour le calcul de la PBP (Payback Period)

Pour calculer la valeur de **PBP**, il suffit de calculer la longueur AB. Cette dernière peut être calculée par application d'une règle géométrique apprise au collège (**théorème de THALES**), ce qui est équivalent à une **interpolation linéaire** entre les points A et D pour ceux familiers avec les maths :

$$AB = \frac{BE}{CD}$$

pour donner :

$$PBP = 6 + AB = 6 + \frac{4\,553{,}88}{4\,553{,}88 + 47\,681{,}20} = 6 + 0{,}09 = 6{,}09$$

Il est inutile d'apprendre par cœur la formule, il suffit de repérer dans le tableau des cash-flows précédent et de pointer le **passage du négatif vers le positif de la NPV cumulative** (voir le tableau de calcul de la NPV dans la section précédente), puis diviser la valeur entière rouge (négative) par la somme des valeurs entières rouge et bleue (positive).

Note : Il est à noter que dans le calcul du **PBP** on se base sur les Cash-flows escomptés, c'est pourquoi il est appelé des fois : « **Discounted PBP** ». Le PBP simple quant à lui se base tout simplement sur les Cash-flows avant l'application du taux d'escompte. Dans l'exemple de la section 1.1, le PBP simple peut être évalué de la même manière que précédemment pour donner :

Année (i)	Cash-Flow (CF) CF_i	CF Cumulatif
1	-100 000,00	-100 000,00
2	-20 000,00	-120 000,00
3	10 000,00	-110 000,00
4	20 000,00	-90 000,00
5	50 000,00	-40 000,00
6	60 000,00	20 000,00
7	70 000,00	90 000,00
8	80 000,00	170 000,00
9	80 000,00	250 000,00
10	90 000,00	340 000,00

$$PBP\ (simple) = 5 + \frac{40000}{40000 + 20000} = 5{,}67$$

On voit bien qu'il subsiste une différence non négligeable entre le **PBP escompté = 6,09** que l'on note **DPBP** et le **PBP simple = 5.67**. Il est plus approprié et naturel d'utiliser plutôt le **DPBP** que le **PBP** simple, car contrairement à ce dernier, il prend en compte le facteur temps de la valeur des capitaux entrants et sortants. C'est la raison pour laquelle on a d'une manière générale : $\mathbf{DPBP} \geq \mathbf{PBP}$.

Dans la section ci-dessous, je vous présente un programme écrit en PYTHON utilisant le même principe expliqué ci-dessous qui permet de calculer automatiquement le **PBP** en utilisant des librairies les plus connues **pandas** et **numpy**.

1.3.1 Utilisation de PYTHON pour calculer le PBP

Afin d'automatiser le calcul de **PBP** et **DPBP** ainsi que le traçage du graphe correspondant de l'évolution des différents cash flow, je vous propose le code suivant écrit en **PYTHON**, un langage très utilisé dans ce domaine notamment :

Code PYTHON 3. Fonctions pour calculer le PBP et DPBP ainsi que les graphes correspondants

```python
def payback_period(cash_flows=list()):
    # convert list to pandas DataFrame object
    cf = pd.DataFrame(cash_flows, columns=['CashFlows'])
    cf.index.name = 'Period'

    # add cum cash flow column as a cum sum
    cf['CumulativeCashFlows'] = np.cumsum(cf['CashFlows'])
    last_period = cf[cf.CumulativeCashFlows < 0].index.values.max()
    ratio = abs(cf.CumulativeCashFlows[last_period]) / \
            (abs(cf.CumulativeCashFlows[last_period]) + abs(cf.CumulativeCashFlows[last_period + 1]))
    pbp = last_period + ratio
    return pbp


def discounted_payback_period(rate, cash_flows=list()):
    # convert list to pandas DataFrame object
    cf = pd.DataFrame(cash_flows, columns=['CashFlows'])
```

```
    cf.index.name = 'Period'
    # compute DiscountedCashFlows column values
    cf['DiscountedCashFlows'] = np.pv(rate=rate, pmt=0, nper=cf.index, fv=-cf['CashFlows'])
    # add cum discounted cash flow column as a cum sum
    cf['CumulativeDiscountedCashFlows'] = np.cumsum(cf['DiscountedCashFlows'])
    last_period = cf[cf.CumulativeDiscountedCashFlows < 0].index.values.max()
    ratio = abs(cf.CumulativeDiscountedCashFlows[last_period])/\
(abs(cf.CumulativeDiscountedCashFlows[last_period])+cf.CumulativeDiscountedCashFlows[last_period + 1])
    discounted_pbp = last_period + ratio
    return discounted_pbp


def plot_2d_graph(x_data=list(), y_data=list(), plot_params = None):
    # set default used plot parameters if passed in plot_params
    default_plot_params = {'title': '', 'fontsize': '12', 'fontname': 'arial', 'color': '#000000',
'x_label': 'variable',
                          'y_label': 'Value', 'style': '+-b', 'x_step': (max(x_data)-min(x_data))/10}
    for key in default_plot_params.keys():
        if key in plot_params.keys():
            if not(plot_params[key] is None):
                default_plot_params[key] = plot_params[key]

    # define plot figure instance and axes instances
    fig, ax = plt.subplots(1, 1, sharex=False, sharey=False,
                          subplot_kw={'facecolor': 'white'},
                           gridspec_kw={})
    plt.grid(True, which='major', axis='both', lw=1, ls='--', c='.75')
    ax.plot(x_data, y_data, default_plot_params['style'])
    # set ticks list as 10 major ticks by default
    x_ticks = np.arange(x_data[0], x_data[len(x_data)-1] + default_plot_params['x_step'],
default_plot_params['x_step'])
    ax.set_xticks(x_ticks)
    # set labels
    ax.set_xlabel(default_plot_params['x_label'], labelpad=5, fontsize=14, fontname='serif',
color="blue")
    ax.set_ylabel(default_plot_params['y_label'], labelpad=5, fontsize=14, fontname='serif', color="red")
    # set graph title
    ax.set_title(default_plot_params['title'], fontsize=default_plot_params['fontsize'],
                 fontname=default_plot_params['fontname'], color=default_plot_params['color'])

    return [fig, ax]


def add_annotation_to_graph(fig=None, ax=None, p=None, text='', xytext=None,
                            arrowprops=None):
    if (ax is None) or (p is None):
        return
    if xytext is None:
        xytext=(p[0]-20, p[1]-20)
    if arrowprops is None:
        arrowprops=dict(arrowstyle="->", connectionstyle="arc3, rad=.5")

    # add horizontal/vertical lines at (p.x, p.y) point
    if not (p[1] is None):
        ax.axhline(p[1], ls='-.')
    if not (p[0] is None):
        ax.axvline(p[0], ls='-.')
    # add annotation to the point p
    ax.annotate(text, fontsize=12, family="serif", xy=p, xycoords="data", textcoords="offset points",
                xytext=xytext, arrowprops=arrowprops)


def example_1_1_1():
    cash_flows = [-100000, -20000, 10000, 20000, 50000, 60000, 70000, 80000, 80000, 90000]
    rate = 0.05  # 5% rate
    cum_disc_cash_flows = compute_cum_cf(rate, cash_flows)
    print('Exemple 1_1_1: Calcul du IRR')
    print('cash flows data: ' + str(cash_flows))
    print('IRR = ' + str(round(compute_irr(cash_flows), 5)))
```

```
print('Exemple 1_1_1: Calcul du MIRR')
print('cash flows data: ' + str(cash_flows))
print('rate value: ' + str(rate))
print('MIRR = ' + str(round(compute_mirr(cash_flows, rate), 5)))

print('Get Payback period (PBP) value')
pbp = payback_period(cash_flows)
print('PBP = ' + str(pbp))

print('Get discounted Payback period (DPBP) value')
disc_pbp = discounted_payback_period(rate, cash_flows)
print('DPBP = ' + str(disc_pbp))

print('Drawing the cumulative discounted cash flows data graph...')
fig, ax = plot_2d_graph ([i for i in range(0, 10, 1)], cum_disc_cash_flows,
          {'title': 'Cumulative discounted cash flow', 'fontsize': '12',
               'fontname': 'arial', 'color': '#000000', 'x_label': 'Periods', 'y_label':
               'Discounted cash flow', 'style': 'o-r'})
add_annotation_to_graph(fig, ax, [disc_pbp, 0], "DPBP point: " + str(round(disc_pbp, 5)),
                        xytext=(disc_pbp - 20, 0 - 50),
                        arrowprops=dict(arrowstyle="->", connectionstyle="arc3, rad=.5"))
fig.show()

print('Drawing the cumulative cash flows data graph...')
fig, ax = plot_2d_graph ([i for i in range(0, 10, 1)], np.cumsum(cash_flows),
          {'title': 'Cumulative cash flow', 'fontsize': '12', 'fontname': 'arial',
           'color': '#000000', 'x_label': 'Periods', 'y_label': 'Cash flow',
           'style': 'o-r'})
add_annotation_to_graph(fig, ax, [pbp, 0], "PBP point: " + str(round(pbp, 5)),
                        xytext=(pbp - 20, 0 - 50),
                        arrowprops=dict(arrowstyle="->", connectionstyle="arc3, rad=.5")
                        )
fig.show()
```

Code PYTHON 4. Sortie partielle et graphes

Exemple 1_1_1: Calcul du MIRR
cash flows data: [-100000, -20000, 10000, 20000, 50000, 60000, 70000, 80000, 80000, 90000]
rate value: 0.05
MIRR = 0.17821
Get Payback period (PBP) value
PBP = 4.666666666666667
Get discounted Payback period (DPBP) value
DPBP = 5.087180468750001
Drawing the cumulative discounted cash flows data graph...
Drawing the cumulative cash flows data graph...

Les graphes générés par la fonction **plot_2d_graph** dans les 2 cas du calcul de **DPBP** et **PBP** se présentent comme suit (identique au précédent généré dans EXCEL) avec une indication des valeur et position de **DPBP** et **PBP** :

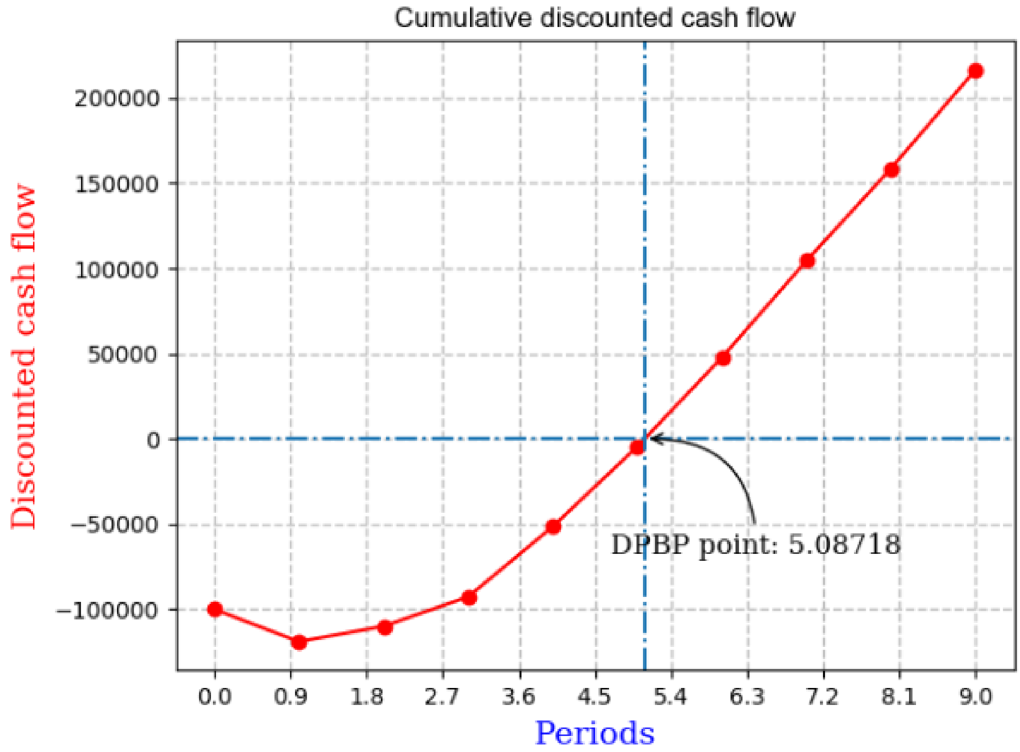


Fig 6. Illustration graphique du DPBP

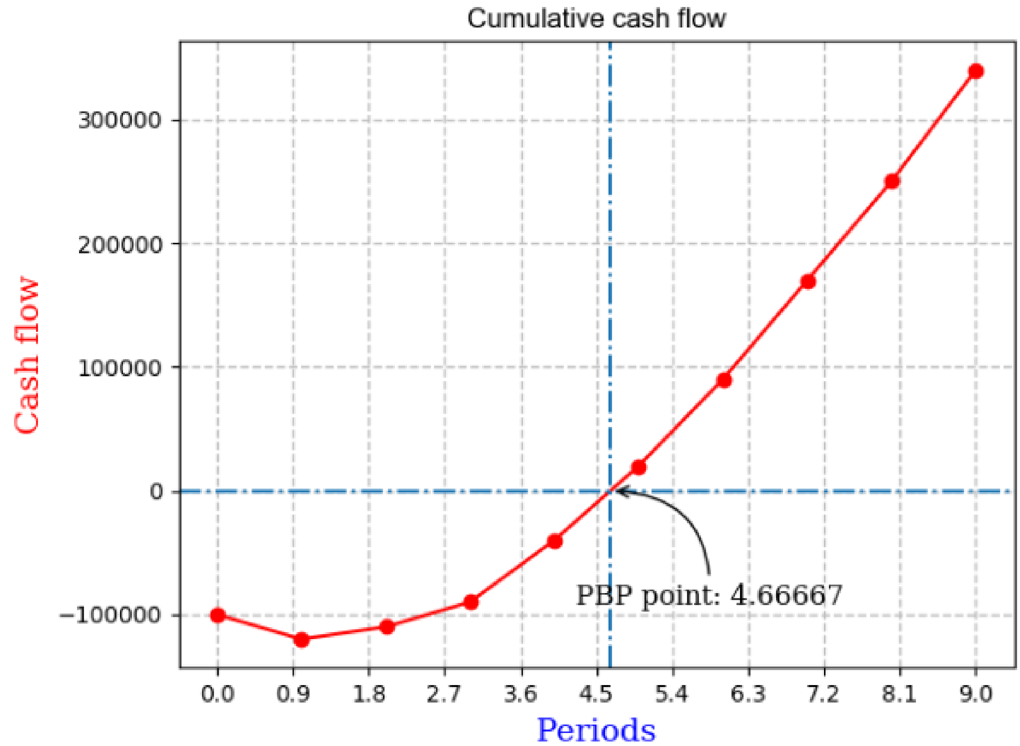


Fig 7. Illustration graphique du PBP

1.4 Le taux de retour interne (IRR) détaillé

La valeur du taux d'escompte r pour lequel la NPV est nulle (=0) représente ce qu'on appelle le *taux de retour interne* (IRR : *Internal Rate of Return*) constituant ainsi le point de référence distinguant les valeurs positives et négatives de la NPV s'il est unique. Malheureusement, il n'existe pas de formule fournissant analytiquement la valeur de IRR; des méthodes numériques ou graphiques peuvent être utilisées afin de déterminer sa valeur comme nous le verrons dans la suite.

D'un point de vue décisionnel, plus la valeur de IRR est importante, le projet est profitable et inversement, moins est importante, le projet n'est pas profitable.

Reprenons **l'exemple précédent**, mais en variant le taux d'escompte r afin de déterminer le $\boldsymbol{IRR}$. Rappelons que le IRR (*Internel Rate of Return*) est la valeur de r pour laquelle :

$$0 = \sum_{i=i_0}^{i=N} \frac{CF_i}{(1+r)^i}$$

Cette équation est équivalente à la suivante pour un cash-flow initial CF_0 sous forme d'investissement au début de la 1ère période :

$$CF_0 = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{CF_i}{(1+r)^i}$$

Le IRR (*ou Taux de retour interne*) correspond à une situation où l'entreprise réinvestit tous les inflows jusqu'à avoir une NPV=0 à la fin de la durée du projet. Le graphe suivant montre la localisation de la valeur du IRR. La fonction NPV dont le graphe est ci-dessous est la suivante :

$$-100000 - \frac{20000}{(1+r)^1} + \frac{10000}{(1+r)^2} + \frac{20000}{(1+r)^3} + \frac{50000}{(1+r)^4} + \frac{60000}{(1+r)^5} + \frac{70000}{(1+r)^6} + \frac{80000}{(1+r)^7} + \frac{80000}{(1+r)^8} + \frac{90000}{(1+r)^9}$$

Des outils puissants existent capable de déterminer analytiquement et précisément la ou les valeurs du IRR. Une approximation numérique donne IRR=0,252726982700999=25,272% à trois chiffres significatifs. Vous pouvez par exemple utiliser la méthode d'interpolation linéaire pour déterminer une valeur approximative du IRR en fonction de la précision désirée. De nombreux sites Internet présentent cette méthode standard et expliquent clairement son utilisation par exemple dans MS EXCEL.

1.4.1 Interpolation linéaire (utiliser des fonctions affines entre 2 points pour effectuer des approximations successives) :

Afin de déterminer une **valeur approximative** de notre IRR, une interpolation linéaire entre deux points avec NPV en valeur entière : $(r_1, ABS(NPV_1)) = (20\%, 31\,894{,}60€)\ et\ (r_2, ABS(NPV_2)) = (30\%, 21\,152{,}24€)$ pour nous fournir :

$$\boxed{IRR = r_1 + \left(\frac{Abs(NPV1)}{Abs(NPV1) + Abs(NPV2)} \times (r_2 - r_1)\right)}$$

$$IRR = 20 + \left(\frac{31\,894{,}60}{31\,894{,}60 + 21\,152{,}24} \times (30 - 20)\right)$$

$$IRR = 26{,}01\%$$

avec la valeur de la NPV correspondante négative = -3 697,69 €.

Appliquons de nouveau une 2ème interpolation linéaire sur les deux points :

r	NPV	ABS(NPV)
25%	1 409,46 €	1 409,46 €
26%	-3 648,62 €	3 648,62 €

Pour obtenir :

$$IRR = 25 + \left(\frac{1\,409{,}46}{1\,409{,}46\ + 3\,648{,}62} \times (26 - 25)\right)$$

$$IRR = 25{,}28\%$$

avec la valeur de la NPV correspondante négative = -37,42 €.

On peut continuer à interpoler par itération jusqu'à ce que la valeur de la NPV obtenue soit la plus proche de 0, sujet en-dehors du contexte de cet article, mais vous disposez déjà des ingrédients pour formuler l'algorithme et l'implémenter si vous êtes à l'aise en développement (même sous EXCEL). D'après vous quelle est la prochaine interpolation ? Avouons-nous que nous avons un peu triché en choisissant des valeurs de $(r_1, r_2) = (20\%, 30\%)$ de départ assez proches de note solution ! On aurait pu choisir dès le début un intervalle le plus large possible : $(r_1, r_2) = (0\%, 100\%)$.

1.4.2 Méthode de Newton (utiliser les droites tangentes pour effectuer des approximations successives) :

Bien que cette méthode ne soit pas moderne par rapport à notre époque, elle demeure néanmoins efficace et rapide. Elle consiste tout simplement à rechercher les racines d'une équation sous certaines conditions qu'elle soit polynomiale ou non. Il s'agit toujours de cette méthode utilisée aujourd'hui par des outils informatiques performants pour déterminer une valeur approximative de l'IRR. L'application de cette méthode dans notre exemple revient à trouver les racines de la fonction polynomiale suivante :

$$f(r) = -10(1+r)^9 - 2(1+r)^8 + (1+r)^7 + 2(1+r)^6 + 5(1+r)^5 + 6(1+r)^4 + 7(1+r)^3 + 8(1+r)^2 + 8(1+r) + 9$$

Je vous laisse le soin d'appliquer cette méthode en s'inspirant des informations riches que vous trouverez sur Internet ou dans des livres de référence. Vous pouvez d'ores déjà remplacer $(\mathrm{r}\ + 1)$ par une variable *x* pour simplifier et considérer plutôt cette fonction :

$$g(x) = -10x^9 - 2x^8 + x^7 + 2x^6 + 5x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 8x + 9$$

Pour aller vite, vous pouvez visiter le site : http://www.math.sc.edu/cgi-bin/sumcgi/Newton.pl, entrer cette fonction sous la forme informatique : -10*x^9-2*x^8+x^7+2*x^6+5*x^5+6*x^4+7*x^3+8*x^2+8*x+9 et choisir une valeur initiale de x=2 par exemple (car on sait que x=1+r>1), vous obtenez en 9 itérations la valeur : X[9]= 1.2527269833853, ce qui donne r=x-1=0,252726983=25,2726983% même résultat obtenu précédemment.

Pour avoir une idée de la manière automatique de programmation, je vous propose le code source PYTHON suivant que vous trouverez en annexe :

Code PYTHON 5. Code générant une partie du graphe et fournissant la solution en utilisant la méthode de NEWTON

```
def solve_by_newton_algo(f, x0):
    # solve equation f(x)=0 with respect to x variable and x0 as initial guess value
    return optimize.newton(f, x0)

def plot_2d_graph (x_data, y_data, plot_params):
    # define plot figure instance and axes instances
    fig, ax = plt.subplots(1, 1, sharex=False, sharey=False,
                              subplot_kw={'facecolor': 'white'},
                               gridspec_kw={})
    plt.grid(True, which='major', axis='both')
    ax.plot(x_data, y_data, plot_params['style'])
    ax.set_xticks(x_data)
    ax.set_xlabel(plot_params['x_label'], labelpad=5, fontsize=14, fontname='serif',
color="blue")
    ax.set_ylabel(plot_params['y_label'], labelpad=5, fontsize=14, fontname='serif',
color="red")
    ax.set_title(plot_params['title'], fontsize=plot_params['fontsize'],
fontname=plot_params['fontname'], color=plot_params['color'])
    return [fig, ax]

def add_annotation_to_graph(fig=None, ax=None, p=None, text='', xytext=None,
                            arrowprops=None):
    if (ax is None) or (p is None):
        return
    if xytext is None:
        xytext=(p[0]-20, p[1]-50)
    if arrowprops is None:
        arrowprops=dict(arrowstyle="->", connectionstyle="arc3, rad=.5")

    # add horizontal line at 0
    ax.axhline(0)
    # add annotation to the point p
    ax.annotate(text, fontsize=12, family="serif", xy=p, xycoords="data",
                textcoords="offset points", xytext=xytext, arrowprops=arrowprops)

def example_1_1_1_1():
    # define our function
    def f(x):
        # x = sympy.Symbol("x")
        expr = -10 * x ** 9 - 2 * x ** 8 + x ** 7 + 2 * x ** 6 + 5 * x ** 5 + 6 * x ** 4
                + 7 * x ** 3 + 8 * x ** 2 + 8 * x + 9
        # print('x=' + str(x) + '\t' + 'f(x)=' + str(expr))
        return expr

    # plot corresponding graph
    x = sympy.Symbol("x")
    fig, ax = plot_2d_graph ([x for x in np.arange(1.2, 1.3, .01)],
         [f(x) for x in np.arange(1.2, 1.3, .01)], 'Function graph', 'x', 'f(x)',  '+-b')

    print('Apply Newton method to our equation :\n' + str(f(x)) + ' = 0')
    sol = solve_by_newton_algo(f, 5)
    print('Found solution: x=' + str(sol))
    # add annotation to found solution
    add_annotation_to_graph(fig, ax, [sol, 0], 'Equation solution: ' + str(round(sol, 5)),
```

```
                        xytext=(sol - 20, 0 - 50),
                        arrowprops=dict(arrowstyle="->", connectionstyle="arc3, rad=.5"))
    fig.show()
```

Code PYTHON 6. Sortie du code et graphe

```
Apply Newton method to our equation:
-10*x**9 - 2*x**8 + x**7 + 2*x**6 + 5*x**5 + 6*x**4 + 7*x**3 + 8*x**2 + 8*x + 9 = 0
Found solution: x=1.2527269827014895
```

Notez bien qu'on a utilisé $x0 = 5$ comme valeur initiale pour procéder à la résolution de l'équation $f(x) = 0$ en appliquant la méthode de NEWTON (voir : $sol = solve\_by\_newton\_algo(f,5)$). Le choix de la valeur initiale est crucial afin que la méthode puisse converger avec un nombre d'itération raisonnable.

Le graphe résultant de la fonction représentant le côté droit de l'équation restreint à l'intervalle [1.20, 1.30] est comme suit (voir l'appel du code ci-dessous sous le commentaire `# plot corresponding graph`)

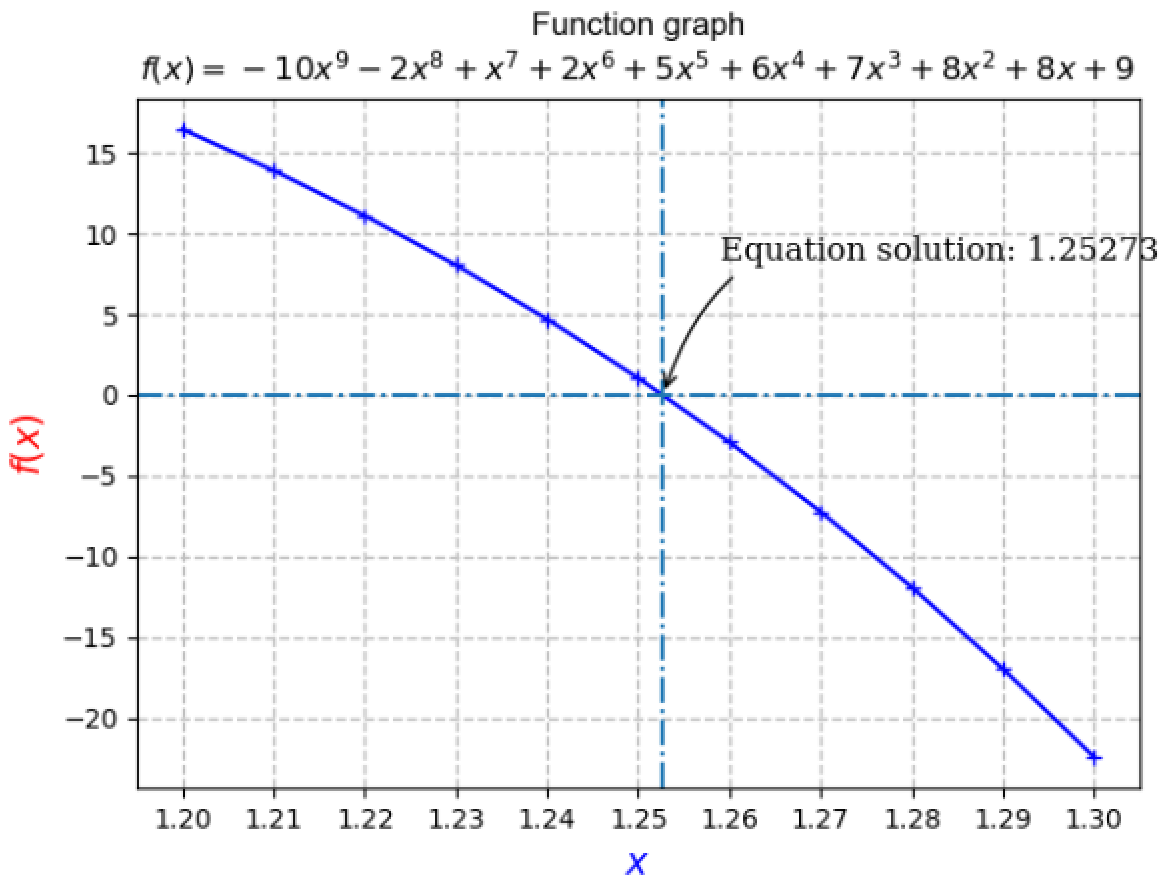


Fig 8. Illustration graphique de la solution de l'équation $f(x) = 0$ via le code PYTHON

On voit bien que x=1.25273 est une solution approximative de l'équation. Par conséquent :

$$IRR = x - 1 = 0.25273 = 25.273\%.$$

NOTE 1 : Vous pouvez utiliser la fonction financière **TRI** (**Taux de Retour Interne**) dans MS EXCEL pour obtenir une valeur approximative du IRR.

NOTE 2 : Si le 1er cash-flow est un investissement = CF_0 et tous les In cash-flows intermédiaires suivants sont égaux disons *CF étalés* sur une durée de *N* périodes avec un taux d'escompte *r*. D'après vous quelle sera la formule fournissant la valeur du IRR ?

La valeur de l'IRR est fournie par l'équation :

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(1+IRR)^i} = \frac{CF_0}{CF}$$

Le côté gauche est appelé généralement le **coefficient d'escompte** utilisé dans des tables de référence (Chercher sur Internet : *cumulative present value factor table*) pour déterminer la valeur du taux d'escompte correspondant. Voici un exemple repris de l'exemple 5.1 de la section 5 :

Année	CF
0	-10000
1	3500
2	3500
3	3500
4	3500

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{(1+IRR)^i} = \frac{CF_0}{CF} = \frac{10000}{3500} = 2{,}857$$

En se référant à la table ci-dessous avec l'entrée en ligne = 4 ans et la valeur 2.855 la plus proche de 2,875 :

APPENDIX TABLE 3

Annuity table: Present value of $1 per year for each of t years = $1/r - 1/[r(1+r)^t]$.

Number of Years	Interest Rate per Year														
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
1	.990	.980	.971	.962	.952	.943	.935	.926	.917	.909	.901	.893	.885	.877	.870
2	1.970	1.942	1.913	1.886	1.859	1.833	1.808	1.783	1.759	1.736	1.713	1.690	1.668	1.647	1.626
3	2.941	2.884	2.829	2.775	2.723	2.673	2.624	2.577	2.531	2.487	2.444	2.402	2.361	2.322	2.283
4	3.902	3.808	3.717	3.630	3.546	3.465	3.387	3.312	3.240	3.170	3.102	3.037	2.974	2.914	2.855
5	4.853	4.713	4.580	4.452	4.329	4.212	4.100	3.993	3.890	3.791	3.696	3.605	3.517	3.433	3.352

on trouve une valeur approximative de IRR = 15%.

Vous pouvez aussi vérifier cette valeur en utilisant l'une des fonctions MS EXCEL suivantes :

$$\text{Taux}(4\,;3500\,;-10000) = 15\%.$$

$$\text{TRI}(\{-10000{,}3500{,}3500{,}3500{,}3500\}) = 15\%.$$

<u>Repérage graphique :</u>

Un ZOOM sur la zone de 25% fournit le graphe suivant illustrant clairement la valeur de *IRR* :

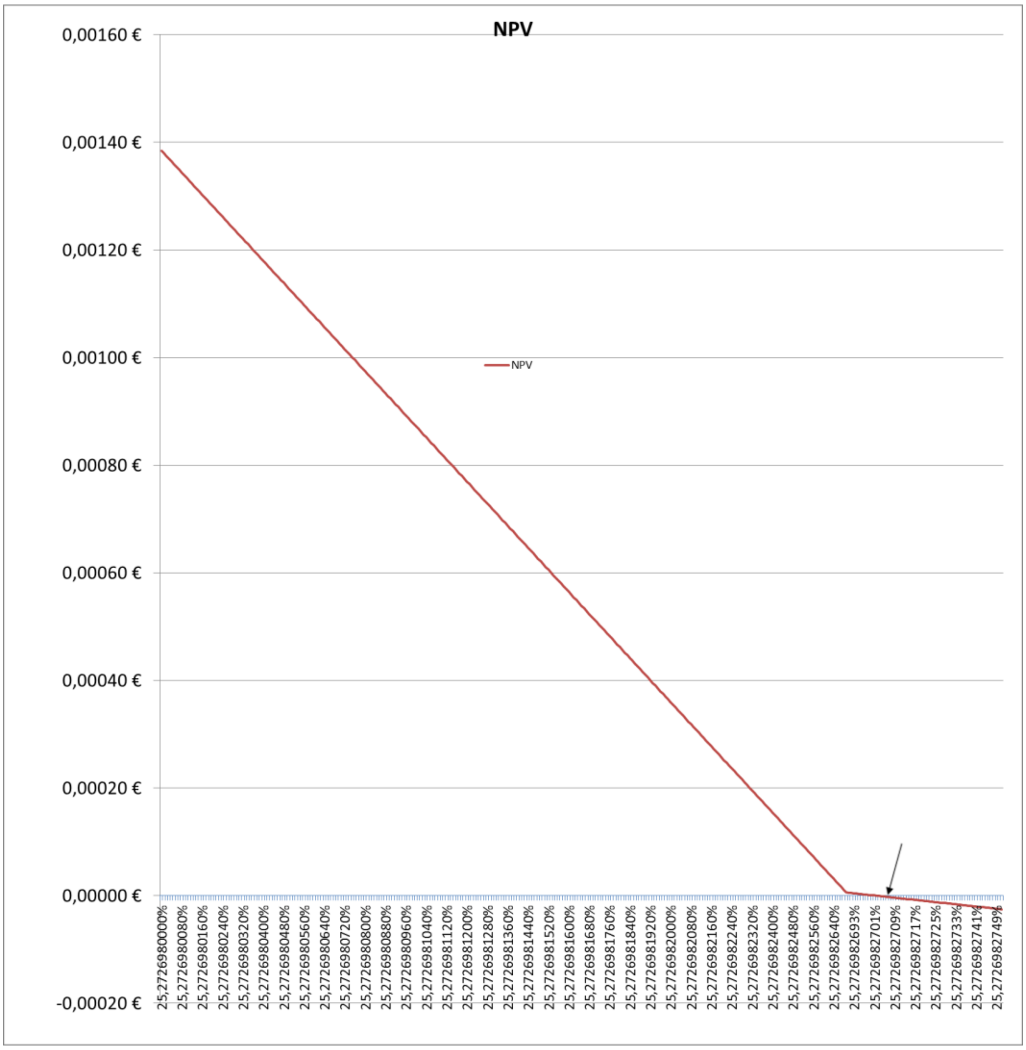


Fig 9. ZOOM sur le IRR

Autrement dit,

- Si $r \leq 25{,}272\%$ le projet peut être envisagé en fonction de la valeur de la NPV
- Si $r > 25{,}272\%$ le projet ne doit pas être envisagé

1.4.3 Utilisation d'une fonction financière en PYTHON

On a vu dans la section précédente l'effort non négligeable pour arriver à calculer une valeur approximative du IRR. Dans cette section je vous présente une autre fonction plus spécialisée pour calculer directement cet indicateur.

Si vous êtes à l'aise en programmation informatique, il est possible d'utiliser des librairies standards ou des FRAMEWORKS en PYTHON par exemple. Reprenons les données de l'exemple 1.1 afin de calculer le **IRR**. Ci-dessous les données pour rappel :

Année (i)	Cash-Flow (CF)
1	-100 000,00
2	-20 000,00
3	10 000,00
4	20 000,00
5	50 000,00
6	60 000,00
7	70 000,00
8	80 000,00
9	80 000,00
10	90 000,00

Voici un exemple de code simple calculant la valeur du IRR :

Code PYTHON 7. Calcul du IRR en PYTHON par un appel de la fonction irr de la librairie numpy

```python
def compute_irr(cash_flows):
    """
    :param cash_flows: cash flows data list
    :return: irr value of cash_flows data list
    """
    return np.irr(cash_flows)


def example_1_1_1():
    cash_flows = [-100000, -20000, 10000, 20000, 50000, 60000, 70000, 80000, 80000, 90000]
    print('Exemple 1_1_1: Calcul de IRR')
    print('cash flows data: ' + str(cash_flows))
    print('IRR = ' + str(round(compute_irr(cash_flows), 5)))
```

Code PYTHON 8. Sortie du code

```
Exemple 1_1_1: Calcul du IRR
cash flows data: [-100000, -20000, 10000, 20000, 50000, 60000, 70000, 80000, 80000, 90000]
IRR = 0.25273
```

On retrouve la même valeur que précédemment, mais d'une manière directe et plus élégante !

1.5 Le TEG une référence européenne dans le domaine des prêts bancaires

Dans le code de la consommation français techniquement parlant le **IRR** correspond au **TEG (Taux Effectif Global)**. Depuis le 10 juin 2002 les banques françaises ont obligation de fournir cette information qu'est le **TEG** à chaque proposition de prêts à leurs clients qu'il soit immobiliers ou relatifs à la consommation. Ce dernier correspond à un taux unique encapsulant le taux d'intérêt nominal, le taux des assurances ou tout autre taux supplémentaire ainsi qu'au frais divers comme les frais de dossier (généralement payables en une seule fois au début) ou la caution de garantie qui sont déduits du capital. LE **TEG** est exprimé par période (un mois par exemple) et le **TEG annuel** s'obtient proportionnellement à partir du **TEG par période** :

TEG annuel = Nombre de périodes par année x **TEG par période** (= 12 x **TEG mensuel** pour une période de 1 mois.)

Le **TEG** finalement en quelques mots peut être défini comme étant un taux global traduisant l'ensemble des frais et taux en un taux unique peu importe les conditions du prêt. C'est la raison pour laquelle il est utilisé comme étant une référence quand on veut comparer différentes offres de prêt ayant des conditions et des offres distinctes les unes des autres. Voici un exemple afin de bien cerner le sujet :

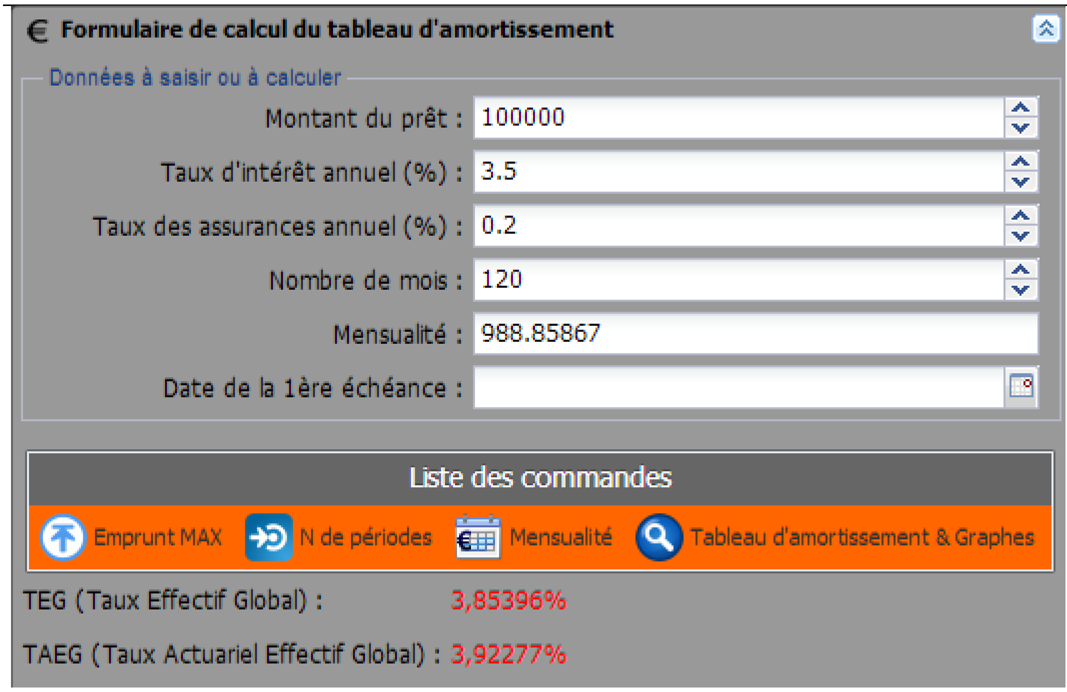
EXEMPLE 1.2 : DEUX BANQUES A ET B PROPOSENT LES OFFRES SUIVANTES :

1. BANQUE A : **PRET DE** 100 000€ **SUR** 120 **MOIS AVEC UN TAUX D'INTERET NOMINAL DE** 3,50% **PAR AN ET UN TAUX D'ASSURANCE DU CAPITAL (A 100%) DE** 0,20% **PAR AN.**
2. BANQUE B : **PRET DE** 100 000€ **SUR** 120 **MOIS AVEC UN TAUX D'INTERET NOMINAL DE** 3,45% **PAR AN ET UN TAUX D'ASSURANCE DU CAPITAL (A 100%) DE** 0,25% **PAR AN.**

LAQUELLE DES DEUX BANQUES POSSEDE L'OFFRE LA PLUS INTERESSANTE ?

Si vous n'êtes pas familier avec les notions de prêts, vous pouvez consulter la section : 7. Calcul des amortissements (Annuités ou mensualités) et des intérêts pour un emprunt.

On a tendance à ajouter les deux taux, nominal des intérêts et celui des assurances pour comparer les deux offres, ce qui donne **3,70% pour l'offre A** et **3,70% pour l'offre B**, une comparaison qui ne permet pas de trancher ! Or le taux des intérêts s'applique au montant restant du principal non encore amorti (montant du prêt) à chaque période, alors que le taux des assurances s'applique d'une manière égale à chaque période sur le montant du prêt (il représente le même montant pour chaque période; pour obtenir le montant de l'assurance mensuel, il suffit de diviser le montant du prêt par le nombre de périodes). Par conséquent, le TEG ne peut être obtenu par simple addition des deux taux précédents. Comparer les **TEG** revient à comparer ce que le prêt va vous coûter au total à la fin de la durée de chaque prêt. Des Calculateurs du **TEG** et du tableau d'amortissement sont fournis sur des sites Internet comme celui-ci : http://abdel.yezza.free.fr/. En utilisant celui de ce dernier par exemple (voir une copie du formulaire ci-dessous dans le cas de l'offre de la banque A par exemple), on a les résultats suivants :



Offre Banque A :	Mensualité hors assurance :	988.86€
	Assurances mensuelles :	**16,67€**
	Mensualité assurance comprise :	**1 005,53**€
	Coût total du prêt :	**120 663,04€**
	Coût total des intérêts :	**18 663,04€**
	Coût total des assurances :	**2 000,00€**
	TEG annuel :	**3,85%**
Offre Banque B :	Mensualité hors assurance :	986.51€
	Assurances mensuelles :	**20,83€**
	Mensualité assurance comprise :	**1 007,35**€
	Coût total du prêt :	**120 882,18€**
	Coût total des intérêts :	**18 382,18€**
	Coût total des assurances :	**2 500,00€**
	TEG annuel :	**3,89%**

Bien que la mensualité hors assurance de l'offre A (**988,86€**) soit supérieure à celle de l'offre B (**986,51€**), le **TEG** de l'offre A est inférieur au **TEG** de l'offre B. *Donc on peut confirmer juste à partir de la comparaison des deux TEG que l'offre A est plus intéressante que l'offre B*. D'ailleurs cette conclusion est en concordance avec le coût total de chaque offre (Coût total de l'offre A **120 663€** < **120 882€** Coût total de l'offre B bien que la différence soit mince) puisqu'elles sont étalées sur une même durée. Bien que le taux des intérêts de l'offre A soit supérieur à celui de l'offre B, c'est le taux de l'assurance qui a réellement fait la différence entre les deux offres. Dans cet exemple, uniquement le taux des assurances qui vient s'ajouter au taux nominal; des situations plus complexes comprenant d'autres taux ou frais divers (frais de dossier, caution de garantie, commissions diverses etc.) peuvent rendre la comparaison moins évidente. Cependant, la comparaison des offres par le biais du **TEG** demeure toujours la règle et offre une indication quantifiée. Toutefois, outre le TEG il faut aussi comparer les autres caractéristiques du prêt en fonction de la nature de votre projet et des modalités des remboursements.

Voici un exemple de comparaison de deux offres ayant des paramètres tous différents sauf évidemment le montant du prêt, tiré de l'excellent article de **Claude Danthony** (voir : http://images.math.cnrs.fr/Emprunts-mensualites-interet-taux.html) à faire par vous-même (voir la réponse en annexe) :

EXEMPLE 1.3 : DEUX BANQUES A ET B PROPOSENT LES OFFRES SUIVANTES :

1. BANQUE A : **PRET DE** 150 000€ **SUR** 204 **MOIS AVEC UN TAUX D'INTERET NOMINAL DE** 4,80% **ET UNE ASSURANCE DE** 30€ **PAR MOIS.**
2. BANQUE B : **PRET DE** 150 000€ **SUR** 180 **MOIS AVEC UN TAUX D'INTERET NOMINAL DE** 4,68% **ET UNE ASSURANCE DE** 45€ **PAR MOIS.**

LAQUELLE DES DEUX BANQUES POSSEDE L'OFFRE LA PLUS INTERESSANTE ?

Remarque : Il est clair que pour un prêt ne comportant aucune assurance ni frais annexes, le **TEG** est identique au taux nominal du prêt. D'une manière générale on peut confirmer que :

$$\text{TEG} \geq \text{Taux nominal} + \text{Taux des assurances}$$

En outre, sur **une période assez longue** le TEG a tendance d'être identique à la somme : $\text{Taux nominal} + \text{Taux des assurances}$.

1.6 Le taux de retour interne modifié (MIRR)

Le **IRR** comme expliqué précédemment souffre de trois inconvénients majeurs :

1. Il suppose que tous les CF (Cash-Flows) intermédiaires sont réinvestis au même taux IRR, ce qui n'est pas toujours le cas dans la plupart des entreprises.
2. Le taux d'escompte des réinvestissements **OCF** (Cash OutFlows) n'est pas nécessairement le même que le taux d'escompte des **ICF** (Cash InFlows) et peuvent même dépendre du moment des opérations d'encaissement ou de décaissement.
3. Il peut arriver dans des situations particulières que l'on ait plus d'un IRR menant à des conclusions non nécessairement en cohérence avec le critère de la NPV vu précédemment. Voir l'exemple ci-dessous : EXEMPLE 1.2.

Ceci nous ramène à introduite une variante du **IRR** appelée **MIRR (Modified Internal Rate of Return)** qui est plus proche de la réalité que le **IRR**.

Supposons que :

a. Les financements (In Cashflows) se font à un taux de **r1 dit taux du financement**
b. Les réinvestissements (Out Cashflows) se font à un taux de **r2 dit taux de réinvestissement**

La formule relativement complexe à première vue fournissant **MIRR** est la suivante :

$$\boldsymbol{MIRR = \sqrt[n]{\frac{FV\ (CIF, r1)}{-PV(COF, r2)}} - 1}$$

Avec :

$FV(CIF, r1) =$ *Somme des Valeurs Futures (FV) des encaissements (CIF) avec un taux d'intérêt r1 en débutant par le dernier encaissement*

$PV(COF, r2) =$ *Somme des Valeurs Actuelles (PV) des décaissements (COF) avec un taux d'escompte r2 à partir du 1^er^ décaissement*

$n = nombre\ des\ pérodes\ identiques\ à\ la\ fin\ desquelles\ le\ CashFlow\ se\ produit$

Prenons notre exemple **Exemple 1.1** pour calculer le **MIRR** avec **r1=4%** et **r2=5%**. On peut alors construire le tableau détaillé suivant avec les codes couleurs afin de bien se repérer :

Year (*i*)	Cash Flow (CF) CIF ou COF	j	k	Taux r=r1 ou r=r2	PV $\frac{CF}{(1+r)^j}$	FV $CF(1+r)^k$
0	-100 000,00	0		4,00%	100 000,00	
1	-20 000,00	1		4,00%	19 230,77	
2	10 000,00		7	5,00%		14 071,00
3	20 000,00		6	5,00%		26 801,91
4	50 000,00		5	5,00%		63 814,08
5	60 000,00		4	5,00%		72 930,38
6	70 000,00		3	5,00%		81 033,75
7	80 000,00		2	5,00%		88 200,00
8	80 000,00		1	5,00%		84 000,00
9	90 000,00		0	5,00%		90 000,00
				Total :	**119 230,77**	**520 851,12**

Formule MIRR : $\sqrt[9]{\frac{520\,851{,}12}{119\,230{,}77}} - 1$

MIRR : **0,17800532**

MIRR : **17,80%**

L'utilisation de la fonction financière EXCEL **TRIM** (Taux de Retour Interne Modifié) fournit le résultat suivant :

$$MIRR\ = TRIM(plage\ des\ CIF\ de\ 0\ \text{à}\ 9\ ;\ 4\%\ ;\ 5\%) = 17{,}80\%.$$

On voit bien qu'un écart relativement important existe entre la valeur de IRR=25,27% trop optimiste et celle de MIRR=17,80% plutôt réaliste.

D'après vous en fixant r1 et r2 à la valeur du IRR=25,27%, quelle serait la valeur du MIRR ?

De la même manière que nous avons fait appel à une fonction spécialisée en PYTHON pour calculer le **IRR**, on peut utiliser la même librairie ***numpy*** afin d'évaluer le **MIRR** d'une manière beaucoup plus simple :

Code PYTHON 9. Code source PYTHON pour calculer le MIRR

```
def compute_mirr(cash_flows=list(), rate):
    """
    :param cash_flows: cash flows data list
    :param rate: discount rate value
    :return: mirr value of cash_flows data list
    """
    return np.mirr(cash_flows, rate)


print('Exemple 1_1_1: Calcul du MIRR')
print('cash flows data: ' + str(cash_flows))
print('rate value: ' + str(rate))
print('MIRR = ' + str(round(compute_mirr(cash_flows, rate), 5)))
```

EXEMPLE 1.4 (IRR MULTIPLE) :

Ci-dessous un tableau de transactions :

Fin de l'Année	Valeur du CF
0	-400 000
1	1 020 000
2	-630 000

Le graphe de la fonction NPV correspondante montre bien que cette série de transactions possède deux valeurs possibles pour le IRR : 5% et 50%.

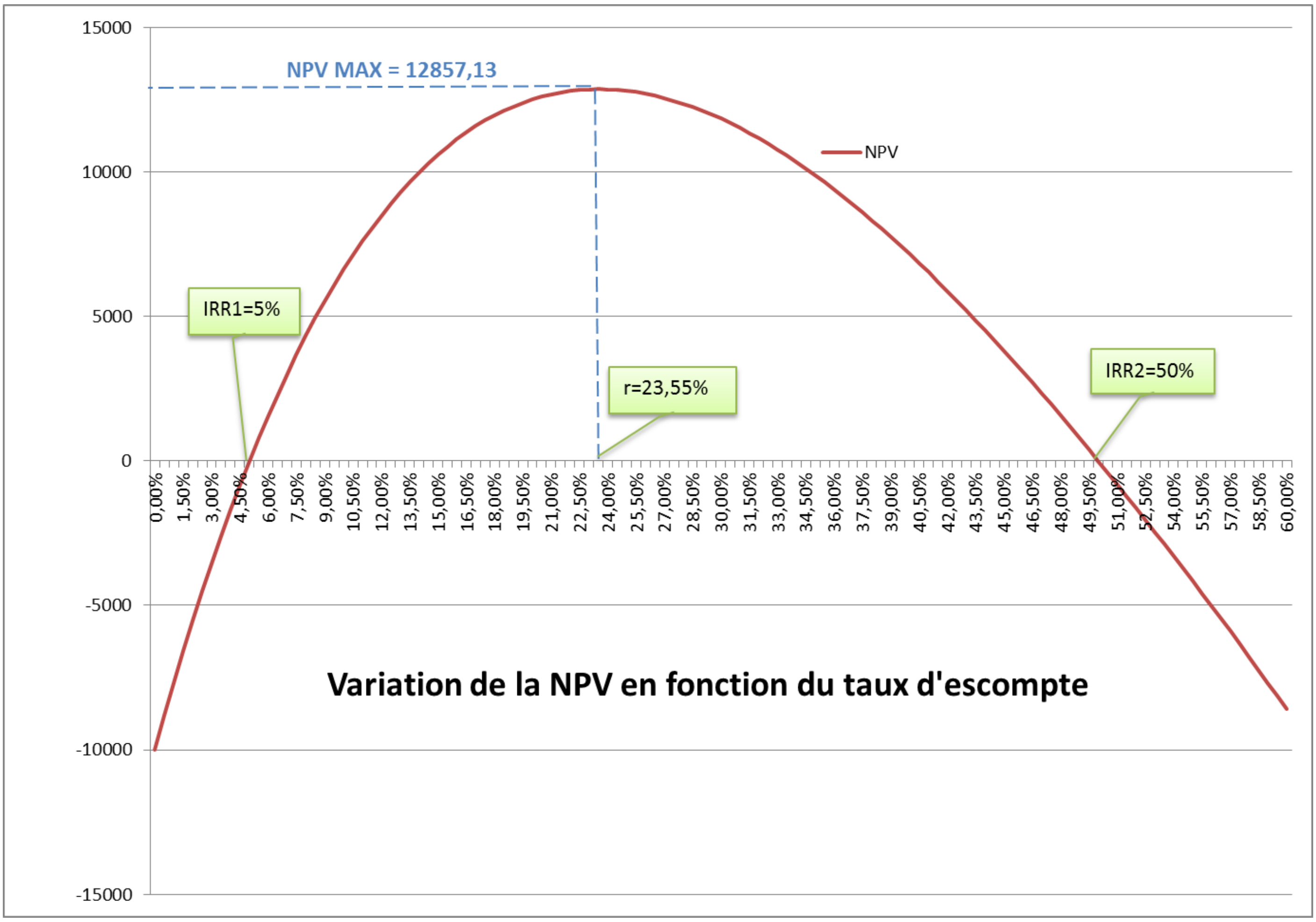


Fig 10. Exemple IRR multiple

Le graphe ci-dessus en tant que fonction du taux d'escompte, est appelé généralement le **profil de l'investissement**. On constate dans ce dernier que pour un taux d'escompte compris entre 5% et 50%, la NPV est >=0, autrement la NPV est <0. En appliquant le critère pour r=IRR1=5%, il demeure vrai uniquement pour r<50%, car au-delà de r=50% la NPV est <0. Donc le critère de IRR ne concorde pas toujours avec le critère de la NPV comme il a été noté précédemment.

Pour cet exemple trivial, la valeur du taux d'escompte donnant la valeur maximale de la NPV = 12857,13 est r = 23,55% comme illustré dans **fig.7**.

EXEMPLE 1.5 A FAIRE : DETERMINER LE IRR DU PROJET SUIVANT :

Fin de l'année	CF
0	-1010€
1	2400€
2	-1400€

EXEMPLE 1.6 A FAIRE : PROJET SANS IRR ET POURTANT LE CRITERE DE LA NPV EST APPLICABLE

Fin de l'année	CF
0	1 000€
1	-16 000€
2	12 000€

1.7 Comment Calculer l'Index de Profitabilité (PI : Profitability Index)

Le *PI* distingue entre les cumulatifs du Cash Inflows *CIF* et le Cash Outflows *COF* escomptés sur toute la durée du projet et fournit le rapport entre les deux par le biais de la formule :

$$PI = \sum_{i=i_0}^{N} \frac{\frac{CIF_i}{(1+r)^i}}{\frac{COF_i}{(1+r)^i}}$$

Le ***PI*** reflète le total des recettes (ou reviens) vs celui des dépenses (investissements) et en termes décisionnel, dépend du fait s'il est supérieur à 1.0 auquel cas le projet est profitable ou inférieur à 1.0 auquel cas le projet n'est pas profitable. Le PI peut être exprimé d'une manière plus parlante comme suit :

$$PI = \frac{Valeur\ actuelle\ des\ opérations\ effectuées\ sur\ le\ CIF}{Valeur\ actuelle\ des\ investissements\ (COF)}$$

EXEMPLE 1.5 :

Year (i)	Discount rate (r)	Cash Flow CF_i	Discounted cash inflows $\frac{CIF_i}{(1+r)^i}$	Discounted cash outflows $\frac{COF_i}{(1+r)^i}$	
1	5,00%	-100 000,00	0,00	100 000,00	
2	5,00%	-20 000,00	0,00	19 047,62	
3	5,00%	10 000,00	9 070,29	0,00	
4	5,00%	20 000,00	17 276,75	0,00	
5	5,00%	50 000,00	41 135,12	0,00	
6	5,00%	-60 000,00	0,00	47 011,57	
7	5,00%	70 000,00	52 235,08	0,00	
8	5,00%	-80 000,00	0,00	56 854,51	$PI = \sum_{i=i_0}^{N} \frac{\frac{CIF_i}{(1+r)^i}}{\frac{COF_i}{(1+r)^i}}$
9	5,00%	80 000,00	54 147,15	0,00	
10	5,00%	90 000,00	58 014,80	0,00	
		Total :	**231 879,20**	**222 913,70**	**1,040219621**

Etant donné que le $PI = 1{,}04$ est supérieur à 1.0, le projet est profitable, autrement dit il produit plus de recettes que de dépenses avec un rapport de $1:1{,}04$.

Pour les personnes ayant une connaissance en programmation, je vous propose une fonction en PYTHON réalisant le calcul du PI :

Code PYTHON 10. Code source PYTHON pour calculer le PI

```
def example_1_5():
    pi = compute_pi(0.05, [-100000, -20000, 10000, 20000, 50000, -60000, 70000, -80000, 80000, 
90000])
    print('Profitability Index = ' + str(pi))


def compute_pi(rate, cash_flows=list()):
    # convert list to pandas DataFrame object
    cf = pd.DataFrame(cash_flows, columns=['CashFlows'])

    # add DiscountedCashFlows column values as present values (pv) based on future values (fv)
    cf['DiscountedCashFlows'] = np.pv(rate=rate, pmt=0, nper=cf.index, fv=-cf['CashFlows'])

    # add cum discounted cash flow column as a cum sum
    pi_cof_sum = np.cumsum(abs(cf[cf['DiscountedCashFlows'] < 0]))
    pi_cif_sum = np.cumsum(abs(cf[cf['DiscountedCashFlows'] >= 0]))
    print('Cash-off flows:')
    print(pi_cof_sum.tail(10))
    print('Cash-in flows:')
    print(pi_cif_sum.tail(10))
    sum_cif = pi_cif_sum.tail(1).DiscountedCashFlows.values[0]  # last sum
    sum_cof = pi_cof_sum.tail(1).DiscountedCashFlows.values[0]  # last sum
    if sum_cof != 0:
        return sum_cif/sum_cof
```

Code PYTHON 11. Sortie du code source

```
Cash-off flows:
   CashFlows  DiscountedCashFlows
0   100000.0        100000.000000
1   120000.0        119047.619048
5   180000.0        166059.189036
7   260000.0        222913.695446
Cash-in flows:
   CashFlows  DiscountedCashFlows
2    10000.0          9070.294785
3    30000.0         26347.046755
4    80000.0         67482.170495
6   150000.0        119717.248259
8   230000.0        173864.397222
9   320000.0        231879.199681
Profitability Index = 1.0402196205001446
```

On obtient le même résultat que celui du tableau précédent réalisé dans EXCEL !

1.8 Le ROI et le ROSI

Dans cette section nous abordons deux métriques, le **ROI** (Return On Investment) plus répondu et commun et le **ROSI** (Return On Security Investment) qui sera brièvement évoqué. Pour plus de détails sur cette dernière métrique, je vous invite à consulter l'article suivant : roi_rosi.pdf.

La plupart d'entre nous connait plus au moins ce que c'est le ROI (Return On Investment = Retour Sur Investissement), élément représentant un facteur financier parmi d'autres fréquemment étudié et analysé avant de se lancer dans un projet nécessitant des investissements. Par contre, il est moins commun de parler de ROSI (Return On Security Investment = Retour Sur Investissement de sécurité) en entreprise. Par ailleurs, ces deux éléments sont aussi utilisés par les éditeurs de logiciels et de solutions technologiques pour mettre en avant les arguments afin de convaincre leurs clients.

1.8.1 Le ROI

Commençons par le plus simple, le ROI dont les formules équivalentes sont :

$$ROI = \frac{Gains\ de\ l'Investissement - Coût\ de\ l'Investissement}{Coût\ de\ l'Investissement}$$

$$ROI = \frac{Gain\ Net}{Coût\ de\ l'Investissement}$$

$$ROI = \frac{Gains\ de\ l'Investissement}{Coût\ de\ l'Investissement} - 1$$

La dernière formulation indique bien que le ROI est un coefficient (financier) qui peut être positif, négatif ou nulle selon que :

- **ROI>0 :** Le projet couvre les investissements et rapporte des gains, donc il peut être rentable (ceci dépend de la valeur du ROI entre autres).
- **ROI=0 :** Le projet ne rapporte pas de gains, mais il couvre les d'investissements.
- **ROI<0 :** Le projet ne rapporte pas de gains et il est déficitaire.

Il est à noter qu'il ne s'agit en aucun cas de confirmation de la conclusion, mais uniquement de prédiction si les hypothèses et les chiffres avancés seront confirmés. Remarquons qu'il est nulle part indiqué dans la formulation mathématique la dépendance du temps, bien qu'il soit exprimé en tant que ratio d'argents investis ou gagnés sur une certaine période de temps à des moments différents. En réalité, il existe une dépendance avec le temps, car les investissements peuvent être réalisés au début, en cours ou à la fin du projet et les gains peuvent être constatés à des repères temporels différents, généralement à la fin d'une année fiscale ou une période planifiée.

D'une manière générale, le ROI est planifié sur une certaine période selon le planning projet qui varie de 1 an à 3 ans, voire 5 ans ou plus et il est exprimé en % pour indiquer le niveau du rendement des gains nets par rapport aux investissements. Un exemple est plus parlant, en voici un :

Exemple 1 : Une société lance une nouvelle gamme de produit à commercialiser. Pour cela, elle prévoit procéder au lancement d'une phase projet sur 3 mois avec un coût d'investissement estimé à 250K€, puis une phase de mise sur le marché qui requiert un investissement de 50K€ sur 3 mois et finalement un investissement de 100K€ pour une production sur les 6 mois restants de l'année planifiée. Sur cette dernière phase des gains issus directement de la vente du nouveau produit sont estimés à 1M€. Quel est le ROI escompté sur 1 an. En appliquant la formule du ROI, on a :

$$ROI = \frac{1000 - (250 + 50 + 100)}{(250 + 50 + 100)} = 1{,}5 = 150\%$$

Ceci signifie que le projet est susceptible de rapporter une fois est demi l'investissement total. On voit bien que le résultat sera le même si les investissements ont lieu à des moments différents à l'intérieur de la période de calcul du ROI. Si on suppose que l'année suivante on a dépensé un montant proportionnel au coût de production des 6 mois précédents et dont la vente a rapporté 2M€, alors le **ROI** sur les 2 ans est de :

$$ROI = \frac{3000 - (250 + 50 + 100 + 200)}{(250 + 50 + 100 + 200)} = 4 = 400\%$$

La mission du ROI est de dire combien des investissements vont rapporter au bout d'une certaine période peu importe à quel moment ceux-ci auront lieu ? Pour prendre le temps en compte d'autres métriques peuvent être analysées comme la **NPV** et le **IRR** (voir la suite de cet article).

1.8.2 Le ROSI

Aussi bien les investissements planifiés que les gains escomptés ne sont pas assurés et dépendent d'un certain nombre de facteurs notamment sur de longues périodes sans pour autant que le facteur d'incertitude soit trop important à condition que l'entreprise possède une certaine maîtrise des coûts et dispose d'une bonne santé financière. Que dire alors si les éléments concernés par les investissements ne sont pas du tout contrôlés par l'entreprise ou leur arrêt de fonctionnement, voire leur destruction totale peut avoir un impact majeur sur le business même de l'entreprise. Ceci est tout-à-fait possible notamment dans le domaine de la sécurité de l'informatique, des locaux ou des moyens matériels ou humains. Afin de garantir une continuité du métier de l'entreprise, cette dernière doit mettre en place un Plan de Continuité de l'Activité (PCA) sujet en-dehors du scope de cet article. Mettre en place un PCA est un projet à part entière et par conséquent entraîne certainement des investissements et des retombés financières (en termes de rentabilité business) sont également attendus. Donc, afin de justifier le projet, il est naturel de parler de ROI entre autres. Comme le contexte du projet possède un caractère qui a trait à la sécurité les éléments définissant le ROI :

- prennent un sens particulier, et
- le facteur d'incertitude est plus important.

Plus précisément,

- Les investissements consistent à sécuriser les éléments garantissant la continuité du métier et le bon fonctionnement du PCA le cas échéant
- Les gains attendus comprennent un argument d'incertitude et peuvent être exprimés par la formule :

$$Gains = Coût\ d'exposition\ au\ risque \times \%\ de\ réduction\ du\ risque$$

de sorte à ce que la formule du **ROI** désignée dans ce contexte par ROSI soit donnée par :

$$ROSI = \frac{Coût\ d'exposition\ au\ risque \times \%\ de\ réduction\ du\ risque - Coût\ de\ l'Investissement}{Coût\ de\ l'Investissement}$$

Attention ! Les Gains ne sont pas des profits directs, mais projettent plutôt les montants susceptibles d'être perdus si l'entreprise ne procède pas à investir dans la sécurité. Le coût lié au risque doit refléter la somme des coûts directs ou indirects de l'impact sur le business (la perte en productivité, la perte d'actifs ou de la propriété intellectuelle) et les moyens mis en œuvre en cas de survenance. Le% de réduction du risque doit indiquer le niveau d'atténuation attendu du risque suite à la mise en place de solutions et processus du PCA ou dans le processus continu du maintien en conditions opérationnelles de l'activité. Déterminer ces deux paramètres n'est pas chose facile, car ils concernent des évènements attendus et non avérés ni tangibles. Etant donnés que les incidents relatifs à la sécurité constituent une source des données à utiliser dans l'estimation du ROSI, on peut s'appuyer sur les informations issues des incidents afin d'estimer les différents paramètres à prendre en compte comme nous allons le voir dans l'exemple ci-dessous. Par ailleurs, collecter des données strictement liées à la sécurité et pouvoir estimer les pertes en productivité conséquences directes ou indirectes d'incidents de sécurité n'est pas toujours évident d'une part, et d'autre part, ne constitue pas une préoccupation du premier ordre de toutes les entreprises. Une telle démarche n'est pas encore standardisée et des outils du type ETL capables de collecter, analyser, traiter les données et puis reporter les synthèses existent certainement mais faut-il encore les mettre en œuvre et les industrialiser.

Connaissant le ***Coût d'exposition au risque*** et le *Coût de l'investissement* et en désignant par *r* le *% de réduction du risque* et par*r0* le ratio (ROI de référence) :

$$r_0 = \frac{Coût\ de\ l'Investissement}{Coût\ d'exposition\ au\ risque}$$

on peut conclure que :

- **ROSI>0 Si :** $r > r_0$
- **ROSI=0 Si :** $r = r_0$
- **ROSI<0 Si :** $r < r_0$

De nombreux exemples y compris l'utilisation la simulation de la **méthode Monte Carlo** sont exposés et détaillés dans l'article indiqué au début de cette section : Le ROI est plutôt commun, mais le ROSI c'est quoi ? (consultable à l'adresse : http://abdel.yezza.free.fr/introduction/math_finance/roi_rosi.pdf).

1.9 Tableau comparatif des métriques utilisées dans les critères décisionnels

	NPV	PBP	DPBP	IRR	MIRR	PI	ROI
Prise en compte du facteur temps des CF et de la valeur du capital	✓		✓	✓	✓	✓	
Lié directement à l'objectif de maximisation de la richesse de l'entreprise	✓					✓[4]	✓
Prise en compte de l'ensemble des paramètres relevant du capital autre que le temps	✓			✓	✓	✓	✓
Produit une métrique et des indications claires et facilement utilisables	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

En pratique et selon le contexte et les objectifs fixés par l'entreprise, on conjugue plusieurs critères afin d'arriver à la meilleure décision possible ayant le moins de risques sur la santé financière de l'entreprise. Dans tous les cas où plusieurs projets mutuellement exclusifs ou indépendants ou scénarios pour le même projet se présentent, un certain nombre de paramètres doivent être pris en compte comme :

1. La taille de chaque projet notamment en termes de cash flow
2. Des projets exclusifs qui ne sont pas à la même échelle doivent être ramenés à une référence unique afin de pouvoir les comparer
3. Selon les contraintes et les exigences du projet, choisir la technique la plus adaptée en posant les bonnes questions comme :
    a. Les projets sont-ils indépendants ou mutuellement exclusifs ?
    b. Les projets sont-ils assujettis à une rationalisation du capital (limite supérieure) ?
    c. Quels sont les avantages et inconvénients de chaque technique au regard des risques concourus pour chaque projet ?

[4] A condition que les projets soient dans la même échelle.

2. Quelle est la relation entre le PV (Present Value) et le FV (Future Value) pour un taux d'intérêt composite r sur une durée de N périodes ?

Les éléments relatifs aux coûts *PV* (**Present Value**) et *FV* (**Future Value**) représentent respectivement la valeur du capital au présent (courant) et celui espéré dans le futur basé sur une durée de *P*ériodes (mois, trimestres, semestres, années etc.) et un taux d'escompte composite *r* (*Compound Discounted Rate*) par période comme indiqué dans le schéma sommaire suivant :

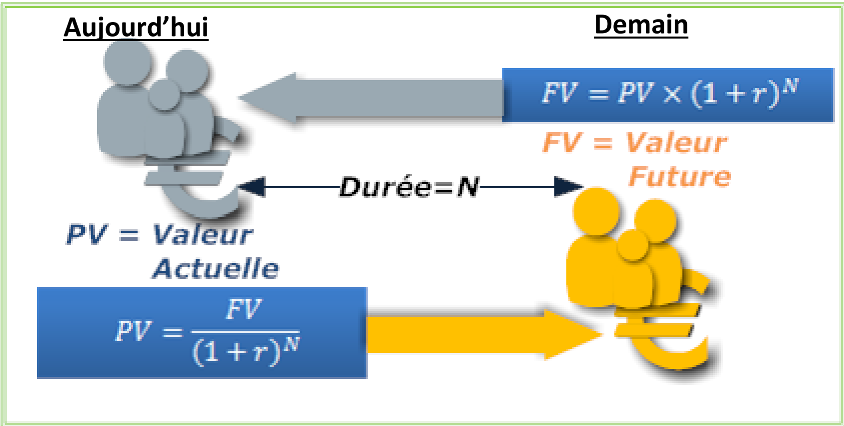


Fig 11. Principe et formules de la PV et la FV

Il est facile de déterminer la relation entre la valeur future *FV* et la valeur présente *PV* basée sur un intérêt composite (intérêt appliqué sur le principal et sur l'intérêt lui-même) en utilisant par exemple la récurrence :

$$FV = PV \times (1+r)^N$$

Période	Valeur de *FV*
1	$\mathrm{FV} = \mathrm{PV} + \mathrm{PV} \times \mathrm{r} = \mathrm{PV}(1+\mathrm{r})$
2	$\mathrm{FV} = \mathrm{PV}(1+\mathrm{r}) \times (1+\mathrm{r}) = \mathrm{PV}(1+\mathrm{r})^2$
3	$\mathrm{FV} = \mathrm{PV}(1+\mathrm{r})^2 \times (1+\mathrm{r}) = \mathrm{PV}(1+\mathrm{r})^3$
…	…
N	$\mathrm{FV} = \mathrm{PV}(1+\mathrm{r})^{N-1} \times (1+\mathrm{r}) = \mathrm{PV}(1+\mathrm{r})^N$

Sans attarder sur les détails mathématiques et financiers, voici un exemple qui illustre les concepts mentionnés ci-dessous :

EXEMPLE 2.1 : $PV = 1000€, r = 5\%, N = 10\ ans$

Année (i)	Le principal	Valeur future $FV = PV \times (1+r)^1$	Intérêt sur le principal (1000€) pour l'année i	Intérêt sur les intérêts pour l'année i	Intérêt cumulatif sur le principal	Intérêt cumulatif sur les intérêts	Intérêt total pour l'année i	Intérêt total cumulatif
1	1000,00	1050,00	50,00	0,00	50,00	0,00	50,00	50,00
2	1000,00	1102,50	50,00	2,50	100,00	2,50	52,50	102,50
3	1000,00	1157,63	50,00	5,13	150,00	7,63	55,13	157,63
4	1000,00	1215,51	50,00	7,88	200,00	15,51	57,88	215,51
5	1000,00	1276,28	50,00	10,78	250,00	26,28	60,78	276,28
6	1000,00	1340,10	50,00	13,81	300,00	40,10	63,81	340,10
7	1000,00	1407,10	50,00	17,00	350,00	57,10	67,00	407,10
8	1000,00	1477,46	50,00	20,36	400,00	77,46	70,36	477,46
9	1000,00	1551,33	50,00	23,87	450,00	101,33	73,87	551,33
10	1000,00	1628,89	50,00	27,57	500,00	128,89	77,57	628,89
		Total :	500,00	128,89				

Remarquez bien que l'intérêt sur le principal est toujours le même et est égal à 50,00€ (5% de 1000€). En revanche, ce qui change c'est l'intérêt sur l'intérêt (d'où l'appellation intérêt composite) qui croît d'une année à la suivante et il est appliqué comme son nom l'indique sur l'intérêt principal. Afin d'obtenir la valeur future FV au terme des 10 ans, il suffit d'additionner le principal 1000€ à l'intérêt total cumulatif correspondant à la 10ème année 628,89€, ce qui donne 1628,89€ exactement ce qu'on obtient en appliquant la formule de FV, ci-dessous :

En appliquant la formule : $FV = PV \times (1+r)^N$, *on obtient :* $FV = 1000 \times (1+0{,}05)^{10} = 1628{,}89$

Le graphe ci-dessous illustre ces notions d'une manière encore plus claire et visuelle :

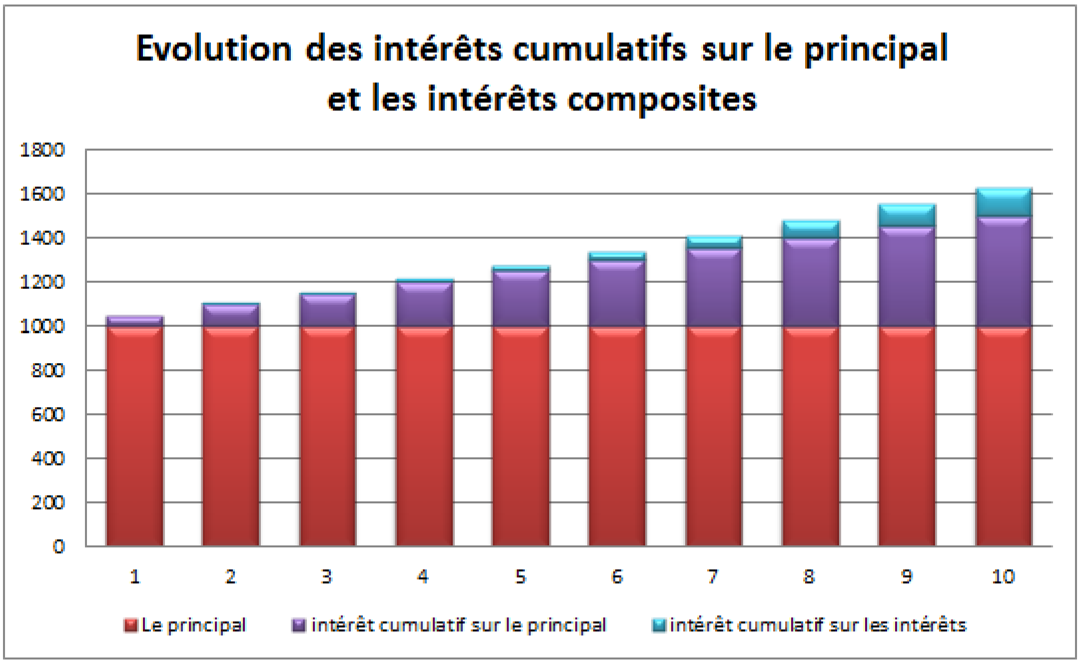


Fig 12. Graphes d'évolution des intérêts et du principal

EXEMPLE 2.2 : VOUS DEPOSEZ UNE SOMME DE 20 000€ DANS UN COMPTE RAPPORTANT 5% D'INTERETS PAR AN QUI SONT COMPILES TOUS LES TRIMESTRES. QUELLE EST LA SOMME QUI SERA A VOTRE DISPOSITION A LA FIN DES 5 PROCHAINES ANNEES.

Réponse :
Etant donné que l'intérêt est annuel et les périodes sont basées sur des trimestres, il faut le ramener à une période : *r* = 5%/4 = 1,25% par période. La durée est de 5 ans qui est équivalente à *N* = 5 x 4 = 20 périodes (trimestres). La valeur actuelle *PV* = 20 000€ somme déposée dans le compte bancaire. La somme à recevoir à la fin des 5 ans représente la valeur future *FV* donnée par la formule :

$$FV = PV(1+r)^N = 20000 \times (1+0.0125)^{20} = 25\,640{,}74€$$

On peut procéder autrement en ramenant le taux d'intérêt annuel de 5% à un taux d'intérêt annuel effectif désigné par ***EAR*** =***Effective Annual Rate*** appelé aussi ***APR = Annual Percentage Rate*** obtenu à partir de celui appliqué trimestriellement (1,25%), ce qui donne :

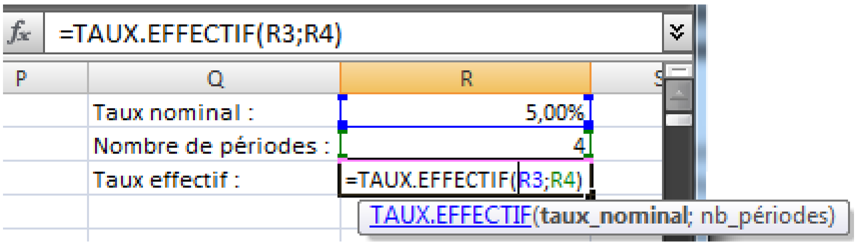
$$r = (1+1{,}25\%)^4 - 1 = 5{,}0945\% = 0{,}050945 = 5{,}09\% \text{ par an}$$

$$FV = PV(1+r)^N = 20000 \times (1+0{,}050945)^5 = 25640{,}74€$$

L'APR est tout simplement la traduction annuelle d'un intérêt composite appliqué par période. Ceci nous permet de ramener tous à **un an** peu importe les périodes de compilation des taux d'intérêt et la considérer en tant que référence temporelle. Voir le tableau ci-dessous pour la correspondance entre l'**APR** et le taux appliqué par période. La formule générale fournissant l'***APR*** est :

$APR = \left(1+\frac{r}{k}\right)^k - 1$ $k = nombre\ de\ périodes\ dans\ un\ an$ $r = Taux\ appliqué\ annuellement\ et\ compilé\ par\ période$	$APR = e^r - 1$ Si le taux est appliqué d'une manière continue (voir la section 4). $e = 2{,}718\ldots$

Vous pouvez également utiliser la fonction MS EXCEL ***TAUX.EFFECTIF*** comme illustré ci-dessous :



On voit bien que **l'APR** est toujours supérieur au taux nominatif annuel *r* comme ne le verrons dans le tableau ci-dessous. D'une manière générale, en se projetant sur une durée assez longue, plus les périodes sont courtes, plus la valeur de FV est importante. Prenons ce même exemple et examinons la valeur de FV pour des échéances distinctes :

Fréquence de compilation des intérêts	**Période d'application des intérêts en mois**	**Nombre de périodes sur la durée de 5 ans**	**Taux d'intérêt par période**	**APR**	**FV**	**Le DELTA de FV par rapport à la base annuelle**
Annuelle	12 mois	5	5%	5,00%	25525,63	0
Semestrielle	6 mois	10	2,5%	2,52%	25601,69	76,06
Trimestrielle	3 mois	20	1,25%	1,26%	25640,74	115,11
Mensuelle	1 mois	60	0,4167%	0,4175%	25667,17	141,54
Continuellement			5%	5,13%[5]	25844,24	318,61

On voit clairement la différence entre les différentes fréquences de composition des intérêts et la fréquence annuelle est relativement négligeable, car la durée de 5 ans n'est pas considérée comme étant une longue durée. Prenez 100 ans et refaites ce même exercice pour voir la différence.

Ce qu'il faut retenir c'est que l'***APR*** peut être considéré comme une référence à laquelle tous les taux peuvent être ramenés et ainsi permettre une comparaison de taux juste et effective. Dans le domaine bancaire, plus précisément quand il s'agit d'obtenir un prêt hors consommation, on parle plutôt du **TEG : Taux Effectif Global** différent de l'APR qui non seulement représente l'APR, mais intègre en plus tous les autres taux associés qui s'y rajoutent comme les assurances sous plusieurs formes et les différents frais appliqués dès le début ou glissés sur la durée comme la caution de garantie du prêt ou les frais du dossier !

En résumé la règle impose que le **TEG** soit utilisé pour les prêts immobiliers et **l'APR** soit plutôt utilisé pour les prêts à la consommation.

[5] $Voir\ la\ section\ 4\ pour\ un\ taux\ continu : e^{r\times N} = e^{0,05\times 5} = 5,13\%$

Exemple 2.3 : Vous disposez d'une somme de **500€** que vous souhaitez investir sur **10 ans** avec un taux d'interet composite et obtenir au terme de cette periode une somme de **800€**. Quel est le taux d'interet minimal par annee afin d'assurer cette somme ?

Réponse :

Il suffit d'appliquer la formule appelée la moyenne géométrique :

$$r = \sqrt[N]{\frac{FV}{PV}} - 1$$

Ce qui donne : 4,81% représentant le taux minimal d'intérêt permettant l'obtention d'un capital de 800€ à la fin des 10 ans.

Cette valeur peut être obtenue en appliquant la formule EXCEL par exemple : $TAUX\ (10; 0; -500; 800; 0)\ =\ 4{,}81\%$.

Exemple 2.4 (taux d'escompte/d'interet multiple) : Vous deposez 10 000€ pour 5 annees consecutives dans un compte rapportant 5% d'interet a la fin de la 1ere annee. Ce taux est augmente de 0,1% chaque annee suivante. Quel somme vous recevrez a la fin de la 5eme annee ?

Quelle formule appliquer dans le cas de taux d'escompte non identique par période. Supposons que les taux d'escompte $r_1, r_2, .., r_N$ sont appliqués sur les périodes 1, 2, …, N pour un projet étalé sur les N périodes. De la même manière pour exprimer la valeur future FV en fonction de la valeur actuelle PV dans le cas de taux d'escompte unique, on peut écrire :

$$\boldsymbol{FV} = \mathbf{PV(1 + r_1) \times (1 + r_2) \times \ldots \times (1 + r_N)}$$

NOTE : *Cette formule peut s'appliquer dans le cas par exemple de taux d'intérêt variable avec un risque que ce dernier puisse augmenter ou diminuer dans le futur selon que l'on soit emprunteur ou investisseur.*

Période	Valeur de *FV*
1	$\mathrm{FV} = \mathrm{PV} + \mathrm{PV} \times \mathrm{r_1} = \mathrm{PV}(1 + \mathrm{r_1})$
2	$\mathrm{FV} = \mathrm{PV}(1 + \mathrm{r_1}) \times (1 + \mathrm{r_2})$
3	$\mathrm{FV} = \mathrm{PV}(1 + \mathrm{r_1}) \times (1 + \mathrm{r_2}) \times (1 + \mathrm{r_3})$
…	…
N	$\mathrm{FV} = \mathrm{PV}(1 + \mathrm{r_1}) \times (1 + \mathrm{r_2}) \times \ldots \times (1 + \mathrm{r_N})$

En appliquant la formule sur les données de notre exemple, on obtient :

$$FV = 10\ 000 \times (1 + 0{,}05) \times (1 + 0{,}051) \times (1 + 0{,}052) \times (1 + 0{,}053) \times (1 + 0{,}054) = 12884{,}77€$$

En moyenne, le taux d'intérêt sur les 5 ans est de :

$$\mathrm{r} = \sqrt[5]{\frac{12\ 884{,}77}{10\ 000}} - 1 = 5{,}20\%$$

se situant exactement à la médiane de la série des taux d'escompte.

3. Quelle est la relation entre le PV (Present Value) et le FV (Future Value) pour un taux d'intérêt simple r sur une durée de N périodes ?

La formule donnant la FV basée sur un taux d'escompte simple r étalée sur une durée égale à N, est donnée comme suit :

$$FV = PV(1 + rN)$$

Le ratio entre le FV à taux d'intérêt composite et celui à taux d'intérêt simple :

$$\frac{FV(composé)}{FV(simple)} = \frac{(1 + r)^N}{1 + rN}$$

EXEMPLE 3.1 : VOUS DISPOSEZ D'UNE SOMME DE 500€ QUE VOUS SOUHAITEZ INVESTIR SUR 10 ANS AVEC UN TAUX D'INTERET COMPOSITE R=4,81% COMME DANS L'EXERCICE PRECEDENT. QUELS SONT LE RATIO ET LA DIFFERENCE ENTRE LE FV CORRESPONDANT ET CELUI POUR UN TAUX D'INTERET EGAL MAIS SIMPLE ?

Réponse :

$$R = 4{,}81$$
$$N = 10$$
$$\frac{FV(composé)}{FV(simple)} = \frac{(1 + r)^N}{1 + rN} = 1{,}080$$

$$FV(composé) - FV(simple) = 59{,}33$$

En conclusion et sans surprise, le taux d'intérêt composite est plus intéressant que le taux d'intérêt simple, car le premier est augmenté par les intérêts sur les intérêts comme expliqué précédemment. Qu'en-est-il à propos d'un taux d'intérêt qui change continuellement ?

4. Quelle est la formule reliant le PV et le FV pour un taux d'intérêt continu r (qui change continuellement) ?

Il suffit de faire tendre r vers 0 dans la formule :

Puis faire tendre n=1/r vers l'infini sachant que :

$$\lim_{r\to 0}(1+r)^N = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\times r\times N} = \left\{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{r\times N} = e^{r\times N}$$

Comme :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\ (= 2{,}718\ \ldots)$$

Alors :

$$FV = PV \times e^{r\times N}$$

On note alors que la valeur du PV dans ce cas varie d'une manière exponentielle offrant ainsi des valeurs beaucoup plus importantes sur une longue durée par rapport aux deux modèles précédents à taux d'intérêt simple ou composite.

Bien que ce modèle ne soit pas vraiment utilisé dans la vie de tous les jours, pour l'illustrer, voici le même exemple que celui de l'exemple 2.1, mais avec un taux d'intérêt continu :

EXEMPLE 4.1 : $PV = 1000€, r = 5\%\ et\ N = 10\ ans.$ LA VALEUR DE FV EST DONNEE PAR : $FV = 1000 * EXP\ (0.05 * 10) = 1648{,}72€$

Le DELTA entre le capital au terme de 10 ans entre celui à taux d'intérêt continu et celui à taux d'intérêt composite (Exemple 2.1) $= 1648{,}72 - 1628{,}89 = 19{,}83€$ qui n'est pas significatif, car N=10 ans n'est pas considérée comme étant une longue période.

Pour voir vraiment l'effet d'un taux d'intérêt continu sur le capital et sur la différence entre le modèle à taux continu et le modèle à taux composite, prenons $N = 100$ ans, ce qui fournit une différence significative $=\ 16911{,}90$ €. *Faut-il encore attendre 100 ans pour encaisser cette somme !*

5. Application à un exemple

EXEMPLE 5.1 VOUS ETES ENGAGE EN TANT QU'ANALYSTE FINANCIER DANS UNE ENTREPRISE DE RENOMME INTERNATIONALE. LE CFO (CHIEF FINANCIAL OFFICER) VOUS DEMANDE D'ANALYSER ET QUALIFIER LES 2 PROJETS SUIVANTS[6] :

	Cash-Flows attendus	
Année	**Projet 1**	**Projet 2**
0	-10000	-10000
1	6500	3500
2	3000	3500
3	3000	3500
4	1000	3500

Avec un taux d'escompte de 12%.

1) Calculer pour chaque projet les métriques : **NPV**, **PBP**, **DPBP**, **IRR**, **MIRR** et le **PI**
2) Lequel des 2 projets 1 et 2 devrait être accepté ?

5.1 Application manuelle des formules

Réponse :

1) **Voici le tableau récapitulatif contenant l'ensemble des éléments demandés :**

	Cash-Flows attendus		Discounted Cash-Flows		Pour le calcul des PI	
Année	**Projet 1**	**Projet 2**	**Projet 1** NPV1 (r=12%)	**Projet 2** NPV2 (r=12%)	**Projet 1** **COF ou CIF**	**Projet 2** **COF ou CIF**
0	-10000	-10000	-10000,00	-10000,00	10000,00	10000,00
1	6500	3500	-4196,43	-6875,00	5803,57	3125,00
2	3000	3500	-1804,85	-4084,82	2391,58	2790,18
3	3000	3500	330,49	-1593,59	2135,34	2491,23
4	1000	3500	966,01	630,72	635,52	2224,31
NPV	966,01 €	630,72 €		**Total COF :**	**10000,00**	**10000,00**
PBP	2,17	2,86		**Total CIF :**	**10966,01**	**10630,72**
DPBP	2,85	3,72				
IRR	18%	15%				
MIRR	13,48%	12,89%				
PI	1,0966	1,0631				

Détails :

1.1 Calcul des NPV :

$$NPV1 = -10000 + \frac{6500}{1,12} + \frac{3000}{1,12^2} + \frac{3000}{1,12^3} + \frac{3000}{1,12^4} = 966,01$$

[6] **Source :** Financial Management Theory and Practice by Brigham Ehrhardt. *A noter que les modes de calcul peuvent différer entre cette référence et le présent article.*

$$\mathrm{NPV2} = -10000 + \frac{3500}{1{,}12} + \frac{3500}{1{,}12^2} + \frac{3500}{1{,}12^3} + \frac{3500}{1{,}12^4} = 630{,}72$$

Utiliser la fonction MS EXCEL pour arriver aux mêmes résultats :

$$NPV1 = -10000 + \boldsymbol{VA}(0{,}12\,;6500\,;3000\,;3000\,;3000) = 966{,}01$$

$$NPV2 = -10000 + \boldsymbol{VA}(0{,}12\,;3500\,;\ 3500\,;\ 3500\,;\ 3500) = 630{,}72$$

Graphiquement NPV1 et NPV2 se présentent comme suit avec une indication aux PBP1 et PBP2 qui seront calculés d'une manière précise ci-dessous :

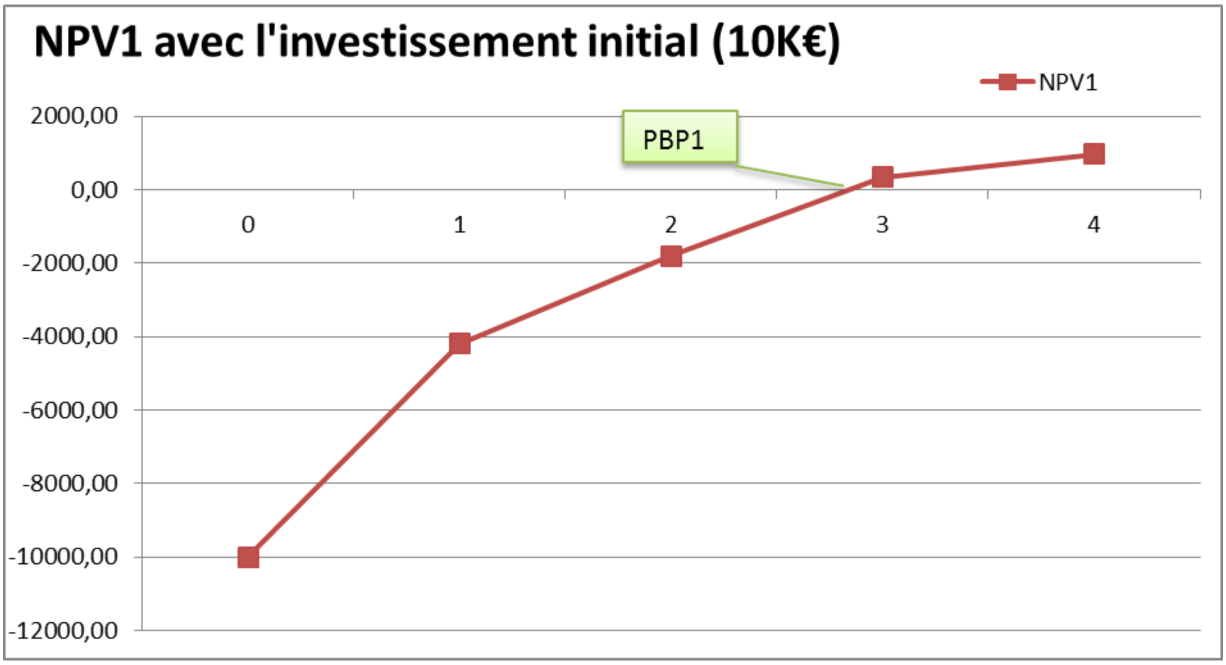


Fig 13. Graphe de NPV1

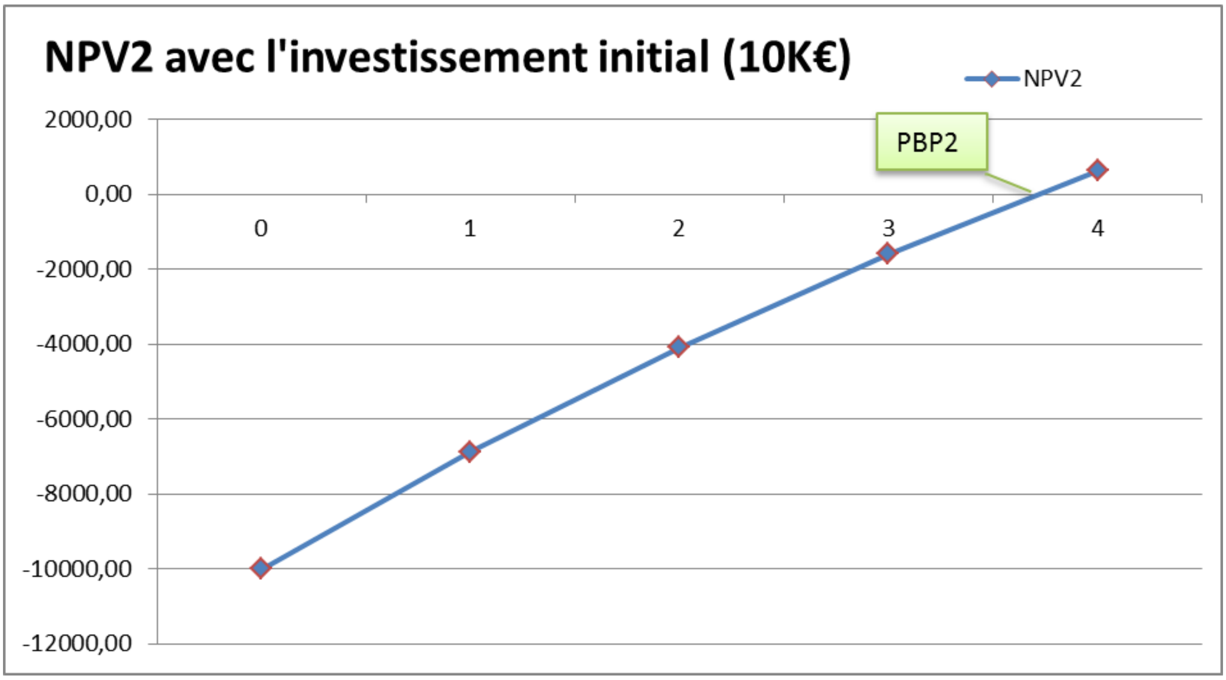


Fig 14. Graphe de NPV2

1.2 Calcul des PBP et DPBP:

	Cash-Flows attendus		CF attendus cumulatifs		Discounted CF cumulatifs	Discounted CF cumulatifs
Année	**Projet 1**	**Projet 2**	**NPV1**	**NPV1**	**NPV1** (r=12%)	**NPV2** (r=12%)
0	-10000	-10000	-10000	-10000	-10000	-10000
1	6500	3500	-3500	-6500	-4196,43	-6875,00
2	3000	3500	-500	-3000	-1804,85	-4084,82
3	3000	3500	2500	500	330,49	-1593,59
4	1000	3500	3500	4000	966,01	630,72

$PBP1 = 2 + 500/(500 + 2500) = 2{,}17$

$PBP2 = 3 + 3000/(3000 + 500) = 2.86$

$DPBP1 = 2 + 1804{,}85/(1804{,}85 + 330{,}49) = 2{,}84$

$DPBP2 = 3 + 1593{,}59/(1593{,}59 + 630{,}72) = 3{,}72$

1.3 Calcul des IRR :

r = IRR1 = 18% (voir graphe ci-dessous) est la solution de l'équation :

$$\mathrm{NPV1} = -10000 + \frac{6500}{(1+r)} + \frac{3000}{(1+r)^2} + \frac{3000}{(1+r)^3} + \frac{1000}{(1+r)^4} = 0$$

r = IRR2 = 15% (voir graphe ci-dessous) est la solution de l'équation :

$$\mathrm{NPV2} = -10000 + \frac{3500}{(1+r)} + \frac{3500}{(1+r)^2} + \frac{3500}{(1+r)^3} + \frac{3500}{(1+r)^4} = 0$$

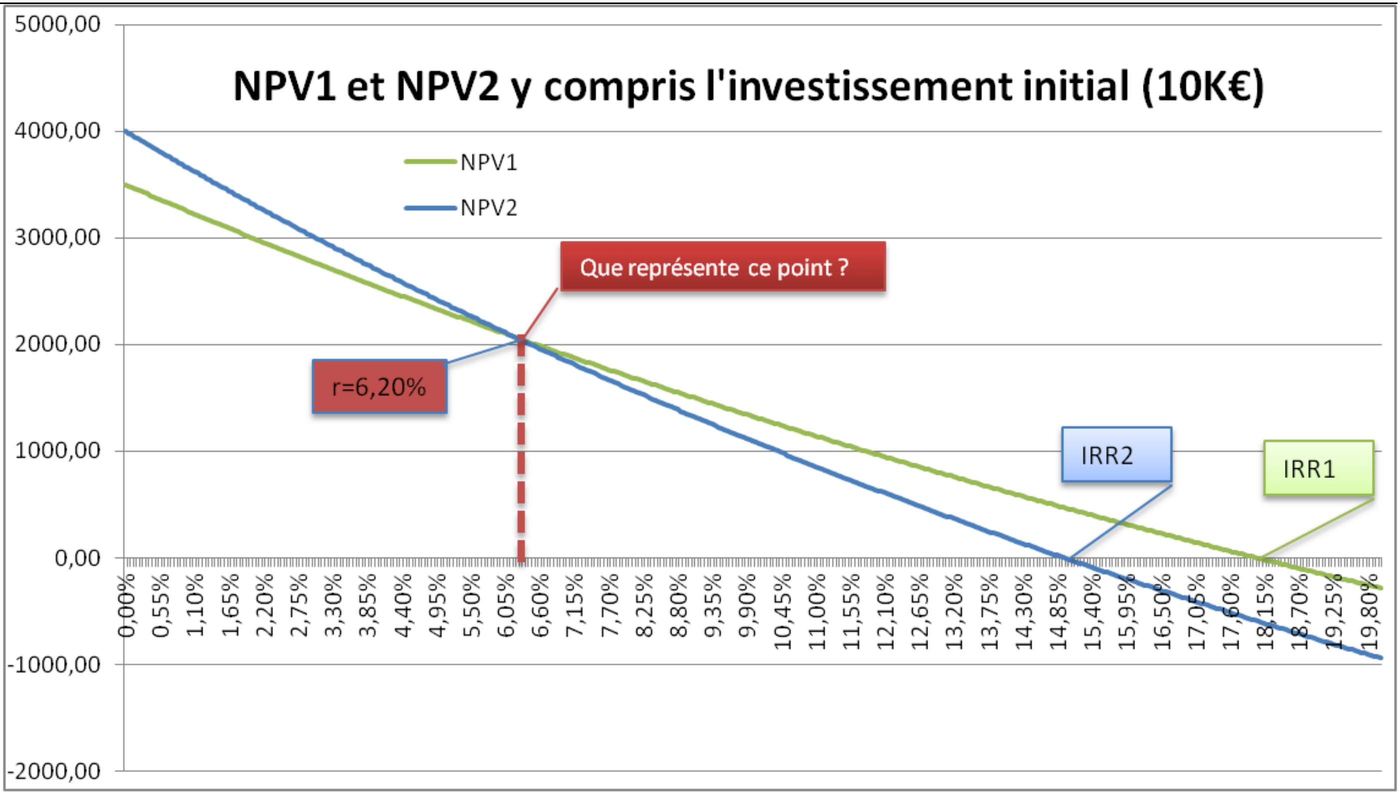


Fig 15. Repérage graphique de IRR1 et IRR2 dans les profils d'investissement des deux projets 1 & 2

NOTE : Si le taux d'escompte coïncide avec r = 6,206%, les deux projets produisent la même valeur de la NPV=2070. Ce point de taux d'escompte est important et permet de comparer les deux projets pour toutes les valeurs possibles du taux d'escompte comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

Valeur du taux d'escompte r	Comparaison des projets 1 & 2	Choix du projet
$\boldsymbol{r > 0\%\ et\ r < 6,206\%}$	Le projet 2 produit plus de valeur que le projet 1	Projet 2
$\boldsymbol{r = 6,206\%}$	Les deux projets 1 & 2 produisent la même valeur	Projet 1 ou 2
$\boldsymbol{r > 6,206\%\ et\ r \leq 18\%}$	Le projet 1 produit plus de valeur que le projet 2	Projet 1
$\boldsymbol{r > 18\%}$	Le projet 1 fait perdre moins que le projet 2	Aucun

Une manière de différentier les deux projets est d'étudier la NPV représentant la différence entre leurs NPV respectives :

$$NPV = NPV2 - NPV1 =$$

$$-\frac{3000}{(1+r)} + \frac{500}{(1+r)^2} + \frac{500}{(1+r)^3} + \frac{2500}{(1+r)^4} =$$

$$-\frac{500}{(1+r)}\left[6 - \frac{1}{(1+r)} - \frac{1}{(1+r)^2} - \frac{5}{(1+r)^3}\right]$$

avec $0 \leq \mathrm{r} \leq 1$

Je vous laisse le soin d'effectuer l'étude de cette nouvelle NPV pour arriver aux mêmes conclusions. Plus bas, nous allons plutôt la traiter par le biais d'un code PYTHON donnant les mêmes conclusions, mais d'une manière plus rapide et automatique.

1.4 Calcul des PI :

$$PI1 = \frac{5803{,}57 + 2391{,}58 + 2135{,}34 + 635{,}52}{10000} = 1{,}0966$$

$$PI2 = \frac{3125{,}00 + 2790{,}18 + 2491{,}23 + 2224{,}31}{10000} = 1{,}0631$$

2) Il est clair que le projet 1 l'emporte sur le projet 2 relativement à l'ensemble des critères utilisant la NPV, le PBP, le DPBP, le IRR et le PI.

5.2 Obtention des réponses par appel des fonctions PYTHON

Comme on dispose déjà du code PYTHON pour calculer l'ensemble des indicateurs financiers, il est facile d'appliquer tout simplement les mêmes fonctions codées précédentes pour arriver au tableau suivant (voir le code source complet en annexe : Code source PYTHON.).

Code PYTHON 12. Exemple 5.1 : Code source PYTHON

```
def example_5_1():
    cf1 = [-10000, 6500, 3000, 3000, 1000]
    rate1 = 12/100
    cf2 = [-10000, 3500, 3500, 3500, 3500]
    rate2 = 12/100
    npv_1 = compute_npv(rate1, cf1)
    npv_2 = compute_npv(rate2, cf2)
    pbp_1 = payback_period(cf1)
    pbp_2 = payback_period(cf2)
    dpbp_1 = discounted_payback_period(rate1, cf1)
    dpbp_2 = discounted_payback_period(rate2, cf2)
    irr_1 = compute_irr(cf1)
    irr_2 = compute_irr(cf2)
    mirr_1 = compute_mirr(cf1, rate1)
    mirr_2 = compute_mirr(cf2, rate2)
    pi_1 = compute_pi(rate1, cf1)
    pi_2 = compute_pi(rate2, cf2)
    print('NPV1: ' + str(npv_1))
    print('NPV2: ' + str(npv_2))
    print('PBP1: ' + str(pbp_1))
    print('PBP2: ' + str(pbp_2))
    print('DPBP1: ' + str(dpbp_1))
    print('DPBP2: ' + str(dpbp_2))
    print('IRR1: ' + str(irr_1))
    print('IRR2: ' + str(irr_2))
    print('MIRR1: ' + str(mirr_1))
    print('MIRR2: ' + str(mirr_2))
    print('PI1: ' + str(pi_1))
    print('PI2: ' + str(pi_2))

    # plot NPV1 and NPV2 as functions of discount rate r
    def npv1(r):
        return -10000 + 6500/(1 + r) + 3000/((1 + r))**2 + 3000/((1 + r))**3 + 1000/((1 + r))**4

    r = sympy.Symbol("r")
    # NPV1 graph
    expr = r'$NPV1(r) = -10000 +\frac{6500}{(1+r)} + \frac{3000}{(1+r)^2} + \frac{3000}{(1+r)^3} +
\frac{3000}{(1+r)^4}$'
    fig, ax = plot_2d_graph([r for r in np.arange(0.0, 1.1, 0.08)], [npv1(r) for r in np.arange(0.0, 1.1,
0.08)],
                            {'title': 'NPV1\n' + str(expr), 'fontsize': '12', 'fontname': 'arial',
                             'color': '#000000', 'x_label': '$r$', 'y_label': '$NPV1(r)$', 'style': '.-
b'})
    try:
        print('Try to apply Newton method to our equation :\n' + str(npv1(r)) + ' = 0')
        sol = solve_by_newton_algo(npv1, 0.2)
        print('Found solution: r=' + str(sol))
```

```
        # add annotation to found solution
        add_annotation_to_graph(fig, ax, [sol, 0], 'Equation solution: ' + str(round(sol, 5)),
                                xytext=(sol + 20, 0 + 50),
                                arrowprops=dict(arrowstyle="->", connectionstyle="arc3, rad=.5"))
    except:
        print('No solution found for NPV1!')
    finally:
        fig.show()

    # NPV2 graph
    def npv2(r):
        return -10000 + 3500 / (1 + r) + 3500 / ((1 + r)) ** 2 + 3500 / ((1 + r)) ** 3 + 3500 / ((1 + r))
** 4

    expr = r'$NPV2(r) = -10000 +\frac{3500}{(1+r)} + \frac{3500}{(1+r)^2} + \frac{3500}{(1+r)^3} +
\frac{3500}{(1+r)^4}$'
    fig, ax = plot_2d_graph([r for r in np.arange(0.0, 1.1, 0.08)], [npv2(r) for r in np.arange(0.0, 1.1,
0.08)],
                            {'title': 'NPV2\n' + str(expr), 'fontsize': '12', 'fontname': 'arial',
                             'color': '#000000', 'x_label': '$r$', 'y_label': '$NPV2(r)$', 'style': '.-
r'})
    try:
        print('Try to apply Newton method to our equation :\n' + str(npv2(r)) + ' = 0')
        sol = solve_by_newton_algo(npv2, 0.2)
        print('Found solution: r=' + str(sol))
        # add annotation to found solution
        add_annotation_to_graph(fig, ax, [sol, 0], 'Equation solution: ' + str(round(sol, 5)),
                                xytext=(sol + 20, 0 + 50),
                                arrowprops=dict(arrowstyle="->", connectionstyle="arc3, rad=.5"))
    except:
        print('No solution found for NPV2!')
    finally:
        fig.show()

    # plot graph of NPV=NPV2-NPV1=-3000/((1+r))+500/ 〖(1+r)〗 ^2 +500/ 〖(1+r)〗 ^3 +500/ 〖(1+r)〗 ^4
    def f(r):
        return npv2(r) - npv1(r)  # -3000/(1+r) + 500/((1+r)**2) + 500/((1+r)**3) + 2500/((1+r)**4)

    # r = sympy.Symbol("r")
    expr = r'$f(r) = -\frac{3000}{(1+r)} + \frac{500}{(1+r)^2} + \frac{500}{(1+r)^3} +
\frac{2500}{(1+r)^4}$'
    print(expr)
    fig, ax = plot_2d_graph([r for r in np.arange(0.0, 1.1, 0.1)], [f(r) for r in np.arange(0.0, 1.1,
0.1)],
                            {'title': 'Function graph\n' + str(expr), 'fontsize': '12', 'fontname': 'arial',
                             'color': '#000000', 'x_label': '$r$', 'y_label': '$f(r)$', 'style': '.-b'})
    try:
        print('Try to apply Newton method to our equation :\n' + str(f(r)) + ' = 0')
        sol = solve_by_newton_algo(f, 0.05)
        print('Found solution: r=' + str(sol))
        # add annotation to found solution
        add_annotation_to_graph(fig, ax, [sol, 0], 'Equation solution: ' + str(round(sol, 5)),
                                xytext=(sol + 20, 0 + 50),
                                arrowprops=dict(arrowstyle="->", connectionstyle="arc3, rad=.5"))
    except:
        print('No solution found !')
    finally:
        fig.show()
```

Code PYTHON 13. Sortie de l'exécution du code

```
NPV1: 966.0118830695527
NPV2: 630.7227131924178
PBP1: 2.1666666666666665
PBP2: 2.857142857142857
DPBP1: 2.845226666666667
DPBP2: 3.716441600000001
IRR1: 0.18032027601113065
IRR2: 0.14962544030288139
```

```
MIRR1: 0.1461202892330591
MIRR2: 0.1372572660486857
PI1: 1.0966011883069553
PI2: 1.0630722713192418
Try to apply Newton method to our equation :
-10000 + 6500/(r + 1) + 3000/(r + 1)**2 + 3000/(r + 1)**3 + 1000/(r + 1)**4 = 0
Found solution: r=0.180320276010917
Try to apply Newton method to our equation :
-10000 + 3500/(r + 1) + 3500/(r + 1)**2 + 3500/(r + 1)**3 + 3500/(r + 1)**4 = 0
Found solution: r=0.14962544030288913
Try to apply Newton method to our equation :
-3000/(r + 1) + 500/(r + 1)**2 + 500/(r + 1)**3 + 2500/(r + 1)**4 = 0
Found solution: r=0.062187539080668035
```

Les graphes résultants sont les suivants y compris celui représentant la différence $NPV2 - NPV1$.

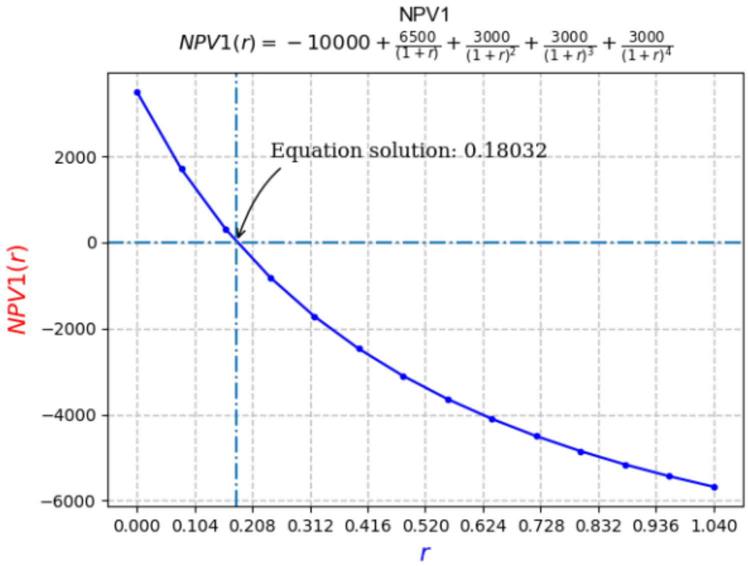


Fig 16. Graphe de NPV1 et repérage du IRR1

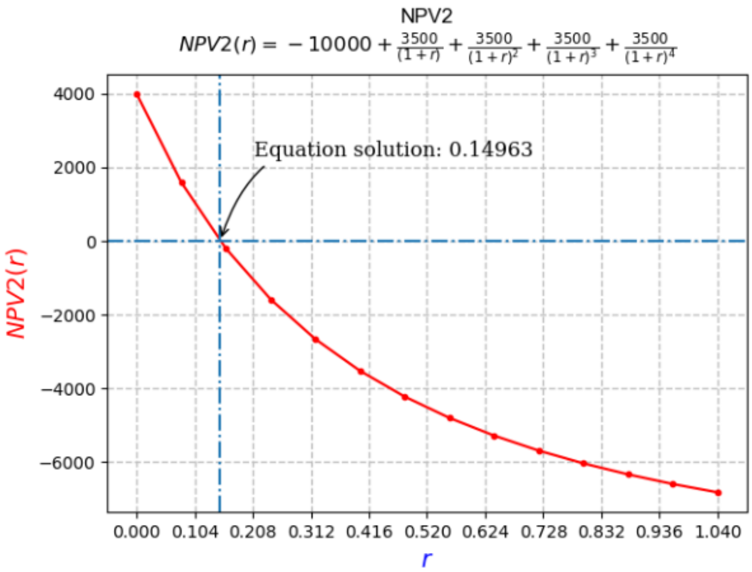


Fig 17. Graphe de NPV2 et repérage du IRR2

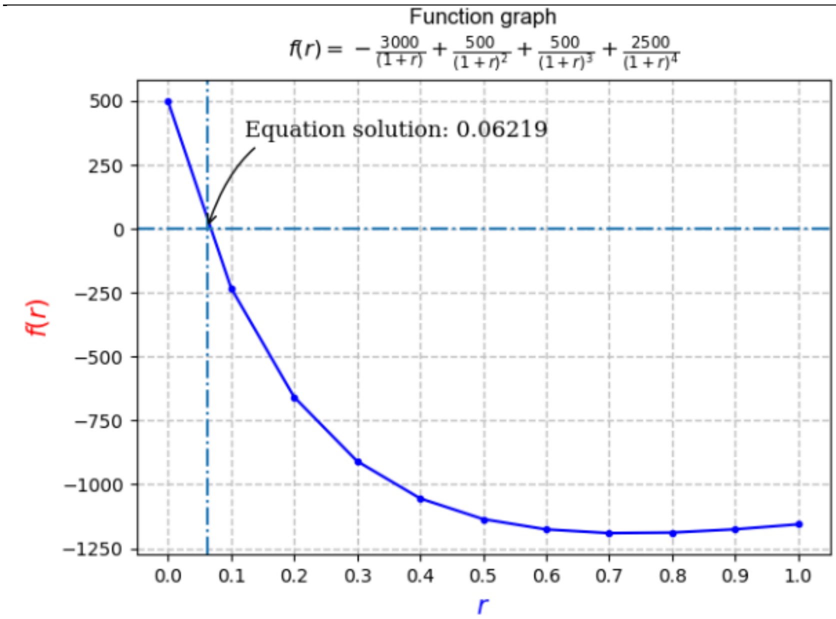


Fig 18. Graphe de $f(r) = NPV2(r) - NPV1(r)$ et repérage de la valeur de $r = 6.219\%$ permettant de comparer les deux projets

➔ En guise d'exemple supplémentaire extrait de la même référence que l'exemple de cette section et dont les réponses se trouvent en annexe, je vous recommande de le faire avant de vérifier les réponses fournies.

EXEMPLE 5.2 UN PROJET POSSEDE UN COUT INITIAL DE 52 125€ ET UN CASH-FLOW NET ATTENDU DE 12 000€ PAR ANNEE DURANT LES 8 ANNEES SUIVANTES AVEC UN TAUX D'ESCOMPTE FIXE DE 12% PAR ANNEE. CALCULER : LA *NPV*, LE *IRR*, LE *PI*, LES *PBP* SIMPLE ET ESCOMPTE.

6. Comment Calculer les annuités pour un cash-flow fixe par période ?

Définition : Une annuité correspond à un paiement (amortissement + intérêts) basé sur un Cash-Flow (positif ou négatif) d'une valeur fixe par période (un mois, un an etc.). Dans le cadre d'un emprunt, ce terme correspond généralement à un paiement dont les remboursements correspondent à une somme fixe par période (année, semestre, trimestre ou mois). Nous abordons en détails cette partie dans la section suivante. Plusieurs types d'annuités existent et dépendent du moment de la survenance du Cash-Flow comme suit :

Annuité ordinaire :	**Le Cash-Flow a eu lieu à la fin de chaque période**
Annuité due :	Le Cash-Flow a eu lieu au début de chaque période
Annuité différée (plus complexe) :	Le 1er Cash-Flow a eu lieu après un certain temps de la 1ère période. D'ailleurs quand vous obtenez des emprunts aux banques, elles vous donnent généralement le choix de fixer la date des prélèvements des échéances (entre le 1er et le 15 du mois).

Formule : Valeur future (FV)

$$FV = CF \sum_{i=i_0}^{N} (1+r)^{N-i}$$

où :

$$i_0 = \begin{cases} 0 \; Si\ le\ cash\ flow\ est\ réalisé\ au\ début\ de\ la\ période \\ 1 \; Si\ le\ cash\ flow\ est\ réalisé\ à\ la\ fin\ de\ la\ période \end{cases}$$

$$CF = Cash\ Flow\ (fixe)$$

$$r = Taux\ d'intérêt\ (fixe)$$

$$N = Nombre\ de\ périodes\ (des\ mois\ généralement)$$

Fig 19. Formule de la FV pour un cash-flow fixe

EXEMPLE 6.1 : $CF = 2000€$ A LA FIN DE CHAQUE PERIODE, $N = 4$ ANS ET $r = 5\%$.

Réponse :

Année (i)	Cash-flow	Valeur future (FV)	Valeur future (FV) CUM
1	2000,00	2315,25	2315,25
2	2000,00	2205,00	4520,25
3	2000,00	2100,00	6620,25
4	2000,00	2000,00	8620,25
Total :	**8000,00**	**8620,25**	
	Donc Gain :	**620,25**	

Utilisation de la fonction VC (Valeur Capitalisée) de MS EXCEL :

$VC(0{,}05; 4; -2000; ; 0)$ =8 620,25€.

Formule : Valeur Actuelle (PV)

$$PV = CF \sum_{i=i_0}^{N} \frac{1}{(1+r)^i}$$

où :

$$i_0 = \begin{cases} 0 \; Si\ le\ cash\ flow\ est\ réalisé\ au\ début\ de\ la\ période \\ 1 \; Si\ le\ cash\ flow\ est\ réalisé\ à\ la\ fin\ de\ la\ période \end{cases}$$

$CF = Cash\ Flow\ (fixe)$

$r = Taux\ d'intérêt\ (fixe)$

$N = Nombre\ de\ périodes\ (des\ mois\ généralement)$

EXEMPLE 6.2 : $CF = 2000€$ A LA FIN DE CHAQUE PERIODE, $N = 4$ ANS ET $r = 5\%$

Année (i)	Cash-flow (CF)	Valeur Actuelle (PV)	Valeur Actuelle (PV) CUM
1	2000,00	1904,76	1904,76
2	2000,00	1814,06	3718,82
3	2000,00	1727,68	5446,50
4	2000,00	1645,40	**7091,90**
Total :	**8000,00**	**7091,90**	
	Donc la diff. =	**-908,10**	

Utilisation de la fonction VA (Valeur Actuelle) de MS EXCEL :

$VA(0{,}05; 4; -2000; ; 0) = 7091{,}90$

Remarque :

- La fonction PV est une fonction décroissante par rapport au taux d'intérêt r, autrement dit, plus le taux d'intérêt est haut la valeur du PV est basse.
- La fonction FV est une fonction croissante par rapport au taux d'intérêt r, autrement dit, plus le taux d'intérêt est haut la valeur du FV est haute.

Si les CF sont étalés sur une très longue période : N= l'infini, alors, la valeur de PV est donnée comme suit :

$$PV = CF/r$$

EXEMPLE 6.3 : SUPPOSONS PAR EXEMPLE QUE VOUS SOUHAITEZ GAGNER 100€ PAR ANNEE POUR LE RESTANT DE VOTRE VIE EN ETANT JEUNE EVIDEMMENT ET QUE VOUS DEPOSEZ UNE SOMME DE 10 000€ AU DEPART, ALORS QUEL EST LE TAUX D'INTERET ANNUEL GARANTISSANT UN TEL GAIN ?

Réponse :

$$\boldsymbol{r = \frac{CF}{PV} = \frac{100}{10\,000} = 1,00\%}$$

Vaut-il vraiment la peine de se priver de 10 000€ pendant toute sa vie pour recevoir 100€ par année !

7. Calcul des amortissements (Annuités ou mensualités) et des intérêts pour un emprunt

Des sites Internet spécialisés et des outils informatiques sont mis à disposition des personnes voulant comprendre les détails relatifs aux emprunts et crédits (comment calculer les mensualités, que représente réellement le taux d'intérêt effectif Global TEG etc.). L'objectif de cette section est de vulgariser et démystifier réellement la méthode de calcul des mensualités et montrer qu'à partir d'un certain niveau, n'importe qui peut réaliser ce travail avec très peu de connaissances dans la matière.

Afin de comprendre le principe de calcul des mensualités, il est recommandé de lire les sections précédentes. Toutefois, si vous voulez aller directement au but sans détour, l'exemple suivant vous fournit la méthode de calcul des mensualités, intérêts et différents capitaux.

EXEMPLE 7.1 : CALCUL DES ANNUITES	$PV = Montant\ du\ prêt :\ \mathbf{100\ 000€}$
	$r = Taux\ intérêt\ annuel :\ \mathbf{6\%}$
	$N = 4\ ans = Nombre\ de\ périodes\ (mois) :\ \mathbf{48\ mois}$
Etapes à suivre : Cas de paiement annuel (rarement pratiqué)	
Etape 1 Calcul du CF = PV (échéancier fixe annuel) en appliquant la formule (détails non fournis, il suffit d'avoir fait le Terminal !) :	$PV = CF\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{(1+r)^i} = CF \times \frac{(1+r)^N-1}{r\times(1+r)^N} \rightarrow CF = PV \times \frac{r}{1-(1+r)^{-N}}$
Ce qui donne $CF = \mathbf{28859,15€\ par\ an}$	

Calculer le tableau d'amortissement pour des paiements annuels basé sur les données du prêt et la valeur du CF comme suit :

Etape 2	Année (i)	Capital à amortir (CA)	Remboursement (R)	Intérêt sur le capital (I=6% X CA)	Remboursement du capital non amorti (RC=R-I)	Capital Restant dû (CA-RC)
	1	100000	28859,15	6000	22859,15	77140,85
	2	77140,85	28859,15	4628,45	24230,70	52910,15
	3	52910,15	28859,15	3174,61	25684,54	27225,61
	4	27225,61	28859,15	1633,54	27225,61	**0,00**

Note : Les règles suivantes s'appliquent au tableau d'amortissement :

1. Le capital à amortir décroît d'une période à l'autre. Il présente le résiduel à amortir comprenant uniquement le principal. Les intérêts ainsi que d'autres frais comme l'assurance par exemple ou les intérêts intercalaires pour un paiement différé par exemple, s'ajoutent aux remboursements périodiques.
2. Les échéances des remboursements périodiques sont fixes (ici : $CF = \mathbf{28859,15€\ par\ an}$ pour des périodes annuelles. Chaque remboursement périodique est la somme des intérêts de la période et la part du principal plus éventuellement d'autres frais comme l'assurance du capital.
3. Les échéances des intérêts périodiques sont décroissantes ($6000 < 4628,45 < 3174,61 < 1633,54$)
4. Comme le capital à amortir, le capital restant dû décroit aussi et se répercute sur la période suivante.

EXEMPLE 7.2 : VOICI LE MEME TABLEAU D'AMORTISSEMENT, MAIS VENTILE SUR DES MOIS, CE QUI SE PRATIQUE DANS LA VIE REELLE :

Etapes à suivre : Cas de paiement mensuel (ce qui se pratique par les organismes prêteurs)

Etape 1

Calcul du CF (échéancier fixe mensuel) en appliquant la formule :

$$CF = PV \times \frac{r}{1-(1+r)^{-N}}$$

Ce qui donne : $CF \; = \; 2348{,}50 \; € \; par \; mois$

Etape 2

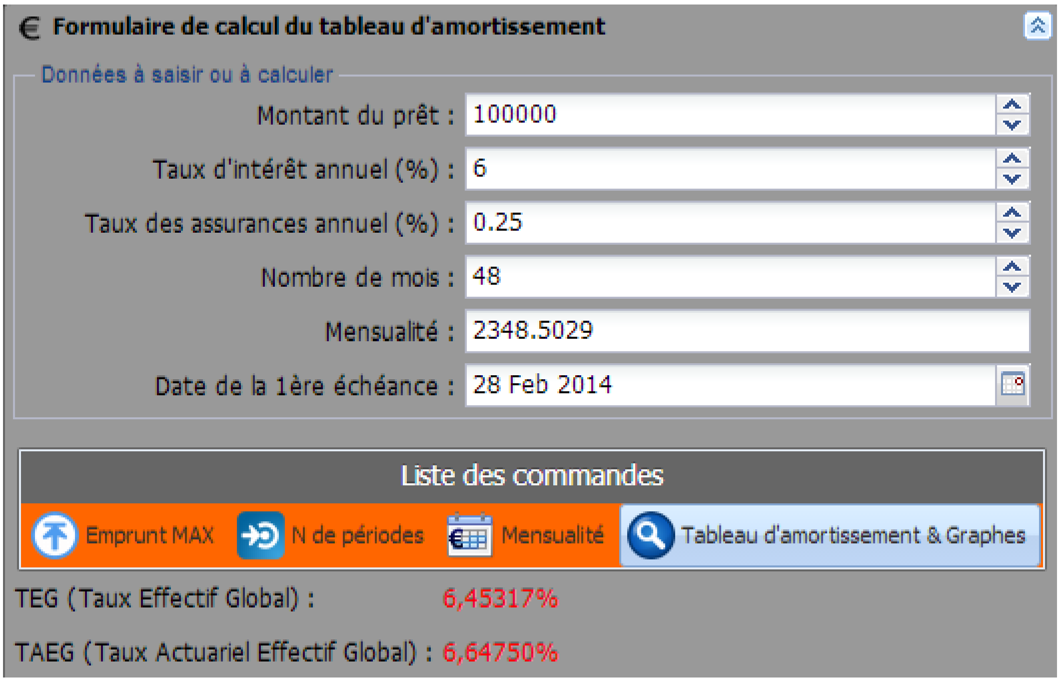
Calculer le tableau d'amortissement pour des paiements mensuels (mensualités) basé sur les données du prêt et la valeur de $R = CF$ comme suit :

Mois (i)	Capital à amortir (CA)	Remboursement (R)	Intérêt sur le capital (I = (6%/12) X CA)	Remboursement du capital non amorti (RC=R-I)	Capital Restant dû (CA-RC)
1	100000	2348,50	500,00	1848,50	98151,50
2	98151,50	2348,50	490,76	1857,75	96293,75
3	96293,75	2348,50	481,47	1867,03	94426,72
4	94426,72	2348,50	472,13	1876,37	92550,35
5	92550,35	2348,50	462,75	1885,75	90664,60
6	90664,60	2348,50	453,32	1895,18	88769,42
7	88769,42	2348,50	443,85	1904,66	86864,76
8	86864,76	2348,50	434,32	1914,18	84950,58
9	84950,58	2348,50	424,75	1923,75	83026,83
10	83026,83	2348,50	415,13	1933,37	81093,46
11	81093,46	2348,50	405,47	1943,04	79150,43
12	79150,43	2348,50	395,75	1952,75	77197,68
13	77197,68	2348,50	385,99	1962,51	75235,16
14	75235,16	2348,50	376,18	1972,33	73262,84
15	73262,84	2348,50	366,31	1982,19	71280,65
16	71280,65	2348,50	356,40	1992,10	69288,55

17	69288,55	2348,50	346,44	2002,06	67286,49
18	67286,49	2348,50	336,43	2012,07	65274,42
19	65274,42	2348,50	326,37	2022,13	63252,29
20	63252,29	2348,50	316,26	2032,24	61220,04
21	61220,04	2348,50	306,10	2042,40	59177,64
22	59177,64	2348,50	295,89	2052,61	57125,03
23	57125,03	2348,50	285,63	2062,88	55062,15
24	55062,15	2348,50	275,31	2073,19	52988,96
25	52988,96	2348,50	264,94	2083,56	50905,40
26	50905,40	2348,50	254,53	2093,98	48811,42
27	48811,42	2348,50	244,06	2104,45	46706,98
28	46706,98	2348,50	233,53	2114,97	44592,01
29	44592,01	2348,50	222,96	2125,54	42466,47
30	42466,47	2348,50	212,33	2136,17	40330,30
31	40330,30	2348,50	201,65	2146,85	38183,44
32	38183,44	2348,50	190,92	2157,59	36025,86
33	36025,86	2348,50	180,13	2168,37	33857,48
34	33857,48	2348,50	169,29	2179,22	31678,27
35	31678,27	2348,50	158,39	2190,11	29488,16
36	29488,16	2348,50	147,44	2201,06	27287,10
37	27287,10	2348,50	136,44	2212,07	25075,03
38	25075,03	2348,50	125,38	2223,13	22851,90
39	22851,90	2348,50	114,26	2234,24	20617,66
40	20617,66	2348,50	103,09	2245,41	18372,24
41	18372,24	2348,50	91,86	2256,64	16115,60

42	16115,60	2348,50	80,58	2267,92	13847,68
43	13847,68	2348,50	69,24	2279,26	11568,41
44	11568,41	2348,50	57,84	2290,66	9277,75
45	9277,75	2348,50	46,39	2302,11	6975,64
46	6975,64	2348,50	34,88	2313,62	4662,01
47	4662,01	2348,50	23,31	2325,19	2336,82
48	2336,82	2348,50	11,68	2336,82	0,00
	Total :	112728,14	12728,14	100000,00	

En se référant au site : https://www.anigraphics.fr/tableau_amortissement/tableau_amortissement.html, vous pouvez utiliser le simulateur de calcul du tableau d'amortissement (plus complet) comme illustré ci-dessous :



En résumé :

Montant du prêt :	100 000,00	**Coût Global du prêt :**	**113 728,14**
Taux d'intérêt annuel :	6,00%	**Coût Total des intérêts :**	**12 728,14**
Taux annuel des assurances :	0,25%	**Coût Total des assurances :**	**1 000,00**
Durée (mois) :	48	**Mensualité assurances comprises :**	**2 369,34**
Mensualité hors assurances :	2 348,50	**TEG :**	**6,45317%**
Date de la 1ère échéance :	28/Feb/2014	**Date de la dernière échéance :**	28/Jan/2018

En guise d'exercice, comparez entre les remboursements annuels et mensuels et dire lequel est avantageux pour l'emprunteur (le client) ?

Remarque :

- Les intérêts diminuent au fur et à mesure qu'on s'approche de l'échéancier final
- Les remboursements du capital augmentent au fur et à mesure qu'on s'approche de l'échéancier final
- Le total de l'intérêt et du remboursement sur le principal est identique à tous les mois (2348,50€)

Le graphe ci-dessous illustre ces remarques :

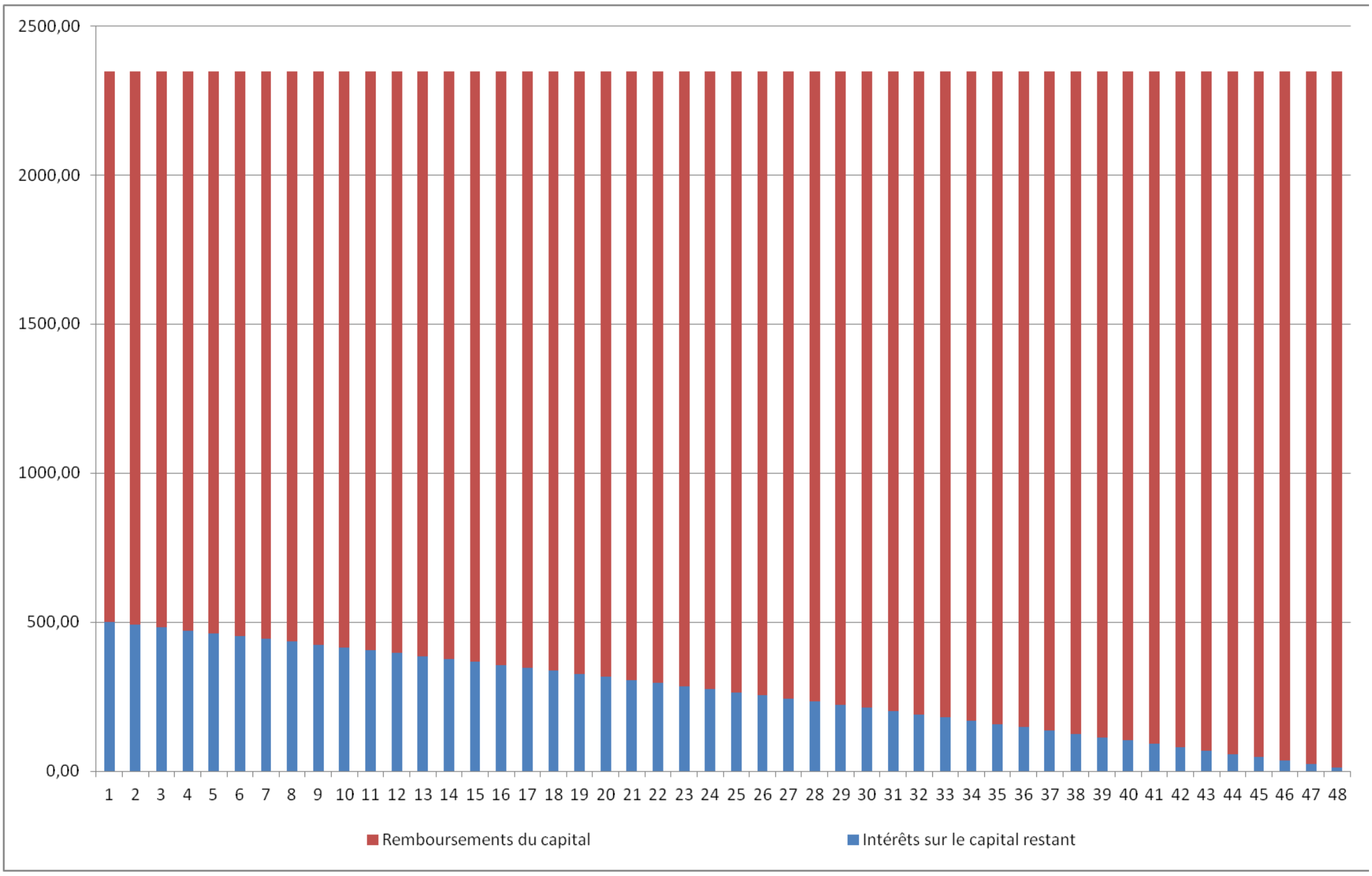


Fig 20. Graphe des remboursements du principal et des intérêts

En guise d'exercice, Etablir le ratio et la différence entre le total des intérêts et le coût total de l'emprunt dans le cas des remboursements annuels et celui des remboursements mensuels et conclure.

Le graphe ci-dessous montre l'évolution du **capital restant dû** qui décroît au fur et à mesure que les échéances avancent :

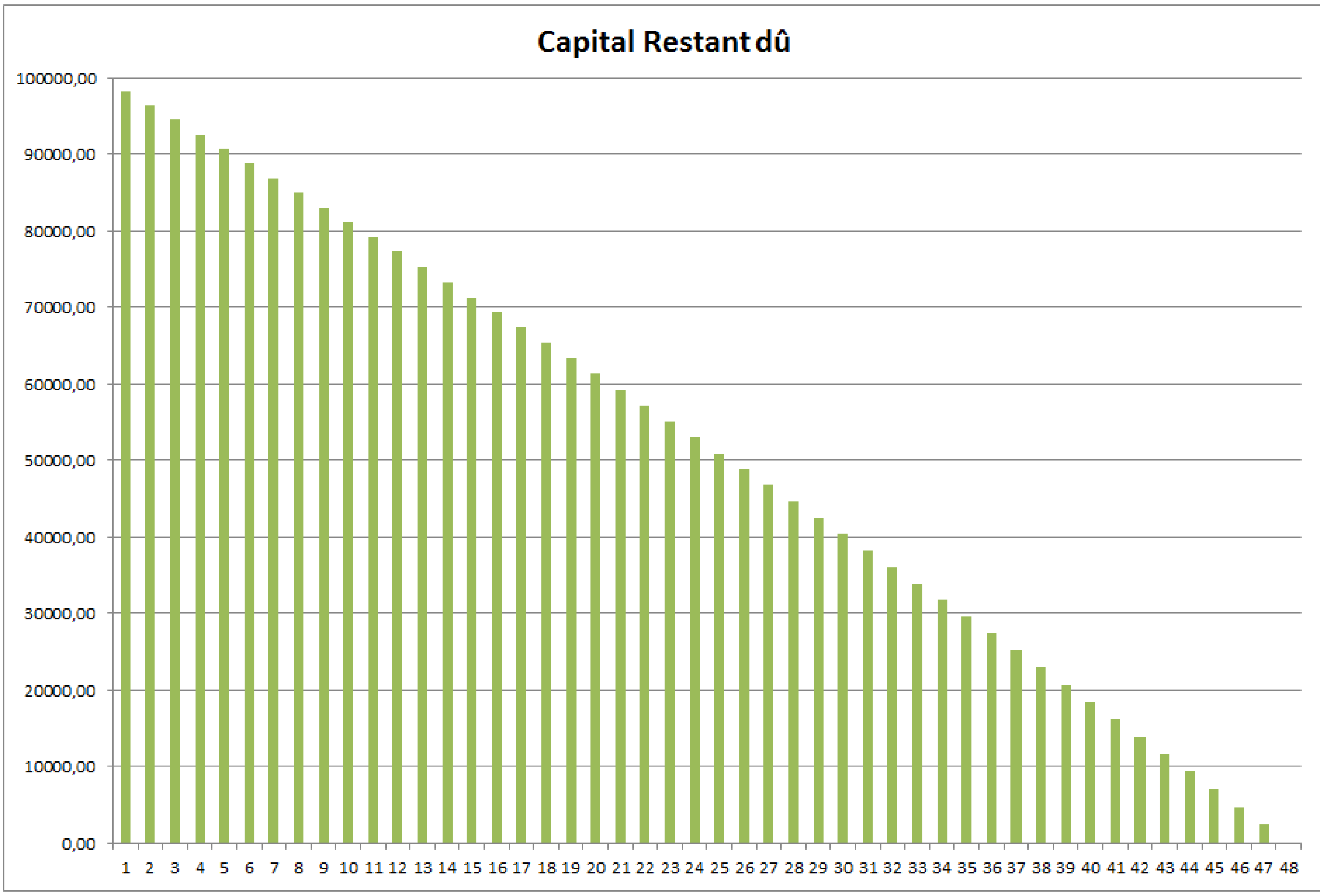


Fig 21. Graphe de l'évolution du restant dû

Pour évaluer la vitesse décroissante à laquelle les remboursements du capital évoluent d'une période (mois) à la suivante, voici le graphe suivant montrant que cette vitesse s'accélère brusquement les dernières périodes en s'approchant de la valeur 0 :

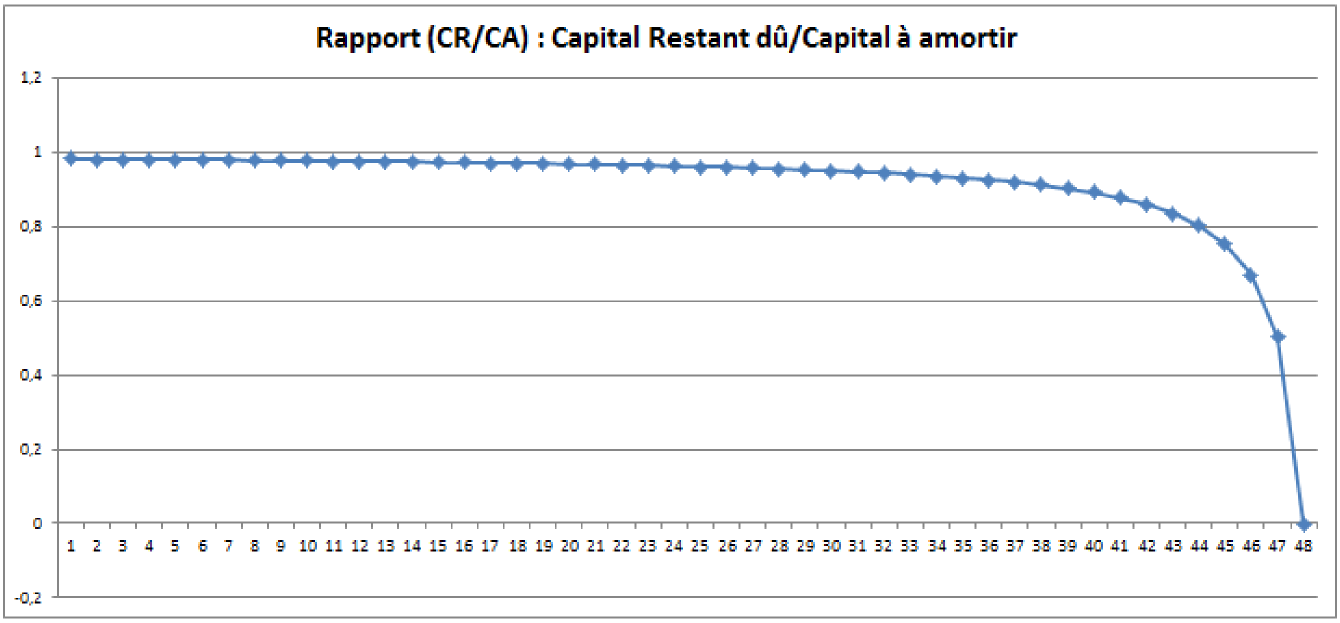


Fig 22. Graphe du ratio CR/CA

Pour évaluer la vitesse décroissante à laquelle les remboursements d'intérêts évoluent d'une période (mois) à la suivante, voici le graphe suivant montrant que cette vitesse décroît plus rapidement les dernières périodes en s'approchant de la valeur 0,5 :

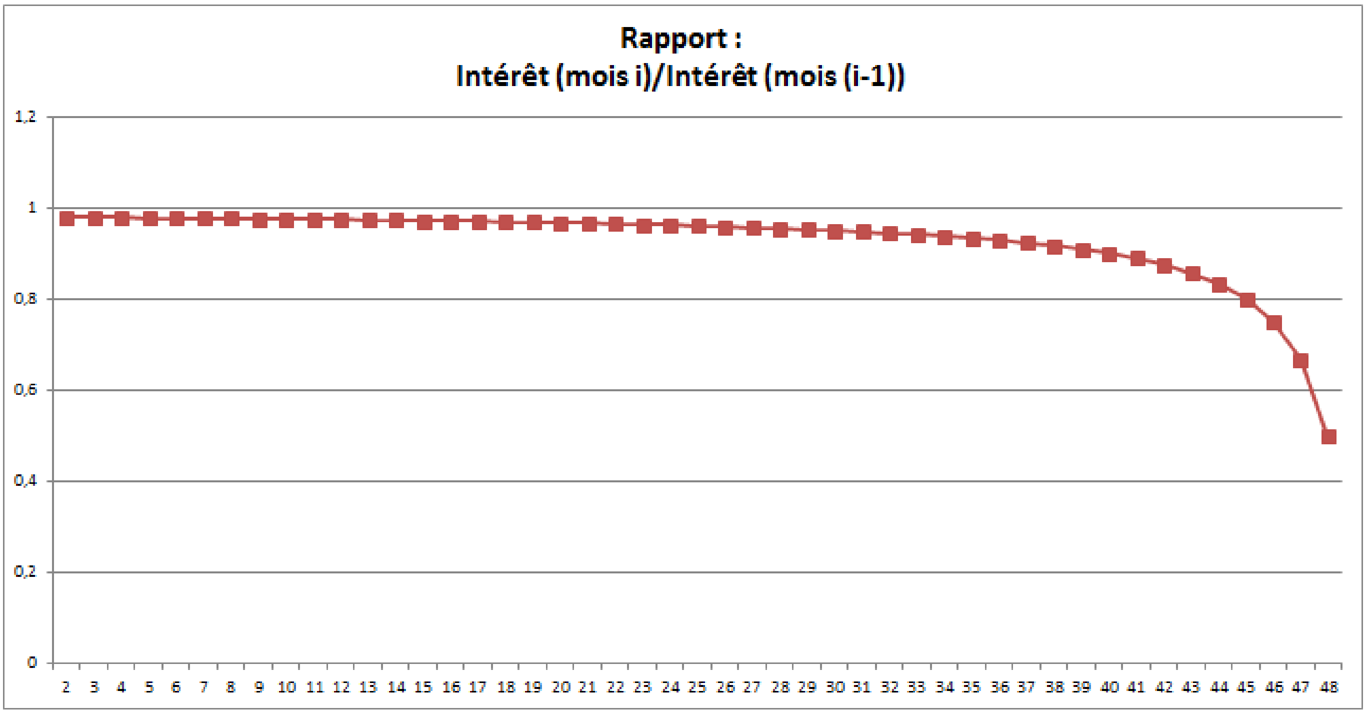


Fig 23. Graphe du ratio I(m)/I(m-1)

En guise d'exercice, démontrer les deux tendances des rations CR/CA et Intérêt (i)/Intérêt (i-1) d'une manière générale vers les valeurs fixes correspondantes.

EXEMPLE 7.3 (A FAIRE) : DRESSER LE TABLEAU D'AMORTISSEMENT MENSUEL D'UN PRET IMMOBILIER POUR L'ACHAT D'UN APPARTEMENT D'UN MONTANT DE 200 000€ A UN TAUX D'INTERET GLOBAL (TEG) DE 4,5% SUR UNE DUREE DE 20 ANS.

Vous pouvez utiliser aussi un fichier MS EXCEL si vous êtes amateur d'EXCEL, fourni par le site : http://www.tableau-amortissement.fr ou celui fourni en ligne sur le site : https://www.anigraphics.fr/tableau_amortissement/tableau_amortissement.html donnant plus d'éléments et fonctionnalités.

EXEMPLE 7.4 (DETERMINER LA DUREE D'UN PRET) : VOUS COMPTER EFFECTUER UNE DEMANDE DE PRET DE 200 000€ POUR L'ACHAT D'UN APPARTEMENT EN SACHANT QUE VOUS VOUS FIXER UN REMBOURSEMENT MENSUEL TOTAL AU DEBUT DE CHAQUE PERIODE DE 1 000€ APPROXIMATIVEMENT AVEC UN TAUX D'INTERET ANNUEL FIXE DE 4,5%.

a) SUR QUELLE DUREE VOUS DEVEZ ECHELONNER VOS REMBOURSEMENTS SOUS CES CONDITIONS ?
b) DRESSER ALORS LE TABLEAU D'AMORTISSEMENT CORRESPONDANT.

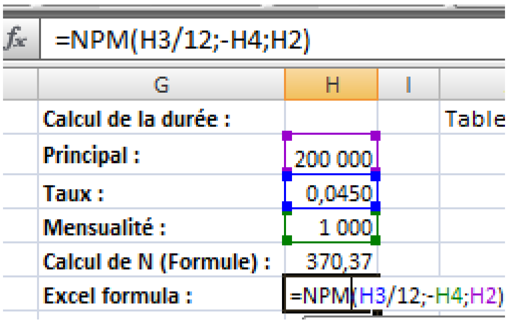
Réponse :

a)

a. **Méthode 1 :** On peut utiliser la formule mathématique indiquée à l'étape 1 pour le calcul des mensualités fixes pour déduite la valeur de la durée N avec *PV*=Somme empruntée=200 000€, *CF*=Mensualité fixe=1 000€ et *r*=Taux d'intérêt annuel=0,045 :

$$N = \frac{Ln(CF) - Ln(CF - r \times PV)}{Ln(1+r)} = \frac{Ln(1\,000) - Ln\left(1\,000 - \frac{0{,}045}{12} \times 200\,000\right)}{Ln(1 + \frac{0{,}045}{12})} = 370{,}37\ mois$$

b. **Méthode 2 :** Utiliser la fonction financière MS EXCEL **NPM**(taux;vpm;va;vc;type)=NPM(4,5%/12 ;1000 ;200000 ;;1)=-370,37 mois l'équivalent de 30 ans et



11 mois approximativement.

b) **Tableau d'amortissement pour N = 360 mois = 12 mois x 30 ans :**

a. **Recalculer la mensualité fixe correspondante :** Utiliser la formule :

$$CF\ (Mensulaité) = PV \times \frac{r}{1-(1+r)^{-N}} = 200\,000 \frac{4{,}5\%/12}{1-(1+\frac{4{,}5\%}{12})^{-360}} = 1013{,}37€$$

Ou utiliser la formule MS EXCEL : **VPM** (0,045/12;12*30;-200000)= 1013,37€.

b. Tableau d'amortissement : (non affiché au complet)

Mois (i)	Capital à amortir (CA)	Remboursement (R)	Intérêt sur le capital (I = (4,5%/12) X CA)	Remboursement du capital non amorti (RC=R-I)	Capital Restant dû (CA-RC)
1	200 000	1013,37	750,00	263,37	199736,63
2	199736,63	1013,37	749,01	264,36	199472,27
3	199472,27	1013,37	748,02	265,35	199206,92
4	199206,92	1013,37	747,03	266,34	198940,58
5	198940,58	1013,37	746,03	267,34	198673,23
6	198673,23	1013,37	745,02	268,35	198404,89
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
356	5010,35	1013,37	18,79	994,58	4015,76
357	4015,76	1013,37	15,06	998,31	3017,45
358	3017,45	1013,37	11,32	1002,06	2015,40
359	2015,40	1013,37	7,56	1005,81	1009,58
360	1009,58	1013,37	3,79	1009,58	0,00
	Total :	**364 813,42**	**164 813,42**	**200 000,00**	

En résumé :

Coût total du prêt : **364 813,42€**

Dont total des intérêts : **164 813,42€**

Capital initial à rembourser : **200 000€**

8. Annexe

8.1 Annexe 1 : Réponses

Réponses de l'exemple 1.3 :

Afin de convertir les montants des assurances 30€ et 45€ des offres A et B respectivement en % annuel, il suffit d'effectuer ces deux opérations simples :

- **Offre A :** $Taux\ d'assurance = 12 * (30/150000) * 100 = 0{,}24\%$
- **Offre B :** $Taux\ d'assurance = 12 * (45/150000) * 100 = 0{,}36\%$

Pour calculer le **TEG** associé à chaque offre, utiliser par exemple le simulateur disponible sur le site https://www.anigraphics.fr/tableau_amortissement/tableau_amortissement.html pour obtenir :

Offre A

Offre B

Synthèse :				Synthèse :			
Montant du prêt :	150 000,00	Coût Global du prêt :	**225 836,01**	Montant du prêt :	150 000,00	Coût Global du prêt :	**217 140,66**
Taux d'intérêt annuel :	4,80%	Coût Total des intérêts :	**69 716,01**	Taux d'intérêt annuel :	4,68%	Coût Total des intérêts :	**59 040,66**
Taux annuel des assurances :	0,24%	Coût Total des assurances :	**6 120,00**	Taux annuel des assurances :	0,36%	Coût Total des assurances :	**8 100,00**
Durée (mois) :	204	Mensualité assurances comprises :	**1 107,04**	Durée (mois) :	180	Mensualité assurances comprises :	**1 206,34**
Mensualité hors assurances :	1 077,04	TEG :	**5,17498%**	Mensualité hors assurances :	1 161,34	TEG :	**5,25660%**
Date de la 1ère échéance :	01/Apr/2014	Date de la dernière échéance :	01/Mar/2031	Date de la 1ère échéance :	01/Apr/2014	Date de la dernière échéance :	01/Mar/2029

En comparant tout simplement les **TEG** des **offres A et B** ($5{,}17498\% < 5{,}25660\%$), on peut conclure que **l'offre A est plus intéressante que l'offre B**. Cette conclusion est confortée par la comparaison des mensualités assurance comprise ($1\,107{,}04 < 1\,206{,}34$). Notons que le coût global de l'offre A est supérieur à celui de l'offre B ($225\,836 > 217\,140$), ceci est dû au fait que la durée de l'offre A est supérieure à celle de B de 2 ans bien que la mensualité de A soit plus intéressante que celle de B. En résumé, quand il s'agit de comparer des offres de prêt bancaires, ne se fiez pas au taux d'intérêt, mais plutôt au TEG qui encapsule tous taux et frais visibles ou cachés.

Réponses de l'exemple 5.2 :

Année (i)	CF_i	CF Cumulatif à 12%	Discounted CF Cumulatif à 12%	COF ou CIF
0	-52125	-52125	-52125,00	52125,00
1	12000	-40125	-41410,71	10714,29
2	12000	-28125	-31844,39	9566,33
3	12000	-16125	-23303,02	8541,36
4	12000	-4125	-15676,81	7626,22
5	12000	7875	-8867,69	6809,12
6	12000	19875	-2788,11	6079,57
7	12000	31875	2640,08	5428,19
8	12000	43875	7486,68	4846,60
NPV	7486,68	Ou utiliser la fonction EXCEL : **VAN**		
PBP simple	4,34			
PBP escompté	6,51			
IRR	16%			
PI	1,14			

Repérage graphique du IRR (vous pouvez utiliser d'autres méthodes exposées dans cet article) :

$$NPV = CF_0 + \sum_{i=1}^{i=N} \frac{CF_i}{(1+r)^i} = -52125 + \sum_{i=1}^{i=8} \frac{12000}{(1+0{,}12)^i}$$

r = 15,90%	166,53
r = 16,00%	-1,91

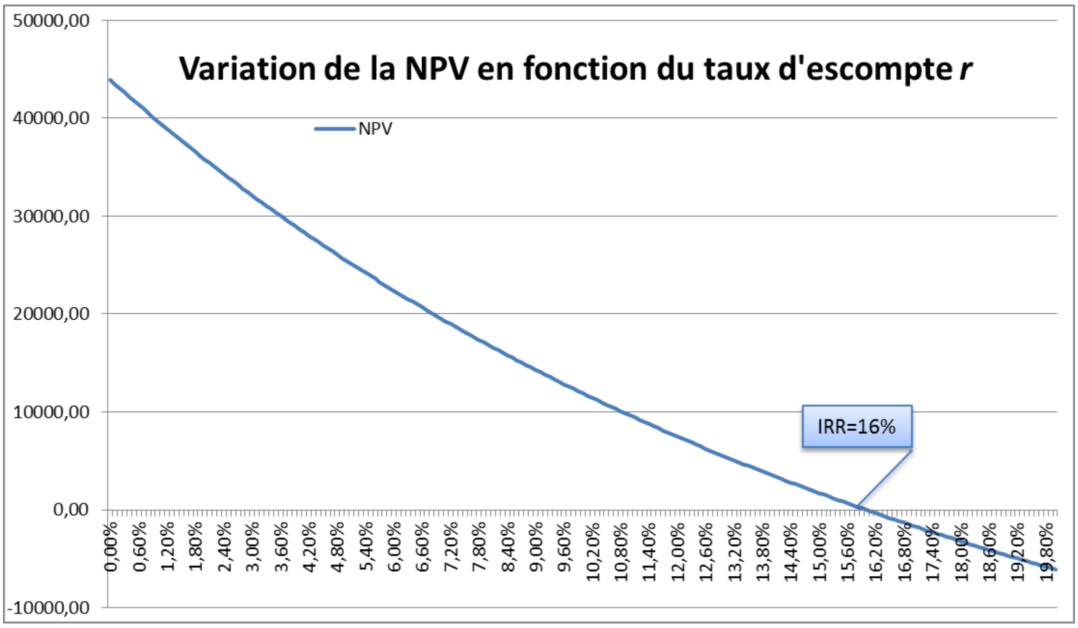


Fig 24. Variation de la NPV en fonction du taux d'escompte

Disposant du code source PTHON ci-dessous, vous n'avez qu'à faire appel aux fonctions appropriées pour confirmer les calculs manuels réalisés ici y compris le graphe de la NPV en tant que fonction du taux d'intérêt r.

Le code source en annexe2 comprend la réponse à notre exemple que voici :

Code PYTHON 14. Code source réponses à l'Exemple 5.2

```
def example_5_2():
    cf = [-52125, 12000, 12000, 12000, 12000, 12000, 12000, 12000, 12000]
    rate = 12/100
    npv = compute_npv(rate, cf)
    pbp = payback_period(cf)
    dpbp = discounted_payback_period(rate, cf)
    irr = compute_irr(cf)
    mirr = compute_mirr(cf, rate)
    pi = compute_pi(rate, cf)
    print('NPV: ' + str(npv))
    print('PBP: ' + str(pbp))
    print('DPBP: ' + str(dpbp))
    print('IRR: ' + str(irr))
    print('MIRR: ' + str(mirr))
    print('PI: ' + str(pi))

    # plot NPV as functions of discount rate r
    def npv(r):
        return np.npv(r, cf)

    r = sympy.Symbol("r")
    # NPV graph
    expr = ''
    for i in range(0, len(cf), 1):
        expr += r'\frac{' + str(cf[i]) + r'}{(1+r)^' + str(i) + '}' if i == 0 \
            else r' + \frac{' + str(cf[i]) + r'}{(1+r)^' + str(i) + '}'
    expr = '$' + str(expr) + '$'
    fig, ax = plot_2d_graph([r for r in np.arange(0.0, .60, 0.05)], [npv(r) for r in np.arange(0.0, .60,
0.05)],
                            {'title': r'$NPV=$' + str(expr), 'fontsize': '10', 'fontname': 'arial',
                             'color': '#000000', 'x_label': '$r$', 'y_label': '$NPV1(r)$', 'style': '.-
b', 'x_step': None})
    try:
        print('Try to apply Newton method to our equation :\n' + str(npv(r)) + ' = 0')
        sol = solve_by_newton_algo(npv, 0.3)
        print('Found solution: r=' + str(sol))
        # add annotation to found solution
        add_annotation_to_graph(fig, ax, [sol, 0], 'Equation solution: ' + str(round(sol, 5)),
                                xytext=(sol + 20, 0 + 50),
                                arrowprops=dict(arrowstyle="->", connectionstyle="arc3, rad=.5"))
    except:
        print('No solution found for NPV1!')
    finally:
        fig.show()
```

Code PYTHON 15. Sortie du code source :

```
NPV: 7486.677202063038
PBP: 4.34375
DPBP: 6.513635635036165
IRR: 0.15998863552755993
MIRR: 0.13894743746001814
PI: 1.143629298840538
Try to apply Newton method to our equation :
-52125 + 12000/(r + 1) + 12000/(r + 1)**2 + 12000/(r + 1)**3 + 12000/(r + 1)**4 + 12000/(r + 1)**5 + 12000/(r +
1)**6 + 12000/(r + 1)**7 + 12000/(r + 1)**8 = 0
Found solution: r=0.1599886355275583
```

Ci-dessous le graphe de la NPV ainsi qu'une indication à la valeur du IRR :

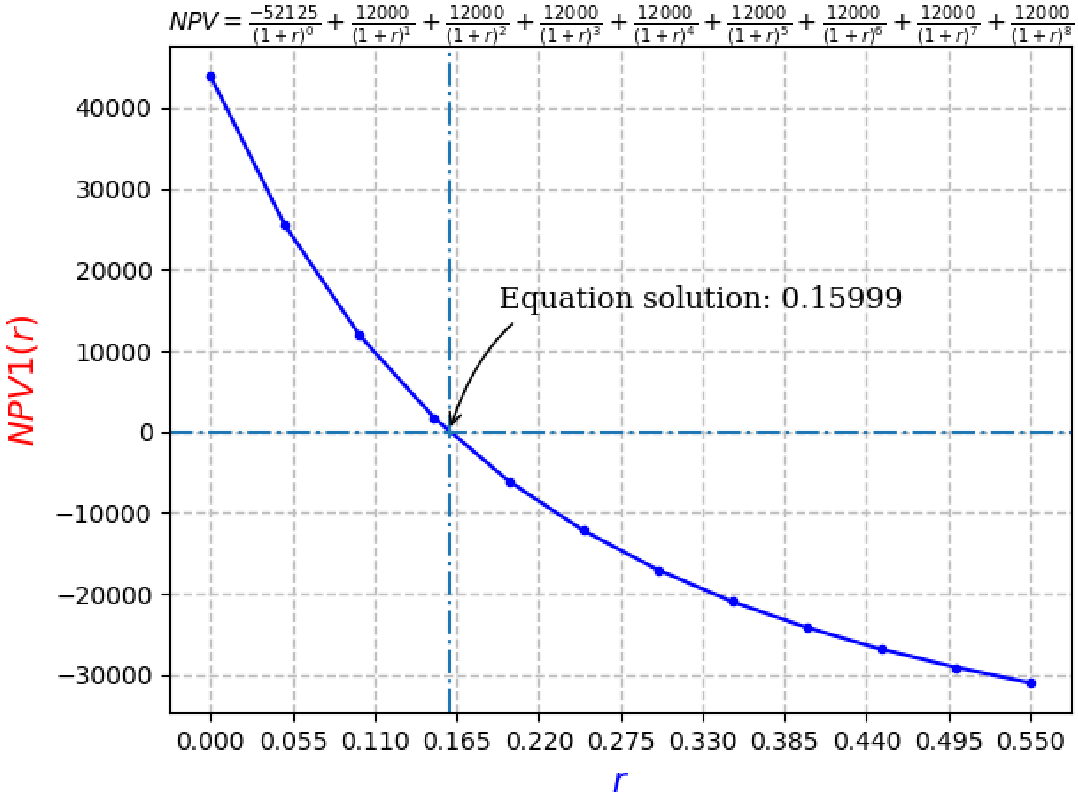


Fig 25. Graphe de la NPV et repérage graphique de la valeur du IRR de l'exemple 5.2

8.2 Annexe 2 : Code source PYTHON

```
"""
Author : Abdel YEZZA (Ph.D)
This code is completely free and can be modified without any restriction
Examples given below are presented and explained in my article : QUELQUES NOTIONS DE BASE DE LA FINANCE DES PROJETS
available at this web site : http://abdel.yezza.free.fr/
"""

import sys
from scipy import optimize
import sympy
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt


def compute_npv(rate, cash_flows=list()):
    """
    :param rate: discount rate (between 0 and 1)
    :param cash_flows: cash flows data list
    :return: NPV value
    """
    if not (0 <= rate <= 1):
        return 0

    return np.npv(rate, cash_flows)


def compute_irr(cash_flows=list()):
    """
    :param cash_flows: cash flows data list
    :return: irr value of cash_flows data list
    """
    return np.irr(cash_flows)


def compute_mirr(cash_flows=list(), rate=0):
    """
    :param cash_flows: cash flows data list
    :param rate: discount rate value
    :return: mirr value of cash_flows data list
    """
    return np.mirr(cash_flows, rate, rate)


def payback_period(cash_flows=list()):
    # convert list to pandas DataFrame object
    cf = pd.DataFrame(cash_flows, columns=['CashFlows'])
    cf.index.name = 'Period'

    # add cum cash flow column as a cum sum
    cf['CumulativeCashFlows'] = np.cumsum(cf['CashFlows'])
    last_period = cf[cf.CumulativeCashFlows < 0].index.values.max()
    ratio = abs(cf.CumulativeCashFlows[last_period]) / \
            (abs(cf.CumulativeCashFlows[last_period]) + abs(cf.CumulativeCashFlows[last_period + 1]))
    pbp = last_period + ratio
    return pbp


def discounted_payback_period(rate, cash_flows=list()):
    # convert list to pandas DataFrame object
    cf = pd.DataFrame(cash_flows, columns=['CashFlows'])
    cf.index.name = 'Period'
    # compute DiscountedCashFlows column values
    cf['DiscountedCashFlows'] = np.pv(rate=rate, pmt=0, nper=cf.index, fv=-cf['CashFlows'])
    # add cum discounted cash flow column as a cum sum
    cf['CumulativeDiscountedCashFlows'] = np.cumsum(cf['DiscountedCashFlows'])
    last_period = cf[cf.CumulativeDiscountedCashFlows < 0].index.values.max()
    ratio = abs(cf.CumulativeDiscountedCashFlows[last_period])/\
            (abs(cf.CumulativeDiscountedCashFlows[last_period])+cf.CumulativeDiscountedCashFlows[last_period + 1])
    discounted_pbp = last_period + ratio
    return discounted_pbp


def compute_cum_cf(rate, cash_flows=list()):
    """
    Compute cumulative cash flow data from cash flow
```

```
    :param rate
    :param cash_flows:
    :return: cumulative rated cash flow
    """
    rated_cf, cum_cf = [], []
    for cf in cash_flows:
        cum_cf.append(cf)
        rated_cf.append(np.npv(rate, cum_cf))
    return rated_cf

def plot_2d_graph(x_data=list(), y_data=list(), plot_params = None):
    # set default used plot parameters if passed in plot_params
    default_plot_params = {'title': '', 'fontsize': '12', 'fontname': 'arial', 'color': '#000000', 'x_label':
'variable',
                           'y_label': 'Value', 'style': '+-b', 'x_step': (max(x_data)-min(x_data))/10}
    for key in default_plot_params.keys():
        if key in plot_params.keys():
            if not(plot_params[key] is None):
                default_plot_params[key] = plot_params[key]

    # define plot figure instance and axes instances
    fig, ax = plt.subplots(1, 1, sharex=False, sharey=False,
                           subplot_kw={'facecolor': 'white'},
                            gridspec_kw={})
    plt.grid(True, which='major', axis='both', lw=1, ls='--', c='.75')
    ax.plot(x_data, y_data, default_plot_params['style'])
    # set ticks list as 10 major ticks by default
    x_ticks = np.arange(x_data[0], x_data[len(x_data)-1] + default_plot_params['x_step'],
default_plot_params['x_step'])
    ax.set_xticks(x_ticks)
    # set labels
    ax.set_xlabel(default_plot_params['x_label'], labelpad=5, fontsize=14, fontname='serif', color="blue")
    ax.set_ylabel(default_plot_params['y_label'], labelpad=5, fontsize=14, fontname='serif', color="red")
    # set graph title
    ax.set_title(default_plot_params['title'], fontsize=default_plot_params['fontsize'],
                 fontname=default_plot_params['fontname'], color=default_plot_params['color'])

    return [fig, ax]

def add_annotation_to_graph(fig=None, ax=None, p=None, text='', xytext=None,
                            arrowprops=None):
    if (ax is None) or (p is None):
        return
    if xytext is None:
        xytext=(p[0]-20, p[1]-20)
    if arrowprops is None:
        arrowprops=dict(arrowstyle="->", connectionstyle="arc3, rad=.5")

    # add horizontal/vertical lines at (p.x, p.y) point
    if not (p[1] is None):
        ax.axhline(p[1], ls='-.')
    if not (p[0] is None):
        ax.axvline(p[0], ls='-.')
    # add annotation to the point p
    ax.annotate(text, fontsize=12, family="serif", xy=p, xycoords="data", textcoords="offset points",
                xytext=xytext, arrowprops=arrowprops)

def solve_by_newton_algo(f, x0):
    # solve equation f(x)=0 with respect to x variable and x0 as initial guess value
    return optimize.newton(f, x0)

def compute_pi(rate, cash_flows=list()):
    # convert list to pandas DataFrame object
    cf = pd.DataFrame(cash_flows, columns=['CashFlows'])

    # add DiscountedCashFlows column values as present values (pv) based on future values (fv)
    cf['DiscountedCashFlows'] = np.pv(rate=rate, pmt=0, nper=cf.index, fv=-cf['CashFlows'])

    # add cum discounted cash flow column as a cum sum
    pi_cof_sum = np.cumsum(cf[cf['DiscountedCashFlows'] < 0])
    pi_cif_sum = np.cumsum(cf[cf['DiscountedCashFlows'] >= 0])
    # get the sum of CIF and COF (the last element of cumulative DiscountedCashFlows value)
    sum_cif = pi_cif_sum.tail(1).DiscountedCashFlows.values[0]  # last sum
    sum_cof = pi_cof_sum.tail(1).DiscountedCashFlows.values[0]  # last sum
    if sum_cof != 0:
        return abs(sum_cif)/abs(sum_cof)
```

```
def example_1_1_1_1():
    # define our function
    def f(x):
        return -10 * x ** 9 - 2 * x ** 8 + x ** 7 + 2 * x ** 6 + 5 * x ** 5 + 6 * x ** 4 + \
               7 * x ** 3 + 8 * x ** 2 + 8 * x + 9

    # plot corresponding graph
    x = sympy.Symbol("x")
    expr = r'$f(x) = -10x^{9} - 2x^{8} + x^{7} + 2x^{6} + 5x ^{5} + 6x^{4} + 7x^{3} + 8x^{2} + 8x + 9$'
    print(expr)
    fig, ax = plot_2d_graph([x for x in np.arange(1.2, 1.3, .01)], [f(x) for x in np.arange(1.2, 1.3, .01)],
                            {'title': 'Function graph\n' + str(expr), 'fontsize': '12', 'fontname': 'arial',
                                    'color': '#000000', 'x_label': '$x$', 'y_label': '$f(x)$', 'style': '+-b',
'x_step': None})

    print('Apply Newton method to our equation :\n' + str(f(x)) + ' = 0')
    sol = solve_by_newton_algo(f, 5)
    print('Found solution: x=' + str(sol))
    # add annotation to found solution
    add_annotation_to_graph(fig, ax, [sol, 0], 'Equation solution: ' + str(round(sol, 5)),
                            xytext=(sol + 20, 0 + 50),
                            arrowprops=dict(arrowstyle="->", connectionstyle="arc3, rad=.5"))
    fig.show()


def example_1_1():
    rate = 0.05  # rate = 5%
    cash_flows = [-100000, -20000, 10000, 20000, 50000, 60000, 70000, 80000, 80000, 90000]
    print('Exemple 1_1: Calcul de la NPV')
    print('Discount rate: ' + str(rate))
    print('cash flows data: ' + str(cash_flows) )
    print('NPV = ' + str(round(compute_npv(rate, cash_flows), 2)))


def example_1_1_1():
    cash_flows = [-100000, -20000, 10000, 20000, 50000, 60000, 70000, 80000, 80000, 90000]
    rate = 0.05  # 5% rate
    cum_disc_cash_flows = compute_cum_cf(rate, cash_flows)
    print('Exemple 1_1_1: Calcul du IRR')
    print('cash flows data: ' + str(cash_flows))
    print('IRR = ' + str(round(compute_irr(cash_flows), 5)))

    print('Exemple 1_1_1: Calcul du MIRR')
    print('cash flows data: ' + str(cash_flows))
    print('rate value: ' + str(rate))
    print('MIRR = ' + str(round(compute_mirr(cash_flows, rate), 5)))

    print('Get Payback period (PBP) value')
    pbp = payback_period(cash_flows)
    print('PBP = ' + str(pbp))

    print('Get discounted Payback period (DPBP) value')
    disc_pbp = discounted_payback_period(rate, cash_flows)
    print('DPBP = ' + str(disc_pbp))

    print('Drawing the cumulative discounted cash flows data graph...')
    fig, ax = plot_2d_graph([i for i in range(0, 10, 1)], cum_disc_cash_flows,
                            {'title': 'Cumulative discounted cash flow', 'fontsize': '12', 'fontname': 'arial',
                                    'color': '#000000', 'x_label': 'Periods', 'y_label': 'Discounted cash flow',
                                    'style': 'o-r', 'x_step': None})
    add_annotation_to_graph(fig, ax, [disc_pbp, 0], "DPBP point: " + str(round(disc_pbp, 5)),
                            xytext=(disc_pbp - 20, 0 - 50),
                            arrowprops=dict(arrowstyle="->", connectionstyle="arc3, rad=.5"))
    fig.show()

    print('Drawing the cumulative cash flows data graph...')
    fig, ax = plot_2d_graph([i for i in range(0, 10, 1)], np.cumsum(cash_flows),
                            {'title': 'Cumulative cash flow', 'fontsize': '12', 'fontname': 'arial',
                                    'color': '#000000', 'x_label': 'Periods', 'y_label': 'Cash flow',
                                    'style': 'o-r', 'x_step': None})
    add_annotation_to_graph(fig, ax, [pbp, 0], "PBP point: " + str(round(pbp, 5)),
                            xytext=(pbp - 20, 0 - 50),
                            arrowprops=dict(arrowstyle="->", connectionstyle="arc3, rad=.5")
                            )
    fig.show()

def example_1_4():
    # compute irr
```

```
    irr = compute_irr([-400000, 1020000, -630000])
    print('irr=' + str(irr))

def example_1_5():
    pi = compute_pi(0.05, [-100000, -20000, 10000, 20000, 50000, -60000, 70000, -80000, 80000, 90000])
    print('Profitability Index = ' + str(pi))


def example_5_1():
    cf1 = [-10000, 6500, 3000, 3000, 1000]
    rate1 = 12/100
    cf2 = [-10000, 3500, 3500, 3500, 3500]
    rate2 = 12/100
    npv_1 = compute_npv(rate1, cf1)
    npv_2 = compute_npv(rate2, cf2)
    pbp_1 = payback_period(cf1)
    pbp_2 = payback_period(cf2)
    dpbp_1 = discounted_payback_period(rate1, cf1)
    dpbp_2 = discounted_payback_period(rate2, cf2)
    irr_1 = compute_irr(cf1)
    irr_2 = compute_irr(cf2)
    mirr_1 = compute_mirr(cf1, rate1)
    mirr_2 = compute_mirr(cf2, rate2)
    pi_1 = compute_pi(rate1, cf1)
    pi_2 = compute_pi(rate2, cf2)
    print('NPV1: ' + str(npv_1))
    print('NPV2: ' + str(npv_2))
    print('PBP1: ' + str(pbp_1))
    print('PBP2: ' + str(pbp_2))
    print('DPBP1: ' + str(dpbp_1))
    print('DPBP2: ' + str(dpbp_2))
    print('IRR1: ' + str(irr_1))
    print('IRR2: ' + str(irr_2))
    print('MIRR1: ' + str(mirr_1))
    print('MIRR2: ' + str(mirr_2))
    print('PI1: ' + str(pi_1))
    print('PI2: ' + str(pi_2))

    # plot NPV1 and NPV2 as functions of discount rate r
    def npv1(r):
        return -10000 + 6500/(1 + r) + 3000/((1 + r))**2 + 3000/((1 + r))**3 + 1000/((1 + r))**4

    r = sympy.Symbol("r")
    # NPV1 graph
    expr = r'$NPV1(r) = -10000 +\frac{6500}{(1+r)} + \frac{3000}{(1+r)^2} + \frac{3000}{(1+r)^3} +
\frac{3000}{(1+r)^4}$'
    fig, ax = plot_2d_graph([r for r in np.arange(0.0, 1.1, 0.08)], [npv1(r) for r in np.arange(0.0, 1.1, 0.08)],
                            {'title': 'NPV1\n' + str(expr), 'fontsize': '12', 'fontname': 'arial',
                             'color': '#000000', 'x_label': '$r$', 'y_label': '$NPV1(r)$', 'style': '.-b', 'x_step':
None})
    try:
        print('Try to apply Newton method to our equation :\n' + str(npv1(r)) + ' = 0')
        sol = solve_by_newton_algo(npv1, 0.2)
        print('Found solution: r=' + str(sol))
        # add annotation to found solution
        add_annotation_to_graph(fig, ax, [sol, 0], 'Equation solution: ' + str(round(sol, 5)),
                                xytext=(sol + 20, 0 + 50),
                                arrowprops=dict(arrowstyle="->", connectionstyle="arc3, rad=.5"))
    except:
        print('No solution found for NPV1!')
    finally:
        fig.show()

    # NPV2 graph
    def npv2(r):
        return -10000 + 3500 / (1 + r) + 3500 / ((1 + r)) ** 2 + 3500 / ((1 + r)) ** 3 + 3500 / ((1 + r)) ** 4

    expr = r'$NPV2(r) = -10000 +\frac{3500}{(1+r)} + \frac{3500}{(1+r)^2} + \frac{3500}{(1+r)^3} +
\frac{3500}{(1+r)^4}$'
    fig, ax = plot_2d_graph([r for r in np.arange(0.0, 1.1, 0.08)], [npv2(r) for r in np.arange(0.0, 1.1, 0.08)],
                            {'title': 'NPV2\n' + str(expr), 'fontsize': '12', 'fontname': 'arial',
                             'color': '#000000', 'x_label': '$r$', 'y_label': '$NPV2(r)$', 'style': '.-r', 'x_step':
None})
    try:
        print('Try to apply Newton method to our equation :\n' + str(npv2(r)) + ' = 0')
        sol = solve_by_newton_algo(npv2, 0.2)
        print('Found solution: r=' + str(sol))
        # add annotation to found solution
```

```python
        add_annotation_to_graph(fig, ax, [sol, 0], 'Equation solution: ' + str(round(sol, 5)),
                                xytext=(sol + 20, 0 + 50),
                                arrowprops=dict(arrowstyle="->", connectionstyle="arc3, rad=.5"))
    except:
        print('No solution found for NPV2!')
    finally:
        fig.show()

    # plot graph of NPV=NPV2-NPV1=-3000/((1+r))+500/ 〖(1+r)〗^2 +500/ 〖(1+r)〗^3 +500/ 〖(1+r)〗^4
    def f(r):
        return npv2(r) - npv1(r)  # -3000/(1+r) + 500/((1+r)**2) + 500/((1+r)**3) + 2500/((1+r)**4)

    # r = sympy.Symbol("r")
    expr = r'$f(r) = -\frac{3000}{(1+r)} + \frac{500}{(1+r)^2} + \frac{500}{(1+r)^3} + \frac{2500}{(1+r)^4}$'
    print(expr)
    fig, ax = plot_2d_graph([r for r in np.arange(0.0, 1.1, 0.1)], [f(r) for r in np.arange(0.0, 1.1, 0.1)],
                            {'title': 'Function graph\n' + str(expr), 'fontsize': '12', 'fontname': 'arial',
                             'color': '#000000', 'x_label': '$r$', 'y_label': '$f(r)$', 'style': '.-b'})
    try:
        print('Try to apply Newton method to our equation :\n' + str(f(r)) + ' = 0')
        sol = solve_by_newton_algo(f, 0.05)
        print('Found solution: r=' + str(sol))
        # add annotation to found solution
        add_annotation_to_graph(fig, ax, [sol, 0], 'Equation solution: ' + str(round(sol, 5)),
                                xytext=(sol + 20, 0 + 50),
                                arrowprops=dict(arrowstyle="->", connectionstyle="arc3, rad=.5"))
    except:
        print('No solution found !')
    finally:
        fig.show()


def example_5_2():
    cf = [-52125, 12000, 12000, 12000, 12000, 12000, 12000, 12000, 12000]
    rate = 12/100
    npv = compute_npv(rate, cf)
    pbp = payback_period(cf)
    dpbp = discounted_payback_period(rate, cf)
    irr = compute_irr(cf)
    mirr = compute_mirr(cf, rate)
    pi = compute_pi(rate, cf)
    print('NPV: ' + str(npv))
    print('PBP: ' + str(pbp))
    print('DPBP: ' + str(dpbp))
    print('IRR: ' + str(irr))
    print('MIRR: ' + str(mirr))
    print('PI: ' + str(pi))

    # plot NPV as functions of discount rate r
    def npv(r):
        return np.npv(r, cf)

    r = sympy.Symbol("r")
    # NPV graph
    expr = ''
    for i in range(0, len(cf), 1):
        expr += r'\frac{' + str(cf[i]) + r'}{(1+r)^' + str(i) + '}' if i == 0 \
            else r' + \frac{' + str(cf[i]) + r'}{(1+r)^' + str(i) + '}'
    expr = '$' + str(expr) + '$'
    fig, ax = plot_2d_graph([r for r in np.arange(0.0, .60, 0.05)], [npv(r) for r in np.arange(0.0, .60, 0.05)],
                                      {'title': r'$NPV=$' + str(expr), 'fontsize': '10', 'fontname': 'arial',
                                       'color': '#000000', 'x_label': '$r$', 'y_label': '$NPV1(r)$', 'style': '.-b', 'x_step':
None})
    try:
        print('Try to apply Newton method to our equation :\n' + str(npv(r)) + ' = 0')
        sol = solve_by_newton_algo(npv, 0.3)
        print('Found solution: r=' + str(sol))
        # add annotation to found solution
        add_annotation_to_graph(fig, ax, [sol, 0], 'Equation solution: ' + str(round(sol, 5)),
                                xytext=(sol + 20, 0 + 50),
                                arrowprops=dict(arrowstyle="->", connectionstyle="arc3, rad=.5"))
    except:
        print('No solution found for NPV1!')
    finally:
        fig.show()
```

```python
def my_main():
    example_1_1()
    example_1_1_1()
    example_1_1_1_1()
    example_1_4()
    example_1_5()
    example_5_1()
    example_5_2()

    return 0


if __name__ == '__main__':
    sys.exit(my_main())
```