

# 1 Grundlagen

Linearisierung um Arbeitspunkt:

$$x_a(t) = x_{a,AP} + \Delta x_a(t) \approx x_{a,AP} + \sum \left( \frac{\partial f}{\partial x_{e,AP}} \cdot \Delta x_e(t) \right)$$

Kräftegleichungen:

$$\text{Federkraft: } F_F = k_F \cdot x$$

$$\text{Dampfkraft: } F_D = k_D \cdot v = k_D \cdot \dot{x}$$

$$\text{Trägheitskraft: } F_{Tr} = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$$

$$\text{Erdbziehungskraft: } F_G = m \cdot g$$

Moment Gleichungen:

$$\text{Widerstandsmoment: } M_w = k_D \cdot \omega$$

$$\text{Trägheitsmoment: } M_{TR} = J \cdot \dot{\omega}$$

Spannungsgleichung:

$$U = L \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot R + \frac{1}{C} \cdot \int i$$

Für kleine Winkel  $\alpha$  gilt:  $\sin(\alpha) = \alpha$

Rotation in Flüssigkeit:

$$M = M_{\text{Träg}} + M_{\text{Brems}} = J \cdot \dot{\omega} + k_{\text{Flüssigkeit}} \cdot \omega$$

Partialbruchzerlegung (siehe Papula s.157ff)

Anfangswertsatz:  $x(t \rightarrow +0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s)$

Endwertsatz:  $x(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s)$

## 2 Systemtechnik

### 2.1 Modellbildung

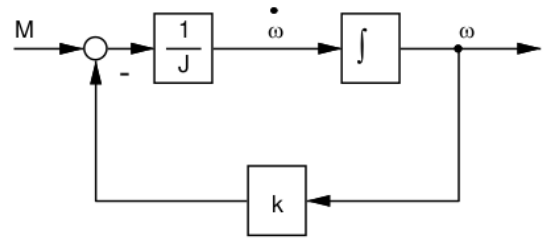
Hinweise zum aufstellen der Differentialgleichung eines Systems:

1. Bestimmung der Ein- und Ausgangsgrößen
2. Suche nach dem beschreibenden Gleichgewicht
3. In der Gleichung dürfen nur Konstanten, sowie die Ein- und Ausgangsgrößen in beliebiger Ableitung vorkommen
4. Andere Variablen müssen durch erlaubte Größen ersetzt werden  
(Dazu können i.a. physikalische Gleichungen benutzt werden)

### 2.2 Signalflussplan/Blockschaltbild

Erzeugung des Signalflussplans aus der Zugehörigen DGL.

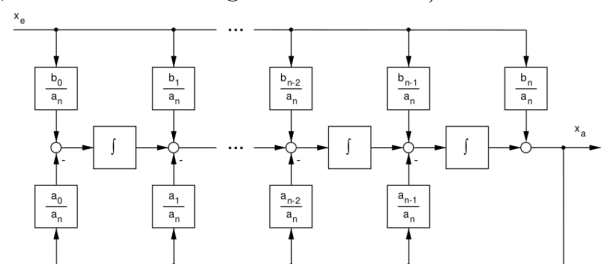
1. für technische Realisierung gilt:  $m < n$ ;
2. DGL. nach höchster Ableitung der Ausgangsgröße auflösen
3. höchste Ableitung der Ausgangsgröße geht auf den Eingang des ersten Integrators  
(Laplace-Trans ersetzt das Integrieren mit einer Division mit „s“)



Erzeugung des Signalflussplans eines Systems mit der DGL.:

$$\begin{aligned} & a_n \ddot{x}_a + \dots + a_2 \ddot{x}_a + a_1 \dot{x}_a + a_0 x_a \\ & = b_n \ddot{x}_e + \dots + b_2 \ddot{x}_e + b_1 \dot{x}_e + b_0 x_e \end{aligned}$$

Signalflussplan kann allgemein gezeichnet werden: (nötig, falls eine Ableitung von  $x_e$  existiert)



### 2.3 Stabilität

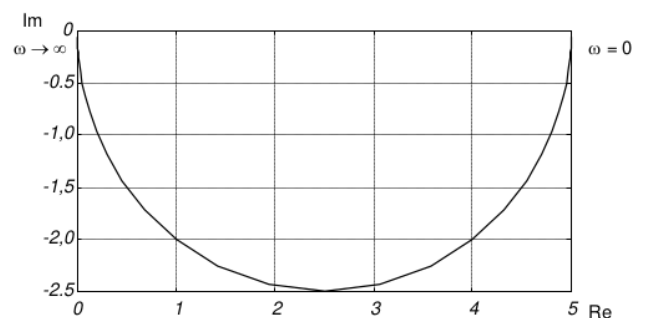
BIBO-Stabilität (Bounded Input/ Bounded Output > begrenzt):

ein dynamisches System ist stabil, wenn gilt:

für ein begrenztes  $x_e$  gibt es immer ein begrenztes  $x_a$

### 2.4 Ortskurven und Frequenzkennlinien

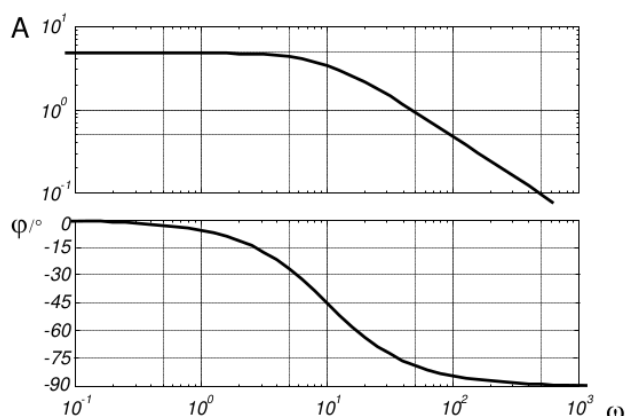
Ortskurvendarstellung:



Für wachsendes  $\omega$  werden die komplexen Werte  $F(j\omega)$  in die komplexe F-Ebene eingetragen und zur Ortskurve verbunden.

Jeder Ortskurvenpunkt kann jetzt als Zeiger gedeutet werden.

Bodediagramm Darstellung:



Der Amplitudengang  $A(\omega)$  wird in doppelt logarithmischer Darstellung aufgetragen, der Phasengang  $\varphi(\omega)$  halblogarithmisch. Gemeinsame Abszisse ist  $\omega$ .

Bei diesem Beispiel (PT1-Glied) ist deutlich der Tiefpass-Charakter zu erkennen.

Verkettete Funktionen im Bodediagramm resultieren als Produkt der Einzelübertragungsfunktionen.

D.h. Verstärkung wird multipliziert und Phasenverschiebung addiert.

Das heißt: Sowohl Phasengang (halblogarithmische Darstellung) und Amplitudengang (logarithmische Darstellung) werden graphisch addiert!

## 2.5 $F(s)$ in Pol- und Nullstellenform

Zähler- und Nennerpolynom von  $F(s)$  besitzt Nullstellen. Diese sind von  $a_v$  und  $b_u$  abhängig.

Nullstellen des Zählers sind Nullstellen von  $F(s)$

Nullstellen des Nenners sind Polstellen von  $F(s)$

Wenn Pole  $s_{pv}$  und Nullstellen  $s_{nu}$  bekannt, kann man  $F(s)$  mit dem Faktor  $Q$  in faktorisierte Form darstellen.

$$F(s) = Q \cdot \frac{\prod_{\mu=1}^m (s - s_{N\mu})}{\prod_{v=1}^n (s - s_{PV})} \quad \text{mit } Q = \frac{b_m}{a_n}$$

Die Stabilität von  $F(s)$  kann anhand der Lage der Pole  $s_{pv}$  in der s-Ebene beurteilt werden.

$F(s)$  ist stabil, wenn alle Pole  $s_{pv}$  in der linken s-Halbebene liegen.

Instabile Pole in der Rechten Halbebene lassen sich nicht durch Reihenschaltung mit entsprechender Nullstelle kompensieren!

Bedeutung Polstelle:

Pole bewirken ein zeitverzögertes Verhalten. Je weiter links sie sich befinden, desto schneller ist der Einschwingvorgang.

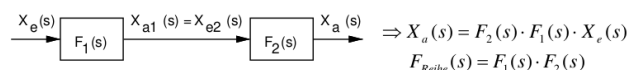
⇒ Wenn Pole deutlich weiter links liegen als andere, kann man sie ohne großen Fehler vernachlässigen.

Bedeutung Nullstelle:

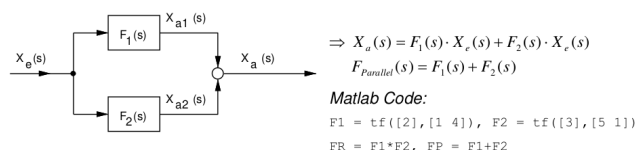
NS bewirken ein differenzierendes Verhalten (Beschleunigung des Systems) Einfluss weit links in der s-Ebene kann häufig vernachlässigt werden.

## 2.6 Signalflussplan Algebra

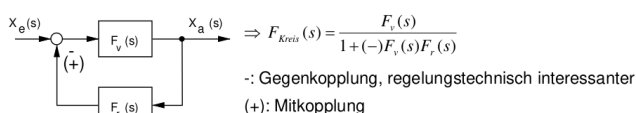
- Kettenstruktur:



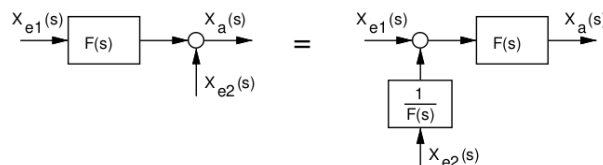
- Parallelstruktur:



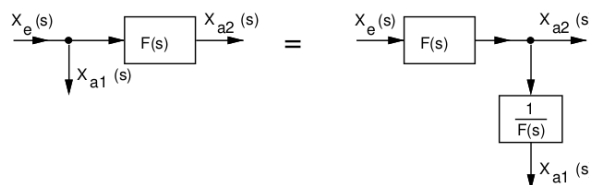
- Kreisstruktur:



- Verschieben einer Additionsstelle:



- Verschieben einer Verzweigung:



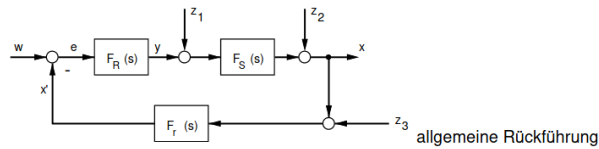
## 3 Zusammenwirken mehrerer Systeme

### 3.1 Regelkreis

Anforderungen:

- Stabilität: Regelkreis muss stabiles Verhalten zeigen (gilt auch für instabile Systeme)
- Gutes Führungsverhalten: Die Differenz zw. Sollwert  $w(t)$  und Istwert  $x(t)$  muss schnell klein werden.
- Gutes Störverhalten: Einfluss von Störgrößen soll vermindert werden.

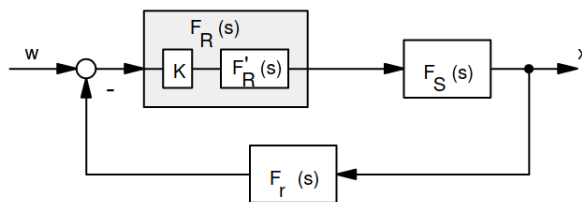
Grundstruktur des einschleifigen Regelkreises:



Regler	$F_R(s)$	Regelstrecke $F_S(s)$	bleibende Regeldifferenz $e$ (oder $x_d$ )	
			für $x_e = a \cdot \sigma(t)$ (Sprung) mit Rückführverstärkung $K_r$	für $x_e = a \cdot t$ (Rampe) mit Einheitsrückführung
P (D)	$K_p$	P-Verhalten (P, PT1, PT2, ...)	$a \frac{1}{1 + K_p \cdot K_S \cdot K_r}$	$\infty$
I	$\frac{K_I}{s}$		0	$a \frac{1}{K_I \cdot K_S}$
PI (D)	$K_p + \frac{K_I}{s}$		0	$a \frac{1}{K_I \cdot K_S}$
I <sup>2</sup>	$\frac{K_I}{s^2}$	I-Verhalten (I, PI, IT1, ...)	0	0
P (D)	$K_p$		0	$a \frac{1}{K_p \cdot K_S}$
I	$\frac{K_I}{s}$		0	0
PI (D)	$K_p + \frac{K_I}{s}$		0	0

### 3.2 Wurzelortskurven (WOK)-Verfahren

Reglerfunktion  $F_R$  in Reglerverstärkung und Reglerdynamik aufspalten:  $F_R = K \cdot F'_R$



$$\Rightarrow F_w(s) = \frac{F_R \cdot F_S}{1 + F_R \cdot F_S \cdot F_r}$$

Dabei ist  $F_o = F_R \cdot F_S \cdot F_r$  die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises.  $F_o$  kann auch in faktorisierte Form angegeben werden:

$$\begin{aligned} F_w(s) &= F_R(s) \cdot F_S(s) \cdot F_r(s) \\ &= K \cdot F'_R(s) \cdot F_S(s) \cdot F_r(s) \\ &= K \cdot Q \cdot \frac{\prod_{u=1}^m (s - s_{\text{Nou}})}{\prod_{v=1}^n (s - s_{\text{pov}})} \end{aligned}$$

Für eine Polstelle, muss der Nenner von  $F_w(s)$  Null werden:

$$\frac{F_R(s) \cdot F_S(s)}{1 + F_o(s)} \Rightarrow 1 + F_o(s) \stackrel{!}{=} 0$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 1 + K \cdot Q \cdot \frac{\prod_{M=1}^m (s - s_{\text{Nou}})}{\prod_{v=1}^n (s - s_{\text{por}})} \\ &\Rightarrow \frac{\prod_{v=1}^n (s - s_{\text{pov}})}{\prod_{u=1}^m (s - s_{\text{Nou}})} \stackrel{!}{=} -K \cdot Q \end{aligned}$$

Entspricht:  $\frac{\text{Multiplikation aller PS zum gesuchten Punkt}}{\text{Multiplikation aller NS zum gesuchten Punkt}}$

### 3.3 Konstruktion der WOK

1. Alle n Äste der WOK beginnen mit  $K=0$  in den n Polen  $s_{pov}$  des offenen Regelkreises.
2. m Äste der WOK enden für  $K \rightarrow \pm\infty$
3. n - m Äste der WOK enden für  $K \rightarrow \pm\infty$  im Unendlichen
4. Die n-m ins Unendliche strebende Äste der WOK haben Asymptoten, die
  - a) im Wurzelschwerpunkt

$$S_w = \frac{\sum_{v=1}^n s_{pov} - \sum_{u=1}^m s_{Nou}}{n - m}$$

beginnen und die dabei

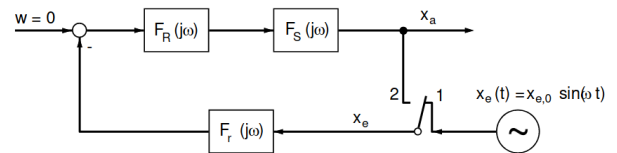
b) mit der reellen Achse die Winkel

$$\varphi_k = \frac{(2k-1) \cdot 180^\circ}{n-m} \text{ für } KQ > 0 \text{ bzw.}$$

mit  $k = 1, 2, 3, \dots, n-m$

5. Die Punkte der Wok liegen entweder auf der reellen Achse, oder symmetrisch zur reellen Achse
6. Ein Punkt s auf der reellen Achse ist dann ein Punkt der WOK, wenn sich bei  $KQ > 0$  ( $KQ < 0$ ) rechts von ihm eine ungerade (gerade) Anzahl von Polen  $s_{pov}$  und (+) Nullstellen  $s_{Nou}$  befindet.  
Achtung: WOK ist nicht anwendbar, wenn es sich um nicht rationale Übertragungsfunktionen handelt. (z.B. Regelkreis mit Totzeitverhalten!)

### 3.4 Nyquist Kriterium



Frequenzgangfunktion des offenen Regelkreises:

$$F_o(jw) = F_r(jw) \cdot F_R(jw) \cdot F_S(jw)$$

Ausgangssignal:

$$\begin{aligned} x_a(t) &= -F_r(jw) \cdot F_R(jw) \cdot F_S(jw) \cdot x_{e,0} \sin(\omega t) \\ &= -F_o(jw) \cdot x_e(t) \end{aligned}$$

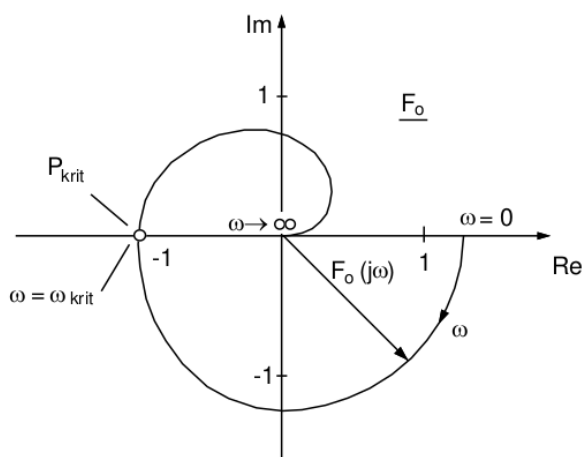
Regler und seine Parameter werden so gewählt, dass  $\omega = \omega_{krit}$  gilt:

$$-F_o(j\omega_{krit}) = 1 \text{ oder } F_o(j\omega_{krit}) = -1 \text{ (Schwingbedingung)}$$

Die Schwingbedingung ist erfüllt, wenn die Ortskurve von  $F_1(jw)$  durch den kritischen Punkt ( $P_{krit} = -2 + j0$ ) der komplexen  $F_0$ -Ebene geht.

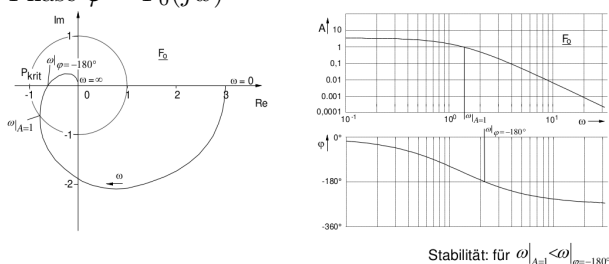
An diesem Punkt kann man  $\omega_{krit}$  ablesen (damit kann der Regelkreis Dauerschwingungen ausführen).

Für größere  $\omega$  ist das System instabil, für kleinere stabil.

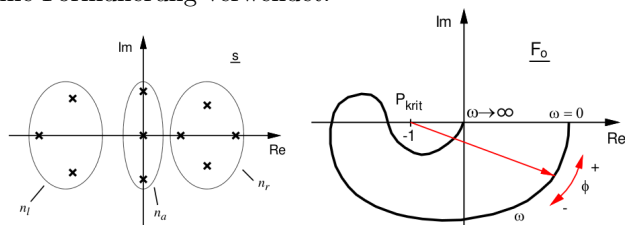


Falls  $F(s)$  des offenen Kreises keine Pole in der rechten Halbebene hat und nur max. 2 im Ursprung der  $s$ -Ebene, ist der Regelkreis stabil, wenn der kritische Punkt von  $\omega$  immer links von  $s = -1 + 0j$  liegt.  
(gilt immer wenn der offene Kreis stabil ist)

Zur Auswertung des Nyquist-Kriteriums im Bode Diagramm, spaltet man die Ortskurve nach Betrag  $A = |F_0(j\omega)|$  und Phase  $\varphi = \angle F_0(j\omega)$



Falls die Bedingung nicht funktioniert, wird die allgemeine Formulierung verwendet:



Der geschlossene Regelkreis ist stabil, wenn der Fahrstrahl von  $P_{krit} = -1 + j0$  zu  $F_0(j\omega)$  für wachsendes  $\omega$  von  $+0$  bis  $+\infty$  eine Winkeländerung  $\Delta\phi_{soll} = n_r \cdot 180^\circ + n_a \cdot 90^\circ$  erfährt.  
 $n_r$ : Anzahl der Pole rechts der imaginären Achse  
 $n_a$ : Anzahl der Pole auf der imaginären Achse

### 3.4.1 Phasenrad/Phasenreserve:

Aus Bodediagramm ablesen: Bei Verstärkung von 1 Winkeln von  $-180^\circ$  nach oben rechnen

- befriedigendes Verhalten bei Störungen gilt:  $\varphi_R \geq 30^\circ$
- gutes Verhalten (überschwingungsarm) gilt:  $\varphi_R \approx 60^\circ$
- gutes Verhalten (überschwingungsfrei) gilt:  $\varphi_R \geq 80^\circ$

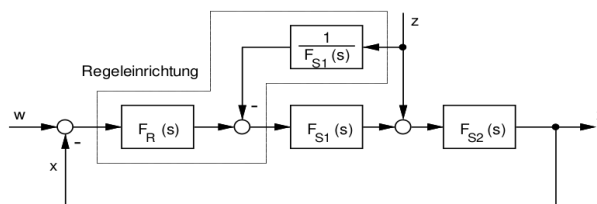
## 3.5 Einstellregler Ziegler/Nichols

### 3.5.1 Maßnahmen zur Verbesserung des Regelkreisverhaltens und Erweiterungen der Regelkreisstruktur

Reglertyp	$K_P$	$T_N$	$T_V$
P	$0,50 \cdot K_{P,krit}$	-	-
PI	$0,45 \cdot K_{P,krit}$	$0,85 \cdot T_{krit}$	-
PD	$0,80 \cdot K_{P,krit}$	-	$0,12 \cdot T_{krit}$
PID	$0,60 \cdot K_{P,krit}$	$0,50 \cdot T_{krit}$	$0,12 \cdot T_{krit}$

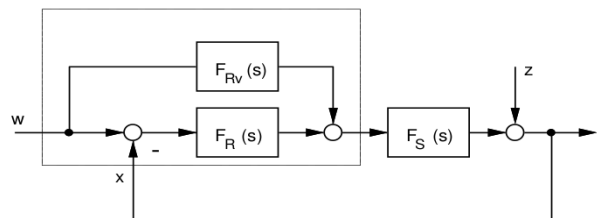
#### Störgrößenaufschaltung:

Falls Angriffsort einer Störgröße bekannt, kann man wie im Bild kompensieren.  
Vorteil: einfacher Regler Entwurf, deutlich schnellere Ausregelung.



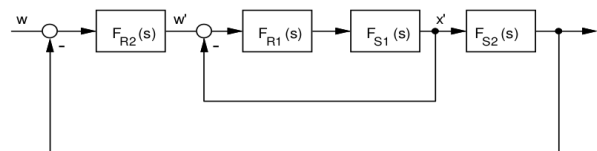
#### Vorsteuerung:

Geeignet, falls kein Kompromiss für gutes Stör- und Folgeverhalten.  
Regler ist auf gutes Störverhalten ausgelegt. Mit  $F_{Rv}$  wird ein schnelles Folgen auf Führungssignale  $w(t)$  erreicht.



#### Kaskadenregelung:

Ineinander geschachtelte Regelkreise (innere Regelkreise „schneller“). „Innere“ Störungen können bereits innen ausgeglichen werden. Können von Innen nach Außen in Betrieb genommen werden.



## 4 Digitale Regler

## 4.1 Allgemeines

### 4.1.1 z-Transformation

Wert der bei  $t = k \cdot T_A$  ausgegeben wird, wird bei  $t = (k-1) \cdot T_A$  eingelesen. (Verzögerung um einen Abtastschritt):



	Kontinuierlich	Zeitdiskret
Zeitbereich	$x_a(t) = x_e(t - T_A)$	$x_a, k = x_e, k-j$
Bildbereich	$X_a(s) = e^{-sT_A} \cdot X_e(s)$ (Laplace-Transformation)	$X_a(z) = z^{-j} \cdot X_e(z)$ (z-Transformation)

Bei der z-Transformation entspricht  $e^{-s \cdot TA}$  der Laplace-Transformation dem Ausdruck  $z^{-1}$ . Bzw.  $z \triangleq e^{s \cdot TA}$

Transformation vom s-Bereich in den z-Bereich:

$$s \triangleq e^{s \cdot T A}$$

### Vorwärts-Differenzen-quotient

$$s \hat{=} \frac{z-1}{T_A}$$

⇒ Der digitale Regler kann folgend berechnet werden:

$$F(z) = F(z)|_{s=\frac{z-1}{T_A}}$$

## Tustinsche Formel

$$s \hat{=} \frac{2}{T_A} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

### Rückwärts-Differenzen-quotient

## 5 Systembeschreibung im Zustandsraum

## 5.1 Allgemein (Mehrgrößensystem MIMO)

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) & x(0) &= x_0 \\ \vec{y}(t) &= C\vec{x}(t) + D\vec{u}(t)\end{aligned}$$

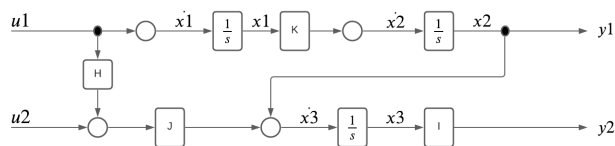


Abbildung 1: Signalflussplan

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \\ \dot{x}_2 &= K \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \\ \dot{x}_3 &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + H \cdot J \cdot u_1 + J \cdot u_2 \\ \dot{y}_1 &= 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \\ \dot{y}_2 &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + l \cdot x_3 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2\end{aligned}$$

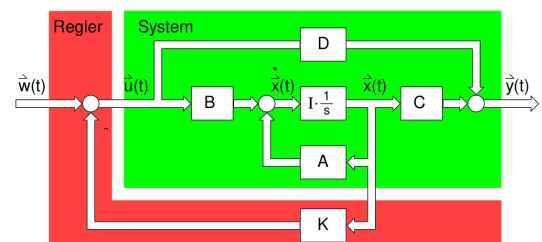
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ H \cdot J & J \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eigenwerte einer Matrix bestimmen (z.B. A):

$$\det(A - sI) \stackrel{!}{=} 0$$

### 5.1.1 Polfestlegung durch vollständige Zustandsrückführung



Durch die freie Wahl von  $K$  können alle  $n$  Pole des Systems beliebig platziert werden.

Rückführungsverstärkung: von jedem X einen Pfad zur größten Ableitung mit Verstärkung K zeichnen. Über neue Matrix und deren determinante kann dann die Reglerverstärkung bestimmt werden.

$$A = [B(a - K)]$$

a ist vorfaktor der  $\vec{x}(t)$ , siehe oben.

dann mit der Determinante der Matrix A: K bestimmen  
mit den gegebenen Polen

## 5.2 Programmtechnische Umsetzung

Zähler und Nenner der z-Übertragungsfunktion durch die höchste Potenz teilen

```

1  while(1)
2  {
3      waitinterrupt(T_A); //Abtastzeit warten
4      xout2 = xout1;
5      xout1 = xout;
6      xin2 = xin1;
7      xin1 = xin;
8      input(xin);
9      xout = k*xout2 - j*xin1 + o*xout1;
10     output(xa);
11 }

```