1 Grundlagen

1.1 Eigenschaften

Eigenschaften LTI-Systeme

1. Stabilität
   $|x(t)| < M < \infty \Rightarrow |y(t)| < N < \infty$
2. Linearität
   $W\left\{\sum_{k=1}^{N} a_n x_n(t)\right\} = \sum_{n=1}^{N} W\{a_n x_n(t)\}$
3. Zeitinvarianz
   $W\{x(t-t_0)\} = y(t-t_0)$
4. Kausalität
   $t < 0 \Rightarrow x(t) = 0 \wedge y(t) = 0$

1.2 Systemantwort

Die Sprung-/Impulsantwort beschreibt Systemantwort vollständig

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t-\tau)x'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

$a(t-\tau) = W\{s(t-\tau)\}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{2}$$

$h(t-\tau) = W\{\delta(t-\tau)\}$

1.3 Abtasttheorem

Durch die Abtastung wird das Spektrum von $f(t)$ unendlich oft um die Frequenzen $n \cdot \omega_a$ reproduziert.

$$F_A(\omega) = \frac{1}{T_A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_A) \tag{3}$$

$2\omega_g \leq \omega_A$

2 Systemtechnik

2.1 Modellbildung

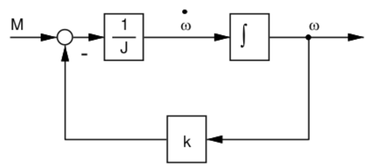
Hinweise zum aufstellen der Differentialgleichung eines Systems:

1. Bestimmmung der Ein- und Ausgangsgrößen
2. Suche nach dem beschreibenden Gleichgewicht
3. In der Gleichung dürfen nur Konstanten, sowie die Ein- und Augangsgrorßen in beliebiger Ableitung vorkommen
4. Andere Variablen müssen durch erlaubte Größen ersetzt werden (Dazu können i.a. physikalische Gleichungen benutzt werden)

2.2 Signalflussplan/Blockschaltbild

Erzeugung des Signalflussplans aus der Zugehörigen DGL.

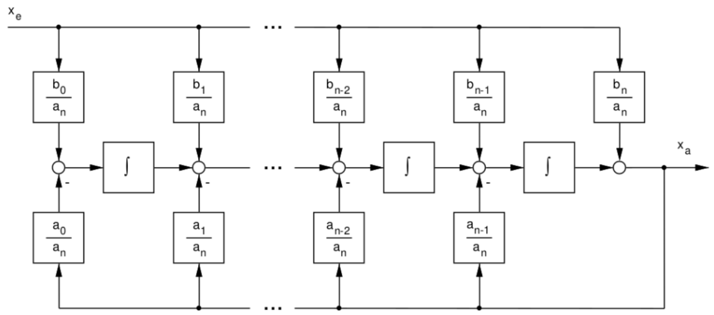
für technische Realissierung gilt: m < n;
Dgl. nach höchster Ableitung der Ausgangsgröße auflösen
höchste Ableitung der Ausgangsgröße geht auf den Eingan des ersten Integrators
(Laplace-Trans ersetzt das Intergrieren mit einer Division mit „s“)



Erzeugung des Signalflussplans eines Systems mit der Dgl.:

$$a_n \overset{(n)}{x}_a + \ldots + a_2\ddot{x}_a + a_1\dot{x}_a + a_0 x_a = b_m \overset{(m)}{x}_e + \ldots + b_2\ddot{x}_e + b_1\dot{x}_e + b_0 x_e$$

Signalflussplan kann allgemein gezeichnet werden:

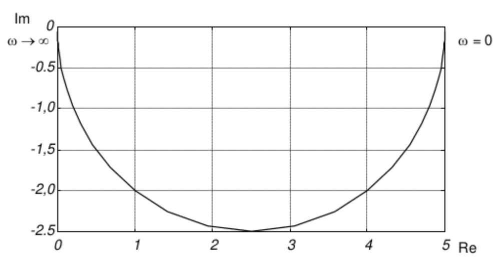


2.3 Stabilität

BIBO-Stabiliät (Bounded Input/ Bounded Output-> begrenzt):
ein dynamisches System ist stabil, wenn gilt:
für ein begrenztes x_e gibt es immer ein begrenztes x_a

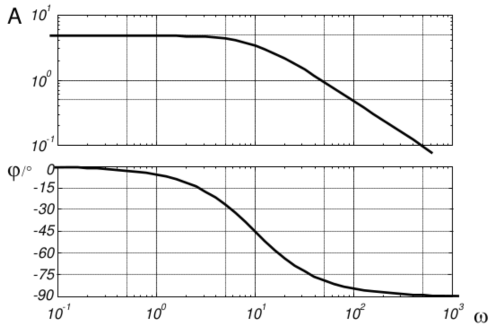
2.4 Ortskurven und Frequenzkennlinien

Ortskurvendarstellung:



Für wachsendes ω werden die komplexen Werte F(jω) in die komplexe F-Ebene eingetragen und zur Ortskurve verbunden.
Jeder Ortskurvenpunkt kann jetzt als Zeiger gedeutet werden.

Bodediagrammdarstellung:



Der Amplitudengang A(ω) wird in doppeltlogarithmischer Darstellung aufgetragen,
der Phasengang y(ω)) halblogarithmisch. Gemeinsame Abszisse ist ω.
Bei diesem Beispiel (PT1-Glied) ist deutlich der Tiefpass-Charakter zu erkennen.
Verkettete Funktionen im Bodediagramm resultieren als Produkt der Einzelübertragungsfunktionen.
D.h. Verstärkung wird multipliziert und Phasenverschiebung addiert. Das heißt: Sowohl Phasengang (halblogarithmische Darstellung) und Amplitudengan (logarithmische Darstellung) werden graphisch addiert!

2.5 F(s) in Pol- und Nullstellenform

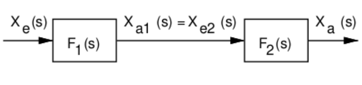
Zähler- und Nennerpolynom von F(s) besitzt Nullstellen.
Diese sind von a_v und b_u abhängig.
Nullstellen des Zählers sind Nullstellen von F(s)
Nullstellen des Nenners sind Polstellen von F(s)
Wenn Pole s_pv und Nullstellen s_nu bekannt, kann man F(s) mit dem Faktor Q in faktorisierter Form darstellen.

$$F(s) = Q \cdot \frac{\prod_{\mu=1}^{m}(s - s_{N\mu})}{\prod_{\nu=1}^{n}(s - s_{P\nu})} \qquad \text{mit } Q = \frac{b_m}{a_n}$$

Die Stabilität von F(s) kann anhand der Lage der Pole s_pv in der s-Ebene beurteilt werden.
F(s) ist stabil, wenn alle Pole s_pv in der linken s-Halbebene liegen.

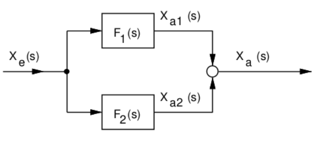
2.6 Signalflussplanalgebra

Kettenstruktur:



$$\Rightarrow X_a(s) = F_2(s) \cdot F_1(s) \cdot X_e(s)$$
$$F_{Reihe}(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Parallelstruktur:

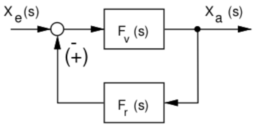


$$\Rightarrow X_a(s) = F_1(s) \cdot X_e(s) + F_2(s) \cdot X_e(s)$$
$$F_{Parallel}(s) = F_1(s) + F_2(s)$$

Matlab Code:

```
F1 = tf([2],[1 4]), F2 = tf([3],[5 1])
FR = F1*F2, FP = F1+F2
```

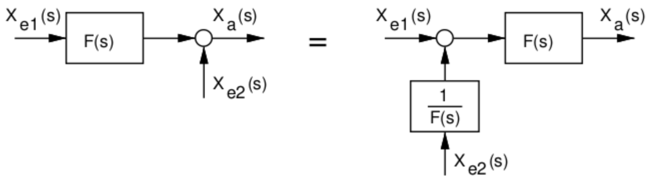
Kreisstruktur:



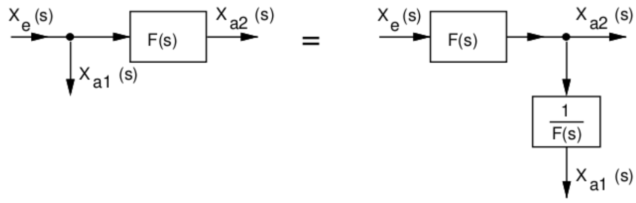
$$\Rightarrow F_{Kreis}(s) = \frac{F_v(s)}{1 + (-)F_v(s)F_r(s)}$$

-: Gegenkopplung, regelungstechnisch interessanter
(+): Mitkopplung

Verschieben einer Additionsstelle:



Verschieben einer Verzweigung:



3 Grundlagen

3.1 Eigenschaften

Eigenschaften LTI-Systeme

1. Stabilität
   $|x(t)| < M < \infty \Rightarrow |y(t)| < N < \infty$
2. Linearität
   $W\left\{\sum_{k=1}^{N} a_n x_n(t)\right\} = \sum_{n=1}^{N} W\{a_n x_n(t)\}$
3. Zeitinvarianz
   $W\{x(t-t_0)\} = y(t-t_0)$
4. Kausalität
   $t < 0 \Rightarrow x(t) = 0 \wedge y(t) = 0$

3.2 Systemantwort

Die Sprung-/Impulsantwort beschreibt Systemantwort vollständig

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t-\tau)x'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{4}$$
$$a(t-\tau) = W\{s(t-\tau)\}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{5}$$
$$h(t-\tau) = W\{\delta(t-\tau)\}$$

3.3 Abtasttheorem

Durch die Abtastung wird das Spektrum von $f(t)$ unendlich oft um die Frequenzen $n \cdot \omega_a$ reproduziert.

$$F_A(\omega) = \frac{1}{T_A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_A) \tag{6}$$
$$2\omega_g \leq \omega_A$$

4 Grundlagen

4.1 Eigenschaften

Eigenschaften LTI-Systeme

1. Stabilität
   $|x(t)| < M < \infty \Rightarrow |y(t)| < N < \infty$
2. Linearität
   $W\left\{\sum_{k=1}^{N} a_n x_n(t)\right\} = \sum_{n=1}^{N} W\{a_n x_n(t)\}$
3. Zeitinvarianz
   $W\{x(t-t_0)\} = y(t-t_0)$
4. Kausalität
   $t < 0 \Rightarrow x(t) = 0 \wedge y(t) = 0$

4.2 Systemantwort

Die Sprung-/Impulsantwort beschreibt Systemantwort vollständig

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t-\tau)x'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{7}$$
$$a(t-\tau) = W\{s(t-\tau)\}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{8}$$
$$h(t-\tau) = W\{\delta(t-\tau)\}$$

4.3 Abtasttheorem

Durch die Abtastung wird das Spektrum von $f(t)$ unendlich oft um die Frequenzen $n \cdot \omega_a$ reproduziert.

$$F_A(\omega) = \frac{1}{T_A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_A) \tag{9}$$
$$2\omega_g \leq \omega_A$$

5 Zusammenwirken mehrerer Systeme

5.1 Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right] \tag{10}$$
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$$

5.2 Fourierreihe, komplex

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \tag{11}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t$$

5.3 Fourierintegral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{12}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{13}$$

5.3.1 Eigenschaften

1. Linearität
   $af_1(t) + bf_2(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, aF_1(\omega) + bF_2(\omega)$
2. Zeitverschiebung
   $f(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
3. Frequenzverschiebung
   $f(t)e^{\pm j\omega_0 t} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, F(\omega \mp \omega_0)$
4. Faltung
   $f_1(t) * f_2(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$
   $f_1(\omega)\cdot f_2(\omega) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{2\pi}F_1(t) * F_2(t)$

5.4 DFT

$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{i2\pi kn/N} \tag{14}$$

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i2\pi kn/N} \tag{15}$$

5.4.1 FFT

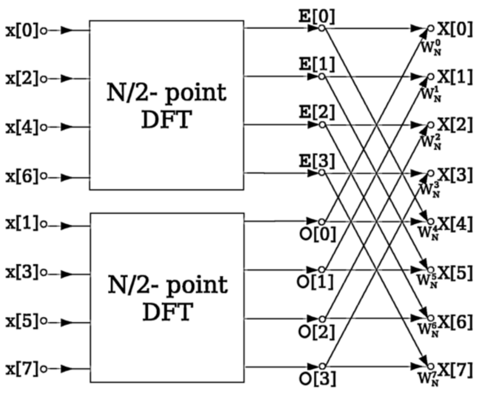


Abbildung 1: FFT

5.5 Hilbert Transformation

$$x_{\mathrm{ht}}(t) = x_{\mathrm{r}}(t) * h(t) \tag{16}$$

$$H(\omega) = -j\,\mathrm{sgn}(\omega) \tag{17}$$

5.6 z Transformation

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \tag{18}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(Z)z^{n-1}\,\mathrm{d}z \tag{19}$$

5.6.1 Übertragungsfunktion

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{p} a_k z^{-k}} = k\frac{\prod_{k=1}^{q}(1-z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{p}(1-p_k z^{-1})} \tag{20}$$

5.6.2 Verschiebung im Zeitbereich

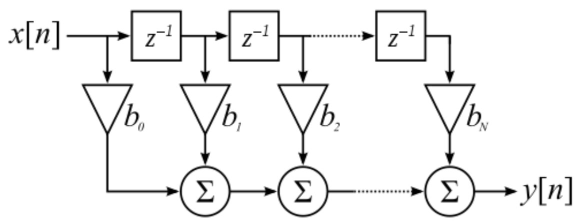
$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty}[x(n-m)]z^{-n} = z^{-m}X(z) \tag{21}$$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty}[x(n+m)]z^{-n} = z^{m}\left[x(t) - \sum_{n=0}^{m-1} x(n)z^{-n}\right] \tag{22}$$

6 Digitale Regler

6.1 FIR

$$y[n] = \sum_{k=0}^{q} b_k x(n-k) \tag{23}$$



6.2 IIR

$$y[n] = \sum_{k=0}^{q} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{p} a_k y(n-k) \tag{24}$$

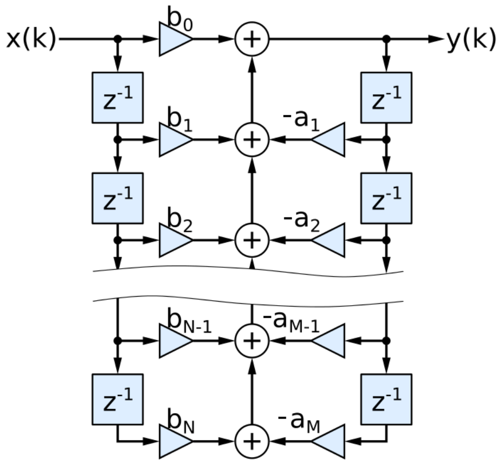


Abbildung 2: Direkt Form 1

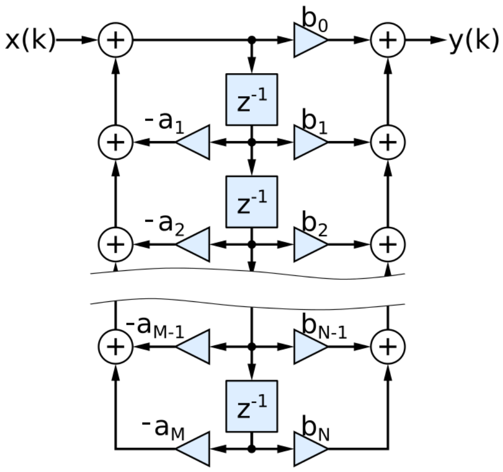


Abbildung 3: Direkt Form 2

7 Systembeschreibung im Zustandsraum

7.1 Allgemein (Mehrgrößensystem MIMO)

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t); \quad x(0) = x_0; \vec{y}(t) = C\vec{x}(t) + D\vec{u}(t) \tag{25}$$

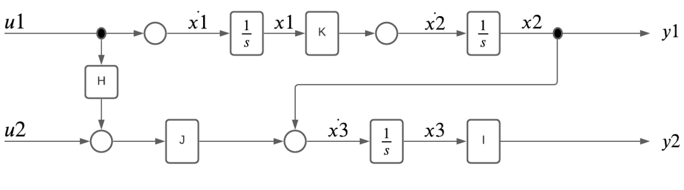


Abbildung 4: Signalflussplan

$$\dot{x}_1 = 0 * x_1 + 0 * x_2 + 0 * x_3 + 1 * u_1 + 0 * u_2$$
$$\dot{x}_2 = K * x_1 + 0 * x_2 + 0 * x_3 + 0 * u_1 + 0 * u_2$$
$$\dot{x}_3 = 0 * x_1 + 0 * x_2 + 0 * x_3 + H * J * u_1 + J * u_2$$
$$\dot{y}_1 = 0 * x_1 + 1 + x_2 + 0 * x_3 + 0 * u_1 + 0 * u_2$$
$$\dot{y}_2 = 0 * x_1 + 0 * x_2 + l * x_3 + 0 * u_1 + 0 * u_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ H \cdot J & J \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7.2 Programmtechnische Umsetzung

Zaehler und Nenner der z-Uebertragungsfunktion durch die hoechste Potenz teilen

```
while(1){
waitinterrupt();
xout2 = xout1;
xout1 = xout;
xin2 = xin1;
xin1 = xin;
input(xin);
xa = k*xout2 - j*xin1 + o*xout1;
output(xa);
}
```