

# 1 Grundlagen

## 1.1 Eigenschaften

Eigenschaften LTI-Systeme

1. Stabilität  
 $|x(t)| < M < \infty \Rightarrow |y(t)| < N < \infty$
2. Linearität  
 $W\left\{\sum_{k=1}^N a_k x_k(t)\right\} = \sum_{k=1}^N W\{a_k x_k(t)\}$
3. Zeitinvarianz  
 $W\{x(t - t_0)\} = y(t - t_0)$
4. Kausalität  
 $t < 0 \Rightarrow x(t) = 0 \wedge y(t) = 0$

## 1.2 Systemantwort

Die Sprung-/Impulsantwort beschreibt Systemantwort vollständig

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t - \tau) x'(\tau) d\tau \quad (1)$$

$$a(t - \tau) = W\{s(t - \tau)\}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau \quad (2)$$

$$h(t - \tau) = W\{\delta(t - \tau)\}$$

## 1.3 Abtasttheorem

Durch die Abtastung wird das Spektrum von  $f(t)$  unendlich oft um die Frequenzen  $n \cdot \omega_a$  reproduziert.

$$F_A(\omega) = \frac{1}{T_A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_A) \quad (3)$$

$$2\omega_g \leq \omega_A$$

# 2 Systemtechnik

## 2.1 Modellbildung

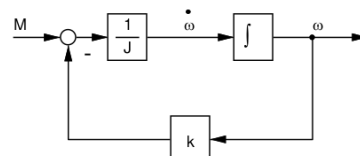
Hinweise zum aufstellen der Differentialgleichung eines Systems:

1. Bestimmung der Ein- und Ausgangsgrößen
2. Suche nach dem beschreibenden Gleichgewicht
3. In der Gleichung dürfen nur Konstanten, sowie die Ein- und Ausgangsgrößen in beliebiger Ableitung vorkommen
4. Andere Variablen müssen durch erlaubte Größen ersetzt werden (Dazu können i.a. physikalische Gleichungen benutzt werden)

## 2.2 Signalflussplan/Blockschaltbild

Erzeugung des Signalflussplans aus der Zugehörigen DGL.

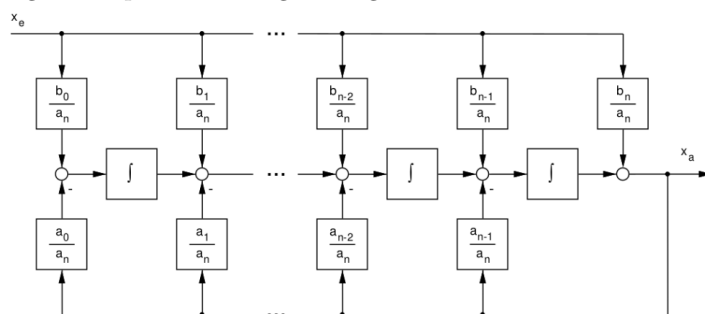
für technische Realisierung gilt:  $m < n$ ;  
Dgl. nach höchster Ableitung der Ausgangsgröße auflösen  
höchste Ableitung der Ausgangsgröße geht auf den Eingang des ersten Integrators  
(Laplace-Trans ersetzt das Integrieren mit einer Division mit „s“)



Erzeugung des Signalflussplans eines Systems mit der Dgl.:

$$a_n^{(n)} x_a + \dots + a_2 \ddot{x}_a + a_1 \dot{x}_a + a_0 x_a = b_m^{(m)} x_e + \dots + b_2 \ddot{x}_e + b_1 \dot{x}_e + b_0 x_e$$

Signalflussplan kann allgemein gezeichnet werden:



## 2.3 Stabilität

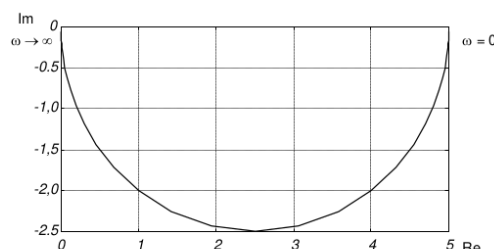
BIBO-Stabilität (Bounded Input/ Bounded Output-> begrenzt):

ein dynamisches System ist stabil, wenn gilt:

für ein begrenztes  $x_e$  gibt es immer ein begrenztes  $x_a$

## 2.4 Ortskurven und Frequenzkennlinien

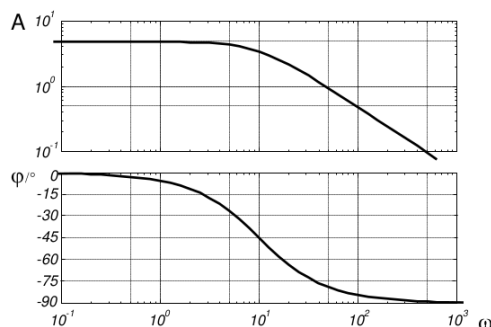
Ortskurvendarstellung:



Für wachsendes  $\omega$  werden die komplexen Werte  $F(j\omega)$  in die komplexe F-Ebene eingetragen und zur Ortskurve verbunden.

Jeder Ortskurvenpunkt kann jetzt als Zeiger gedeutet werden.

## Bodediagrammdarstellung:



Der Amplitudengang  $A(\omega)$  wird in doppeltlogarithmischer Darstellung aufgetragen, der Phasengang  $\varphi(\omega)$  halblogarithmisch. Gemeinsame Abszisse ist  $\omega$ .

Bei diesem Beispiel (PT1-Glied) ist deutlich der Tiefpass-Charakter zu erkennen.

Verkettete Funktionen im Bodediagramm resultieren als Produkt der Einzelübertragungsfunktionen.

D.h. Verstärkung wird multipliziert und Phasenverschiebung addiert. Das heißt: Sowohl Phasengang (halblogarithmische Darstellung) und Amplitudengang (logarithmische Darstellung) werden graphisch addiert!

## 2.5 $F(s)$ in Pol- und Nullstellenform

Zähler- und Nennerpolynom von  $F(s)$  besitzt Nullstellen. Diese sind von  $a_v$  und  $b_u$  abhängig.

Nullstellen des Zählers sind Nullstellen von  $F(s)$

Nullstellen des Nenners sind Polstellen von  $F(s)$

Wenn Pole  $s_{pv}$  und Nullstellen  $s_{nu}$  bekannt, kann man  $F(s)$  mit dem Faktor  $Q$  in faktorisierte Form darstellen.

$$F(s) = Q \cdot \frac{\prod_{\mu=1}^m (s - s_{N\mu})}{\prod_{v=1}^n (s - s_{pv})} \quad \text{mit } Q = \frac{b_m}{a_n}$$

Die Stabilität von  $F(s)$  kann anhand der Lage der Pole  $s_{pv}$  in der  $s$ -Ebene beurteilt werden.

$F(s)$  ist stabil, wenn alle Pole  $s_{pv}$  in der linken  $s$ -Halbebene liegen.

Instabile Pole in der Rechten Halbebene lassen sich nicht durch Reihenschaltung mit entsprechender Nullstelle kompensieren!

### Bedeutung Polstelle:

Pole bewirken ein zeitverzögertes Verhalten. je weiter links sie sich befinden, desto schneller ist der Einschwingvorgang.

=> Wenn Pole deutlich weiter links liegen als andere andere, kann man sie ohne großen Fehler vernachlässigen.

### Bedeutung Nullstelle:

NS bewirken ein differenzierendes Verhalten (Beschleunigung des Systems) Einfluss weit links in der  $s$ -Ebene kann häufig vernachlässigt werden.

## 2.6 Signalflussplanalgebra

### Kettenstruktur:

$$\begin{aligned} X_e(s) &\rightarrow F_1(s) \rightarrow X_{a1}(s) = X_{e2}(s) \rightarrow F_2(s) \rightarrow X_a(s) \\ \Rightarrow X_a(s) &= F_2(s) \cdot F_1(s) \cdot X_e(s) \\ F_{\text{Reihe}}(s) &= F_1(s) \cdot F_2(s) \end{aligned}$$

### Parallelstruktur:

$$\begin{aligned} X_e(s) &\rightarrow \begin{cases} F_1(s) \\ F_2(s) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X_{a1}(s) \\ X_{a2}(s) \end{cases} \rightarrow X_a(s) \\ \Rightarrow X_a(s) &= F_1(s) \cdot X_e(s) + F_2(s) \cdot X_e(s) \\ F_{\text{Parallel}}(s) &= F_1(s) + F_2(s) \end{aligned}$$

**Matlab Code:**  
 $F1 = tf([2], [1 \ 4]); \quad F2 = tf([3], [5 \ 1]);$   
 $FR = F1 * F2; \quad FP = F1 + F2$

### Kreisstruktur:

$$\begin{aligned} X_e(s) &\rightarrow \begin{cases} F_v(s) \\ F_r(s) \end{cases} \rightarrow X_a(s) \\ \Rightarrow F_{\text{Kreis}}(s) &= \frac{F_v(s)}{1 + (-)F_v(s)F_r(s)} \end{aligned}$$

-: Gegenkopplung, regelungstechnisch interessanter  
 (+): Mitkopplung

### Verschieben einer Additionsstelle:

$$X_{e1}(s) \rightarrow F(s) \rightarrow X_a(s) \quad \text{mit } X_{e2}(s) \text{ an Additionsstelle} = X_{e1}(s) \rightarrow \begin{cases} 1 \\ 1/F(s) \end{cases} \rightarrow F(s) \rightarrow X_a(s)$$

### Verschieben einer Verzweigung:

$$X_e(s) \rightarrow \begin{cases} X_{a1}(s) \\ F(s) \end{cases} \rightarrow X_{a2}(s) = X_e(s) \rightarrow F(s) \rightarrow \begin{cases} 1/F(s) \\ X_{a1}(s) \end{cases}$$

## 3 Zusammenwirken mehrerer Systeme

### 3.1 Regelkreis

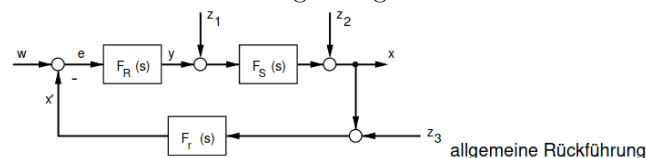
#### Anforderungen:

Stabilität: Regelkreis muss stabiles Verhalten zeigen (gilt auch für instabile Systeme)

Gutes Führungsverhalten: Die Differenz zw. Sollwert  $w(t)$  und Istwert  $x(t)$  muss schnell klein werden.

Gutes Störverhalten: Einfluss von Störgrößen soll vermindert werden.

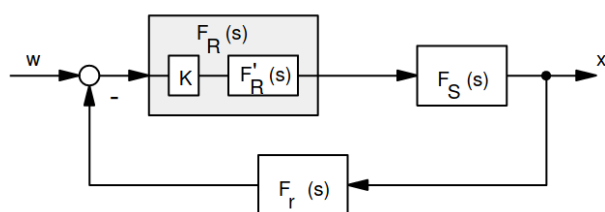
#### Grundstruktur des einschleifigen Regelkreises



| Regler         | $F_R(s)$              | Regelstrecke $F_S(s)$                              | bleibende Regeldifferenz $e$ (oder $x_d$ )                              |  |
|----------------|-----------------------|--|---|--|
|                |                       |  | für $x_e = a \cdot \sigma(t)$ (Sprung)<br>mit Rückführverstärkung $K_r$ | für $x_e = a \cdot t$ (Rampe)<br>mit Einheitsrückführung |
| P (D)          | $K_p$                 | P-Verhalten<br>(P, PT1, PT2, ...)                  | $a \frac{1}{1 + K_p \cdot K_S \cdot K_r}$                               | $\infty$   |
| I              | $\frac{K_I}{s}$       |  | 0   | $a \frac{1}{K_I \cdot K_S}$                              |
| PI (D)         | $K_p + \frac{K_I}{s}$ |  | 0   | $a \frac{1}{K_I \cdot K_S}$                              |
| I <sup>2</sup> | $\frac{K_I}{s^2}$     | I-Verhalten<br>(I, PI, IT1, ...)                   | 0   | 0  |
| P (D)          | $K_p$                 |  | 0   | $a \frac{1}{K_p \cdot K_S}$                              |
| I              | $\frac{K_I}{s}$       |  | 0   | 0  |
| PI (D)         | $K_p + \frac{K_I}{s}$ | $F_S(s) = K_S \frac{(1 + \dots s)}{(1 + \dots s)}$ | 0   | 0  |

### 3.2 Wurzelortskurven (WOK)-Verfahren

Reglerfunktion  $F_R$  in Reglerverstärkung und Reglerdynamik aufspalten:  $F_R = K \cdot F'_R$



$$\Rightarrow F_w(s) = \frac{F_R \cdot F_S}{1 + F_R \cdot F_S \cdot F_r}$$

Dabei ist  $F_o = F_R \cdot F_S \cdot F_r$  die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises.  $F_o$  kann auch in faktorisierte Form angegeben werden:

$$\begin{aligned} F_w(s) &= F_R(s) \cdot F_S(s) \cdot F_r(s) \\ &= K \cdot F'_R(s) \cdot F_S(s) \cdot F_r(s) \\ &= K \cdot Q \cdot \frac{\prod_{u=1}^m (s - s_{\text{Nou}})}{\prod_{v=1}^n (s - s_{\text{pov}})} \end{aligned}$$

Für eine Polstelle, muss der Nenner von  $F_w(s)$  Null werden:

$$\frac{F_R(s) \cdot F_S(s)}{1 + F_o(s)} \Rightarrow 1 + F_o(s) \stackrel{!}{=} 0$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 + K \cdot Q \cdot \frac{\prod_{M=1}^m (s - s_{\text{Nou}})}{\prod_{v=1}^n (s - s_{\text{por}})} \\ \Rightarrow \frac{\prod_{v=1}^n (s - s_{\text{pov}})}{\prod_{u=1}^m (s - s_{\text{Nou}})} \stackrel{!}{=} -K \cdot Q \end{aligned}$$

### 3.3 Konstruktion der WOK

1. Alle n Äste der WOK beginnen mit  $K=0$  in den n Polen  $s_{pov}$  des offenen Regelkreises.
2. m Äste der WOK enden für  $K \rightarrow \pm\infty$
3. n - m Äste der WOK enden für  $K \rightarrow \pm\infty$  im Unendlichen
4. Die n-m ins Unendliche strebende Äste der WOK haben Asymptoten, die
  - a) im Wurzelschwerpunkt

$$S_w = \frac{\sum_{v=1}^n s_{pov} - \sum_{u=1}^m s_{Nop}}{n - m}$$

beginnen und die dabei

b) mit der reellen Achse die Winkel

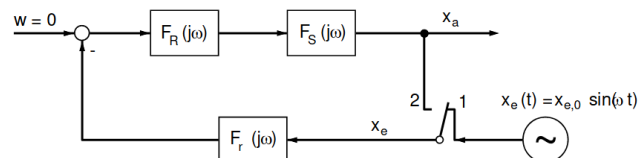
$$\varphi_k = \frac{(2k-1) \cdot 180^\circ}{n-m} \text{ für } KQ > 0 \text{ bzw. } \varphi_k = \frac{(2k-2) \cdot 180^\circ}{n-m} \text{ für } KQ < 0$$

mit  $k = 1, 2, 3, \dots, n-m$

5. Die Punkte der WOK liegen entweder auf der reellen Achse, oder symmetrisch zur reellen Achse
6. Ein Punkt  $s$  auf der reellen Achse ist dann ein Punkt der WOK, wenn sich bei  $KQ > 0$  ( $KQ < 0$ ) rechts von ihm eine ungerade (gerade) Anzahl von Polen  $s_{pov}$  und (+) Nullstellen  $s_{Nop}$  befindet.

Achtung: WOK ist nicht anwendbar, wenn es sich um nicht rationale Übertragungsfunktionen handelt. (z.B. Regelkreis mit Totzeitverhalten!)

### 3.4 Nyquist Kriterium



Frequenzgangfunktion des offenen Regelkreises:

$$F_o(j\omega) = F_r(j\omega) \cdot F_R(j\omega) \cdot F_S(j\omega)$$

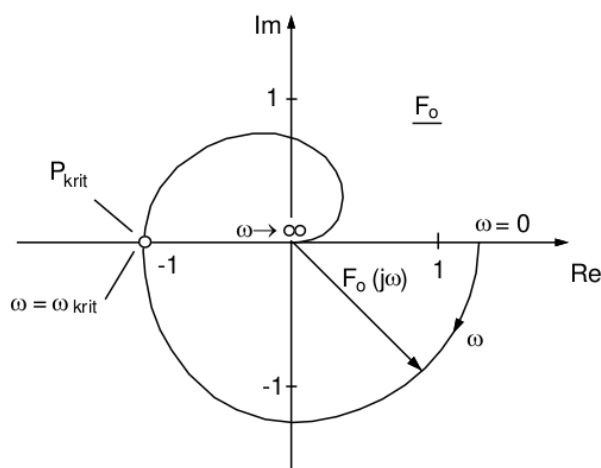
Ausgangssignal:

$$x_a(t) = -F_r(j\omega) \cdot F_R(j\omega) \cdot F_S(j\omega) \cdot x_{e0} \sin(\omega t) = -F_o(j\omega) \cdot x_e(t)$$

Regler und seine Parameter werden so gewählt, dass  $\omega = \omega_{krit}$  gilt:

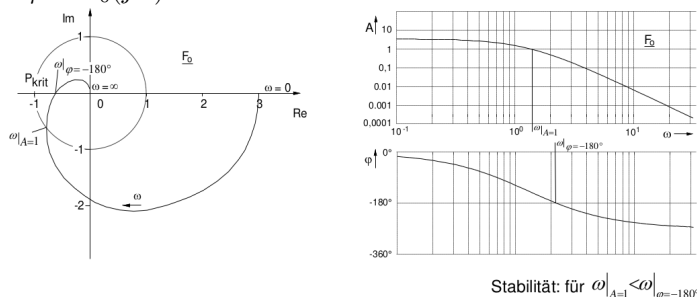
$$-F_o(j\omega_{krit}) = 1 \text{ oder } F_o(j\omega_{krit}) = -1 \text{ (Schwingbedingung)}$$

Die Schwingbedingung ist erfüllt, wenn die Ortskurve von  $F_1(j\omega)$  durch den kritischen Punkt ( $P_{krit} = -2 + j0$ ) der komplexen  $F_o$ -Ebene geht. An diesem Punkt kann man  $\omega_{krit}$  ablesen (damit kann der Regelkreis Dauerschwingungen ausführen). Für größere  $\omega$  ist das System instabil, für kleinere stabil.

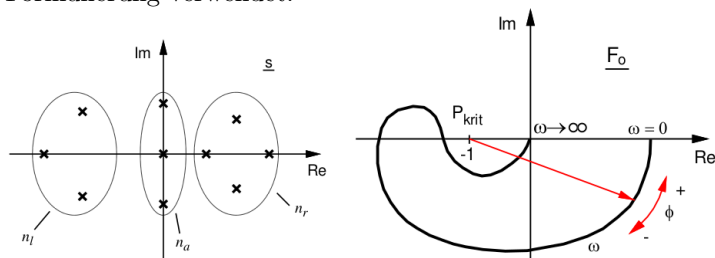


Falls  $F(s)$  des offenen Kreises keine Pole in der rechten Halbebene hat und nur max. 2 im Ursprung der  $s$ -Ebene, ist der Regelkreis stabil, wenn der kritische Punkt von  $\omega$  immer links von  $s = -1 + 0j$  liegt. (gilt immer wenn der offene Kreis stabil ist)

Zur Auswertung des Nyquist-Kriteriums im Bode Diagramm, spaltet man die Ortskurve nach Betrag  $A = |F_0(j\omega)|$  und Phase  $\varphi = \angle F_0(j\omega)$



Falls die Bedingung nicht funktioniert, wird die allgemeine Formulierung verwendet:



## 4 Grundlagen

### 4.1 Eigenschaften

Eigenschaften LTI-Systeme die Ortskurve von  $F_{-1}(j\omega)$  durch den kritischen Punkt ( $P_{krit} = -2 + j0$ ) der komplexen  $F_0$ -Ebene

1. Stabilität  
 $|x(t)| < M < \infty \Rightarrow |y(t)| < N < \infty$
2. Linearität  
 $W\left\{\sum_{k=1}^N a_n x_n(t)\right\} = \sum_{n=1}^N W\{a_n x_n(t)\}$
3. Zeitinvarianz  
 $W\{x(t - t_0)\} = y(t - t_0)$
4. Kausalität  
 $t < 0 \Rightarrow x(t) = 0 \wedge y(t) = 0$

## 4.2 Systemantwort

Die Sprung-/Impulsantwort beschreibt Systemantwort vollständig

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t - \tau) x'(\tau) d\tau \quad (4)$$

$$a(t - \tau) = W\{s(t - \tau)\}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau \quad (5)$$

$$h(t - \tau) = W\{\delta(t - \tau)\}$$

## 4.3 Abtasttheorem

Durch die Abtastung wird das Spektrum von  $f(t)$  unendlich oft um die Frequenzen  $n \cdot \omega_a$  reproduziert.

$$F_A(\omega) = \frac{1}{T_A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_A) \quad (6)$$

$$2\omega_g \leq \omega_A$$

## 5 Zusammenwirken mehrerer Systeme

### 5.1 Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (7)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

## 5.2 Fourierreihe, komplex

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (8)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

## 5.3 Fourierintegral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (9)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (10)$$

### 5.3.1 Eigenschaften

1. Linearität  
 $a f_1(t) + b f_2(t) \rightarrow a F_1(\omega) + b F_2(\omega)$
2. Zeitverschiebung  
 $f(t - t_0) \rightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}$
3. Frequenzverschiebung  
 $f(t) e^{\pm j\omega_0 t} \rightarrow F(\omega \mp \omega_0)$
4. Faltung  
 $f_1(t) * f_2(t) \rightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$   
 $f_1(\omega) \cdot f_2(\omega) \rightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(t) * F_2(t)$

## 5.4 DFT

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{i2\pi kn/N} \quad (11)$$

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i2\pi kn/N} \quad (12)$$

### 5.4.1 FFT

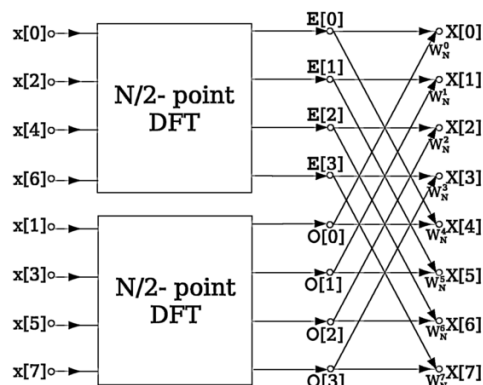


Abbildung 1: FFT

## 5.5 Hilbert Transformation

$$x_{ht}(t) = x_r(t) * h(t) \quad (13)$$

$$H(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) \quad (14)$$

## 5.6 z Transformation

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (15)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz \quad (16)$$

### 5.6.1 Übertragungsfunktion

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^p a_k z^{-k}} = k \frac{\prod_{k=1}^q (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^p (1 - p_k z^{-1})} \quad (17)$$

### 5.6.2 Verschiebung im Zeitbereich

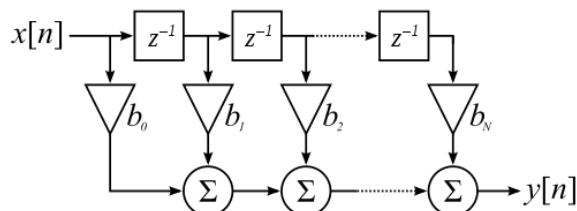
$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [x(n - m)] z^{-n} = z^{-m} X(z) \quad (18)$$

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [x(n + m)] z^{-n} = z^m \left[ x(t) - \sum_{n=0}^{m-1} x(n) z^{-n} \right] \quad (19)$$

## 6 Digitale Regler

### 6.1 FIR

$$y[n] = \sum_{k=0}^q b_k x(n - k) \quad (20)$$



### 6.2 IIR

$$y[n] = \sum_{k=0}^q b_k x(n - k) - \sum_{k=1}^p a_k y(n - k) \quad (21)$$

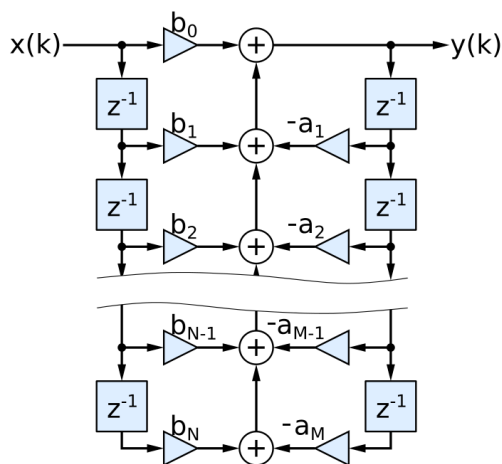


Abbildung 2: Direkt Form 1

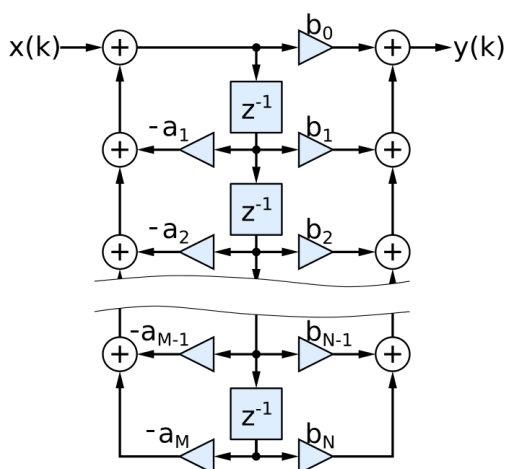


Abbildung 3: Direkt Form 2

## 7 Systembeschreibung im Zustandsraum

### 7.1 Allgemein (Mehrgrößensystem MIMO)

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t); \quad x(0) = x_0; \quad \vec{y}(t) = C\vec{x}(t) + D\vec{u}(t) \quad (22)$$

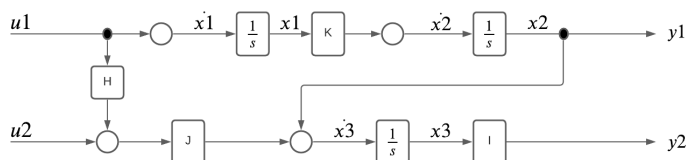


Abbildung 4: Signalfussplan

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 * x_1 + 0 * x_2 + 0 * x_3 + 1 * u_1 + 0 * u_2 \\ \dot{x}_2 &= K * x_1 + 0 * x_2 + 0 * x_3 + 0 * u_1 + 0 * u_2 \\ \dot{x}_3 &= 0 * x_1 + 0 * x_2 + 0 * x_3 + H * J * u_1 + J * u_2 \\ \dot{y}_1 &= 0 * x_1 + 1 * x_2 + 0 * x_3 + 0 * u_1 + 0 * u_2 \\ \dot{y}_2 &= 0 * x_1 + 0 * x_2 + l * x_3 + 0 * u_1 + 0 * u_2 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ H \cdot J & J \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 7.2 Programmtechnische Umsetzung

Zaehler und Nenner der z-Uebertragungsfunktion durch die hoechste Potenz teilen

```
while(1){
    waitinterrupt();
    xout2 = xout1;
    xout1 = xout;
    xin2 = xin1;
    xin1 = xin;
    input(xin);
    xout = k*xout2 - j*xin1 + o*xout1;
    output(xa);
}
```