1 Grundlagen

Linearisierung um Arbeitspunkt:

$$x_a(t) = x_{a,AP} + \Delta x_a(t) \approx x_{a,AP} + \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_{e,Ap}} \cdot \Delta x_e(t) \right)$$

Kräftegleichungen:

Federkraft: $F_F = k_F \cdot x$
Dampfkraft: $F_D = k_D \cdot v = k_D \cdot \dot{x}$
Trägheitskraft: $F_{Tr} = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$
Erdanziehungskraft: $F_G = m \cdot g$

Moment Gleichungen:

Widerstandsmoment: $M_w = k_D \cdot \omega$
Trägheitsmoment: $M_{TR} = \mathrm{J} \cdot \dot{\omega}$

Spannungsgleichung:

$$U = L \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot R + \frac{1}{C} \cdot \int i$$

Für kleine Winkel α gilt: $\sin(\alpha) = \alpha$
Rotation in Flüssigkeit:

$$M = M_{\texttt{Träg}} + M_{\texttt{Brems}} = J \cdot \dot{\omega} + k_{\texttt{Flüssigkeit}} \cdot \omega$$

Partialbruchzerlegung (siehe Papula s.157ff)

Anfangswertsatz: $x(t \to +0) = \lim_{s \to \infty} s \cdot X(s)$
Endwertsatz: $x(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot X(s)$

2 Systemtechnik

2.1 Modellbildung

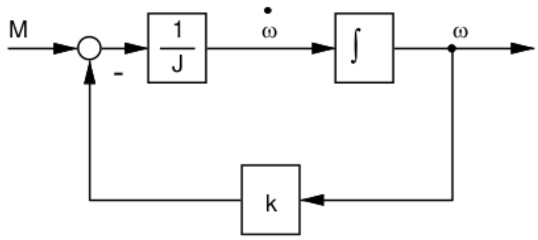
Hinweise zum aufstellen der Differentialgleichung eines Systems:

1. Bestimmung der Ein- und Ausgangsgrößen
2. Suche nach dem beschreibenden Gleichgewicht
3. In der Gleichung dürfen nur Konstanten, sowie die Ein- und Ausgangsgrößen in beliebiger Ableitung vorkommen
4. Andere Variablen müssen durch erlaubte Größen ersetzt werden
(Dazu können i.a. physikalische Gleichungen benutzt werden)

2.2 Signalflussplan/Blockschaltbild

Erzeugung des Signalflussplans aus der Zugehörigen DGL.

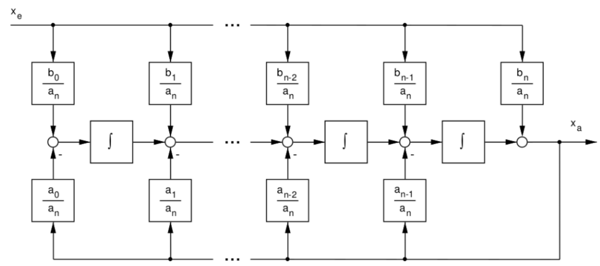
1. für technische Realisierung gilt: m < n;
2. DGL. nach höchster Ableitung der Ausgangsgröße auflösen
3. höchste Ableitung der Ausgangsgröße geht auf den Eingang des ersten Integrators
(Laplace-Trans ersetzt das Integrieren mit einer Division mit „s“)



Erzeugung des Signalflussplans eines Systems mit der DGL.:

$$a_n \overset{(n)}{x}_a + \ldots + a_2 \ddot{x}_a + a_1 \dot{x}_a + a_0 x_a$$
$$= b_n \overset{(n)}{x}_e + \ldots + b_2 \ddot{x} + b_1 \dot{x}_e + b_0 x_e$$

Signalflussplan kann allgemein gezeichnet werden: (nötig, falls eine Ableitung von x_e existiert)

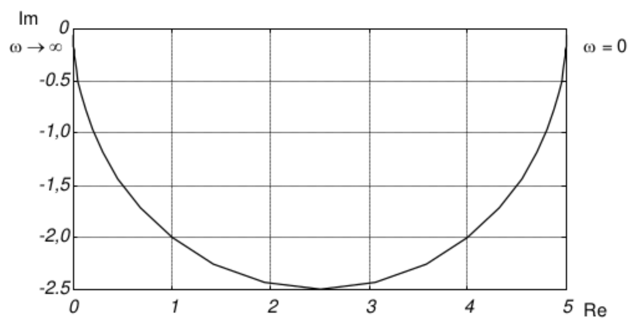


2.3 Stabilität

BIBO-Stabilität (Bounded Input/ Bounded Output-> begrenzt):
ein dynamisches System ist stabil, wenn gilt:
für ein begrenztes x_e gibt es immer ein begrenztes x_a

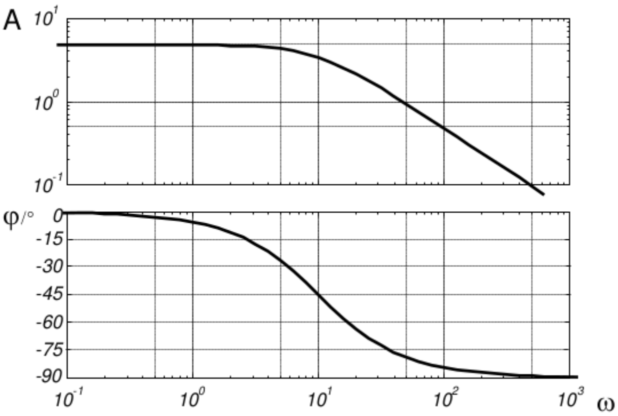
2.4 Ortskurven und Frequenzkennlinien

Ortskurvendarstellung:



Für wachsendes ω werden die komplexen Werte F(jω) in die komplexe F-Ebene eingetragen und zur Ortskurve verbunden.
Jeder Ortskurvenpunkt kann jetzt als Zeiger gedeutet werden.

Bodediagramm Darstellung:



Der Amplitudengang A(ω) wird in doppelt-logarithmischer Darstellung aufgetragen,
der Phasengang y(ω)) halblogarithmisch. Gemeinsame Abszisse ist ω.

Bei diesem Beispiel (PT1-Glied) ist deutlich der Tiefpass-Charakter zu erkennen.

Verkettete Funktionen im Bodediagramm resultieren als Produkt der Einzelübertragungsfunktionen.

D.h. Verstärkung wird multipliziert und Phasenverschiebung addiert.
Das heißt: Sowohl Phasengang (halblogarithmische Darstellung) und Amplitudengang (logarithmische Darstellung) werden graphisch addiert!

2.5 F(s) in Pol- und Nullstellenform

Zähler- und Nennerpolynom von F(s) besitzt Nullstellen. Diese sind von a_v und b_u abhängig.
Nullstellen des Zählers sind Nullstellen von F(s)
Nullstellen des Nenners sind Polstellen von F(s)
Wenn Pole $s_p v$ und Nullstellen $s_n u$ bekannt, kann man F(s) mit dem Faktor Q in faktorisierter Form darstellen.

$$F(s) = Q \cdot \frac{\prod_{\mu=1}^{m}(s - s_{N\mu})}{\prod_{\nu=1}^{n}(s - s_{P\nu})} \qquad \text{mit } Q = \frac{b_m}{a_n}$$

Die Stabilität von $F(s)$ kann anhand der Lage der Pole $s_p v$ in der s-Ebene beurteilt werden.
$F(s)$ ist stabil, wenn alle Pole $s_p v$ in der linken s-Halbebene liegen.
Instabile Pole in der Rechten Halbebene lassen sich nicht durch Reihenschaltung mit entsprechender Nullstelle kompensieren!

Bedeutung Polstelle:

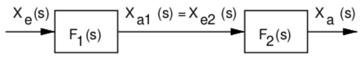
Pole bewirken ein zeitverzögertes Verhalten. Je weiter links sie sich befinden, desto schneller ist der Einschwingvorgang.

⇒ Wenn Pole deutlich weiter links liegen als andere andere, kann man sie ohne großen Fehler vernachlässigen.

Bedeutung Nullstelle:
NS bewirken ein differenzierendes Verhalten (Beschleunigung des Systems) Einfluss weit links in der s-Ebene kann häufig vernachlässigt werden.

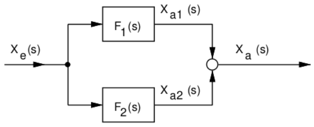
2.6 Signalflussplan Algebra

Kettenstruktur:



$$\Rightarrow X_a(s) = F_2(s) \cdot F_1(s) \cdot X_e(s)$$
$$F_{Reihe}(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Parallelstruktur:

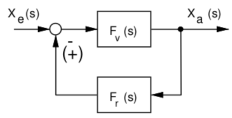


$$\Rightarrow X_a(s) = F_1(s) \cdot X_e(s) + F_2(s) \cdot X_e(s)$$
$$F_{Parallel}(s) = F_1(s) + F_2(s)$$

Matlab Code:

```
F1 = tf([2],[1 4]), F2 = tf([3],[5 1])
FR = F1*F2, FP = F1+F2
```

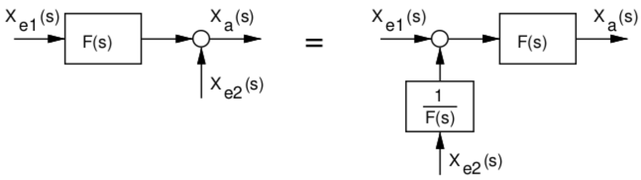
Kreisstruktur:



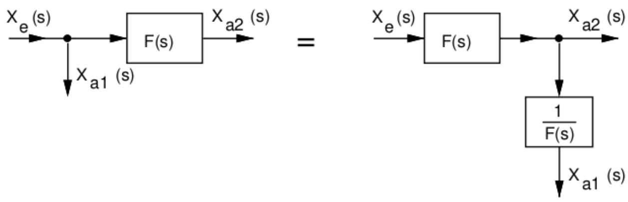
$$\Rightarrow F_{Kreis}(s) = \frac{F_v(s)}{1 + (-)F_v(s)F_r(s)}$$

-: Gegenkopplung, regelungstechnisch interessanter
(+): Mitkopplung

Verschieben einer Additionsstelle:



Verschieben einer Verzweigung:



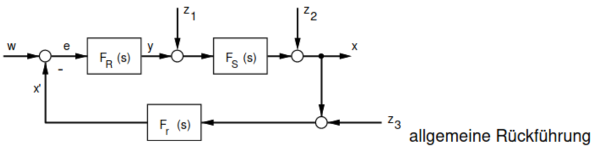
3 Zusammenwirken mehrerer Systeme

3.1 Regelkreis

Anforderungen:

- Stabilität: Regelkreis muss stabiles Verhalten zeigen (gilt auch für instabile Systeme)
- Gutes Führungsverhalten: Die Differenz zw. Sollwert w(t) und Istwert x(t) muss schnell klein werden.
- Gutes Störverhalten: Einfluss von Störgrößen soll vermindert werden.

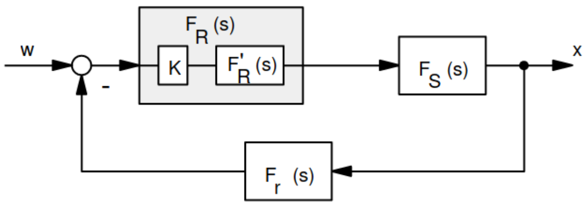
Grundstruktur des einschleifigen Regelkreises:



Regler	$F_R(s)$	Regelstrecke $F_S(s)$	bleibende Regeldifferenz e (oder x_d) für $x_e = a\cdot\sigma(t)$ (Sprung) mit Rückführverstärkung K_r	für $x_e = a\cdot t$ (Rampe) mit Einheitsrückführung
P (D)	K_P	P-Verhalten $(P, PT1, PT2, ...)$ $F_S(s) = K_S \frac{(1+...s)...}{(1+...s)...}$	$a\frac{1}{1+K_P\cdot K_S\cdot K_r}$	∞
I	$\frac{K_I}{s}$		0	$a\frac{1}{K_I\cdot K_S}$
PI (D)	$K_P+\frac{K_I}{s}$		0	$a\frac{1}{K_I\cdot K_S}$
I^2	$\frac{K_I}{s^2}$		0	0
P (D)	K_P	I-Verhalten $(I, PI, IT1, ...)$ $F_S(s) = K_S \frac{(1+...s)...}{s(1+...s)...}$	0	$a\frac{1}{K_P\cdot K_S}$
I	$\frac{K_I}{s}$		0	0
PI (D)	$K_P+\frac{K_I}{s}$		0	0

3.2 Wurzelortskurven (WOK)-Verfahren

Reglerfunktion F_R in Reglerverstärkung und Reglerdynamik aufspalten: $F_R = K \cdot F'_R$



$$\Rightarrow F_w(s) = \frac{F_R \cdot F_S}{1 + F_R \cdot F_S \cdot F_r}$$

Dabei ist $F_o = F_R \cdot F_S \cdot F_r$ die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises. F_o kann auch in faktorisierter Form angegeben werden:

$$\begin{aligned} F_w(s) &= F_R(s) \cdot F_S(s) \cdot F_r(s) \\ &= K \cdot F'_R(s) \cdot F_S(s) \cdot F_r(s) \\ &= K \cdot Q \cdot \frac{\prod_{u=1}^{m}(s - s_{\text{Nou}})}{\prod_{v=1}^{n}(s - s_{\text{pov}})} \end{aligned}$$

Für eine Polstele, muss der Nenner von $F_w(s)$ Null werden:

$$\frac{F_R(s) \cdot F_S(s)}{1 + F_o(s)} \Rightarrow 1 + F_o(s) \overset{!}{=} 0$$

Daraus folgt:

$$\Rightarrow 1 + K \cdot Q \cdot \frac{\prod_{M=1}^{m}(s - s_{\text{Nou}})}{\prod_{v=1}^{n}(s - s_{\text{por}})}$$

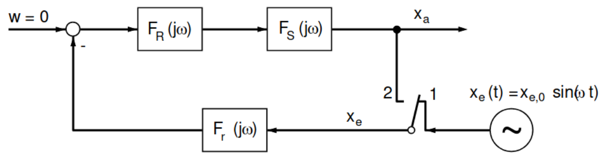
$$\Rightarrow \frac{\prod_{v=1}^{n}(s - s_{\text{pov}})}{\prod_{u=1}^{m}(s - s_{\text{Nou}})} \overset{!}{=} -K \cdot Q$$

Entspricht: $\frac{\texttt{Multiplikation aller PS zum gesuchten Punkt}}{\texttt{Multiplikation aller NS zum gesuchten Punkt}}$

3.3 Konstruktion der WOK

1. Alle n Äste der WOK beginnen mit K=0 in den n Polen s_pov des offenen Regelkreises.
2. m Äste der WOK enden für K $\rightarrow \pm\infty$
3. n -m Äste der WOK enden für K $\rightarrow \pm\infty$ im Unendlichen
4. Die n-m ins Unendliche strebende Äste der WOK haben Asymptoten,die
   a) im Wurzelschwerpunkt
   $$S_w = \frac{\sum_{v=1}^{n} s_{pov} - \sum_{u=1}^{m} s_{Nop}}{n - m}$$
   beginnen und die dabei
   b) mit der reellen Achse die Winkel
   $\varphi_k = \frac{(2k-1)\cdot 180°}{n-m}$ für KQ > 0 bzw.
   mit k = 1,2,3,...,n-m
5. Die Punkte der WOk liegen entweder auf der reelen Achse, oder symmetrisch zur reelen Achse
6. Ein Punkt s auf der reellen Achse ist dann ein Punkt der WOK, wenn sich bei KQ > 0 (KQ<0) rechts von ihm eine ungerade (gerade) Anzahl von Polen s_{pov} und (+) Nullstellen s_{Nov} befindet.
   Achtung: WOK ist nicht anwendbar, wenn es sich um nicht rationale Übertragungsfunktionen handelt. (z.B. Regelkreis mit Totzeitverhalten!)

3.4 Nyquist Kriterium



Frequenzgangfunktion des offenen Regelkreises:

$$F_o(j\omega) = F_r(j\omega) \cdot F_R(j\omega) \cdot F_S(j\omega)$$

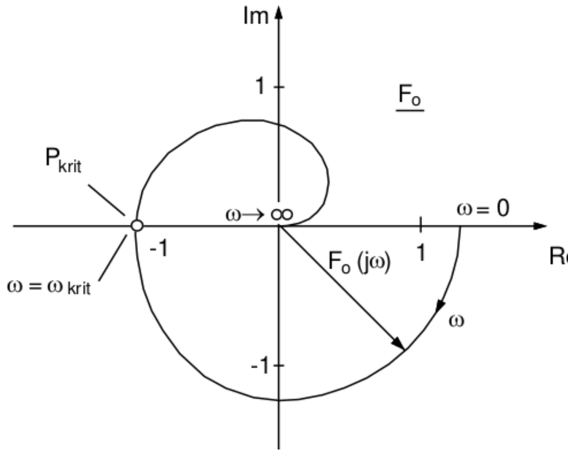
Ausgangssignal:

$$\begin{aligned} x_a(t) &= -F_r(j\omega) \cdot F_R(j\omega) \cdot F_S(j\omega) \cdot x_{e0} sin(\omega t) \\ &= -F_0(j\omega) \cdot x_e(t) \end{aligned}$$

Regler und seine Parameter werden so gewählt, dass $\omega = \omega_{krit}$ gilt:

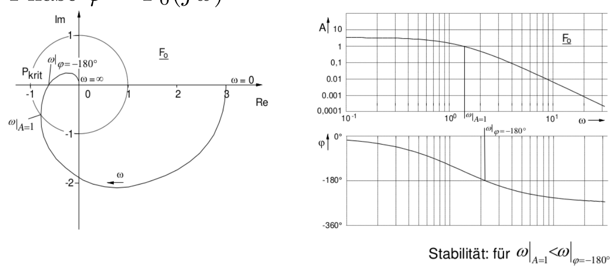
$$-F_0(j\omega_{krit}) = 1 \text{ oder } F_0(j\omega_{krit}) = -1 \quad \texttt{(Schwingbedingung)}$$

Die Schwingbedingung ist erfüllt, wenn die Ortskurve von $F_1(j\omega)$ durch den kritischen Punkt ($P_{krit} = -2 + j0$) der komplexen F_0-Ebene geht.
An diesem Punkt kann man ω_{krit} ablesen (damit kann der Regelkreis Dauerschwingungen ausführen).
Für größere ω ist das System instabil, für kleinere stabil.

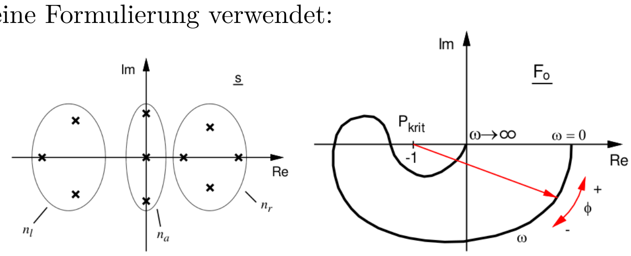


Falls F(s) des offenen Kreises keine Pole in der rechten Halbebene hat und nur max. 2 im Ursprung der s-Ebene, ist der Regelkreis stabil, wenn der kritische Punkt von ω immer links von s = -1 + 0j liegt.
(gilt immer wenn der offene Kreis stabil ist)

Zur Auswertung des Nyquist-Kriteriums im Bode Diagramm, spaltet man die Ortskurve nach Betrag A = $|F_0(jw)$ und Phase $\varphi = F_0(jw)$



Falls die Bedingung nicht funktioniert, wird die allgemeine Formulierung verwendet:



Der geschlossene Regelkreis ist stabil, wenn der Fahrstrahl von P_{krit} = -1 +j0 zu $F_0(jw)$ für wachsendes ω von +0 bis $+\infty$ eine Winkeländerung $\underset{\omega=+0}{\overset{\omega=+\infty}{}} \Delta\phi_{soll} = n_r \cdot 180° + n_a \cdot 90°$ erfährt.
n_r: Anzahl der Pole rechts der imaginären Achse
n_a: Anzahl der Pole auf der imaginären Achse

Phasenrad/Phasenreserve:

Aus Bodediagramm ablesen: Bei Verstärkung von 1,

Winkeln von -180° nach oben rechnen

Für befriedigendes Verhalten bei Störungen gilt: $\varphi_R \geq 30°$

Für gutes Verhalten (überschwingungsarm) gilt: $\varphi_R \approx 60°$

Für gutes Verhalten (überschwingungsfrei) gilt: $\varphi_R \geq 80°$

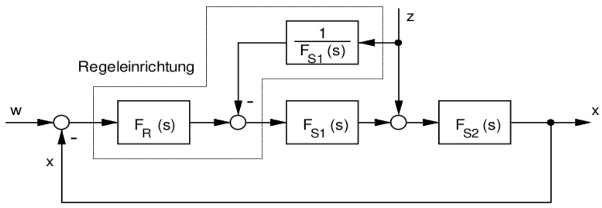
3.5 Einstellregler Ziegler/Nichols

3.5.1 Maßnahmen zur Verbesserung des Regelkreisverhaltens und Erweiterungen der Regelkreisstruktur

Reglertyp	K_P	T_N	T_V
P	0,50 · $K_{P,krit}$	-	-
PI	0,45 · $K_{P,krit}$	0,85 · T_{krit}	-
PD	0,80 · $K_{P,krit}$	-	0,12 · T_{krit}
PID	0,60 · $K_{P,krit}$	0,50 · T_{krit}	0,12 · T_{krit}

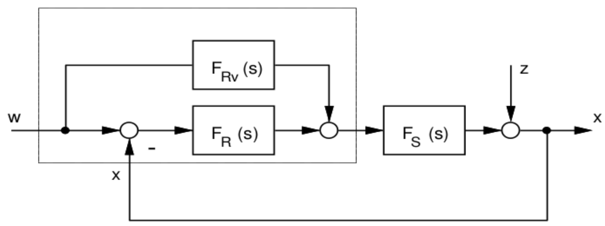
Störgrößenaufschaltung:

Falls Angriffsort einer Störgröße bekannt,kann man wie im Bild kompensieren.
Vorteil: einfacher Regler Entwurf, deutlich schnellere Ausregelung.



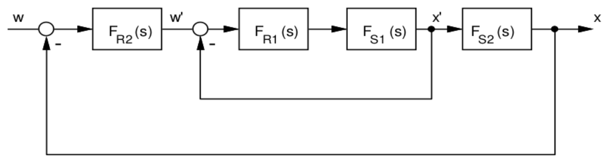
Vorsteuerung:

Geeignet, falls kein Kompromiss für gutes Stör und Folgeverhalten.
Regler ist auf gutes Störverhalten ausgelegt. Mit F_{Rv} wird ein schnelles Folgen auf Führungssignale w(t) erreicht.



Kaskadenregelung:

Ineinander geschachtelte Regelkreise (innere Regelkreise „schneller“). „Innere“ Störungen können bereits innen ausgeregelt werden. Können von Innen nach Außen in Betrieb genommen werden.

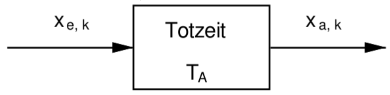


4 Digitale Regler

4.1 Allgemeines

4.1.1 z-Transformation

Wert der bei t = k $\cdot T_A$ ausgegeben wird, wird bei t = (k-1) $\cdot T_A$ eingelesen. (Verzögerung um einen Abtastschritt):



	Kontinuierlich	Zeitdiskret
Zeitbereich	$x_a(t) = x_e(t - T_A)$	$x_{a,k} = x_{e,k-1}$
Bildbereich	$X_a(s) = e^{-s \cdot TA} \cdot X_e(s)$ (Laplace-Transformation)	$X_a(z) = z^{-1} \cdot X_e(z)$ (z-Transformation)

Bei der z-Transformation entspricht $e^{-s \cdot TA}$ der Laplace-Transformation dem Ausdruck z^{-1}. Bzw. z $\hat{=}$ $e^{s \cdot TA}$ Transformation vom s-Bereich in den z-Bereich:

$$s \hat{=} e^{s \cdot TA}$$

Vorwärts-Differenzen-quotient

$$s \hat{=} \frac{z-1}{T_A}$$

$\Rightarrow$ Der digitale Regler kann folgend berechnet werden:

$$F(z) = F(z)|_{s=\frac{z-1}{T_A}}$$

Tustinsche Formel

$$s \hat{=} \frac{2}{T_A} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

Rückwärts-Differenzen-quotient

5 Systembeschreibung im Zustandsraum

5.1 Allgemein (Mehrgrößensystem MIMO)

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \quad x(0) = x_0$$
$$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t) + D\vec{u}(t)$$

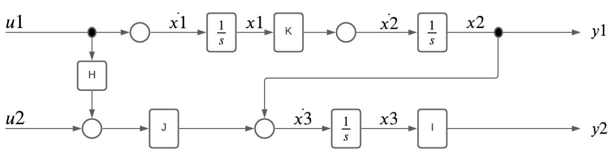


Abbildung 1: Signalflussplan

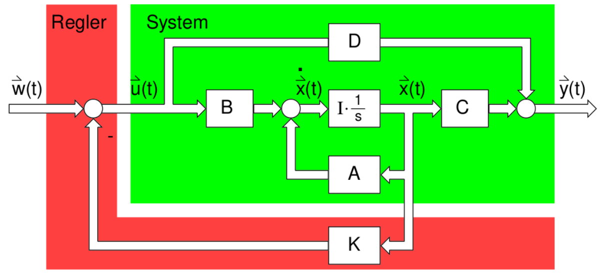
$$\dot{x}_1 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2$$
$$\dot{x}_2 = K \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2$$
$$\dot{x}_3 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + H \cdot J \cdot u_1 + J \cdot u_2$$
$$\dot{y}_1 = 0 \cdot x_1 + 1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2$$
$$\dot{y}_2 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + l \cdot x_3 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ H \cdot J & J \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eigenwerte einer Matrix bestimmen (z.B. A): det(A - sI) $\overset{!}{=}$ 0

Polfestlegung durch vollständige Zustandsrückführung



Durch die freie Wahl von K können alle n Pole des Systems beliebig platziert werden.
Rückführungsverstärkung: von jedem X einen Pfad zur größten Ableitung mit Verstärkung K zeichnen. Über neue Matrix und deren determinante kann dann die Reglerverstärkung bestimmt werden.

5.2 Programmtechnische Umsetzung

Zähler und Nenner der z-Übertragungsfunktion durch die höchste Potenz teilen

```
while(1)
{
    waitinterrupt(); //Abtastzeit warten
    xout2 = xout1;
    xout1 = xout;
    xin2 = xin1;
    xin1 = xin;
    input(xin);
    xout = k*xout2 - j*xin1 + o*xout1;
    output(xa);
}
```