

1 Grundlagen

Linearisierung um Arbeitspunkt:

$$x_a(t) = x_{a,AP} + \Delta x_a(t) \approx x_{a,AP} + \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_{ei,AP}} \cdot \Delta x_{ei}(t) \right)$$

Kräftegleichungen:

Federkraft: $F_F = k_F \cdot x$
 Dampfkraft: $F_D = k_D \cdot v = k_D \cdot \dot{x}$
 Trägheitskraft: $F_{Tr} = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$
 Erdanziehungskraft: $F_G = m \cdot g$

Moment Gleichungen:

Widerstandsmoment: $M_w = k_D \cdot \omega$
 Trägheitsmoment: $M_{TR} = J \cdot \dot{\omega}$

Spannungsgleichung:

$$U = L \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot R + \frac{1}{C} \cdot \int i$$

Für kleine Winkel α gilt: $\sin(\alpha) = \alpha$

Rotation in Flüssigkeit:

$$M = M_{Träg} + M_{Brems} = J \cdot \dot{\omega} + k_{Flüssigkeit} \cdot \omega$$

Partialbruchzerlegung (siehe Papula s.157ff)

2 Systemtechnik

2.1 Modellbildung

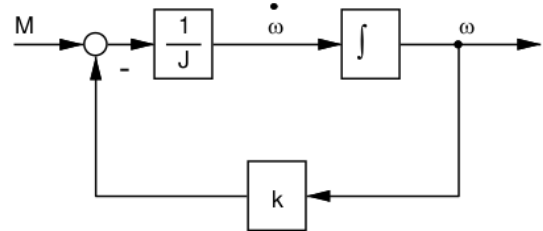
Hinweise zum aufstellen der Differentialgleichung eines Systems:

1. Bestimmung der Ein- und Ausgangsgrößen
2. Suche nach dem beschreibenden Gleichgewicht
3. In der Gleichung dürfen nur Konstanten, sowie die Ein- und Ausgangsgrößen in beliebiger Ableitung vorkommen
4. Andere Variablen müssen durch erlaubte Größen ersetzt werden
(Dazu können i.a. physikalische Gleichungen benutzt werden)

2.2 Signalflussplan/Blockschaltbild

Erzeugung des Signalflussplans aus der Zugehörigen DGL.

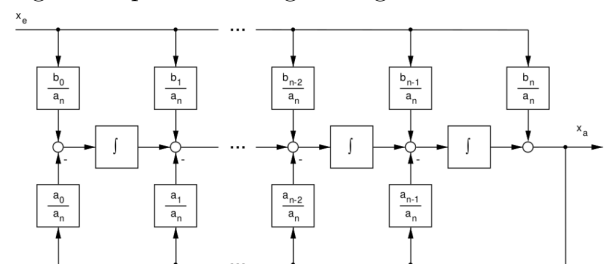
1. für technische Realisierung gilt: $m < n$;
2. DGL. nach höchster Ableitung der Ausgangsgröße auflösen
3. höchste Ableitung der Ausgangsgröße geht auf den Eingang des ersten Integrators
(Laplace-Trans ersetzt das Integrieren mit einer Division mit „s“)



Erzeugung des Signalflussplans eines Systems mit der DGL.:

$$a_n x_a^{(n)} + \dots + a_2 \ddot{x}_a + a_1 \dot{x}_a + a_0 x_a = b_n x_e^{(n)} + \dots + b_2 \ddot{x}_e + b_1 \dot{x}_e + b_0 x_e$$

Signalflussplan kann allgemein gezeichnet werden:

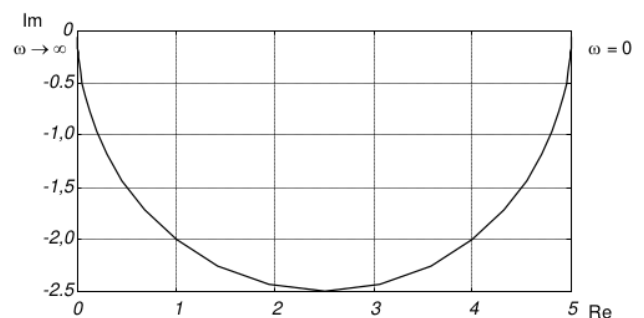


2.3 Stabilität

BIBO-Stabilität (Bounded Input/ Bounded Output > begrenzt):
 ein dynamisches System ist stabil, wenn gilt:
 für ein begrenztes x_e gibt es immer ein begrenztes x_a

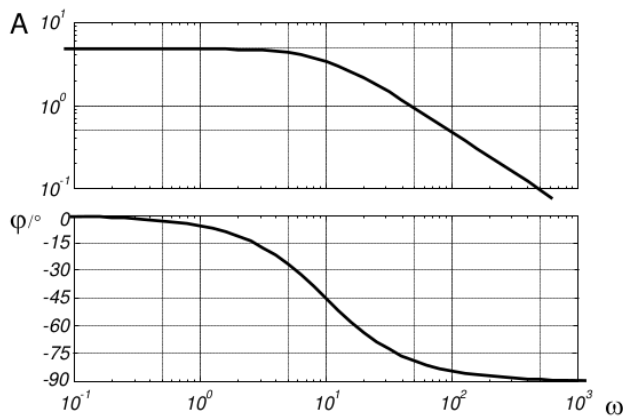
2.4 Ortskurven und Frequenzkennlinien

Ortskurvendarstellung:



Für wachsendes ω werden die komplexen Werte $F(j\omega)$ in die komplexe F-Ebene eingetragen und zur Ortskurve verbunden.
 Jeder Ortskurvenpunkt kann jetzt als Zeiger gedeutet werden.

Bodediagramm Darstellung:



Der Amplitudengang $A(\omega)$ wird in doppelt-logarithmischer Darstellung aufgetragen, der Phasengang $\varphi(\omega)$ halblogarithmisch. Gemeinsame Abszisse ist ω .

Bei diesem Beispiel (PT1-Glied) ist deutlich der Tiefpass-Charakter zu erkennen.

Verkettete Funktionen im Bodediagramm resultieren als Produkt der Einzelübertragungsfunktionen.

D.h. Verstärkung wird multipliziert und Phasenverschiebung addiert.

Das heißt: Sowohl Phasengang (halblogarithmische Darstellung) und Amplitudengang (logarithmische Darstellung) werden graphisch addiert!

2.5 $F(s)$ in Pol- und Nullstellenform

Zähler- und Nennerpolynom von $F(s)$ besitzt Nullstellen. Diese sind von a_v und b_u abhängig.

Nullstellen des Zählers sind Nullstellen von $F(s)$

Nullstellen des Nenners sind Polstellen von $F(s)$

Wenn Pole s_{pv} und Nullstellen s_{nu} bekannt, kann man $F(s)$ mit dem Faktor Q in faktorisierte Form darstellen.

$$F(s) = Q \cdot \frac{\prod_{\mu=1}^m (s - s_{N\mu})}{\prod_{v=1}^n (s - s_{pv})} \quad \text{mit } Q = \frac{b_m}{a_n}$$

Die Stabilität von $F(s)$ kann anhand der Lage der Pole s_{pv} in der s -Ebene beurteilt werden.

$F(s)$ ist stabil, wenn alle Pole s_{pv} in der linken s -Halbebene liegen.

Instabile Pole in der Rechten Halbebene lassen sich nicht durch Reihenschaltung mit entsprechender Nullstelle kompensieren!

Bedeutung Polstelle:

Pole bewirken ein zeitverzögertes Verhalten. Je weiter links sie sich befinden, desto schneller ist der Einschwingvorgang.

⇒ Wenn Pole deutlich weiter links liegen als andere, kann man sie ohne großen Fehler vernachlässigen.

Bedeutung Nullstelle:

NS bewirken ein differenzierendes Verhalten (Beschleunigung des Systems) Einfluss weit links in der s -Ebene kann häufig vernachlässigt werden.

2.6 Signalflussplan Algebra

Kettenstruktur:

$$X_e(s) \xrightarrow{F_1(s)} X_{a1}(s) = X_{e2}(s) \xrightarrow{F_2(s)} X_a(s) \Rightarrow X_a(s) = F_2(s) \cdot F_1(s) \cdot X_e(s)$$

$$F_{\text{Reihe}}(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Parallelstruktur:

$$X_e(s) \xrightarrow{\begin{matrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{matrix}} X_{a1}(s) \\ X_{a2}(s) \Rightarrow X_a(s) = F_1(s) \cdot X_e(s) + F_2(s) \cdot X_e(s)$$

$$F_{\text{Parallel}}(s) = F_1(s) + F_2(s)$$

Matlab Code:

```
F1 = tf([2], [1 4]); F2 = tf([3], [5 1]);
FR = F1*F2; FP = F1+F2
```

Kreisstruktur:

$$X_e(s) \xrightarrow{\begin{matrix} F_v(s) \\ F_r(s) \end{matrix}} X_a(s) \Rightarrow F_{\text{Kreis}}(s) = \frac{F_v(s)}{1 + (-)F_v(s)F_r(s)}$$

∴ Gegenkopplung, regelungstechnisch interessanter
(+): Mitkopplung

Verschieben einer Additionsstelle:

$$X_{e1}(s) \xrightarrow{F(s)} X_a(s) \xrightarrow{X_{e2}(s)} = X_{e1}(s) \xrightarrow{\begin{matrix} 1 \\ F(s) \end{matrix}} X_a(s)$$

Verschieben einer Verzweigung:

$$X_e(s) \xrightarrow{\begin{matrix} X_{a1}(s) \\ F(s) \end{matrix}} X_{a2}(s) = X_e(s) \xrightarrow{F(s)} X_{a2}(s) \xrightarrow{\begin{matrix} 1 \\ F(s) \end{matrix}} X_{a1}(s)$$

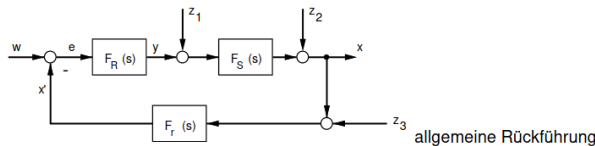
3 Zusammenwirken mehrerer Systeme

3.1 Regelkreis

Anforderungen:

- Stabilität: Regelkreis muss stabiles Verhalten zeigen (gilt auch für instabile Systeme)
- Gutes Führungsverhalten: Die Differenz zw. Sollwert $w(t)$ und Istwert $x(t)$ muss schnell klein werden.
- Gutes Störverhalten: Einfluss von Störgrößen soll vermindert werden.

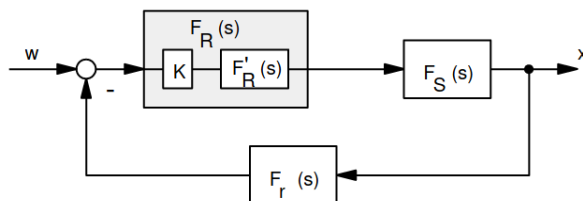
Grundstruktur des einschleifigen Regelkreises:



Regler	$F_R(s)$	Regelstrecke $F_S(s)$	bleibende Regeldifferenz e (oder x_d)	
			für $x_e = a \cdot \sigma(t)$ (Sprung) mit Rückführverstärkung K_r	für $x_e = a \cdot t$ (Rampe) mit Einheitsrückführung
P (D)	K_p	P-Verhalten (P, PT1, PT2, ...) $F_S(s) = K_s \frac{(1+...s)...}{(1+...s)...}$	$a \frac{1}{1+K_p \cdot K_s \cdot K_r}$	∞
I	$\frac{K_I}{s}$		0	$a \frac{1}{K_I \cdot K_s}$
PI (D)	$K_p + \frac{K_I}{s}$		0	$a \frac{1}{K_I \cdot K_s}$
I ²	$\frac{K_I}{s^2}$		0	0
P (D)	K_p	I-Verhalten (I, PI, IT1, ...) $F_S(s) = K_s \frac{(1+...s)...}{s(1+...s)...}$	0	$a \frac{1}{K_p \cdot K_s}$
I	$\frac{K_I}{s}$		0	0
PI (D)	$K_p + \frac{K_I}{s}$		0	0

3.2 Wurzelortskurven (WOK)-Verfahren

Reglerfunktion F_R in Reglerverstärkung und Reglerdynamik aufspalten: $F_R = K \cdot F'_R$



$$\Rightarrow F_w(s) = \frac{F_R \cdot F_S}{1 + F_R \cdot F_S \cdot F_T}$$

Dabei ist $F_o = F_R \cdot F_S \cdot F_T$ die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises. F_o kann auch in faktorisierter Form angegeben werden:

$$\begin{aligned} F_w(s) &= F_R(s) \cdot F_S(s) \cdot F_T(s) \\ &= K \cdot F'_R(s) \cdot F_S(s) \cdot F_T(s) \\ &= K \cdot Q \cdot \frac{\prod_{u=1}^m (s - s_{\text{Nou}})}{\prod_{v=1}^n (s - s_{\text{pov}})} \end{aligned}$$

Für eine Polstelle, muss der Nenner von $F_w(s)$ Null werden:

$$\frac{F_R(s) \cdot F_S(s)}{1 + F_o(s)} \Rightarrow 1 + F_o(s) \stackrel{!}{=} 0$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 1 + K \cdot Q \cdot \frac{\prod_{M=1}^m (s - s_{\text{Nou}})}{\prod_{v=1}^n (s - s_{\text{pov}})} \\ &\Rightarrow \frac{\prod_{v=1}^n (s - s_{\text{pov}})}{\prod_{u=1}^m (s - s_{\text{Nou}})} \stackrel{!}{=} -K \cdot Q \end{aligned}$$

Entspricht: $\frac{\text{Summe des Abstands aller Polstellen zum gesuchten Punkt}}{\text{Summe des Abstands aller Nullstellen zum gesuchten Punkt}}$

3.3 Konstruktion der WOK

1. Alle n Äste der WOK beginnen mit $K=0$ in den n Polen s_{pov} des offenen Regelkreises.
2. m Äste der WOK enden für $K \rightarrow \pm\infty$ in den m Nullstellen s_{Nou} des offenen Regelkreises.
3. $n-m$ Äste der WOK enden für $K \rightarrow \pm\infty$ im Unendlichen
4. Die $n-m$ ins Unendliche strebende Äste der WOK haben Asymptoten, die
 - a) im Wurzelschwerpunkt

$$S_w = \frac{\sum_{v=1}^n s_{pov} - \sum_{u=1}^m s_{Nou}}{n-m}$$

beginnen und die dabei

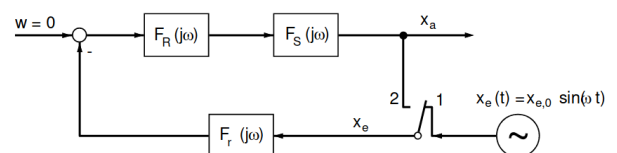
b) mit der reellen Achse die Winkel

$$\varphi_k = \frac{(2k-1) \cdot 180^\circ}{n-m} \text{ für } KQ > 0 \text{ bzw. mit } k = 1, 2, 3, \dots, n-m$$

5. Die Punkte der WOK liegen entweder auf der reellen Achse, oder symmetrisch zur reellen Achse
6. Ein Punkt s auf der reellen Achse ist dann ein Punkt der WOK, wenn sich bei $KQ > 0$ ($KQ < 0$) rechts von ihm eine ungerade (gerade) Anzahl von Polen s_{pov} und (+) Nullstellen s_{Nou} befindet.

Achtung: WOK ist nicht anwendbar, wenn es sich um nicht rationale Übertragungsfunktionen handelt. (z.B. Regelkreis mit Totzeitverhalten!)

3.4 Nyquist Kriterium



Frequenzgangfunktion des offenen Regelkreises:

$$F_o(j\omega) = F_T(j\omega) \cdot F_R(j\omega) \cdot F_S(j\omega)$$

Ausgangssignal:

$$\begin{aligned} x_a(t) &= -F_T(j\omega) \cdot F_R(j\omega) \cdot F_S(j\omega) \cdot x_{e0} \sin(\omega t) \\ &= -F_o(j\omega) \cdot x_e(t) \end{aligned}$$

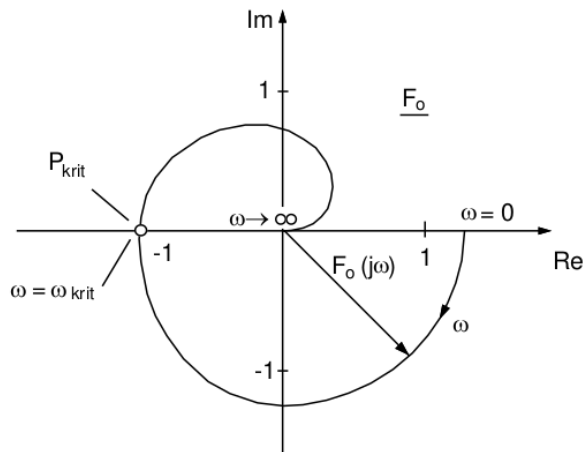
Regler und seine Parameter werden so gewählt, dass $\omega = \omega_{krit}$ gilt:

$$-F_o(j\omega_{krit}) = 1 \text{ oder } F_o(j\omega_{krit}) = -1 \text{ (Schwingbedingung)}$$

Die Schwingbedingung ist erfüllt, wenn die Ortskurve von $F_1(j\omega)$ durch den kritischen Punkt ($P_{krit} = -2 + j0$) der komplexen F_o -Ebene geht.

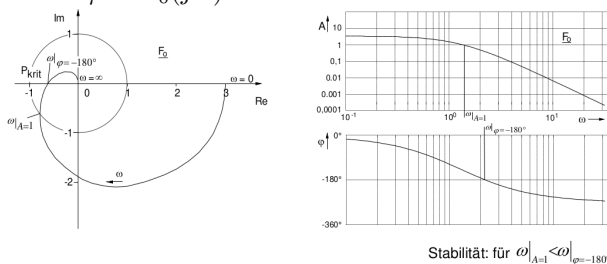
An diesem Punkt kann man ω_{krit} ablesen (damit kann der Regelkreis Dauerschwingungen ausführen).

Für größere ω ist das System instabil, für kleinere stabil.

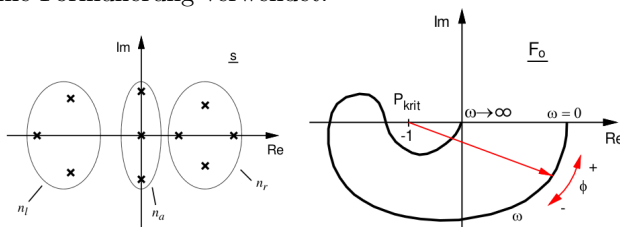


Falls $F(s)$ des offenen Kreises keine Pole in der rechten Halbebene hat und nur max. 2 im Ursprung der s -Ebene, ist der Regelkreis stabil, wenn der kritische Punkt von ω immer links von $s = -1 + 0j$ liegt.
(gilt immer wenn der offene Kreis stabil ist)

Zur Auswertung des Nyquist-Kriteriums im Bode Diagramm, spaltet man die Ortskurve nach Betrag $A = |F_0(j\omega)|$ und Phase $\varphi = \angle F_0(j\omega)$



Falls die Bedingung nicht funktioniert, wird die allgemeine Formulierung verwendet:



Der geschlossene Regelkreis ist stabil, wenn der Fahrstrahl von $P_{krit} = -1 + j0$ zu $F_0(j\omega)$ für wachsendes ω von $+0$ bis $+\infty$ eine Winkeländerung $\Delta\phi_{soll} = n_r \cdot 180^\circ + n_a \cdot 90^\circ$ erfährt.
 n_r : Anzahl der Pole rechts der imaginären Achse
 n_a : Anzahl der Pole auf der imaginären Achse

Phasenrad/Phasenreserve:

Aus Bodediagramm ablesen: Bei Verstärkung von 1, Winkeln von -180° nach oben rechnen

Für befriedigendes Verhalten bei Störungen gilt: $\varphi_R \geq 30^\circ$

Für gutes Verhalten (überschwingungsarm) gilt: $\varphi_R \approx 60^\circ$

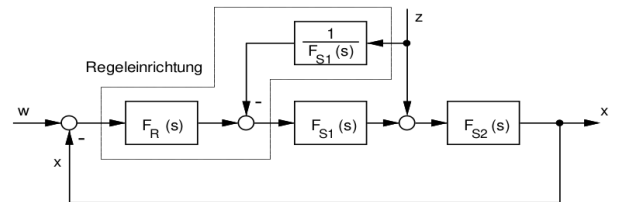
Für gutes Verhalten (überschwingungsfrei) gilt: $\varphi_R \geq 80^\circ$

3.5 Einstellregler Ziegler/Nichols

3.5.1 Maßnahmen zur Verbesserung des Regelkreisverhaltens und Erweiterungen der Regelkreisstruktur

Störgrößenaufschaltung:

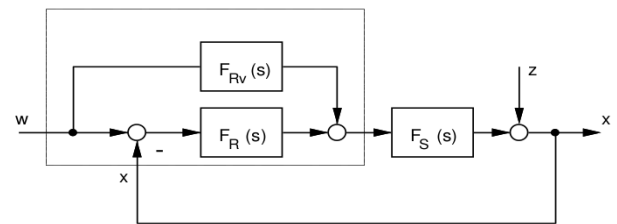
Falls Angriffsort einer Störgröße bekannt, kann man wie im Bild kompensieren.
Vorteil: einfacher Regler Entwurf, deutlich schnellere Ausregelung.



Vorsteuerung:

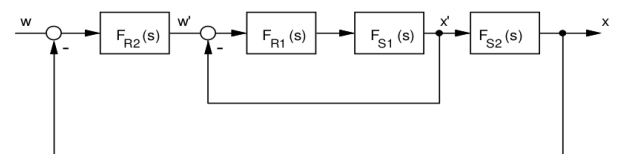
Geeignet, falls kein Kompromiss für gutes Stör- und Folgeverhalten.

Regler ist auf gutes Störverhalten ausgelegt. Mit F_{Rv} wird ein schnelles Folgen auf Führungssignale $w(t)$ erreicht.



Kaskadenregelung:

Ineinander geschachtelte Regelkreise (innere Regelkreise „schneller“). „Innere“ Störungen können bereits innen ausgeglichen werden. Können von Innen nach Außen in Betrieb genommen werden.

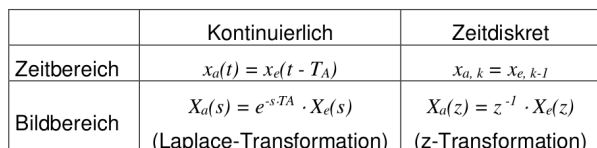


4 Digitale Regler

4.1 Allgemeines

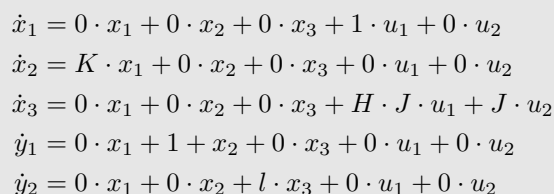
4.1.1 z-Transformation

Wert der bei $t = k \cdot T_A$ ausgegeben wird, wird bei $t = (k-1) \cdot T_A$ eingelesen. (Verzögerung um einen Abtastschritt):


$$s \triangleq e^{s \cdot T A}$$
$$s \triangleq \frac{z-1}{T_A}$$
$$F(z) = F(z)|_{s=\frac{z-1}{T_A}}$$
$$s \hat{=} \frac{2}{T_A} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

The diagram illustrates a closed-loop control system. The **Regler** (red background) contains blocks **K** and **D**. The **System** (green background) contains blocks **B**, **C**, and an integrator $I \cdot \frac{1}{s}$. The reference $\vec{w}(t)$ is compared with the feedback $\vec{y}(t)$ at a summing junction. The error $\vec{u}(t)$ is processed by block **B** and the integrator to produce the derivative of the state $\dot{\vec{x}}(t)$. This derivative is integrated by the integrator to produce the state $\vec{x}(t)$, which is then processed by block **C** to produce the output $\vec{y}(t)$. The output $\vec{y}(t)$ is fed back through block **K** to the summing junction and through block **D** to the integrator input.

```
1 while(1)
2 {
3     waitinterrupt();
4     xout2 = xout1;
5     xout1 = xout;
6     xin2 = xin1;
7     xin1 = xin;
8     input(xin);
9     xout = k*xout2 - j*xin1 + o*xout1;
10    output(xa);
11 }
```

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) & x(0) &= x_0 \\ \vec{y}(t) &= C\vec{x}(t) + D\vec{u}(t)\end{aligned}$$


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ H \cdot J & J \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$