

# 概率论笔记和习题

ayhe123

更新: 2022 年 11 月 18 日

## 1 第 1 章笔记

设  $T$  是 (有限或可列或不可列的) 指标集. 定义

$$\bigcup_{t \in T} A_t := \{x : \exists t \in T, x \in A_t\}, \quad \bigcap_{t \in T} A_t := \{x : \forall t \in T, x \in A_t\}. \quad (1.1)$$

用 “ $\exists$ ” 和 “ $\forall$ ” 来定义无穷集合的并和交是非常重要的观念, 因为对于无穷集合, 很难用直观的方法 (比如 Venn 图) 来理解.

**定理 1.1 (De-Morgan)** 设  $T$  是指标集, 则

$$\overline{\bigcup_{t \in T} A_t} = \bigcap_{t \in T} \overline{A_t}, \quad \overline{\bigcap_{t \in T} A_t} = \bigcup_{t \in T} \overline{A_t}.$$

证明. 有

$$\begin{aligned} \overline{\bigcup_{t \in T} A_t} &= \{x : \neg(\exists t \in T, x \in A_t)\} \\ &= \{x : \forall t \in T, x \notin A_t\} \\ &= \{x : \forall t \in T, x \in \overline{A_t}\} = \bigcap_{t \in T} \overline{A_t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\bigcap_{t \in T} A_t} &= \{x : \neg(\forall t \in T, x \in A_t)\} \\ &= \{x : \exists t \in T, x \notin A_t\} \\ &= \{x : \exists t \in T, x \in \overline{A_t}\} = \bigcup_{t \in T} \overline{A_t}. \end{aligned}$$

**定理 1.2** 设  $T_1, T_2$  是指标集, 则

$$\left( \bigcup_{t \in T_1} A_t \right) \cap \left( \bigcup_{u \in T_2} A_u \right) = \bigcup_{\substack{t \in T_1 \\ u \in T_2}} A_t \cap A_u, \quad \left( \bigcap_{t \in T_1} A_t \right) \cup \left( \bigcap_{u \in T_2} A_u \right) = \bigcap_{\substack{t \in T_1 \\ u \in T_2}} A_t \cup A_u.$$

**证明.** 第一个等式的两边都表示集合  $\{\omega : \exists t \in T_1, \exists u \in T_2, \omega \in A_t \wedge \omega \in A_u\}$ , 第二个等式的两边都表示集合  $\{\omega : \forall t \in T_1, \forall u \in T_2, \omega \in A_t \vee \omega \in A_u\}$ .

书上的例 4.3 中, 集合序列  $\frac{\#(C \cap B_n)}{n}$  单调递增且有上界 1,  $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#(C \cap B_n)}{n}$  一定存在.

书上的定理 6.1 中, 取交或并的下限不一定是 1, 比如对单调增的序列,  $\forall m \in \mathbb{N}_+$  都有

$$P \left( \bigcup_{j=m}^{\infty} A_j \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

由概率的连续性可以得到下面的定理:

**定理 1.3**

$$P \left( \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} P \left( \bigcup_{j=n}^m A_j \right), \quad P \left( \bigcap_{j=n}^{\infty} A_j \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} P \left( \bigcap_{j=n}^m A_j \right).$$

**证明.** 这里只证明第一个等式, 另一个类似.

设  $C_m = \bigcup_{j=n}^m A_j$ , 则  $C_m$  是单调增的.  $\therefore$

$$RHS = \lim_{m \rightarrow \infty} P(C_m) = P \left( \bigcup_{j=n}^{\infty} C_j \right) = P \left( \bigcup_{j=n}^{\infty} \bigcup_{k=n}^j A_k \right) = LHS.$$

## 2 第 1 章习题

**习题 1.13** 直径为 1 的硬币随机落在均匀的方格纸上, 问方格的边长为多少才能使硬币和网格不相交的概率小于 0.01.

**解.** 作硬币的外接正方形  $S$ , 使得  $S$  的各边与网格平行. 容易看出, 硬币和网格相交当且仅当  $S$  和网格相交.

$\therefore S$  是硬币的外接正方形,  $\therefore S$  的边长为 1.

考虑  $S$  的任一顶点 (下面以左下角为例)  $A$ .  $S$  和网格不相交当且仅当  $A$  位于图 1 中的蓝色区域.

设方格的边长为  $x$ , 则图 1 中的蓝色区域的边长为  $x-1$ .  $\therefore A$  是在方格上随机取点,  $\therefore A$



落在蓝色区域的概率

$$p = \frac{(x-1)^2}{x^2} \leq 0.01.$$

$$\text{解得 } \frac{1}{11} \leq x \leq \frac{10}{9}.$$

当  $x \leq 1$  时硬币和网格一定相交,  $\therefore$  条件为  $1 \leq x \leq \frac{10}{9}$ .

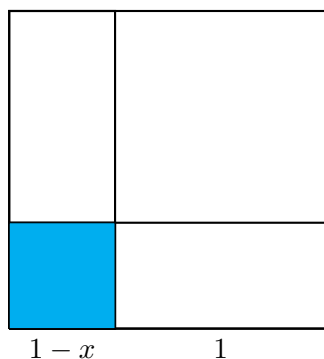


图 1:  $S$  和网格不相交的充要条件

**习题 1.14** 在同一小时内有两辆汽车独立地到达同一个加油站加油, 车  $A$  加油需要 5min, 车  $B$  加油需要 8min. 如果每辆车在这一小时内等可能地到达, 计算这两辆汽车在加油站不能相遇的概率.

**解.** 设  $A, B$  在加油站的时间分别为区间  $(x, x+5)$  和  $(y, y+8)$ , 如图 2.

考虑两辆汽车在加油站相遇的情形会比较方便. 从图 2 可以看出要使得两辆汽车在加油站相遇,  $A, B$  到达加油站的时刻  $x, y$  应满足以下条件<sup>a</sup>:

$$\begin{cases} y+8 > x, \\ x+5 > y. \end{cases}$$

设  $\Omega = [0, 60]^2$ ,  $\Omega$  中元素的第一个分量是  $A$  到达加油站的时刻, 第二个分量是  $B$  到达加油站的时刻.

设事件  $C$  表示两辆汽车在加油站相遇, 则  $C$  对应的集合为

$$\begin{cases} y+8 > x, \\ x+5 > y, \\ 0 < x < 60, \\ 0 < y < 60. \end{cases}$$

$C$  对应的区域是图 3 中的蓝色区域,  $\bar{C}$  对应的区域是图 3 左上和右下的两个三角形.

$\therefore$

$$P(\overline{C}) = \frac{\frac{55^2}{2} + \frac{52^2}{2}}{60^2} \approx 0.796.$$

<sup>a</sup> $\therefore$  区域的边界的测度为 0, 不会影响概率,  $\therefore$  不用考虑是否取等号.

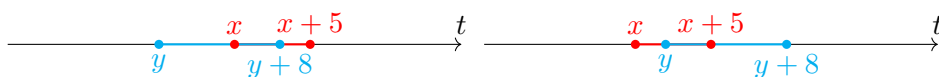


图 2:  $A, B$  在加油站相遇的两种情况, 红色表示  $A$ , 蓝色表示  $B$

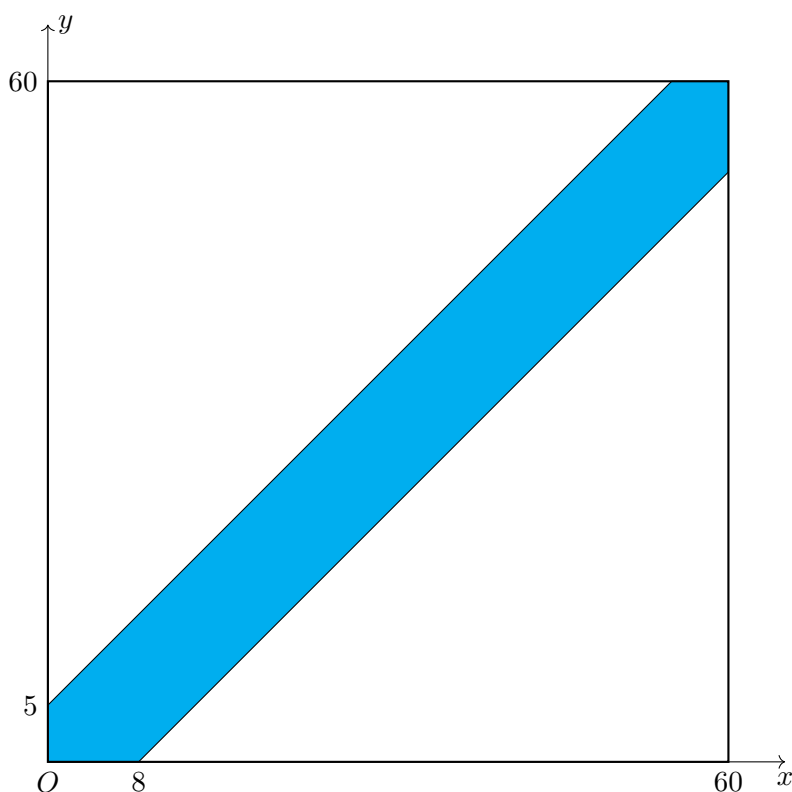


图 3:  $C$  对应的区域

习题 1.17 证明:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

证明. 设  $A_0 = \emptyset, B_j = A_j - \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i$ .

设  $\omega \in \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ . 由式 (1.1) 的定义,  $\exists i \in \mathbb{N}_+$  使得  $\omega \in B_i$ .

由  $B_i \subset A_i$  得  $\omega \in A_i$ .  $\therefore \omega \in \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ .  $\therefore \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ .

设  $\omega \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ . 由式 (1.1) 的定义,  $\exists i \in \mathbb{N}_+$  使得  $\omega \in A_i$ .

$\therefore \exists k \in \mathbb{N}_+$  使得  $\omega \in A_k$ , 且  $\forall i < k, \omega \notin A_i$ .  $\therefore \omega \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$ ,  $\therefore \omega \in B_k$ .  $\therefore \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ .

$\therefore \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ .  $\therefore$

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right).$$

$\because \forall j, k \in \mathbb{N}_+, B_j \subset A_j, B_{j+k} = A_{j+k} - \bigcup_{i=1}^{j+k-1} A_i \subset A_{j+k} - A_j$ ,  $\therefore B_j, B_{j+k}$  互不相容. 由可列可加性得

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B_j).$$

$\because B_j \subset A_j$ , 由书上的定理 5.1 (5) 得  $P(B_j) < P(A_j)$ ,  $\therefore$

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

**习题 1.18** 设  $A_1, A_2, \dots$  的概率都为 1, 证明:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) = 1, \quad P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = 1.$$

**证明.** 设  $B_i = \bar{A}_i$ , 则  $B_1, B_2, \dots$  的概率都为 0.

由书上的例 5.2 得

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n B_j\right) = 0, \quad P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = 0.$$

由书上的定理 5.1 (3) 得

$$P\left(\overline{\bigcup_{j=1}^n B_j}\right) = 1, \quad P\left(\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j}\right) = 1.$$

由定理 1.1 得

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^n \bar{B}_j\right) = P\left(\overline{\bigcup_{j=1}^n B_j}\right) = 1,$$

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bar{B}_j\right) = P\left(\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j}\right) = 1.$$

**习题 1.19** 对于事件  $A, B$ , 验证

$$P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(\bar{A}\bar{B}) = 1.$$

**证明.** 由定理 1.2 得

$$\Omega = (A + \bar{A})(B + \bar{B}) = AB + A\bar{B} + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B}.$$

容易验证  $AB, A\bar{B}, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}$  互不相容, 由可列可加性得

$$1 = P(\Omega) = P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(\bar{A}\bar{B}).$$

### 3 第 2 章笔记

补充几个定理的证明.

**定理 3.1** 如果事件  $A$  的概率为 1 或 0, 则  $A$  与任意事件  $B$  相互独立.

**证明.** 设  $P(A) = 1$ , 则由书上第 1 章的例 5.1 得  $P(AB) = P(B) = P(A)P(B)$ , 即  $A, B$  相互独立.

设  $P(A) = 0$ , 则  $P(\bar{A}) = 1$ ,  $\therefore \bar{A}, B$  相互独立,  $\therefore A, B$  相互独立.

**定理 3.2 (Borel-Cantelli 引理)** 对事件列  $\{A_n\}$ , 有:

(1) 如果  $\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) < \infty$ , 则  $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) = 0$ ;

(2) 如果  $\{A_j\}$  相互独立,  $\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) = \infty$ , 则  $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) = 1$ .

**证明.** (1) 令  $C_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j$ , 则  $C_n$  是单调减的, 由书上第 1 章的定理 6.1 得

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n).$$

由书上第 1 章的定理 5.1 (6) 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^{\infty} P(A_j).$$

$$\because \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) < \infty, \therefore \sum_{j=n}^{\infty} P(A_j) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = 0.$$

(2) 与 (1) 一样, 有

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right).$$

由定理 1.3 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{j=n}^m A_j\right).$$

由定理 1.1 得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{j=n}^m A_j\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - P\left(\bigcap_{j=n}^m \bar{A}_j\right)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{j=n}^m \bar{A}_j\right)\right). \end{aligned}$$

由书上的例 2.5 (2) 得  $\bar{A}_j$  相互独立.  $\therefore$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{j=n}^m \bar{A}_j\right)\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=n}^m P(\bar{A}_j)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=n}^m (1 - P(A_j))\right). \end{aligned}$$

$\because \forall x > 0, 1 - x \leq e^{-x}, \therefore$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=n}^m (1 - P(A_j)) \right) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=n}^m \exp(-P(A_j)) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \exp \left( - \sum_{j=n}^m P(A_j) \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \exp \left( - \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^m P(A_j) \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \exp \left( - \sum_{j=n}^{\infty} P(A_j) \right) \right). \end{aligned}$$

$\because \forall n, \sum_{j=n}^{\infty} P(A_j) = \infty, \therefore \forall n, \exp \left( - \sum_{j=n}^{\infty} P(A_j) \right) = 0. \therefore$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \exp \left( - \sum_{j=n}^{\infty} P(A_j) \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 0) = 1.$$

在第 (2) 条中有  $\{A_j\}$  相互独立的条件. 下面的例子说明, 如果  $\{A_j\}$  不相互独立, 则 Borel-Cantelli 引理不一定成立.

## 4 第 2 章习题

**习题 2.10** 某人参加微积分和线性代数的考试, 无论哪门课先考, 微积分和线性代数通过的概率分别是  $a, b$ , 在微积分先考并通过的条件下, 线性代数通过的概率是  $c$ . 当微积分先考时, 计算

- (a) 两门课都通过的概率;
- (b) 微积分没通过的条件下, 线性代数通过的概率;
- (d) 至少一门通过的概率;
- (e) 至少一门不通过的概率.

**解.** 设“微积分通过”和“线性代数通过”的事件分别为  $A, B$ , “微积分先考”的事件为  $C$ , 则  $P_C(A) = P_{\bar{C}}(A) = a, P_C(B) = P_{\bar{C}}(B) = b, P_C(B|A) = P(B|AC) = c$ .

(a) “两门课都通过”的事件为  $AB$ . 有  $P_C(AB) = P_C(B|A)P_C(A) = ac$ .



(b) “微积分没通过的条件下, 线性代数通过”的事件为  $B|\bar{A}$ . 由全概率公式,

$$P_C(B) = P_C(B|A)P_C(A) + P_C(B|\bar{A})P_C(\bar{A}) = ac + (1-a)P_C(B|\bar{A}).$$

$\therefore$

$$P_C(B|\bar{A}) = \frac{b-ac}{1-a}.$$

(d) 设“至少一门通过”的事件为  $C$ , 则  $\bar{C} = \bar{A}\bar{B}$ . 有

$$\begin{aligned} P_C(C) &= 1 - P_C(\bar{A}\bar{B}) \\ &= 1 - P_C(\bar{B}|\bar{A})P_C(\bar{A}) \\ &= 1 - (1 - P_C(B|\bar{A}))P_C(\bar{A}) \\ &= a + b - ac. \end{aligned}$$

**习题 2.12** 投 2 个均匀的骰子, 已知至少有一个骰子的点数是 3.

(a) 计算这两个骰子的点数之和为 7 的概率;

(b) 两个骰子的点数之和更有可能是 7 还是 6?

**解.** (a) 设“第一个骰子的点数为  $i$ ”的事件为  $A_i$ , “第二个骰子的点数为  $i$ ”的事件为  $B_i$ , 则“至少有一个骰子的点数是 3”的事件为  $A_3 \cup B_3$ . 由加法公式,

$$P(A_3 \cup B_3) = P(A_3) + P(B_3) - P(A_3B_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

“两个骰子的点数之和为 7 的概率”的事件为  $A_3B_4 + A_4B_3$ , 概率为  $\frac{2}{36}$ .

$\therefore$  已知至少有一个骰子的点数是 3 的情况下, 两个骰子的点数之和为 7 的概率为

$$\frac{2/36}{11/36} = \frac{2}{11}.$$

(b) “两个骰子的点数之和为 6 的概率”的事件为  $A_3B_3$ , 概率为  $\frac{1}{36}$ .

$\therefore$  已知至少有一个骰子的点数是 3 的情况下, 两个骰子的点数之和为 6 的概率为

$$\frac{1/36}{11/36} = \frac{1}{11} \leq \frac{2}{11}.$$

$\therefore$  两个骰子的点数之和更有可能是 7.

可以用两种不同的方式来看待条件概率, 一种是作为条件的事件  $C$  改变了样本空间  $\Omega$ , 另一种是  $C$  没有改变  $\Omega$ , 但改变了  $\mathcal{F}$  上的概率 (从原来的  $P$  变为  $P_C$ ). 我们通常采用后一种看法, 但有时前一种看法会更方便.



**解 (另一种解法).** 用  $(a, b)$  来表示一次试验, 含义是“第一个骰子的点数为  $a$ , 第二个骰子的点数为  $b$ .” 已知至少有一个骰子的点数是 3 的情况下, 样本空间为

$$\Omega = \{(1, 3), (2, 3), \dots, (6, 3), (3, 1), (3, 2), \dots, (3, 6)\}.$$

有  $\#\Omega = 11$  (注意  $(3, 3)$  只计算了一次).

“两个骰子的点数之和为 7 的概率”的事件为  $\{(3, 4), (4, 3)\}$ ,  $P(\{(3, 4), (4, 3)\}) = \frac{2}{11}$ ,  
 “两个骰子的点数之和为 6 的概率”的事件为  $\{(3, 3)\}$ ,  $P(\{(3, 3)\}) = \frac{1}{11}$ .

**习题 2.19** 甲和另一人下棋, 每局有甲输, 甲赢, 平局三种结果, 每局获胜者得 1 分, 累积多于对手 2 分者获胜. 设每局的结果相互独立, 甲每局获胜的概率为  $p$ , 求甲最终获胜的概率.

**解.** 设“甲在某一局获胜”, “某一局是平局”, “甲在某一局没获胜”的事件分别为  $A_1, A_2, A_3$ , “某一局前甲比对手多  $k$  分且甲最终获胜”的事件为  $B_k$ . 由全概率公式,

$$P(B_k) = P(B_k|A_1)P(A_1) + P(B_k|A_2)P(A_2) + P(B_k|A_3)P(A_3).$$

设  $r = P(A_3)$ ,  $q(k) = P(B_k)$ , 则  $q(-2) = 0, q(2) = 1$ , 甲最终获胜的概率为  $q(0)$ .

$$q(k) = q(k+1)p + q(k)(1-p-r) + q(k-1)r.$$

$\therefore$

$$q(k) = \frac{p}{p+r}q(k+1) + \frac{r}{p+r}q(k-1).$$

代入得

$$\begin{aligned} q(0) &= \frac{p}{p+r}q(1) + \frac{r}{p+r}q(-1) \\ &= \frac{p}{p+r} \left( \frac{p}{p+r}q(2) + \frac{r}{p+r}q(0) \right) + \frac{r}{p+r} \left( \frac{p}{p+r}q(0) + \frac{r}{p+r}q(-2) \right) \\ &= \frac{p}{p+r} \left( \frac{p}{p+r} + \frac{r}{p+r}q(0) \right) + \frac{r}{p+r} \cdot \frac{p}{p+r}q(0) \\ &= \frac{p^2}{(p+r)^2} + \frac{2pr}{(p+r)^2}q(0). \end{aligned}$$

解得

$$q(0) = \frac{p^2}{p^2 + r^2}.$$

**习题 2.20** 用红, 黑两种药治疗同一种疾病, 为了决定用哪种药, 医生将口袋中放入  $r$  个红球和  $b$  个黑球后任取一个球, 取到黑球用黑药, 并将球放回, 取到红球用红药, 并将球放回. 如果药物有效就加入一个相同颜色的球. 用  $B_i$  表示第  $i$  次取球时取到黑球, 设两种药都一定有效.

(b) 计算  $P(B_2), P(B_3)$ ;

(c) 计算  $P(B_n)$ .

解. (b)

$$\begin{aligned}P(B_2) &= P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|\bar{B}_1)P(\bar{B}_1) \\&= \frac{b+1}{r+b+1} \cdot \frac{b}{r+b} + \frac{b}{r+b+1} \cdot \frac{r}{r+b} \\&= \frac{b(r+b+1)}{(r+b+1)(r+b)} = \frac{b}{r+b}.\end{aligned}$$

由第 1.19 题得  $B_1B_2, B_1\bar{B}_2, \bar{B}_1B_2, \bar{B}_1\bar{B}_2$  是完备事件组. 由全概率公式,

$$\begin{aligned}P(B_3) &= P(B_3|B_1B_2)P(B_1B_2) + P(B_3|B_1\bar{B}_2)P(B_1\bar{B}_2) \\&\quad + P(B_3|\bar{B}_1B_2)P(\bar{B}_1B_2) + P(B_3|\bar{B}_1\bar{B}_2)P(\bar{B}_1\bar{B}_2) \\&= P(B_3|B_1B_2)P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_3|B_1\bar{B}_2)P(\bar{B}_2|B_1)P(B_1) \\&\quad + P(B_3|\bar{B}_1B_2)P(B_2|\bar{B}_1)P(\bar{B}_1) + P(B_3|\bar{B}_1\bar{B}_2)P(\bar{B}_2|\bar{B}_1)P(\bar{B}_1) \\&= \frac{b+2}{r+b+2} \cdot \frac{b+1}{r+b+1} \cdot \frac{b}{r+b} + \frac{b+1}{r+b+1} \cdot \frac{r}{r+b+1} \cdot \frac{b}{r+b} \\&\quad + \frac{b+1}{r+b+2} \cdot \frac{b}{r+b+1} \cdot \frac{r}{r+b} + \frac{b}{r+b+2} \cdot \frac{r+1}{r+b+1} \cdot \frac{r}{r+b} \\&= \frac{(b+2)(b+1)b + 2(b+1)br + (r+1)rb}{(r+b+2)(r+b+1)(r+b)} \\&= b \cdot \frac{b^2 + 3b + 2 + 2br + 2r + r^2 + r}{(r+b+2)(r+b+1)(r+b)} = \frac{b}{r+b}.\end{aligned}$$

(c)  $P(B_n) = \frac{b}{r+b}$ .  $n=1$  的情形是显然的.

假设  $P(B_{n-1}) = \frac{b}{r+b}$ . 如果开始时口袋中有  $r'$  个红球和  $b'$  个黑球, 那么第  $n-1$  次取球时取到黑球的概率为  $\frac{b'}{r'+b'}$ .

可以认为试验是从第 2 次取球时开始的, 这时第  $n-1$  次取球时取到黑球对应事件  $B_n|B_1$  或  $B_n|\bar{B}_1$ . 如果第 1 次取球时取到黑球, 那么试验开始时口袋中有  $r$  个红球和  $b+1$  个黑球; 如果第 1 次取球时取到红球, 那么试验开始时口袋中有  $r+1$  个红球和  $b$  个黑球.  $\therefore$

$$P(B_n|B_1) = \frac{b+1}{r+b+1}, \quad P(B_n|\bar{B}_1) = \frac{b}{r+b+1}.$$

由全概率公式得

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P(B_n|B_1)P(B_1) + P(B_n|\bar{B}_1)P(\bar{B}_1) \\ &= \frac{b+1}{r+b+1} \cdot \frac{b}{r+b} + \frac{b}{r+b+1} \cdot \frac{r}{r+b} \\ &= \frac{b}{r+b}. \end{aligned}$$

**习题 2.28** 口袋中有一个红球和一个黑球, 每次从口袋中有放回地任取一个球, 且第  $j$  次取球后再加入  $j$  个红球. 如果一直做下去, 能够取到黑球多少次?

**解.** 用  $A_j$  表示第  $j$  次取球时取到黑球. 第  $j$  次取球时口袋中有  $2 + \sum_{i=1}^{j-1} i = 2 + \frac{j(j-1)}{2}$  个球.  $\therefore$

$$P(A_j) = \frac{1}{2 + \frac{j(j-1)}{2}}.$$

$\because \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{P(A_j)}{1/j^2} = 1$  而  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty, \therefore \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) < \infty$ , 由定理 3.2 得  $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) = 0$ , 即只有有限次取到黑球.

**习题 2.29** 在习题 2.28 中, 若第  $j$  次取球后再加入  $j$  个红球和 1 个黑球, 能够取到黑球多少次?

**解.** 用  $A_j$  表示第  $j$  次取球时取到黑球. 第  $j$  次取球时口袋中有  $2 + (j-1) + \sum_{i=1}^{j-1} i = 1 + \frac{j(j+1)}{2}$  个球, 其中  $j-1$  个是黑球.  $\therefore$

$$P(A_j) = \frac{j-1}{1 + \frac{j(j+1)}{2}}.$$

$\because \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{P(A_j)}{1/j} = 1$  而  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty, \therefore \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) = \infty$ , 由定理 3.2 得  $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) = 1$ , 即有无限次取到黑球.

**习题 2.30** 证明全概率公式: 如果事件  $A_1, A_2, \dots$  互不相容,  $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ , 则

$$P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)P(B|A_j).$$

**证明.** 设  $\omega \in B \cap \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right)$ , 则  $\omega \in B$  且  $\exists j \in \mathbb{N}, \omega \in A_j$ .  $\therefore \exists j \in \mathbb{N}, \omega \in A_j B$ .  $\therefore$

$$B \cap \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j B$$

由定理 1.2 得

$$B \cap \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j B.$$

$\therefore A_1, A_2, \dots$  互不相容,  $\therefore A_1 B, A_2 B, \dots$  互不相容. 由书上第 1 章的定义 4.1(c) 得

$$P(B) = P \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j B \right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j B).$$

由乘法公式得

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j).$$

**习题 2.31** 证明 Bayes 公式: 如果事件  $A_1, A_2, \dots$  互不相容,  $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ , 则  $P(B) > 0$  时有

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i)}, \quad j \geq 1.$$

**证明.** 由乘法公式得

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B)}.$$

由第 2.30 得

$$\frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i)}.$$

**习题 2.33** 如果你的水平略高于对手, 为了保证比赛获胜, 你期望比赛规则是三局两胜还是五局三胜?

**解.** 见 <http://lanqi.org/everyday/19943/>.

**习题 2.35** 设想如下的抽奖节目: 三扇关闭的门后各有一个奖品, 其中之一是汽车, 其余是羊. 每扇门后是汽车的概率相同. 猜奖者任选一扇门后得到门后的奖品. 当猜奖者选中一扇门尚未打开时, 主持人打开了另外两扇门之一, 发现门后是羊. 这时猜奖者有机会改猜剩下的那扇门. 在下面的情况下, 计算猜奖者换门或不换门得到汽车的概率:

(a) 假设主持人知道汽车在哪扇门后;



(b) 假设主持人不知道汽车在哪扇门后;

(c) 假设主持人知道汽车在哪扇门后的概率为 0.6.

解. 称猜奖者一开始选中的门是“1 号门”, 主持人打开的门是“2 号门”, 剩下的那扇门是“3 号门”,  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 表示事件“汽车在  $i$  号门后”,  $B$  表示事件“主持人打开 2 号门, 发现门后是羊”. 要求  $P(A_1|B)$  和  $P(A_3|B)$ . 由 Bayes 公式得

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^3 P(B|A_j)P(A_j)}.$$

$$\because P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}, \therefore$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^3 P(B|A_j)}.$$

首先, “主持人打开 2 号门, 发现门后是羊” 意味着车不可能在 2 号门后, 即  $P(B|A_2) = 0$ . 其余的条件概率会随情况而变化.

(a) 如果汽车在 1 号门后, 那么主持人可以从 2 号和 3 号门中任选一扇打开,  $\therefore$

$$P(B|A_1) = \frac{1}{2}.$$

如果汽车在 3 号门后, 那么主持人一定会打开 2 号门,  $\therefore P(B|A_3) = 1$ .  $\therefore$

$$P(A_1|B) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{3}, \quad P(A_3|B) = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3}.$$

(b)  $\because$  主持人不知道汽车在哪扇门后,  $\therefore$  无论汽车在哪扇门后, 主持人都会从 2 号和 3 号门中任选一扇打开,  $\therefore P(B|A_1) = P(B|A_3) = \frac{1}{2}$ .  $\therefore P(A_1|B) = P(A_3|B) = \frac{1}{2}$ .

(c) 设“主持人知道汽车在哪扇门后”为事件  $C$ , 则由 (a) 得  $P_C(B|A_1) = \frac{1}{2}$ ,  $P_C(B|A_3) = 1$ , 由 (b) 得  $P_{\bar{C}}(B|A_1) = P_{\bar{C}}(B|A_3) = \frac{1}{2}$ . 由全概率公式得

$$P(B|A_1) = P_C(B|A_1)P(C) + P_{\bar{C}}(B|A_1)P(\bar{C}) = \frac{1}{2},$$

$$P(B|A_3) = P_C(B|A_3)P(C) + P_{\bar{C}}(B|A_3)P(\bar{C}) = \frac{4}{5}.$$

∴

$$P(A_1|B) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{4}{5}} = \frac{5}{13}, \quad P(A_3|B) = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{2} + \frac{4}{5}} = \frac{8}{13}.$$

**习题 2.36** 在书上的例 1.4 中, 当全班有  $n$  个人时, 用  $B_n$  表示至少有一人得到自己的作业本, 用  $D_k$  表示恰好有  $k$  个人得到自己的作业本, 计算  $\# \overline{B}_n$  和  $P(D_k)$ .

解. 由书上的例 1.4 得  $P(B_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}$ . ∴

$$P(\overline{B}_n) = 1 - P(B_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{i!}.$$

∴

$$\# \overline{B}_n = \# \Omega P(\overline{B}_n) = n! \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{i!}.$$

$\overline{B}_{n-k}$  表示“把  $n-k$  个作业本随机分给  $n-k$  个人, 没有人得到自己的作业本”. 恰好有  $k$  个人得到自己的作业本意味着剩下  $n-k$  个人中没有人得到自己的作业本. ∴

$$D_k = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_k} \overline{B}_{n-k},$$

$$P(D_k) = C_n^k \frac{(n-k)!}{n!} P(\overline{B}_{n-k}) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{i!}.$$

## 5 第 3 章笔记

为了引入随机变量的定义, 首先需要介绍一些测度论的概念.

**定义 5.1** 设  $\Omega$  是任意的集合,  $\mathcal{F}$  是  $\Omega$  上的  $\sigma$  域 ( $\mathcal{F}$  是  $\Omega$  的子集构成的集合且  $\mathcal{F}$  满足书上第 1 章第 4 节开头的条件), 则称  $(\Omega, \mathcal{F})$  是一个可测空间.

**定义 5.2** 设  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$  是两个可测空间, 如果函数  $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  满足:  $\forall A \in \mathcal{F}_2, f$  在  $A$  上的原像  $\{\omega | f(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}_1$ , 则称  $f$  是一个可测变换.

从概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  可以自然地得到一个可测空间  $(\Omega, \mathcal{F})$ . 设  $\mathcal{R}$  是包含  $\mathbb{R}$  上的区间全体的  $\sigma$  域. 按照定义,  $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$  是一个可测空间, 称为 **Borel 可测集**. 有:

**定义 5.3** 设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是概率空间,  $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$  是 Borel 可测集, 称可测变换  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  是  $\Omega$  上的随机变量.

在初等概率论中, 可以简单地认为  $\Omega$  上的随机变量是  $\Omega$  上的实值函数.



例 5.1 (书上的例 1.3(2)) 设  $X$  是随机变量,  $x \in \mathbb{R}$ , 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x - 1/n\} = \{X < x\}.$$

证明. 设  $\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x - 1/n\}$ , 则  $\exists m \in \mathbb{N}_+, X(\omega) \leq x - \frac{1}{m} < x$ .  $\therefore \omega \in \{X < x\}$ .  
 $\therefore \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x - 1/n\} \subset \{X < x\}$ .

设  $\omega \in \{X < x\}$ , 则  $\exists \varepsilon > 0$  使得  $X(\omega) \leq x - \varepsilon$ . 取  $m \geq \frac{1}{\varepsilon}$ , 则  $\omega \in \{X \leq x - 1/m\}$ .  
 $\therefore \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x - 1/n\}$ .  $\therefore \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x - 1/n\} \supset \{X < x\}$ .

随机变量  $X$  可以由其分布函数  $F(x) = P(X \leq x)$  唯一确定. 之后用  $X \sim F(x)$  来表示由  $F(x)$  确定的随机变量.

## 6 第 3 章习题

习题 3.1 证明:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$$

证明.  $\because \lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$  存在,  $\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq n)$ .

$\because \{X \leq n\}$  单调递增, 由概率的连续性得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq n\}\right) = P(X < \infty) = 1.$$

$\because \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$  存在,  $\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq -n)$ .

$\because \{X \leq -n\}$  单调递减, 由概率的连续性得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq -n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq -n\}\right) = P(X \leq -\infty) = 0.$$

习题 3.2 证明: 如果常数  $a, b, c$  使得  $g(x) = \exp(ax^2 + bx + c)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  是概率密度, 则  $a < 0$ .



**证明.** 证明逆否命题. 若  $a = 0$ , 则  $g(x) = e^{bx+c}$ ,  $\therefore g$  在  $\mathbb{R}$  上不可积,  $\therefore g$  不是概率密度.

若  $a > 0$ , 则  $g(x) = \exp\left(a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + c\right)$ .  $\therefore g(x) \rightarrow \infty (x \rightarrow \pm\infty)$ ,  $\therefore g$  在  $\mathbb{R}$  上不可积,  $\therefore g$  不是概率密度.

**习题 3.9** 甲每天收到的电子邮件数服从 Poisson 分布  $\mathcal{P}(\lambda)$ , 且每封电子邮件被过滤掉的概率为 0.2.

(c) 已知甲看到了自己的  $k$  封电子邮件, 计算他有  $m$  封电子邮件被过滤掉的概率.

(d) 甲每天看到的电子邮件数与被过滤掉的电子邮件数是否独立?

**解.** (c) 设  $A_k$  表示事件“甲看到了  $k$  封电子邮件”,  $B_m$  表示事件“甲有  $m$  封电子邮件被过滤掉”, 则事件  $A_k B_m$  意味着甲一共收到了  $k + m$  封电子邮件.  $\therefore$

$$P(A_k B_m) = \frac{\lambda^{k+m}}{(k+m)!} e^{-\lambda} \cdot C_{k+m}^k \cdot 0.8^k \cdot 0.2^m.$$

由书上的例 2.3 得甲每天看到的电子邮件数服从 Poisson 分布  $\mathcal{P}(0.8\lambda)$ . 有

$$\begin{aligned} P(B_m|A_k) &= \frac{P(A_k B_m)}{P(A_k)} \\ &= \frac{\frac{\lambda^{k+m}}{(k+m)!} e^{-\lambda} \cdot C_{k+m}^k \cdot 0.8^k \cdot 0.2^m}{\frac{(0.8\lambda)^k}{k!} e^{-0.8\lambda}} \\ &= \frac{\lambda^m}{m!} e^{-0.2\lambda} \cdot 0.2^m. \end{aligned}$$

(d) 由书上的例 2.3 得甲每天被过滤掉的电子邮件数服从 Poisson 分布  $\mathcal{P}(0.2\lambda)$ . 有

$$P(B_m) = \frac{(0.2\lambda)^m}{m!} e^{-0.2\lambda} = P(B_m|A_k).$$

$\therefore$  甲每天看到的电子邮件数与被过滤掉的电子邮件数相互独立.

**习题 3.10** 设车间有 100 台型号相同的机床相互独立地工作, 每台机床在时间  $(0, t]$  内发生故障的概率为 0.01, 发生故障的机床需要一人来维修, 且一人在  $(0, t]$  内只能维修一台机床. 考虑两种配备维修工人的方法:

(a) 5 个人每人负责 20 台机床.

(b) 3 个人同时负责 100 台机床.

在以上两种情况下计算机床在时间  $(0, t]$  内发生故障时不能被及时维修的概率.



解. (a) 考虑 5 个维修工人中的任意一个 (记为工人甲). 工人甲负责的机床中发生故障的机床数  $n$  服从二项分布  $\mathcal{B}(20, 0.01)$ , 他能及时维修这 20 台机床的概率为  $P(n \leq 1) = 0.99^{20} + C_{20}^1 \cdot 0.99^{19} \cdot 0.01 \approx 0.98314$ .

$\therefore$  全部 100 台机床在时间  $(0, t]$  内发生故障时不能被及时维修的概率为  $1 - 0.98314^5 \approx 0.0815$ .

(b) 100 台机床中发生故障的机床数  $n$  服从二项分布  $\mathcal{B}(100, 0.01)$ . 机床在时间  $(0, t]$  内发生故障时不能被及时维修的概率为

$$\begin{aligned} 1 - P(n \leq 3) &= 1 - (0.99^{100} + C_{100}^1 \cdot 0.99^{99} \cdot 0.01 \\ &\quad + C_{100}^2 \cdot 0.99^{98} \cdot 0.01^2 + C_{100}^3 \cdot 0.99^{97} \cdot 0.01^3) \\ &\approx 0.0184. \end{aligned}$$

**习题 3.14** 一个使用了  $t$  小时的电阻在  $\Delta t$  内失效的概率是  $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ , 设该电阻的使用寿命是连续型随机变量  $X$ , 求  $X$  的分布.

解. 该电阻在  $\Delta t$  内不失效的概率是  $1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t)$ ,  $\therefore$

$$P(X > t + \Delta t | X > t) = 1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t).$$

$\therefore$

$$P(X > t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t))P(X > t).$$

设  $X$  的分布函数为  $F(x)$ , 则

$$\begin{aligned} F(t + \Delta t) &= 1 - P(X > t + \Delta t) \\ &= 1 - (1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t))P(X > t) \\ &= 1 - (1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t))(1 - F(t)) \\ &= (\lambda \Delta t + o(\Delta t))(1 - F(t)) + F(t). \end{aligned}$$

$\therefore$

$$\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = (\lambda + o(1))(1 - F(t)) \quad (\Delta t \rightarrow 0).$$

$\therefore$

$$\frac{dF}{dt} = \lambda(1 - F).$$

解得

$$F(x) = 1 - Ce^{-\lambda x}.$$

由  $\int_0^\infty F(x)dx = 1$  得  $C = 1$ .  $\therefore X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ .

**习题 3.16** 设  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ , 计算  $Y = \sqrt{X}$  的概率分布.

**解.**  $\because X$  是取值为  $\mathbb{N}$  的离散型随机变量,  $\therefore Y$  是离散型随机变量. 有

$$P(Y = y) = P(X = y^2) = \frac{\lambda^{y^2}}{(y^2)!} e^{-\lambda}, \quad y \in \{z : z^2 \in \mathbb{N}\}.$$

**习题 3.17** 设电流  $I$  在  $8 \sim 9\text{A}$  间均匀分布. 当电流通过  $2\Omega$  的电阻时, 消耗的功率 (单位: W) 是  $W = 2I^2$ . 求  $W$  的概率密度.

**解.** 有  $P(128 < W \leq 162) = P(8 < I \leq 9) = 1$ . 对  $w \in (128, 162)$ ,

$$\begin{aligned} P(W = w) &= P(2I^2 = w) \\ &= P\left(I = \sqrt{\frac{w}{2}}\right) + P\left(I = -\sqrt{\frac{w}{2}}\right) \\ &= 1 \cdot \left|\frac{d}{dw} \sqrt{\frac{w}{2}}\right| dw + 0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{8w}}. \end{aligned}$$

$\therefore$

$$P_W(w) = \frac{1}{\sqrt{8w}}, \quad w \in (128, 162).$$

**习题 3.20 (c)** 设  $X$  有分段连续的概率密度  $f(x)$ . 求  $Y = \tan X$  的概率密度.

**解.**  $Y$  的取值为  $\mathbb{R}$ . 有

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= P(\tan X = y) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X = \arctan y + n\pi) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + y^2} f(\arctan y + n\pi). \end{aligned}$$

$\therefore$

$$P_Y(y) = \frac{1}{1 + y^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\arctan y + n\pi).$$

习题 3.21 设  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ .

(a) 已知  $n = 19, p = 0.7$ , 求  $p_k = P(X = k)$  的最大值点  $k$ ;

(b) 已知  $n = 19, X = 9$ , 求使得  $P(X = 9)$  最大的  $p$ .

解. (a) 设  $k < 19$ .  $\therefore$

$$P(X = k) = C_{19}^k \cdot 0.7^k \cdot 0.3^{19-k} = \frac{19!}{k!(19-k)!} \cdot 0.7^k \cdot 0.3^{19-k},$$

$$P(X = k+1) = \frac{19!}{(k+1)!(19-k-1)!} \cdot 0.7^{k+1} \cdot 0.3^{19-k-1},$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} p_k - p_{k+1} &= \frac{19!}{k!(19-k)!} \cdot 0.7^k \cdot 0.3^{19-k} - \frac{19!}{(k+1)!(19-k-1)!} \cdot 0.7^{k+1} \cdot 0.3^{19-k-1} \\ &= \frac{19!}{k!(19-k-1)!} \cdot 0.7^k \cdot 0.3^{19-k-1} \left( \frac{0.3}{19-k} - \frac{0.7}{k+1} \right). \end{aligned}$$

$\therefore$  当  $\frac{0.3}{19-k} - \frac{0.7}{k+1} > 0, k > 13$  时  $p_k > p_{k+1}$ , 当  $k < 13$  时  $p_k < p_{k+1}$ , 当  $k = 13$  时  $p_k = p_{k+1}$ .

$\therefore$  当  $k = 13, 14$  时  $p_k$  取最大值.

(b)  $P(X = 9) = C_{19}^9 p^9 (1-p)^{10}$ . 只需求  $f(p) = \ln P(X = 9)$  的最大值点. 有

$$f(p) = \ln C_{19}^9 + 9 \ln p + 10 \ln(1-p), \quad \frac{df}{dp} = \frac{9}{p} - \frac{10}{1-p}.$$

$\therefore$  当  $p = \frac{9}{19}$  时  $P(X = 9)$  最大.

习题 3.23 设  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ .

(a) 已知  $\lambda = 23.8$ , 求  $p_k = P(X = k)$  的最大值点  $k$ ;

(b) 已知  $X = 21$ , 求使得  $P(X = 21)$  最大的  $\lambda$ .

解. (a) 对  $k \geq 0$ , 有

$$\begin{aligned} P(X = k+1) - P(X = k) &= \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda}{k+1} - 1 \right). \end{aligned}$$

当  $k < \lambda - 1$  时有  $P(X = k+1) > P(X = k)$ , 当  $k > \lambda - 1$  时有  $P(X = k+1) < P(X = k)$ ,  $\therefore$  当  $k = 23$  时  $p_k$  取最大值.



$$(b) P(X = 21) = \frac{\lambda^{21}}{21!} e^{-\lambda}. \text{ 令}$$

$$f(\lambda) = \ln P(X = 21) = 21 \ln \lambda - \ln 21! - \lambda,$$

有

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{21}{\lambda} - 1.$$

$\therefore$  当  $\lambda = 21$  时  $P(X = 9)$  最大.

**习题 3.25** 将一个骰子投掷  $n$  次, 用  $m$  表示掷得的最小点数, 用  $M$  表示掷得的最大点数. 计算

$$(a) P(m = k), 1 \leq k \leq 6;$$

$$(b) P(M = k), 1 \leq k \leq 6;$$

$$(c) P(m = 2, M = 5).$$

**解.** 设第  $i$  次掷得的点数为  $X_i$ , 则  $X_i$  相互独立,  $P(X_i = k) = \frac{1}{6} (k = 1, \dots, 6)$ .

(a)

$$\begin{aligned} P(m \geq k) &= P(X_1 \geq k, X_2 \geq k, \dots, X_n \geq k) \\ &= P(X_1 \geq k)P(X_2 \geq k) \cdots P(X_n \geq k) \\ &= \left( \frac{6 - k + 1}{6} \right)^n, \end{aligned}$$

$$P(m > k) = P(m \geq k + 1) = \left( \frac{6 - (k + 1) + 1}{6} \right)^n = \left( \frac{6 - k}{6} \right)^n,$$

$\therefore$

$$P(m = k) = P(m \geq k) - P(m > k) = \frac{(6 - k + 1)^n - (6 - k)^n}{6^n}.$$

(b)

$$\begin{aligned} P(M \leq k) &= P(X_1 \leq k, X_2 \leq k, \dots, X_n \leq k) \\ &= P(X_1 \leq k)P(X_2 \leq k) \cdots P(X_n \leq k) \\ &= \left( \frac{k}{6} \right)^n, \end{aligned}$$

$$P(M = k) = P(M \leq k) - P(M \leq k - 1) = \frac{k^n - (k - 1)^n}{6^n}.$$

(c)

$$P(m \geq k_1, M \leq k_2) = \left( \frac{k_2 - k_1 + 1}{6} \right)^n, \quad k_1 \leq k_2.$$

$$\begin{aligned} P(m=2, M=5) &= P(m \geq 2, M \leq 5) - P(\{m \geq 3, M \leq 5\} \vee \{m \geq 2, M \leq 4\}) \\ &= P(m \geq 2, M \leq 5) - P(m \geq 3, M \leq 5) \\ &\quad - P(m \geq 2, M \leq 4) + P(m \geq 3, M \leq 4) \\ &= \left( \frac{5-2+1}{6} \right)^n - \left( \frac{5-3+1}{6} \right)^n - \left( \frac{4-2+1}{6} \right)^n + \left( \frac{4-3+1}{6} \right)^n \\ &= \frac{2^n}{3^n} - 2 \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

**习题 3.26** 设点随机地落在中心为原点, 半径为  $R$  的圆周上, 求落点横坐标的概率密度  $f(x)$ .

解.  $X$  的取值为  $(-R, R)$ . 当  $0 \leq x < R$  时有

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= \frac{\frac{1}{2} \left( 2\pi - 2 \arccos \frac{x}{R} \right) R^2 - 2 \cdot \frac{x\sqrt{R^2 - x^2}}{2}}{\pi R^2} \\ &= 1 - \frac{\arccos \frac{x}{R}}{\pi} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x}{R} \sqrt{1 - \left( \frac{x}{R} \right)^2}. \end{aligned}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\partial P(X \leq x)}{\partial x} \\ &= \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial P(X \leq x)}{\partial (x/R)} \\ &= \frac{1}{R} \cdot \left( \frac{2\sqrt{1 - (x/R)^2}}{\pi} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2}. \end{aligned}$$

显然  $f(x) = f(-x)$ .  $\therefore$

$$f(x) = \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2}, \quad -R < x < R.$$

注 书上的答案应该有点问题. 下面这行 Mathematica 代码可以用来画  $\frac{2\sqrt{16-x^2}}{16\pi}$  (这里的答案当  $R=4$  时的情形) 以及  $\frac{1}{\pi\sqrt{16-x^2}}$  (书上的答案当  $R=4$  时的情形) 的图象, 可以看到  $\frac{1}{\pi\sqrt{16-x^2}}$  的值在  $x=\pm 4$  处比较大, 在  $x=0$  处比较小, 这与实际情况不符.

```
Plot[{2 Sqrt[16 - x^2]/(16 Pi), 1/(Pi Sqrt[16 - x^2])}, {x, -4, 4},
PlotLabels -> Automatic]
```



**习题 3.28** 设  $X$  有概率密度  $f(x) = cx/\pi^2, x \in (0, \pi)$ . 求  $Y = \sin X$  的概率密度.

解. 由  $\int_0^\pi f(x) = 1$  得  $c = 2$ .

$Y$  的取值为  $(0, 1]$ . 对  $y \in (0, 1]$ , 有

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= P(\sin X = y) \\ &= P(X = \arcsin y) + P(X = \pi - \arcsin y) \\ &= \frac{2 \arcsin y}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{2(\pi - \arcsin y)}{\pi^2} \cdot \left| -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right| \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \end{aligned}$$

**习题 3.30** 设  $f(x)$  是  $[0, \infty)$  上的连续函数. 证明:

(1) 如果  $\forall x, y > 0$ , 有  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , 则  $\exists a$  使得  $f(x) = ax, x \geq 0$ ;

(2) 如果  $\forall x, y > 0$ , 有  $f(x+y) = f(x)f(y) > 0$ , 则  $\exists b$  使得  $f(x) = e^{ax}, x \geq 0$ .

**证明.** (1) 用数学归纳法证明:  $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = f(1) \cdot n$ . 当  $n = 0$  时有  $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0), \therefore f(0) = 0 = f(1) \cdot 0$ .

假设有  $f(n-1) = f(1) \cdot (n-1)$ , 则

$$f(n) = f((n-1) + 1) = f(n-1) + f(1) = f(1) \cdot (n-1) + f(1) = nf(1).$$

$\therefore \forall n \in \mathbb{N}, f(n) = f(1) \cdot n$ .

设  $a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}_+$ . 有

$$\begin{aligned} qf(a) &= f(a) + f(a) + \underbrace{f(a) + \cdots + f(a)}_{q-2 \uparrow f(a)} \\ &= f(2a) + \underbrace{f(a) + \cdots + f(a)}_{q-2 \uparrow f(a)} \\ &= \cdots \\ &= f(qa) = f(p). \end{aligned}$$

$\therefore p \in \mathbb{N}, \therefore f(p) = pf(1). \therefore qf(a) = pf(1), f(a) = \frac{p}{q}f(1)$ .

$\therefore f$  是  $[0, \infty)$  上的连续函数,  $\therefore f$  在  $[0, \infty)$  上任意一点处的极限存在且等于  $f$  在该点的值.  $\therefore$  对收敛到  $[0, \infty)$  上任意一点  $x_0$  的数列  $a_1, a_2, \cdots$ , 有

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n).$$

$\forall x \in [0, \infty)$ , 存在有理数列  $a_1, a_2, \dots$  使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n f(1) = f(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x f(1).$$

(2) 用数学归纳法证明:  $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = (f(1))^n$ . 当  $n = 0$  时有  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0), \therefore f(0) = 1 = (f(1))^0$ .

假设有  $f(n-1) = (f(1))^{n-1}$ , 则

$$f(n) = f((n-1) + 1) = f(n-1)f(1) = (f(1))^{n-1}f(1) = (f(1))^n.$$

$$\therefore \forall n \in \mathbb{N}, f(n) = (f(1))^n.$$

设  $a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}_+$ . 与 (1) 类似, 有

$$(f(a))^q = f(qa) = f(p) = (f(1))^p.$$

$\therefore$

$$f(a) = (f(1))^{p/q}.$$

与 (1) 类似, 用  $f$  的连续性可以得到:  $\forall x \in [0, \infty), f(x) = (f(1))^x = e^{x \ln f(1)}$ .

## 7 第 4 章笔记

### 7.1 边缘分布函数

书上没有给出  $n$  维随机向量的边缘分布函数的定义. 这里补充一下.

**定义 7.1** 设随机向量  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的联合分布函数为  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 称用  $\infty$  替换  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的一部分变量 (不是所有的变量) 得到的函数为  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的 **边缘分布函数**.

联合分布函数唯一确定了所有的边缘分布函数, 而即使所有的边缘分布函数都已知, 联合分布函数仍然不能唯一确定.

**例 7.1** 容易验证, 表 1 中的两个不同的分布具有相同的边缘分布函数.

$p_{ij}$	$y_1$	$y_2$	$p_{ij}$	$y_1$	$y_2$
$x_1$	1/4	1/4	$x_1$	1/3	1/6
$x_2$	1/4	1/4	$x_2$	1/6	1/3

表 1: 两个不同的分布





## 7.2 随机变量的独立性

补充几个定理的证明.

**定理 7.1** 随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$  相互独立当且仅当  $\forall x_1, x_2, \dots, x_n$ , 事件  $\{X_1 \leq x_1\}, \{X_2 \leq x_2\}, \dots, \{X_n \leq x_n\}$  相互独立.

**证明.** 由书上的定义 1.2, 随机向量  $(X_1, \dots, X_n)$  相互独立当且仅当下式成立:

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2) \cdots P(X_n \leq x_n). \quad (7.1)$$

$(\Leftarrow)$  在书上第 2 章的定义 2.2 中取  $k = n$  即得式 (7.1).

$(\Rightarrow) \forall 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ .

在式 (7.1) 中令  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k\}, x_i = \infty$ , 得

$$P(X_{j_1} \leq x_{j_1}, X_{j_2} \leq x_{j_2}, \dots, X_{j_k} \leq x_{j_k}) = P(X_{j_1} \leq x_{j_1})P(X_{j_2} \leq x_{j_2}) \cdots P(X_{j_k} \leq x_{j_k}).$$

由书上第 2 章的定义 2.2 得事件  $\{X_1 \leq x_1\}, \{X_2 \leq x_2\}, \dots, \{X_n \leq x_n\}$  相互独立.

## 7.3 连续型随机向量

如果联合密度是连续的, 那么所有的边缘密度都是连续的, 反之不成立.

**例 7.2** 设  $X$  有连续的概率密度  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} (\lambda > 0)$ ,  $Y = X$ , 则随机向量只在射线  $l: y = x (x > 0)$  上有非负取值.  $\therefore$  对于任意的  $\mathbb{R}^2$  的长方形子集  $D$  和函数  $f$ , 有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{l \cap D} f(x, y) dx dy.$$

$\therefore$  直线是零测集,  $\therefore \iint_{l \cap D} f(x, y) dx dy = 0$ .

考虑  $D = \{(x, y) | 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1\}$ , 则  $P((X, Y) \in D) = P(0 < X \leq 1) = 1 - e^{-\lambda} > 0$ , 但  $\nexists f$  使得  $\iint_D f(x, y) dx dy = 1 - e^{-\lambda}$ . 由书上的定义 3.1,  $\therefore (X, Y)$  不是连续型随机向量, 没有联合密度.

类比离散型随机向量来理解书上的定理 3.2.

**例 7.3** 设  $X, Y$  是取值为  $\mathbb{Z}$  的离散型随机变量,  $p_{ij} = P(X = i, Y = j)$ , 有

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(X = i, Y \leq j) - P(X = i, Y \leq j - 1) \\ &= P(X \leq i, Y \leq j) - P(X \leq i - 1, Y \leq j) \\ &\quad - (P(X \leq i, Y \leq j - 1) - P(X \leq i - 1, Y \leq j - 1)), \end{aligned}$$

可以将  $P(X = i, Y \leq j) = P(X \leq i, Y \leq j) - P(X \leq i - 1, Y \leq j)$  理解为离散的“偏导数”，将  $p_{ij}$  理解为离散的“二阶混合偏导”。

例 7.4 需要用到下面的定理。

**定理 7.2 (书上定理 3.2 的推广)** 设  $D$  是  $\mathbb{R}^n$  上的开集, 随机变量  $X_1, \dots, X_n$  的联合分布函数  $F(x_1, \dots, x_n)$  在  $D$  中可微, 且有连续的  $n$  阶混合偏导数. 如果  $P((X_1, \dots, X_n) \in D) = 1$ , 那么

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}, & (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

**证明.** 略。

可以把书上的例 3.2 推广到一般情形。

**例 7.4** 一部手机陆续收到短信. 假设在不相交的时间段内收到的短信数相互独立, 且在任何长为  $h$  的时间段内收到的短信服从参数为  $\mu h$  的 Poisson 分布. 从  $t = 0$  开始, 用  $X_i$  表示第  $i$  个短信的到达时刻, 则  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的概率密度为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mu^n e^{-\mu x_n}, \quad x_n > x_{n-1} > \cdots > x_1 > 0.$$

**证明.** 用数学归纳法. 由书上的例 3.2 得  $n = 2$  时成立. 假设  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$  的概率密度为

$$g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \mu^{n-1} e^{-\mu x_{n-1}}, \quad x_{n-1} > \cdots > x_1 > 0.$$

对于  $x_n > x_{n-1} > \cdots > x_1 > 0$ , 定义  $x_0 = 0$ , 用  $N_i$  表示  $[x_{i-1}, x_i]$  内收到的短信数, 则  $N_1, N_2, \dots, N_n$  相互独立, 且  $N_i \sim \mathcal{P}(\mu(x_i - x_{i-1}))$ . 有

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq x_1, \dots, X_{n-1} \leq x_{n-1}, X_n > x_n) &= P(N_1 = 1, \dots, N_{n-1} = 1, N_n = 0) \\ &= P(N_1 = 1) \cdots P(N_{n-1} = 1) P(N_n = 0) \\ &= e^{-\mu(x_n - x_{n-1})} \prod_{i=1}^{n-1} \mu(x_i - x_{i-1}) e^{-\mu(x_i - x_{i-1})} \\ &= \mu^{n-1} e^{-\mu x_n} \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

∴

$$\begin{aligned}
 & F(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_{n-1} \leq x_{n-1}) - P(X_1 \leq x_1, \dots, X_{n-1} \leq x_{n-1}, X_n > x_n) \\
 &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_{n-1} \leq x_{n-1}) - \mu^{n-1} e^{-\mu x_n} \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i-1}).
 \end{aligned}$$

由定理 7.2, 当  $x_{n-1} > \dots > x_1 > 0$  时有

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-1}} &= g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) - \frac{\partial \left( \mu^{n-1} e^{-\mu x_n} \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i-1}) \right)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-1}} \\
 &= \mu^{n-1} e^{-\mu x_{n-1}} - \mu^{n-1} e^{-\mu x_n} \frac{\partial \left( \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i-1}) \right)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-1}}.
 \end{aligned}$$

∴

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \left( \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i-1}) \right)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-1}} &= \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-2}} \left( \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \left( \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i-1}) \right) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-2}} \left( \prod_{i=1}^{n-2} (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{\partial (x_{n-1} - x_{n-2})}{\partial x_{n-1}} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-2}} \left( \prod_{i=1}^{n-2} (x_i - x_{i-1}) \right) \\
 &= \dots \\
 &= \frac{\partial (x_1 - x_0)}{\partial x_1} = 1,
 \end{aligned}$$

∴

$$\frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-1}} = \mu^{n-1} e^{-\mu x_{n-1}} - \mu^{n-1} e^{-\mu x_n}, \quad x_{n-1} > \dots > x_1 > 0.$$

由定理 7.2,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-1}} \right) = \mu^n e^{-\mu x_n}, \quad x_n > x_{n-1} > \dots > x_1 > 0.$$

## 7.4 连续型随机向量的独立性

设  $X$  有概率密度  $f_X(x)$ . 考察那些使得  $P(X = x) > 0$  的  $x$  组成的集合. 由书上第 3 章的定义 2.2 得  $P(X = x) > 0$  当且仅当  $f_X(x) > 0$ . 称  $\{x | f_X(x) > 0\}$  为  $X$  的**支集**或**取值**. 如果随机向量  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  有概率密度  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 则称  $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) | f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0\}$  为  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的支集.

对  $(X, Y)$ , 已知  $X = x_0$  时,  $Y$  的支集为  $\{y | f(x_0, y) > 0\}$ . 如果  $X, Y$  相互独立, 那么  $Y$  的支集为  $\{y | f_X(x_0)f_Y(y) > 0\}$ .

$\because X = x_0, \therefore f_X(x_0) > 0, \therefore Y$  的支集为  $\{y | f_Y(y) > 0\}$ . 取逆否命题就得到书上的定理 3.4 (1).

## 8 第 4 章习题

**习题 4.4** 常数  $a$  是随机变量, 按定义证明  $a$  与任何随机变量  $Y$  独立.

**证明.**  $\because$  当  $b \geq a$  时有  $P(a \leq b) = 1, P(a \leq b, Y \leq y) = P(Y \leq y)$ , 当  $b < a$  时有  $P(a \leq b) = P(a \leq b, Y \leq y) = 0, \therefore \forall b, y$  都有

$$P(a \leq b, Y \leq y) = P(Y \leq y)P(a \leq b).$$

由书上的定义 1.1 得  $a$  与  $Y$  独立.

**习题 4.5** 证明: 对于固定的  $x$ , 联合分布函数  $F(x, y)$  关于  $y$  单调不减且右连续.

**证明.** 对  $y_1 \leq y_2$ , 有  $\{X = x, Y = y_1\} \subset \{X = x, Y = y_2\}$ .  $\therefore F(x, y_1) < F(x, y_2)$ .  $\therefore F(x, y)$  关于  $y$  单调不减.

$\because$  关于  $y$  的函数  $F(x, y + \delta)$  关于  $\delta$  单调有界,  $\therefore$  当  $\delta \downarrow 0$  时有极限, 且该极限等于任意递减趋于  $y$  的数列的函数值的极限.  $\therefore$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} F(x, y + \delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(x, y + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\{X \leq x\} \cap \left\{Y \leq y + \frac{1}{n}\right\}\right)$$

由概率的连续性得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\{X \leq x\} \cap \left\{Y \leq y + \frac{1}{n}\right\}\right) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\{X \leq x\} \cap \left\{Y \leq y + \frac{1}{n}\right\}\right)\right) \\ &= P\left(\{X \leq x\} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{Y \leq y + \frac{1}{n}\right\}\right)\right) \\ &= P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = F(x, y). \end{aligned}$$

$\therefore F(x, y)$  关于  $y$  右连续.

**习题 4.6** 设  $X \sim \mathcal{B}(n, p), Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ ,  $X, Y$  相互独立, 计算  $X + Y$  的概率分布.

解. 对  $0 \leq z \leq m + n$ , 有

$$P(X + Y = z) = \sum_{i+j=z} P(X = i, Y = j).$$

$\because X, Y$  相互独立,  $\therefore$

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=z} P(X = i, Y = j) &= \sum_{i+j=z} P(X = i)P(Y = j) \\ &= \sum_{i+j=z} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} C_m^j p^j (1-p)^{m-j} \\ &= p^z (1-p)^{m+n-z} \sum_{i+j=z} C_n^i C_m^j. \end{aligned}$$

考察等式

$$(1+x)^n (1+x)^m = (1+x)^{m+n}$$

两边的展开式, 左边的  $x^k$  一项的系数为  $\sum_{i+j=k} C_n^i C_m^j$ , 右边的  $x^k$  一项的系数为  $C_{m+n}^k$ ,  $\therefore$

$$\sum_{i+j=k} C_n^i C_m^j = C_{m+n}^k.$$

$\therefore$

$$\sum_{i+j=z} P(X = i, Y = j) = C_{m+n}^k p^z (1-p)^{m+n-z},$$

$\therefore X + Y \sim \mathcal{B}(m + n, p)$ .

**习题 4.9** 设随机变量  $X, Y$  独立同分布, 证明

$$P(a < \min(X, Y) \leq b) = P^2(X > a) - P^2(X > b).$$

证明.

$$\begin{aligned} P(a < \min(X, Y) \leq b) &= P(\min(X, Y) > a) - P(\min(X, Y) > b) \\ &= P(X > a, Y > a) - P(X > b, Y > b). \end{aligned}$$

$\because X, Y$  相互独立,  $\therefore$

$$P(X > a, Y > a) - P(X > b, Y > b) = P(X > a)P(Y > a) - P(X > b)P(Y > b).$$



$\because X, Y$  同分布,  $\therefore P(Y > x) = P(X > x)$ ,

$$P(X > a)P(Y > a) - P(X > b)P(Y > b) = P^2(X > a) - P^2(X > b).$$

**习题 4.11** 设  $a$  是常数,  $(X, Y)$  有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} ax^2y, & x^2 < y < 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

求  $X, Y$  的边缘密度, 说明  $X, Y$  不独立.

**解.** 由

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \iint_{x^2 < y < 1} ax^2y dx dy = 1$$

得  $a = \frac{21}{4}$ . 有

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{x^2}^1 \frac{21}{4} x^2 y dy = \frac{21}{8} x^2 (1 - x^2), \quad -1 < x < 1,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{21}{4} x^2 y dx = \frac{7}{2} y^2 \sqrt{y}, \quad 0 < y < 1.$$

$\because f_X(x)f_Y(y) \neq f(x, y)$ ,  $\therefore X, Y$  不独立.

**习题 4.14** 设随机变量  $X, Y$  相互独立,  $X \sim \mathcal{E}(\lambda), Y \sim \mathcal{E}(\mu)$ , 计算  $P(X > Y)$ .

**解.**  $\because X, Y$  相互独立且分别有概率密度, 由书上的定理 3.1 得  $(X, Y)$  有概率密度

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} = \lambda \mu e^{-(\lambda x + \mu y)}, \quad x > 0, y > 0.$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= \iint_{\mathbb{R}_+^2} f(x, y) I[x > y] dx dy \\ &= \int_0^{\infty} dx \int_0^x f(x, y) dy \\ &= \int_0^{\infty} dx \int_0^x \lambda \mu e^{-(\lambda x + \mu y)} dy \\ &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\mu x}) dx \\ &= 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \end{aligned}$$



**习题 4.16** 设  $p = 1 - q \in (0, 1)$ ,  $0 < \alpha < q/p$ . 假设一个家庭有  $n$  个小孩的概率为

$$p_n = \begin{cases} \alpha p^n, & n \geq 1, \\ 1 - \alpha p/q, & n = 0. \end{cases}$$

如果男婴和女婴的出生是等可能的且相互独立, 求一个家庭有  $n$  个男孩的概率.

**解.** 设  $X$  为一个家庭中的小孩的个数,  $Y$  为一个家庭中的男孩的个数, 则  $P(X = x) = p_x$ .

由全概率公式得

$$P(Y = y) = \sum_{x=0}^{\infty} P(Y = y|X = x)P(X = x).$$

$\therefore$  男婴和女婴的出生是等可能的且相互独立,  $\therefore$

$$P(Y = y|X = x) = \begin{cases} C_x^y \left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{x-y}, & x \geq y, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} = \begin{cases} C_x^y \frac{1}{2^x}, & x \geq y, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \left(1 - \alpha \frac{p}{q}\right) C_0^0 \frac{1}{2^0} + \sum_{x=0}^{\infty} C_x^0 \frac{1}{2^x} \cdot \alpha p^x \\ &= 1 - \alpha \frac{p}{q} + \sum_{x=1}^{\infty} \alpha C_x^0 \left(\frac{p}{2}\right)^x \\ &= 1 - \alpha \frac{p}{q} + \alpha \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{p}{2}\right)^x \\ &= 1 - \alpha \frac{p}{q} + \alpha \frac{p/2}{1 - p/2} \\ &= 1 - \alpha \frac{p}{q} + \alpha \frac{p}{1 + q}, \end{aligned}$$

当  $y \neq 0$  时有

$$P(Y = y) = \sum_{x=y}^{\infty} C_x^y \frac{1}{2^x} \cdot \alpha p^x$$

**习题 4.17** 设随机向量  $(X, Y)$  有联合密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 + xy}{4}, & x, y \in (-1, 1), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明  $X^2, Y^2$  相互独立, 但  $X, Y$  不独立.

解.  $\because \forall x_0 \in (-1, 1)$ ,

$$\frac{f(x, y)}{f(x_0, y)} = \frac{1 + xy}{1 + x_0 y}$$

都是  $y$  的函数, 由书上的定理 3.4 (2) 得  $X, Y$  不独立.

令  $U = X^2, V = Y^2$ , 则  $X = \sqrt{U}, Y = \sqrt{V}$ ,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{vmatrix} = 4xy, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left( \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} = \frac{1}{4xy} = \frac{1}{4\sqrt{uv}}.$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} P(U = u, V = v) &= P(X = \sqrt{u}, Y = \sqrt{v}) + P(X = -\sqrt{u}, Y = \sqrt{v}) \\ &\quad + P(X = \sqrt{u}, Y = -\sqrt{v}) + P(X = -\sqrt{u}, Y = -\sqrt{v}) \\ &= \frac{1 + \sqrt{u}\sqrt{v}}{4} dx dy + \frac{1 + (-\sqrt{u})\sqrt{v}}{4} dx dy \\ &\quad + \frac{1 + (-\sqrt{u})(-\sqrt{v})}{4} dx dy + \frac{1 + \sqrt{u}(-\sqrt{v})}{4} dx dy \\ &= \frac{4 + 2\sqrt{u}\sqrt{v} - 2\sqrt{u}\sqrt{v}}{4} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \\ &= \frac{1}{4\sqrt{uv}} du dv. \end{aligned}$$

$\therefore (U, V)$  有联合密度

$$g(u, v) = \frac{1}{4\sqrt{uv}}, u, v \in (0, 1).$$

$U$  的边缘密度为

$$f_U(u) = \int_0^1 \frac{1}{4\sqrt{uv}} dv = \frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

对称地,  $f_V(v) = \frac{1}{2\sqrt{v}}$ .  $\because g(u, v) = f_U(u)f_V(v)$ ,  $\therefore U, V$  相互独立.

**习题 4.18** 设  $D$  是非负连续函数  $g(x)$  与  $x$  轴所夹的区域,  $D$  的面积  $m(D) \in (0, \infty)$ . 设  $(X, Y)$  在  $D$  上均匀分布, 求  $X$  的概率密度.

解. 设  $x_0 \in \mathbb{R}$ . 有

$$\begin{aligned} P(X \leq x_0) &= \iint_D \frac{1}{m(D)} I[X \leq x_0] dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{x_0} dx \int_0^{g(x)} \frac{1}{m(D)} dy \\ &= \int_{-\infty}^{x_0} \frac{g(x)}{m(D)} dx. \end{aligned}$$





$\therefore X$  有概率密度

$$f_X(x) = \frac{g(x)}{m(D)},$$

其中  $m(D) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ .

**习题 4.19** 设随机变量  $X$  服从二项分布  $\mathcal{B}(n, p)$ ,  $Y$  服从指数分布  $\mathcal{E}(\lambda)$ . 当  $X, Y$  独立时, 求  $Z = Y - X$  的分布函数和概率密度.

解.  $\because Y \sim \mathcal{E}(\lambda), \therefore P(Y \leq y) = (1 - e^{-\lambda y})I[y \geq 0]$ .

由全概率公式得

$$\begin{aligned} P(Y - X \leq z) &= \sum_{k=0}^n P(Y - X \leq z | X = k) P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n P(Y \leq z + k | X = k) P(X = k). \end{aligned}$$

$\because X, Y$  相互独立,  $\therefore$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n P(Y \leq z + k | X = k) P(X = k) &= \sum_{k=0}^n P(Y \leq z + k) P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n (1 - e^{-\lambda(z+k)}) I[z + k \geq 0] C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n (1 - e^{-\lambda(z+k)}) I[z \geq -k] C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \sum_{k=0}^n (1 - e^{-\lambda(z+k)}) I[z \geq -k] C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \\ f_Z(z) &= \frac{dF_Z(z)}{dz} = \lambda e^{-\lambda(z+k)} I[z \geq -k] C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

**习题 4.22** 设随机变量  $X, Y$  独立,  $X$  有概率密度  $f(x)$ ,  $Y$  有离散型概率分布  $P(Y = a_i) = p_i > 0 (i = 1, 2, \dots)$ . 证明:

(1) 若  $a_1, a_2, \dots$  都不为 0, 证明  $Z = XY$  有概率密度

$$h(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{|a_i|} f\left(\frac{z}{a_i}\right).$$

(2) 若有某个  $a_i = 0$ , 则  $Z$  不是连续型随机变量.

证明. (1) 由全概率公式得

$$\begin{aligned} P(Z = z) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(XY = z | Y = a_i) P(Y = a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P\left(X = \frac{z}{a_i} \middle| Y = a_i\right) P(Y = a_i). \end{aligned}$$

$\because X, Y$  独立,  $\therefore$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} P\left(X = \frac{z}{a_i} \middle| Y = a_i\right) P(Y = a_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} P\left(X = \frac{z}{a_i}\right) P(Y = a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} f\left(\frac{z}{a_i}\right) \cdot \frac{1}{|a_i|} p_i. \end{aligned}$$

(2) 不妨设  $a_1 = 0$ .  $\because \{Z = 0\} = \{XY = 0\} \supset \{Y = 0\} \supset \{Y = a_1\}$ ,  $\therefore P(Z = 0) \geq P(Y = a_1) > 0$ .  $\therefore Z$  不是连续型随机变量.

习题 4.23 设随机向量  $(X, Y)$  有联合密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, & x, y > 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

求  $Z = X + Y$  的概率密度.

解. 令  $W = X$ , 则  $X = W, Y = Z - W$ ,

$$\frac{\partial(z, w)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(z, w)} = \left(\frac{\partial(z, w)}{\partial(x, y)}\right)^{-1} = -1.$$

$$\begin{aligned} P(Z = z, W = w) &= P(X = w, Y = z - w) \\ &= f(w, z - w) dx dy \\ &= \frac{1}{2} z e^{-z} dw dz, \quad w > 0, z > 0, \end{aligned}$$

$\therefore$

$$f_Z(z) = \frac{1}{2} z e^{-z}, \quad z > 0.$$

习题 4.25 设随机变量  $U, V$  独立, 都服从  $(0, 1)$  上的均匀分布.

(a) 计算  $R = \sqrt{-2 \ln U}$  和  $\Theta = 2\pi V$  的概率密度;

(b) 证明  $X = R \cos \Theta, Y = R \sin \Theta$  独立, 都服从 Gauss 分布.



证明. (a)  $R$  的取值为  $(0, \infty)$ ,  $\Theta$  的取值为  $(0, 2\pi)$ . 有

$$P(R = r) = P(\sqrt{-2\ln U} = r) = P(U = e^{-r^2/2}) = |-re^{-r^2/2}| = re^{-r^2/2}, \quad r \in (0, \infty),$$

$$P(\Theta = \theta) = P\left(V = \frac{\theta}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}, \quad \theta \in (0, 2\pi).$$

(b)  $(X, Y)$  的取值为  $\{X^2 + Y^2 \neq 0\}$ . 由  $X = R \cos \Theta, Y = R \sin \Theta$  得  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ ,

$$\Theta = g(X, Y) = \begin{cases} 0 & Y = 0, X > 0 \\ \pi & Y = 0, X < 0 \\ \arctan \frac{Y}{X} & Y \neq 0, X \geq 0 \\ \pi - \arctan \frac{Y}{X} & Y \neq 0, X < 0 \end{cases}.$$

有

$$\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} = \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right)^{-1} = \frac{1}{r}.$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} P(X = x, Y = y) &= P(R = \sqrt{x^2 + y^2}, \Theta = g(X, Y)) \\ &= \frac{1}{2\pi} re^{-r^2/2} dr d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} re^{-r^2/2} \cdot \frac{1}{r} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy. \end{aligned}$$

$\therefore (X, Y)$  有概率密度

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}.$$

容易验证  $X, Y$  都服从 Gauss 分布且相互独立.

证明第 4.27 题需要先证明下面的引理.

**引理 8.1** 设取值为  $\mathbb{R}$  的连续型随机变量  $X, Y, Z$  相互独立, 则  $\forall a, b \in \mathbb{R}, aX + bY$  与  $Z$  相互独立.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>这可以由书上的定理 1.1 (3) 得到, 由于那里没有证明, 所以还是单独拿出来作为一个引理.

证明.  $\because X, Y, Z$  是连续型随机变量,  $\therefore (X, Y, Z)$  有概率密度  $f(x, y, z)$ .  $\because X, Y, Z$  相互独立,

$\therefore$

$$f(x, y, z) = f_X(x)f_Y(y)f_Z(z) = f_{X,Y}(x, y)f_Z(z),$$



其中  $f_{X,Y}(x,y)$  是  $(X,Y)$  的联合密度. 设

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix},$$

与第 4.33 题类似, 有

$$\begin{aligned} P(U = u, V = v, Z = z) &= P(X = a_1u + b_1v, Y = c_1u + d_1v, Z = z) \\ &= f_{X,Y}(a_1u + b_1v, c_1u + d_1v) f_Z(z) du dv dz \\ &= f_{U,V}(u, v) f_Z(z) du dv dz, \end{aligned}$$

其中  $f_{U,V}(u, v)$  ( $u, v \in \mathbb{R}$ ) 是  $(U, V)$  的联合密度.  $\therefore$

$$\begin{aligned} P(U \leq u_0, Z \leq z_0) &= P(U \leq u_0, V \leq \infty, Z \leq z_0) \\ &= \int_{-\infty}^{z_0} f_Z(z) dz \int_{-\infty}^{u_0} du \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, v) dv \\ &= \int_{-\infty}^{z_0} f_Z(z) dz \int_{-\infty}^{u_0} f_U(u) du \\ &= P(U \leq u_0) P(Z \leq z_0). \end{aligned}$$

$\therefore U = aX + bY$  与  $Z$  相互独立.

**习题 4.27** 设随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 都服从 Gauss 分布,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是不全为 0 的常数, 证明  $U = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$  服从 Gauss 分布.

**证明.** 用数学归纳法.  $n = 1$  时的情形是显然的.

假设对相互独立的随机变量  $X_1, \dots, X_{n-1}$  和任意不全为 0 的常数  $a_1, \dots, a_{n-1}$ ,  $U' = a_1X_1 + \dots + a_{n-1}X_{n-1}$  服从 Gauss 分布.

$\therefore X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 由引理 8.1 得  $a_1X_1 + a_2X_2, X_3, \dots, X_n$  相互独立,  $\therefore 1 \cdot (a_1X_1 + a_2X_2) + a_3X_3, X_4, \dots, X_n$  相互独立,  $\dots, \therefore U'$  与  $X_n$  相互独立.

由书上的定理 6.2 (3) 得  $(U', X)$  服从二维 Gauss 分布, 由书上的定理 6.2 (5) 得  $U = 1 \cdot U' + a_nX_n$  服从 Gauss 分布.

习题 4.28 (b) 设随机向量  $(X_1, X_2)$  服从二维 Gauss 分布, 有联合密度

$$f(x_1, x_2) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right)}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}},$$

设  $f_1(x)$  是  $X_1$  的边缘密度, 验证

$$\frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(x_2-\mu_x)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\right)$$

关于  $x_2$  是 Gauss 概率密度, 其中  $\mu_x = \mu_2 + (\rho\sigma_2/\sigma_1)(x_1 - \mu_1)$ .

证明. 由书上的定理 6.2 (1) 得

$$f_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right).$$

$\therefore$

$$\frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_2} e^u,$$

其中

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right) + \frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \\ &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left((1-(1-\rho^2))\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\rho^2(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\rho(x_1-\mu_1)}{\sigma_1} - \frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\left(x_2-\mu_2 - \frac{\rho\sigma_2(x_1-\mu_1)}{\sigma_1}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}(x_2-\mu_x)^2. \end{aligned}$$

习题 4.30 设随机变量  $X, Y$  相互独立,  $X \sim \mathcal{E}(\lambda), Y \sim \mathcal{E}(\mu)$ . 求  $U = \min(X, Y)$ ,  $V = \max(X, Y)$  和  $W = X/Y$  的概率密度.

解. 有

$$\begin{aligned} P(\min(X, Y) \leq u) &= P(\{X \leq u\} \cup \{Y \leq u\}) \\ &= P(X \leq u) + P(Y \leq u) - P(X \leq u, Y \leq u). \end{aligned}$$

$\therefore X, Y$  相互独立,  $\therefore$

$$\begin{aligned} & P(X \leq u) + P(Y \leq u) - P(X \leq u, Y \leq u) \\ &= P(X \leq u) + P(Y \leq u) - P(X \leq u)P(Y \leq u) \\ &= 1 - (P(X \leq u) - 1)(P(Y \leq u) - 1) \\ &= 1 - (1 - e^{-\lambda u} - 1)(1 - e^{-\mu u} - 1) \\ &= 1 - e^{-(\lambda+\mu)u}. \end{aligned}$$

$\therefore U$  有概率密度

$$f_U(u) = (\lambda + \mu)e^{-(\lambda+\mu)u}, \quad u \in (0, \infty).$$

有

$$\begin{aligned} P(\max(X, Y) \leq v) &= P(X \leq v, Y \leq v) \\ &= P(X \leq v)P(Y \leq v) \\ &= (1 - e^{-\lambda v})(1 - e^{-\mu v}) \\ &= 1 - e^{-\lambda v} - e^{-\mu v} + e^{-(\lambda+\mu)v}. \end{aligned}$$

$\therefore V$  有概率密度

$$f_V(v) = \lambda e^{-\lambda v} + \mu e^{-\mu v} - (\lambda + \mu)e^{-(\lambda+\mu)v}, \quad v \in (0, \infty).$$

$\therefore X, Y$  相互独立,  $\therefore (X, Y)$  有联合密度

$$f(x, y) = \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} = \lambda \mu e^{-(\lambda x + \mu y)}.$$

设  $Z = Y$ , 则  $X = WZ$ ,  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(w, z)} = z$ . 对  $w, z \in (0, \infty)$ , 有

$$\begin{aligned} P(Z = z, W = w) &= P(X = wz, Y = z) \\ &= f(wz, z) dx dy \\ &= \lambda \mu e^{-(\lambda w + \mu)z} z dw dz. \end{aligned}$$

$\therefore$

$$P(W \leq w_0) = P(Z \leq \infty, W \leq w_0) = \int_0^{w_0} dw \int_0^\infty \lambda \mu e^{-(\lambda w + \mu)z} z dz.$$

∴

$$\begin{aligned}
 f_W(w) &= \int_0^\infty \lambda \mu e^{-(\lambda w + \mu)z} z dz \\
 &= -\frac{\lambda \mu}{\lambda w + \mu} \int_0^\infty z d e^{-(\lambda w + \mu)z} \\
 &= \frac{\lambda \mu}{\lambda w + \mu} \int_0^\infty e^{-(\lambda w + \mu)z} dz \\
 &= \frac{\lambda \mu}{(\lambda w + \mu)^2}, \quad w \in (0, \infty).
 \end{aligned}$$

注 在平面上作出  $\min(X, Y) \leq u$  和  $\max(X, Y) \leq v$  对应的区域如图 4 中的蓝色区域. 可以对区域  $D_1, D_2$  积分得到  $\min(X, Y), \max(X, Y)$  的分布函数.

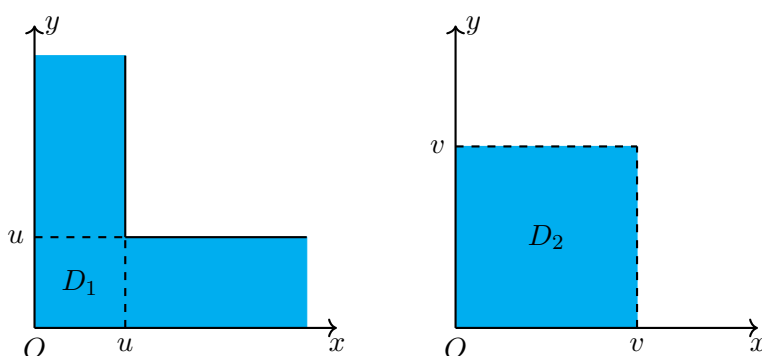


图 4: 左图为  $D_1 = \{\min(X, Y) \leq u\}$ , 右图为  $D_2 = \{\max(X, Y) \leq v\}$

**习题 4.31** 设随机向量  $(X, Y)$  有联合密度  $f(x)g(y)$ ,  $(U, V)$  有联合密度

$$p(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} f(u)g(v), & u \geq v, \\ 0 & u < v, \end{cases}$$

(a) 求  $U, V$  的边缘密度;

(b) 证明  $\alpha = P(X \geq Y)$ .

证明. (a) ∵

$$\begin{aligned}
 P(U \leq u) &= \int \int_{x \leq u} \frac{1}{\alpha} f(x)g(y) I[x < y] dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^u \frac{1}{\alpha} f(x) dx \int_{-\infty}^x g(y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^u \frac{1}{\alpha} f(x) G(x) dx,
 \end{aligned}$$

其中  $G(x) = \int_{-\infty}^x g(y)dy$ ,  $\therefore U$  的概率密度为  $f_U(u) = \frac{1}{\alpha} f(x)G(x)$ .  $\therefore$

$$\begin{aligned} P(V \leq v) &= 1 - P(V > v) \\ &= 1 - \iint_{y>v} \frac{1}{\alpha} f(x)g(y)I[x < y]dxdy \\ &= 1 - \int_v^{\infty} \frac{1}{\alpha} g(y)dy \int_y^{\infty} f(x)dx \\ &= 1 - \int_v^{\infty} \frac{1}{\alpha} g(y)F(y)dy, \end{aligned}$$

其中  $F(y) = \int_{-\infty}^y f(x)dx$ ,  $\therefore U$  的概率密度为  $f_V(v) = \frac{1}{\alpha} g(y)F(y)$ .

(b) 有

$$\begin{aligned} P(X \geq Y) &= \iint_{x \geq y} f(x)g(y)dxdy \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} f(x)dx \int_{-\infty}^x g(y)dy \\ &= \alpha \cdot P(U \leq \infty) = \alpha. \end{aligned}$$

**习题 4.32** 随机变量  $X, Y$  相互独立,  $X$  有分布函数  $F_X(x)$  和概率密度  $f_X(x) = F'_X(x)$ . 如果  $P(Y > y) = (P(X > y))^\beta$ , 其中  $\beta$  是正常数, 求  $P(X \geq Y)$ .

解.  $Y$  的分布函数为

$$F_Y(y) = 1 - P(Y > y) = 1 - (P(X > y))^\beta = 1 - (1 - F_X(x))^\beta.$$

$\therefore X$  有概率密度  $f_X(x)$ ,  $\therefore F_X(x)$  可导.  $\therefore F_Y(y)$  可导.  $\therefore Y$  有概率密度  $f_Y(y) = F'_Y(y)$ .  
有

$$\begin{aligned} P(X \geq Y) &= \iint_{x \geq y} f_X(x)f_Y(y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx \int_{-\infty}^x f_Y(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)F_Y(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F'_X(x)(1 - (1 - F_X(x))^\beta)dx. \end{aligned}$$

令  $t = F_X(x)$ , 则  $x = \infty$  时  $t = 1$ ,  $x = -\infty$  时  $t = 0$ . 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} F'_X(x)(1 - (1 - F_X(x))^\beta)dx = \int_0^1 (1 - (1 - t)^\beta)dt = \frac{\beta}{1 + \beta}.$$



习题 4.33 (有修改) 证明: 如果  $\mathbb{R}^2$  上的随机向量  $(X, Y)$  有联合密度  $f(x, y)$ ,  $(U, V)$  由线性变换

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

决定, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix},$$

则  $(U, V)$  有联合密度

$$g(u, v) = \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} f((u - \mu_1, v - \mu_2) \mathbf{A}^{-T}), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

其中  $\mathbf{A}^{-T} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ .

证明.  $\forall u, v$ , 有

$$\begin{aligned} P(U = u, V = v) &= P\left(\mathbf{A} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \\ &= P\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} u - \mu_1 \\ v - \mu_2 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = |\mathbf{A}^{-1}|, \therefore$$

$$\begin{aligned} P\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} u - \mu_1 \\ v - \mu_2 \end{pmatrix}\right) &= f\left(\left(\mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} u - \mu_1 \\ v - \mu_2 \end{pmatrix}\right)^T\right) |\det \mathbf{A}^{-1}| du dv \\ &= f((u - \mu_1, v - \mu_2) \mathbf{A}^{-T}) |\det \mathbf{A}^{-1}| du dv \\ &= \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} f((u - \mu_1, v - \mu_2) \mathbf{A}^{-T}) du dv. \end{aligned}$$

$\therefore$

$$g(u, v) = \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} f((u - \mu_1, v - \mu_2) \mathbf{A}^{-T}).$$

## 9 第 5 章笔记

可以证明, 任意的概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上所有有二阶矩的随机变量构成的线性空间 (其中的加法和纯量乘法是随机变量的加法和纯量乘法) 是一个 Hilbert 空间, 内积为  $\langle X, Y \rangle = E(XY)$ . 这个 Hilbert 空间是无穷维的. 第 7 章第 6 节介绍的均方收敛可以看成是在这个 Hilbert 空间中收敛.



书上的例 4.5 用到了下面的引理.

**引理 9.1** 设  $X$  是随机变量, 如果  $\int_0^\infty P(|X| > x)dx = 0$ , 那么  $\forall x > 0, P(|X| > x) = 0$ .

**证明.** 假设  $\exists x_0 > 0$  使得  $P(|X| > x_0) = \varepsilon > 0$ , 则  $\forall x \in (0, x_0), P(|X| > x) \geq P(|X| > x_0) = \varepsilon$ .  $\therefore$

$$\int_0^\infty P(|X| > x)dx \geq \int_0^{x_0} P(|X| > x)dx \geq x_0\varepsilon > 0.$$

这与  $\int_0^\infty P(|X| > x)dx = 0$  矛盾.

补充几个定理的证明.

**定理 9.1** (书上的定理 5.2) 设  $a, b, c$  是常数,  $\mu_j = EX_j, \text{Var}(X_j) < \infty (1 \leq j \leq n)$ , 则

$$(4) \text{Var} \left( \sum_{j=1}^n X_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (E(X_i X_j) - \mu_i \mu_j);$$

$$(5) \text{当 } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ 相互独立时, } \text{Var} \left( \sum_{j=1}^n X_j \right) = \sum_{j=1}^n \text{Var}(X_j).$$

**证明.** (4) 有

$$\begin{aligned} & \text{Var} \left( \sum_{j=1}^n X_j \right) \\ &= E \left( \sum_{j=1}^n X_j - \sum_{j=1}^n \mu_j \right)^2 \\ &= E \left( \left( \sum_{j=1}^n X_j \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^n \mu_j \right)^2 - 2 \left( \sum_{j=1}^n X_j \right) \left( \sum_{j=1}^n \mu_j \right) \right) \\ &= E \left( \left( \sum_{j=1}^n X_j \right)^2 - \left( \sum_{j=1}^n \mu_j \right)^2 - 2 \left( \sum_{j=1}^n X_j - \sum_{j=1}^n \mu_j \right) \left( \sum_{j=1}^n \mu_j \right) \right) \\ &= E \left( \sum_{j=1}^n X_j \right)^2 - \left( \sum_{j=1}^n \mu_j \right)^2 - E \left( 2 \left( \sum_{j=1}^n X_j - \sum_{j=1}^n \mu_j \right) \left( \sum_{j=1}^n \mu_j \right) \right) \\ &= E \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \right) - \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i \mu_j \right) - 2 \left( \sum_{j=1}^n \mu_j \right) \left( \sum_{j=1}^n EX_j - \sum_{j=1}^n \mu_j \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(X_i X_j) \right) - \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i \mu_j \right) - 2 \left( \sum_{j=1}^n \mu_j \right) \sum_{j=1}^n (EX_j - \mu_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (E(X_i X_j) - \mu_i \mu_j). \end{aligned}$$

(5)  $\because X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立,  $\therefore \forall i, j = 1, 2, \dots, n, j \neq i, E(X_i X_j) = EX_i EX_j$ . 由 (4) 得

$$\begin{aligned}\text{Var}\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (E(X_i X_j) - \mu_i \mu_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (EX_i EX_j - \mu_i \mu_j) + \sum_{i=1}^n (EX_i^2 - \mu_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^n (EX_i^2 - (EX_i)^2) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i).\end{aligned}$$

**定理 9.2** (书上的定理 6.2) 设  $\rho_{XY}$  是  $X, Y$  的相关系数, 则有

- (1)  $|\rho_{XY}| \leq 1$ ;
- (2)  $|\rho_{XY}| = 1$  的充要条件为有常数  $a, b$  使得  $P(Y = a + bX) = 1$ ;
- (3) 如果  $X, Y$  独立, 则  $X, Y$  不相关.

**证明.** (1) 由定义,

$$|\rho_{XY}| = \frac{|E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y))|}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

由内积不等式 (书上的定理 6.1),

$$|E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y))| \leq \sqrt{E(X - \mu_X)^2 E(Y - \mu_Y)^2} = \sigma_X \sigma_Y, \quad (9.1)$$

$$\therefore |\rho_{XY}| \leq 1.$$

(2) 由内积不等式取等号的充要条件得式 (9.1) 成立的充要条件是有常数  $a, b$  使得  $P(Y - \mu_Y = a + b(X - \mu_X)) = 1$ , 即有常数  $b, a' = a + \mu_Y - b\mu_X$  使得  $P(Y = a' + bX) = 1$ .

(3)  $\because X, Y$  独立,  $\therefore$  由书上的定理 4.1 得  $E(XY) = EXEY$ . 由书上的式 (6.6) 得

$$\sigma_{XY} = E(XY) - EXEY = 0.$$

设随机向量  $(X, Y)$  服从二维 Gauss 分布, 则分布由  $X$  的均值  $\mu_X$ , 方差  $\sigma_X$ ,  $Y$  的均值  $\mu_Y$ , 方差  $\sigma_Y$ ,  $X, Y$  的相关系数  $\rho_{XY}$  这 5 个量完全确定.  $\therefore$  可以用  $(X, Y) \sim N(\mu_X, \mu_Y; \sigma_X, \sigma_Y; \rho_{XY})$  来表示  $(X, Y)$  服从由这 5 个量确定的二维 Gauss 分布.

## 10 第 5 章习题



**习题 5.5** 一部手机收到的短信中有  $p = 2\%$  是广告, 你期望相邻的两次广告短信中有多少个不是广告短信?

**解.** 设  $X$  为相邻的两次广告短信中不是广告短信的数目, 则  $P(X = k) = p^k(1 - p)$ . 有

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} kp^k(1 - p) \\ &= p(1 - p) \sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} \\ &= p(1 - p) \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} x^k \right) \Big|_{x=p} \\ &= p(1 - p) \left( \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) \Big|_{x=p} \\ &= p(1 - p) \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{1 - x} \right) \Big|_{x=p} \\ &= p(1 - p) \cdot \frac{1}{(1 - p)^2} = \frac{p}{1 - p}. \end{aligned}$$

把  $p = 2\%$  代入得  $EX = 49$ .

**习题 5.8** 设  $X, Y$  独立, 都服从 Gauss 分布, 求  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$  的数学期望.

**解.** 由书上的定理 4.3 得  $R$  有 Rayleigh 概率密度

$$f_R(r) = re^{-r^2/2}.$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} ER &= \int_{-\infty}^{\infty} r^2 e^{-r^2/2} dr \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} re^{-r^2/2} dr^2/2 \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\infty} t^{1/2} e^{-t} dt \\ &= \sqrt{2} \Gamma(3/2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

**习题 5.9** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布, 且  $P(X_i > 0) = 1$ . 对于  $k \leq n$ , 计算

$$E \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_k}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}.$$

**解.** 设

$$Y_i = \frac{X_i}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}, \quad (n = 1, 2, \dots, n).$$

$\because X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布,  $\therefore Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  同分布.  $\because P(X_i > 0) = 1, \therefore P(Y_i > 0) = 1$ . 有

$$1 = E \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{X_1 + X_2 + \dots + X_n} = EY_1 + EY_2 + \dots + EY_n = nEY_1,$$

$$E \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_k}{X_1 + X_2 + \dots + X_n} = EY_1 + EY_2 + \dots + EY_k = kEY_1,$$

$\therefore$

$$E \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_k}{X_1 + X_2 + \dots + X_n} = \frac{k}{n}.$$

**习题 5.12** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 有共同的离散分布  $p_k = P(X = k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . 引入  $u_k = p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1}$ ,  $v_k = 1 - u_k$ , 证明:

$$E[\min(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^n, \quad E[\max(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - u_k^n).$$

**证明.** 由书上的定理 3.2 (3) 得

$$\begin{aligned} E[\min(X_1, X_2, \dots, X_n)] &= \sum_{k=1}^{\infty} P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 \geq k, X_2 \geq k, \dots, X_n \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 \geq k)P(X_2 \geq k) \cdots P(X_n \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - P(X_1 \leq k-1))(1 - P(X_2 \leq k-1)) \cdots (1 - P(X_n \leq k-1)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} v_k^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\max(X_1, X_2, \dots, X_n)] &= \sum_{k=1}^{\infty} P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 1 - P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) < k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 1 - P(X_1 < k, X_2 < k, \dots, X_n < k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 1 - P(X_1 < k)P(X_2 < k) \cdots P(X_n < k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 1 - u_k^n.
\end{aligned}$$

习题 5.14 (1) 设  $(X, Y)$  有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2x^2y^3}, & x > 1, 1 < xy < x^2, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

计算  $EY$ .

解. 有  $1 < xy < x^2 \Rightarrow \frac{1}{x} < y < x$ . 由书上的定理 3.1 (2),

$$\begin{aligned}
EY &= \iint_{\mathbb{R}^2} yf(x, y)dx dy \\
&= \int_1^{\infty} dx \int_{1/x}^x y \frac{3}{2x^3y^2} dy \\
&= \int_1^{\infty} \frac{3}{2x^3} dx \int_{1/x}^x \frac{1}{y} dy \\
&= \int_1^{\infty} \frac{3(\ln x - \ln(1/x))}{2x^3} dx \\
&= \int_1^{\infty} \frac{3 \ln x}{x^2} d \ln x \\
&= \int_0^{\infty} 3te^{-2t} dt = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

习题 5.17 (b) 设 5 台计算机独立工作, 每台计算机感染病毒前的时间 (分别记作  $X_1, \dots, X_5$ ) 都服从参数为  $\lambda$  的指数分布  $\mathcal{E}(\lambda)$ . 对 5 台计算机都感染病毒前的时间的数学期望是多少?

解. 记  $Y = \max(X_1, \dots, X_5)$ , 则

$$\begin{aligned}
 P(Y > y) &= 1 - P(Y \leq y) \\
 &= 1 - P(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \dots, X_5 \leq y) \\
 &= 1 - P(X_1 \leq y)P(X_2 \leq y) \cdots P(X_5 \leq y) \\
 &= 1 - (1 - e^{-\lambda y})^5 \\
 &= 1 - \left(1 + \sum_{i=1}^5 C_5^i (-e^{-\lambda y})^i\right) \\
 &= \sum_{i=1}^5 C_5^i (-1)^{i-1} e^{-\lambda i y}.
 \end{aligned}$$

由书上的定理 3.1 (3) 得

$$\begin{aligned}
 EY &= \int_0^\infty P(Y > y) dy \\
 &= \int_0^\infty \sum_{i=1}^5 C_5^i (-1)^{i-1} e^{-\lambda i y} dy \\
 &= \sum_{i=1}^5 C_5^i (-1)^{i-1} \int_0^\infty e^{-\lambda i y} dy \\
 &= \sum_{i=1}^5 C_5^i \frac{1}{\lambda i} (-1)^{i-1} = \frac{137}{60\lambda}.
 \end{aligned}$$

习题 5.20 设  $n \geq 2$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布,

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \hat{\mu})^2,$$

验证  $E\hat{\mu} = EX_1, E\hat{\sigma}^2 = \text{Var}(X_1)$ .

证明.  $\because X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布,  $\therefore$

$$E\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n EX_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n EX_1 = EX_1.$$

∴

$$\begin{aligned}
 E\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n E(X_j - \hat{\mu})^2 \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n E \left( X_j - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n E \left( \frac{n-1}{n} X_j - \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n X_i \right)^2 \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n E \left( \frac{n-1}{n} (X_j - EX_1) - \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (X_i - EX_1) \right)^2.
 \end{aligned}$$

令  $Y_i = X_i - EX_1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 则  $Y_i$  独立同分布, 均值为 0, 方差为  $\text{Var}(X_1)$ .



$\therefore \forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, \hat{i}, \dots, n, E(X_i X_j) = E(X_i)E(X_j) = 0$ . 有

$$\begin{aligned}
 & E\hat{\sigma}^2 \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n E \left( \frac{n-1}{n} Y_j - \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n Y_i \right)^2 \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n E \left( \left( \frac{n-1}{n} Y_j \right)^2 + \left( \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n Y_i \right)^2 - 2 \frac{n-1}{n} Y_j \left( \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n Y_i \right) \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left( \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 EY_j^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n E(Y_i Y_k) - 2 \frac{n-1}{n^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n E(Y_i Y_j) \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left( \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 EY_j^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n EY_i^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j \\ k \neq i}}^n E(Y_i Y_k) - 2 \frac{n-1}{n^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n E(Y_i Y_j) \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left( \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 E(Y_j - EY_j)^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n E(Y_i - EY_i)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left( \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \text{Var}(X_1) + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \text{Var}(X_1) \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left( \frac{(n-1)^2}{n^2} \text{Var}(X_1) + \frac{n-1}{n^2} \text{Var}(X_1) \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_1).
 \end{aligned}$$

**习题 5.22** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是相互独立的随机变量,  $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ . 求满足  $\sum_{j=1}^n a_j = 1, a_j \geq 0$  的常数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  使得  $Y = \sum_{j=1}^n a_j X_j$  的方差最小.

**解.**  $\because X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立,  $\therefore$

$$\begin{aligned}
 & P(a_1 X_1 \leq x_1, a_2 X_2 \leq x_2, \dots, a_n X_n \leq x_n) \\
 &= P(X_1 \leq x_1/a_1, X_2 \leq x_2/a_2, \dots, X_n \leq x_n/a_n) \\
 &= P(X_1 \leq x_1/a_1) P(X_2 \leq x_2/a_2) \cdots P(X_n \leq x_n/a_n) \\
 &= P(a_1 X_1 \leq x_1) P(a_2 X_2 \leq x_2) \cdots P(a_n X_n \leq x_n).
 \end{aligned}$$

$\therefore a_1X_1, a_2X_2, \dots, a_nX_n$  相互独立. 由定理 9.1 (5) 得

$$\text{Var}(Y) = \sum_{j=1}^n \text{Var}(a_jX_j) = \sum_{j=1}^n a_j^2 \sigma_j^2.$$

由 Cauchy 不等式得

$$1 = \sum_{j=1}^n a_j \sigma_j \cdot \frac{1}{\sigma_j} \leq \left( \sum_{j=1}^n (a_j \sigma_j)^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_j^2} \right),$$

当且仅当  $a_j \sigma_j = \lambda \cdot \frac{1}{\sigma_j}, j = 1, 2, \dots, n$  时取等号.  $\therefore a_j = \frac{\sigma_j^{-2}}{\sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2}}, j = 1, 2, \dots, n.$

**习题 5.25** 设非负随机变量  $X$  有离散分布  $p_j = P(X = x_j), j \geq 1$ . 证明:

$$(1) P(X > x) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j I[x < x_j];$$

$$(2) EX = \int_0^{\infty} P(X > x) dx.$$

**证明.** (1) 有  $\forall j, P(X > x | X = x_j) = I[x < x_j]$ . 由全概率公式得

$$P(X > x) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X > x | X = x_j) P(X = x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j I[x < x_j].$$

(2) 由 (1) 得

$$\int_0^{\infty} P(X > x) dx = \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_j I[x < x_j] dx.$$

$\therefore \sum_{j=1}^{\infty} p_j I[x < x_j] \leq \sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$ , 由 Weierstrass 判别法得  $\sum_{j=1}^{\infty} p_j I[x < x_j]$  在  $(0, \infty)$  上一致收敛,  $\therefore$  求和号和积分号可以交换次序. 有

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_j I[x < x_j] dx &= \sum_{j=1}^{\infty} p_j \int_0^{\infty} I[x < x_j] dx \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} p_j \int_0^{x_j} dx \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} p_j x_j = EX. \end{aligned}$$

**习题 5.26** 如果  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , 验证  $\rho(X + Y, X - Y) = \frac{\text{Var}(X) - \text{Var}(Y)}{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)}.$



证明. 定义  $E^2X := (EX)^2$ . 由书上的式 (6.6) 得

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X+Y, X-Y) &= E((X+Y)(X-Y)) - E(X+Y)E(X-Y) \\ &= E(X^2 - Y^2) - (EX + EY)(EX - EY) \\ &= EX^2 - EY^2 - (E^2X - E^2Y) \\ &= (EX^2 - E^2X) - (EY^2 - E^2Y) \\ &= \text{Var}(X) - \text{Var}(Y).\end{aligned}$$

由书上的式 (5.2) 得

$$\begin{aligned}\text{Var}(X \pm Y) &= E(X \pm Y)^2 - E^2(X \pm Y) \\ &= E(X^2 + Y^2 \pm 2XY) - (EX \pm EY)^2 \\ &= EX^2 + EY^2 \pm 2E(XY) - (E^2X + E^2Y \pm 2EXEY) \\ &= (EX^2 - E^2X) + (EY^2 - E^2Y) \pm 2(E(XY) - EXEY) \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \pm 2\text{Cov}(X, Y).\end{aligned}$$

$$\because \text{Cov}(X, Y) = 0, \therefore \text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y),$$

$$\begin{aligned}\rho(X+Y, X-Y) &= \frac{\text{Cov}(X+Y, X-Y)}{\sqrt{\text{Var}(X+Y)\text{Var}(X-Y)}} \\ &= \frac{\text{Var}(X) - \text{Var}(Y)}{\sqrt{(\text{Var}(X) + \text{Var}(Y))^2}} \\ &= \frac{\text{Var}(X) - \text{Var}(Y)}{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)}.\end{aligned}$$

习题 5.28 设  $(X, Y)$  有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} x+y & x \in (0, 1), y \in (0, 1), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

计算  $\text{Cov}(X, Y)$ .

解. 有

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \int_0^1 (x+y)dy = x + \frac{1}{2}, \quad x \in (0, 1), \\ EX &= \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \frac{7}{12}.\end{aligned}$$

对称地, 有  $EY = \frac{7}{12}$ .



$$E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xyf(x, y)dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 xy(x+y)dy = \frac{1}{3}.$$

∴

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EXEY = -\frac{1}{144}.$$

**习题 5.30** 设活塞的直径  $X$  的平均值为 20.00cm, 标准差为 0.02; 气缸的直径  $Y$  的平均值为 20.10cm, 标准差为 0.02. 设  $X$  与  $Y$  独立且都服从 Gauss 分布, 计算活塞能装入气缸的概率.

**解.** 事件“活塞能装入气缸”等价于事件  $A = \{X < Y\}$ . 设  $(X, Y)$  的联合密度为  $f(x, y)$ , 则

$$P(A) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)I[x < y]dx dy = \iint_{x < y} f(x, y)dx dy.$$

由题得

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \cdot 0.02^2} \exp\left(-\frac{(x-20.0)^2}{2 \cdot 0.02^2} - \frac{(y-20.1)^2}{2 \cdot 0.02^2}\right).$$

∴

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\pi \cdot 0.02^2} \exp\left(-\frac{(x-20.0)^2}{2 \cdot 0.02^2} - \frac{(y-20.1)^2}{2 \cdot 0.02^2}\right) dx \approx 0.9998.$$

**注** 我不会算这个积分, 所以用了 Mathematica 的数值积分来计算. 理论上, 对  $\forall a$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\pi \cdot 0.02^2} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot 0.02^2} - \frac{(y-a-0.1)^2}{2 \cdot 0.02^2}\right) dx$$

的值都一样, 都为  $P(A)$ , 但是在 Mathematica 中, 上式取不同的  $a$ , 计算结果不一样.

取  $a = -10, 0, 10, 20$  分别计算上式的 Mathematica 程序如下:

```
a = {-10, 0, 10, 20};
NIntegrate[
  1/(2 Pi 0.02^2)*Exp[-(x - a)^2/(2*0.02^2) - (y - a - 0.1)
    ^2/(2*0.02^2)],
  {y, -Infinity, Infinity}, {x, -Infinity, y},
  MinRecursion -> 100, MaxRecursion -> 100]
```

**习题 5.32** 设  $X$  的概率密度是偶函数,  $0 < EX^2 < \infty$ , 证明  $|X|$  与  $X$  不相关也不独立.

**证明.** ∵  $X$  的概率密度是偶函数, ∴  $EX = 0$ , ∴

$$\text{Cov}(X, |X|) = E(X|X|) - EXE|X| = E(X|X|).$$



设  $X$  的概率密度为  $f(x)$ .  $\because f(x)$  是偶函数,  $\therefore x|f(x)$  是奇函数,

$$E(X|X|) = \int_{-\infty}^{\infty} x|f(x)|dx = 0.$$

$\therefore X, |X|$  不相关.

若  $X = x$ , 则  $|X|$  的取值只能为  $|x|$ .  $\therefore X, |X|$  不独立.

**习题 5.33** 设  $X \sim N(0, \sigma^2)$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ , 验证

$$EX^n = \begin{cases} \sigma^n(n-1)!!, & n = 2m, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

**证明.** 有

$$EX^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx.$$

当  $n = 2m + 1$  时, 被积函数是奇函数,  $\therefore EX^n = 0$ . 当  $n = 2m$  时, 被积函数是偶函数, 有

$$EX^n = 2 \int_0^{\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx.$$

令  $t = \frac{x^2}{2\sigma^2}$ , 则  $x = \sigma\sqrt{2t}$ ,  $dx = \frac{\sigma}{\sqrt{2t}} dt$ . 代入得

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx &= 2 \int_0^{\infty} (\sigma\sqrt{2t})^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t} \frac{\sigma}{\sqrt{2t}} dt \\ &= 2 \frac{\sigma^n}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (\sqrt{2t})^{n-1} e^{-t} dt \\ &= 2 \frac{\sigma^n 2^{n/2-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{(n-1)/2} e^{-t} dt \\ &= \frac{\sigma^n 2^{n/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right). \end{aligned}$$

$\because \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ ,  $\therefore$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) &= \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n/2}} (n-1)!! \cdot \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

$\therefore EX = \sigma^n(n-1)!!$ .

**习题 5.35 (以及 5.18)** 设点随机地落在中心为原点, 半径为  $R$  的圆周上, 落点坐标是  $(X, Y)$ , 求  $X, Y$  的方差和协方差.



解. 由第 3.26 题得  $x$  有概率密度

$$f(x) = \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2}, \quad -R < x < R.$$

$\because f(x)$  是偶函数,  $\therefore EX = \int_{-R}^R xf(x)dx = 0$ . 对称地,  $EY = 0$ .  $\therefore \text{Var}(X) = EX^2, \text{Var}(Y) = EY^2, \text{Cov}(X, Y) = E(XY)$ .

由对称性得  $EX^2 = EY^2, \therefore$

$$EX^2 = \frac{EX^2 + EY^2}{2} = \frac{E(X^2 + Y^2)}{2}.$$

有

$$\begin{aligned} E(X^2 + Y^2) &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} (x^2 + y^2) \frac{1}{\pi R^2} dx dy \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 \cdot r dr \\ &= \frac{R^2}{2}. \end{aligned}$$

$$\therefore EX^2 = EY^2 = \frac{R^2}{4}.$$

有

$$E(XY) = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} xy \frac{1}{\pi R^2} dx dy = 0.$$

注 书上的答案应该有点问题, 我用 Mathematica 算  $\int_{-R}^R x^2 f(x)dx$  的结果也是  $\frac{R^2}{4}$ .

第 5.36 题需要用到下面的引理.

**引理 10.1** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 都服从参数为  $\lambda$  的指数分布, 则  $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  有密度函数

$$f_Z(z) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda z} z^{n-1}, \quad z > 0.$$

**证明.** 用数学归纳法.  $n=1$  时的情形由指数分布的定义得.

假设对符合题目要求的  $X_1, \dots, X_{n-1}, X_n, W = X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1}$  有密度函数

$$f_W(w) = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} e^{-\lambda w} w^{n-2}, \quad w > 0.$$

令  $Z = W + X_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ , 则

$$P(Z \leq z) = \iiint_{\substack{x+w \leq z \\ x > 0 \\ w > 0}} P(X_n = x, W = w).$$

由引理 8.1 可以归纳地得到<sup>a</sup>:  $W$  与  $X_n$  独立.  $\therefore P(X_n = x, W = w) = P(X_n = x)P(W = w) = f_{X_n}(x)f_W(w)dx dw$ , 其中  $f_{X_n}(x)$  是  $X_n$  的概率密度.  $\therefore$

$$\begin{aligned} \iiint_{\substack{x+w \leq z \\ x > 0 \\ w > 0}} P(X_n = x, W = w) &= \iiint_{\substack{x+w \leq z \\ x > 0 \\ w > 0}} f_{X_n}(x)f_W(w)dx dw \\ &= \int_0^z f_W(w)dw \int_0^{z-w} f_{X_n}(x)dx \\ &= \int_0^z \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} e^{-\lambda w} w^{n-2} dw \int_0^{z-w} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} \int_0^z e^{-\lambda w} (1 - e^{-\lambda(z-w)}) w^{n-2} dw \\ &= \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} \int_0^z (e^{-\lambda w} - e^{-\lambda z}) w^{n-2} dw \\ &= \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} \left( \int_0^z e^{-\lambda w} w^{n-2} dw - e^{-\lambda z} \int_0^z w^{n-2} dw \right). \end{aligned}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{\partial}{\partial z} P(Z \leq z) \\ &= \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \int_0^z e^{-\lambda w} w^{n-2} dw - e^{-\lambda z} \int_0^z w^{n-2} dw \right) \\ &= \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} \left( e^{-\lambda z} z^{n-2} - e^{-\lambda z} z^{n-2} - (-\lambda) e^{-\lambda z} \int_0^z w^{n-2} dw \right) \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-2)!} e^{-\lambda z} \int_0^z w^{n-2} dw \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda z} z^{n-1}. \end{aligned}$$

$\therefore$  原命题对  $n$  个变量也成立.

<sup>a</sup>参考第 4.27 题.

**习题 5.36 (a)** 假设你的手机收到短信的时间间隔是相互独立的随机变量, 都服从参数为  $\lambda = 1/2$  的指数分布. 现在你在等一个朋友的短信, 如果每个短信以概率  $p = 0.1$  来自你的这位朋友, 从  $t = 0$  开始, 用  $Y$  表示等待时间的长度. 计算等待时间  $Y$  的概率分布.

解. 设你朋友的短信是第  $X$  个到达的短信, 则  $X$  服从几何分布,  $P(X = k) = pq^{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $q = 1 - p$ . 由全概率公式得

$$P(Y = y) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Y = y|X = n)P(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Y = y|X = n)pq^{n-1}.$$

在你朋友的短信是第  $n$  个到达的短信的情况下, 等待时间是  $n$  个独立的指数分布之和. 由引理 10.1 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(Y = y|X = n)pq^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda y} y^{n-1} pq^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda y} y^{n-1} pq^{n-1} \\ &= \lambda p e^{-\lambda y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda y q)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \lambda p e^{-\lambda y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda y q)^n}{n!} \\ &= \lambda p e^{-\lambda y} e^{\lambda y q} \\ &= \lambda p e^{-\lambda p y}. \end{aligned}$$

把  $\lambda = 1/2, p = 0.1$  代入得  $Y \sim \mathcal{E}(1/20)$ .

## 11 第 6 章笔记

由书上的定理 3.1 (3) 得

$$EX = E(E(X|Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X|Y = y)P(Y = y)dy.$$

这可以看成是书上的定理 1.1 (1) 对连续型随机变量的推广.

条件数学期望  $E(X|Y)$  按定义是用一个  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  的函数  $Y$  代替  $\mathbb{R}$  上的函数

$$m(y) := E(X|Y = y)$$

中的  $y$ .  $\because \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  的函数与  $\mathbb{R}$  上的函数复合仍然是  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  的函数,  $\therefore E(X|Y)$  是一个随机变量. 用类似的方法可以解释书上第 7 章的式 (6.2).

**例 11.1** (书上第 7 章的式 (6.2)) 对于  $x \in \mathbb{N}_+$ , 有

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} I[x \geq k].$$





将  $x$  替换为  $\Omega \rightarrow \mathbb{N}_+$  的随机变量  $X$ , 则有

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} I[X \geq k].$$

## 12 第 6 章习题

**习题 6.1 (a)** 设  $N_1, N_2, \dots$  独立同分布,  $N_1 \sim \mathcal{B}(8, 0.6)$ ,  $M \sim \mathcal{P}(10)$ ,  $M$  与  $\{N_j\}$  独立. 对于  $T = \sum_{j=1}^M N_j$ ,  $k \geq 1$ , 给出  $T|\{M = k\}$  的概率分布.

**解.**  $N_j$  表示成功概率为 0.6 的 8 次独立重复试验中成功的次数.  $\because N_1, N_2, \dots$  独立,  $\therefore T|\{M = k\} = N_1 + \dots + N_k$  表示成功概率为 0.6 的  $8k$  次独立重复试验中成功的次数, 服从二项分布  $\mathcal{B}(8k, 0.6)$ .

**习题 6.2** 设  $N \sim \mathcal{B}(8, 0.6)$ ,  $M \sim \mathcal{P}(10)$ ,  $M$  与  $N$  独立. 如果一棋手将参加  $M$  场比赛, 每场比赛预计下  $N$  盘棋, 他期望总共能下多少盘棋?

**解.** 设这个棋手一共要下  $X$  盘棋. 与 6.1 类似, 有  $X|\{M = k\} \sim \mathcal{B}(8k, 0.6)$ .  $\therefore E(X|M = k) = 4.8k$ . 由书上的定理 1.1 (3) 得

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{\infty} E(X|M = k)P(M = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 4.8k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= 4.8\lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= 4.8\lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = 4.8\lambda. \end{aligned}$$

把  $\lambda = 10$  代入得  $EX = 48$ .

**习题 6.3** 设  $N$  服从参数为  $p$  的几何分布,  $X_1, X_2, \dots$  相互独立, 都服从参数为  $\lambda$  的指数分布, 当  $N$  和  $\{X_j\}$  独立时, 计算  $W = \sum_{j=1}^N X_j$  的数学期望.

**解.** 由引理 10.1,  $W|\{N = n\}$  有概率密度

$$f_W(w; n) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda w} w^{n-1}, \quad w > 0.$$



∴

$$E(W|N=n) = \int_0^\infty w f_W(w; n) dw = \int_0^\infty \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda w} w^n dw.$$

令  $t = \lambda w$ , 得

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda w} w^n dw &= \frac{1}{\lambda(n-1)!} \int_0^\infty e^{-t} t^n dt \\ &= \frac{1}{\lambda(n-1)!} \Gamma(n+1) = \frac{n}{\lambda}. \end{aligned}$$

由书上的定理 1.1 (3) 得

$$\begin{aligned} EW &= \sum_{n=1}^\infty E(W|N=n)P(N=n) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{\lambda} q^{n-1} p \\ &= \frac{p}{\lambda} \left( \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^\infty x^n \right) \Big|_{x=q} \\ &= \frac{p}{\lambda} \left( \frac{1}{(1-x)^2} \right) \Big|_{x=q} = \frac{1}{\lambda p}. \end{aligned}$$

**习题 6.4** 某出租车在一天内遇到的红灯数  $N$  满足参数为  $\lambda$  的 Poisson 分布. 如果在每个红灯处的等待时间相互独立, 都在  $(0, 2)$  中均匀分布, 计算他一天内用于等候红灯的时间  $X$  的数学期望和方差.

**解.** 设  $X_1, X_2, \dots$  是在第  $i$  个红灯处的等待时间, 则  $X|\{N=n\} = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ,  $X_i$  独立同分布,  $X_1 \sim \mathcal{U}(0, 2)$ ,  $N$  与  $\{X_i\}$  独立. 有

$$E(X|N=n) = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n = nEX_1 = n,$$

$$\begin{aligned} E(X^2|N=n) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_n)^2 \\ &= E \left( X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n X_i X_j \right) \\ &= nEX_1^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n EX_i EX_j \\ &= \frac{4n}{3} + n(n-1). \end{aligned}$$

由书上的定理 1.1 (1) 得

$$EX = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)E(X|N=n) = \lambda,$$

$$\begin{aligned} EX^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)E(X^2|N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4n}{3} + n(n-1) \right) \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-2)!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{4}{3} \lambda + \lambda^2. \end{aligned}$$

$\therefore$

$$\text{Var}(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{4}{3}\lambda.$$

**习题 6.9** 设  $(X, Y)$  有联合密度  $f(x, y) = ye^{-y(x+1)}, x > 0, y > 0$ . 计算  $X|\{Y=y\}, Y|\{X=x\}$  的概率密度  $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$ .

**解.**  $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$  可以由  $f(x, y)$  除以一个归一化因子得到. 有

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{\int_0^{\infty} f(x, y) dx} = \frac{ye^{-y(x+1)}}{e^{-y}} = ye^{-yx},$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{\int_0^{\infty} f(x, y) dy} = (x+1)^2 ye^{-y(x+1)}.$$

**习题 6.14** 假设某设备的使用寿命  $Y$  服从 Weibull 分布, 有概率密度

$$f(y) = aby^{b-1}e^{-ay^b}, \quad y \geq 0.$$

对  $b = 1/2$ , 计算平均寿命  $E(Y - t|Y > t)$ .

解. 由书上的定理 3.2,

$$\begin{aligned} E(Y|Y > t) &= \frac{E(YI[Y > t])}{P(Y > t)} \\ &= \frac{\int_t^\infty y f(y) dy}{\int_t^\infty f(y) dy} \\ &= \frac{ab \int_t^\infty y^{1/2} e^{-ay^{1/2}} dy}{ab \int_t^\infty y^{-1/2} e^{-ay^{1/2}} dy} \\ &= \frac{\int_t^\infty y^{1/2} e^{-ay^{1/2}} dy}{\int_t^\infty y^{-1/2} e^{-ay^{1/2}} dy}. \end{aligned}$$

令  $u = ay^{1/2}$ , 则  $y = (u/a)^2$ ,  $dy = \frac{2}{a^2} u du$ . 有

$$\begin{aligned} \frac{\int_t^\infty y^{1/2} e^{-ay^{1/2}} dy}{\int_t^\infty y^{-1/2} e^{-ay^{1/2}} dy} &= \frac{\int_{a\sqrt{t}}^\infty (u/a) e^{-u} (2/a^2) u du}{\int_{a\sqrt{t}}^\infty (u/a)^{-1} e^{-u} (2/a^2) u du} \\ &= \frac{\int_{a\sqrt{t}}^\infty u^2 e^{-u} du}{a^2 \int_{a\sqrt{t}}^\infty e^{-u} du} \\ &= \frac{e^{-a\sqrt{t}} (2 + 2a\sqrt{t} + a^2 t)}{a^2 e^{-a\sqrt{t}}} \\ &= \frac{2 + 2a\sqrt{t} + a^2 t}{a^2}. \end{aligned}$$

$\therefore$

$$E(Y - t|Y > t) = E(Y|Y > t) - E(t|Y > t) = \frac{2 + 2a\sqrt{t} + a^2 t}{a^2} - t.$$

**习题 6.15** 在某地任选一名出租车司机, 假设其开车经验  $Y \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ , 有概率密度

$$f_Y(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\beta y}, \quad y > 0.$$

如果开车经验为  $y$  的司机在一周内的收入 (单位: 元) 为  $N \sim \mathcal{P}(y)$ , 已知一个司机在一周内的收入为  $n$  元, 计算他的开车经验的概率密度.

解.

**习题 6.17** 一台计算机有 7 个 USB 接口, 至少有 5 个接口正常时, 就认为计算机的 USB 接口能用. 假设开始时每个 USB 接口都正常, 其寿命  $X_1, X_2, \dots, X_7$  相互独立, 都服从参数为  $\lambda$  的指数分布. 计算这台计算机的 USB 能用的时间  $Y$  的概率分布.

解. 如果  $Y = y$ , 则有两个 USB 接口在  $y$  时刻以前损坏, 有一个 USB 接口在  $y$  时刻损坏, 其

余的 USB 接口在  $y$  时刻或以后损坏.  $\therefore$

$$\begin{aligned} P(Y=y) &= \frac{7!}{2!1!4!} P(X_1 < y, X_2 < y, X_3 = y, X_4 \geq y, X_5 \geq y, X_6 \geq y, X_7 \geq y) \\ &= 105(P(X_1 < y))^2 P(X_1 = y)(P(X_1 \geq y))^4 \\ &= 105\lambda e^{-2\lambda y}(1 - e^{-\lambda y})^2 dy, \end{aligned}$$

$\therefore Y$  的概率密度为  $105\lambda e^{-2\lambda y}(1 - e^{-\lambda y})^2$ .

**习题 6.20** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布, 都服从参数为  $\lambda$  的指数分布, 证明随机变量

$$Y_1 = X_{(1)}, \quad Y_k = X_{(k)} - X_{(k-1)}, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

相互独立, 且  $Y_i \sim \mathcal{E}((n+1-i)\lambda)$ .

**证明.**  $\because Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  是连续型随机变量的线性组合,  $\therefore Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  是连续型随机变量. 有

$$\begin{aligned} P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_n = y_n) \\ &= P(X_{(1)} = y_1, X_{(2)} = y_1 + y_2, \dots, X_{(n)} = y_1 + y_2 + \dots + y_n) \\ &= n!P(X_1 = y_1)P(X_1 = y_1 + y_2) \cdots P(X_1 = y_1 + y_2 + \dots + y_n). \end{aligned}$$

令  $u_1 = y_1, u_2 = y_1 + y_2, \dots, u_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ , 则

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} = 1.$$

$$\begin{aligned} n!P(X_1 = y_1)P(X_1 = y_1 + y_2) \cdots P(X_1 = y_1 + y_2 + \dots + y_n) \\ &= n!\lambda e^{-\lambda y_1} \cdot \lambda e^{-\lambda(y_1 + y_2)} \cdots \lambda e^{-\lambda(y_1 + y_2 + \dots + y_n)} du_1 du_2 \cdots du_n \\ &= n\lambda e^{-n\lambda y_1} \cdot (n-1)\lambda e^{-(n-1)\lambda y_2} \cdots 2\lambda e^{-2\lambda y_{n-1}} \cdot \lambda e^{-\lambda y_n} dy_1 dy_2 \cdots dy_n. \end{aligned}$$

设  $Y_i$  的概率密度为  $f_{Y_i}(y_i)$ ,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  的联合密度为  $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , 则

$$\begin{aligned} f_{Y_i}(y_i) &= \int \cdots \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_n = y_n) dy_1 \cdots dy_{i-1} dy_{i+1} \cdots dy_n \\ &= (n-i+1)\lambda e^{-(n-i+1)\lambda y_i} \int_0^\infty n\lambda e^{-n\lambda y_1} dy_1 \cdots \int_0^\infty (n-i+2)\lambda e^{-(n-i+2)\lambda y_{i-1}} dy_{i-1} \\ &\quad \cdot \int_0^\infty (n-i)\lambda e^{-(n-i)\lambda y_{i+1}} dy_{i+1} \cdots \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y_n} dy_n \\ &= (n-i+1)\lambda e^{-(n-i+1)\lambda y_i}. \end{aligned}$$

$$\therefore Y_i \sim \mathcal{E}((n+1-i)\lambda).$$

$\therefore$

$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_n = y_n) = f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2) \cdots f_{Y_n}(y_n)dy_1dy_2 \cdots dy_n,$$

$\therefore$

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2) \cdots f_{Y_n}(y_n).$$

$\therefore Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  相互独立.

**习题 6.21** 设取非负整数值的随机变量  $X$  有母函数  $g(s)$ , 对非负整数  $a, b$ , 求  $Y = aX + b$  的母函数  $h(s)$ .

**解.**  $Y$  的取值为  $\{ja + b | j \in \mathbb{R}\}$ . 有

$$\begin{aligned} g(s) &= \sum_{j=0}^{\infty} s^j P(X = j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (s^{1/a})^{ja} P(Y = ja + b) \\ &= (s^{1/a})^{-b} \sum_{j=0}^{\infty} (s^{1/a})^{ja+b} P(Y = ja + b) \\ &= s^{-b/a} h(s^{1/a}). \end{aligned}$$

$\therefore$

$$h(s^{1/a}) = g(s)s^{b/a} \Rightarrow h(s) = g(s^a)s^b.$$

**习题 6.24** 两人各抛均匀的硬币  $n$  次, 计算甲的正面次数恰好大于乙的正面次数  $k$  次的概率.

**解.** 设甲的正面次数为  $X_1$ , 乙的正面次数为  $X_2$ ,  $K = X_1 - X_2$ , 则事件“甲的正面次数恰好大于乙的正面次数  $k$  次”为  $\{K = k\}$ .

$X_1, X_2 \sim \mathcal{B}(n, 0.5)$ , 有母函数

$$g_{X_1}(s) = g_{X_2}(s) = \frac{1}{2^n}(s+1)^n.$$

有

$$\begin{aligned}\sum_{i=-n}^n s^i P(K=i) &= E(s^K) \\&= E(s^{X_1-X_2}) \\&= E(s^{X_1} s^{-X_2}) \\&= E(s^{X_1}) E(s^{-X_2}) \\&= E(s^{X_1}) E((s^{-1})^{X_2}) \\&= g_{X_1}(s) g_{X_2}(s^{-1}) \\&= \frac{1}{2^{2n}} (s+1)^n \left(\frac{1}{s}+1\right)^n \\&= \frac{1}{2^{2n} s^n} (s+1)^{2n} \\&= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{i=-n}^n C_{2n}^i s^{-n+i}.\end{aligned}$$

考察上式两边的  $s^k$  项, 有

$$P(K=k) = \frac{C_{2n}^{k+n}}{2^{2n}}.$$

评论  $K$  的取值可能是负数,  $\therefore K$  没有母函数.

第 6.29, 6.30 题需要用到下面的引理, 书上第 7 章的定理 3.1 也可以用这个引理来证明一般的情形.

**引理 12.1** 若随机变量  $X$  的特征函数为  $\phi_X(t)$ , 则随机变量  $Y = a(X+b)$  的特征函数为  $\phi_Y(t) = \phi_X(at)e^{iab t}$ .

**证明.** 由  $Y = a(X+b)$  得  $X = a^{-1}Y - b$ . 有

$$\phi_X(t) = Ee^{itX} = Ee^{it(a^{-1}Y-b)} = E(e^{it(a^{-1}Y)} e^{-itb}) = e^{-itb} Ee^{i(ta^{-1})Y}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

令  $s = ta^{-1}$ , 则  $t = as$ ,

$$\phi_X(as) = e^{-iab s} Ee^{isY} \Rightarrow \phi_Y(s) = Ee^{isY} = \phi_X(as)e^{iab s}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

**习题 6.29** 设  $X_1, X_2, \dots$  独立同分布, 都在  $(-1, 1)$  中均匀分布. 定义

$$Y_n = \sqrt{\frac{3}{n}} \sum_{j=1}^n X_j.$$

(1) 计算  $X_1$  的特征函数  $\phi_X(t)$ ;



(2) 计算  $Y_n$  的特征函数  $\phi_{Y_n}(t)$ , 证明  $Y_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$ .

证明. (1)  $\because X_1$  在  $(-1, 1)$  中均匀分布,  $\therefore$

$$E \cos(tX) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \cos(tx) dx = \frac{\sin t}{t}, \quad E \sin(tX) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \sin(tx) dx = 0.$$

$\therefore$

$$\phi_X(t) = E \cos(tX) + iE \sin(tX) = \frac{\sin t}{t}.$$

(2) 有

$$\frac{Y_n}{\sqrt{3/n}} = \sum_{j=1}^n X_j.$$

令  $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ . 由书上的定理 6.2 (2) 得  $S_n$  的特征函数为

$$\phi_{S_n}(t) = \frac{\sin^n t}{t^n}.$$

由引理 12.1 得

$$\phi_{Y_n}(t) = \phi_{S_n}(t\sqrt{3/n}) = \left( \frac{\sin(t\sqrt{3/n})}{t\sqrt{3/n}} \right)^n.$$

$\frac{\sin(t\sqrt{3/n})}{t\sqrt{3/n}}$  有 Taylor 展开式

$$\frac{\sin(t\sqrt{3/n})}{t\sqrt{3/n}} = 1 - \frac{3t^2/n}{3!} + o((t/\sqrt{3/n})^3) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o(1/n),$$

由书上的式 (6.15) 得

$$\phi_{Y_n}(t) = \left( 1 - \frac{t^2}{2n} + o(1/n) \right)^n \rightarrow e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

由书上的定理 6.3 得  $Y_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$ .

**习题 6.30** 设  $X_1, X_2, \dots$  独立同分布,  $X_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$ . 定义

$$S_n = \sum_{j=1}^n X_j, \quad Y_n = \frac{S_n - n/\lambda}{\sqrt{n/\lambda^2}}.$$

(1) 计算  $X_1$  的特征函数  $\phi_X(t)$ ;

(2) 计算  $Y_n$  的特征函数  $\phi_{Y_n}(t)$ ;





(3) 证明  $Y_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$ .

证明. (1) 有

$$\phi_X(t) = Ee^{itX} = \int_0^\infty e^{itx} \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

(2) 由书上的定理 6.2 (2) 得  $S_n$  的特征函数为

$$\phi_{S_n}(t) = \left( \frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^n.$$

由引理 12.1 得

$$\begin{aligned}\phi_{Y_n}(t) &= \phi_{S_n}(t/\sqrt{n/\lambda^2}) e^{-it(n/\lambda)/\sqrt{n/\lambda^2}} \\ &= \left( \frac{1}{1 - it/\sqrt{n}} \right)^n (e^{-it/\sqrt{n}})^n \\ &= \left( \frac{e^{-it/\sqrt{n}}}{1 - it/\sqrt{n}} \right)^n.\end{aligned}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned}e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2} + o(|z|^2) \\ &= 1 + z + \frac{z^2 + z^3}{2} + o(|z|^2) \\ &= (1 + z) \left( 1 + \frac{z^2}{2} + o(|z|^2) \right), \quad \forall z \in \mathbb{C},\end{aligned}$$

$\therefore$

$$\frac{e^{-it/\sqrt{n}}}{1 - it/\sqrt{n}} = 1 + \frac{(-it/\sqrt{n})^2}{2} + o(|-it/\sqrt{n}|^2) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o(1/n).$$

由书上的定理 6.3 得  $Y_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$ .

**习题 6.34** 对  $n = 1, 2, \dots$ , 设  $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$ . 证明  $X_n \xrightarrow{d} \mathcal{P}(\lambda)$ .

证明. 由书上的式 (6.5) 得  $X_n$  的分布函数为

$$\phi_{X_n}(t) = (1 - p_n(1 - e^{it}))^n = \left( 1 + \frac{\lambda(e^{it} - 1)}{n} \right)^n.$$

$\therefore$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{X_n}(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1)),$$

由书上的定理 6.3 得  $X_n \xrightarrow{d} \mathcal{P}(\lambda)$ .



**习题 6.35** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布,  $S_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k, k \leq n$ . 如果  $E(|X_1||S_n)$  存在, 计算  $E(S_k|S_n)$ .

解.  $\because E(|X_1||S_n)$  存在,  $\therefore E(X_1|S_n)$  存在. 由书上的例 3.8 得  $E(X_1|S_n) = S_n/n$ .  $\therefore$

$$\begin{aligned} E(S_k|S_n) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_k|S_n) \\ &= E(X_1|S_n) + E(X_2|S_n) + \dots + E(X_n|S_n) \\ &= kE(X_1|S_n) = \frac{kS_n}{n}. \end{aligned}$$

## 13 第 7 章笔记

Markov 不等式中的不等号可以全部换成严格的不等号, 要证明这个结论, 只需将原证明的不等号全部换成严格的不等号即可.

设  $\xi_1, \xi_2, \dots$  是随机变量, 如果  $\xi_n \xrightarrow{p} 0$ , 则记为  $\xi_n = o_p(1)$ .

书上的定理 2.2 说明依概率收敛比几乎处处收敛要弱. 与弱大数律类似, 把强相合估计中的几乎处处收敛换成依概率收敛, 可以得到 (弱) 相合估计的定义.

**定义 13.1** 设  $w$  是参数,  $w_n$  是  $w$  的估计量, 如果当  $n \rightarrow \infty$  时,  $w_n \xrightarrow{p} w$ , 则称  $w_n$  是  $w$  的相合估计.

相合估计不一定比不相合估计要好, 比如给线性回归的损失函数加上 L1 正则化会使得对参数的估计是不相合的, 但是加上 L1 正则化有很多好处.

Lindeberg-Feller 定理的直观理解为:

- 书上的式 (5.2) 的分母中有  $B_n^2 \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ , 满足 Lindeberg 条件意味着  $X_j$  的随机性不能减小得太快, 否则  $\sum_{j=1}^n \frac{1}{B_n} (X_j - \mu_j)$  会收敛到常数;
- 书上的式 (5.2) 的分子中有  $E((X_j - \mu_j)^2 I[|X_j - \mu_j| \geq \varepsilon B_n])$ , 这当  $|X_j - \mu_j|$  足够大时为  $X_j$  的方差. 如果对  $\forall j, |X_j - \mu_j| \geq \varepsilon B_n$ , 那么  $E((X_j - \mu_j)^2 I[|X_j - \mu_j| \geq \varepsilon B_n]) = B_n^2$ , 式 (5.2) 不收敛.  $\therefore$  满足 Lindeberg 条件意味着不能有很多的  $X_j$  满足  $|X_j - \mu_j| \geq \varepsilon B_n$ .

书上的推论 5.2 体现了这两个直观理解.

从概率空间的角度来定义随机变量的 a.s. 收敛性.

**定义 13.2** 设  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  是概率空间, 随机变量  $X, X_1, X_2, \dots$  是  $\Omega$  上的函数, 则  $X_n \rightarrow X$  a.s. 可以定义为对  $\exists A \subset \Omega$  满足  $P(A) = 1$ , 函数列  $\{X_n(\omega)\}$  在  $A$  上收敛到  $X(\omega)$ .



**定理 13.1** 随机变量  $X, X_1, X_2, \dots$  满足定义 13.2 定义的  $X_n \rightarrow X$  a.s. 当且仅当  $X, X_1, \dots$  满足书上第 2 节定义的  $X_n \rightarrow X$  a.s..

**证明.**  $(\Rightarrow)$   $\because$  函数列  $\{X_n(\omega)\}$  在  $A$  上收敛到  $X(\omega)$ ,  $\therefore A \subset \{X_n \rightarrow X\}$ .  $\therefore P(X_n \rightarrow X) \geq P(A) = 1$ .

$(\Leftarrow)$  取  $A = \{X_n \rightarrow X\}$  得.

书上的例 6.3 省略了一些东西.

**例 13.1** (书上的例 6.3 的前半部分) 设  $X \in \mathcal{U}(0, 1)$ . 定义

$$\xi_n = nI[X < 1/n], \quad n = 1, 2, \dots$$

$\because \forall x > 0, \exists N$ , 当  $n > N$  时有  $x > 1/n$ ,  $\therefore$  如果  $X = x > 0$ , 那么  $\exists N$ , 当  $n > N$  时有  $\xi_n = 0$ .

$\therefore$  函数列  $\xi_n(\omega)$  在  $\{X > 0\}$  上收敛到 0.  $\because P(X > 0) = 1$ , 由定义 13.2 得  $\xi_n \rightarrow 0$  a.s.

补充书上定理 6.3 证明的一些细节. 下面所有的收敛都是 a.s. 收敛.

**定理 13.2** 沿用书上定理 6.3 的符号. 有:  $\tilde{X}_n$  单调不减收敛到  $\tilde{Y}$ .

**证明.** 当  $X_n \leq M$  时  $\tilde{X}_n = X_n$  单调不减, 当  $X_n > M$  时  $\tilde{X}_n = M$ ,  $\therefore \tilde{X}_n$  单调不减.

如果  $Y \leq M$ , 那么  $X_n \leq Y \leq M$ , 这时有  $\tilde{X}_n = X_n, \tilde{Y} = Y$ ,  $\therefore \tilde{X}_n$  收敛到  $\tilde{Y}$ .

如果  $Y > M$ ,  $\because X_n$  单调不减收敛到  $Y$ ,  $\therefore \exists N$ , 当  $n > N$  时  $X_n > M$ . 这时  $\tilde{X}_n = M = Y$ .  $\therefore \tilde{X}_n$  收敛到  $\tilde{Y}$ .

有界收敛定理 (书上的定理 6.4) 和控制收敛定理 (书上的定理 6.6) 给出了从依概率收敛推出  $L^1$  收敛的一个条件: 随机变量序列有界或被一个期望有界的随机变量控制.

## 14 第 7 章习题

**习题 7.2** 证明: 设非负随机变量  $X$  有概率密度  $f(x)$ , 则  $\forall$  正数  $M$ , 有

$$P(X \geq M) \leq \frac{1}{M} \int_M^\infty xf(x)dx.$$



证明.  $\because X$  有概率密度  $f(x)$ ,  $\therefore$

$$\begin{aligned} MP(X \geq M) &= M \int_M^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_M^{\infty} M f(x) dx \\ &\leq \int_M^{\infty} x f(x) dx. \end{aligned}$$

**习题 7.3** 证明: 设非负随机变量  $X$  有分布函数  $F(x)$ , 则  $\forall$  正数  $M$ , 有

$$P(X > M) \leq \frac{\sqrt{(1 - F(M))EX^2}}{M}.$$

证明.  $\because X$  的取值非负,  $\therefore \forall M > 0, P(X > M) = P(X^2 > M^2)$ . 由 Markov 不等式,

$$P(X > M) = P(X^2 > M^2) < \frac{EX^2}{M^2}.$$

$\therefore$

$$(P(X > M))^2 \leq \frac{P(X > M)EX^2}{M^2} = \frac{(1 - F(M))EX^2}{M^2}, \quad (14.1)$$

这里取等号是因为  $P(X > M)$  可能  $= 0$ .  $\therefore$

$$P(X > M) \leq \frac{\sqrt{(1 - F(M))EX^2}}{M}.$$

**习题 7.4** 设非负随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布, 对  $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ , 证明

$$P(X_{(1)} \geq M) \leq \left( \frac{EX_1^2 P(X_1 \geq M)}{M^2} \right)^{n/2}.$$

证明. 与式 (14.1) 类似, 由 Markov 不等式得

$$P(X_1 \geq M) \leq \left( \frac{P(X_1 \geq M)EX_1^2}{M^2} \right)^{1/2}.$$

$\because X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布,  $\therefore$

$$P(X_{(1)} \geq M) = (P(X_1 \geq M))^n \leq \left( \frac{P(X_1 \geq M)EX_1^2}{M^2} \right)^{n/2}.$$

**习题 7.5** 设  $X$  有概率密度  $f(x) = \frac{x^m}{m!}e^{-x}$ ,  $x \geq 0$ , 计算  $EX, \text{Var}(X)$ , 证明

$$P(0 < X < 2(m+1)) \geq \frac{m}{m+1}.$$

**证明.** 有

$$\begin{aligned} EX &= \int_0^\infty xf(x)dx = \frac{1}{m!} \int_0^\infty x^{m+1}e^{-x}dx = \frac{\Gamma(m+2)}{m!} = m+1, \\ EX^2 &= \int_0^\infty x^2f(x)dx = \frac{1}{m!} \int_0^\infty x^{m+2}e^{-x}dx = \frac{\Gamma(m+3)}{m!} = (m+1)(m+2), \\ \text{Var}(X) &= EX^2 - (EX)^2 = m+1. \end{aligned}$$

由 Chebyshev 不等式,

$$P(|X - (m+1)| \geq (m+1)) \leq \frac{m+1}{(m+1)^2} = \frac{1}{m+1},$$

$\therefore$

$$P(0 < X < 2(m+1)) = 1 - P(|X - (m+1)| \geq (m+1)) = \frac{m}{m+1}.$$

**习题 7.6** 用书上第 2.4 节的例 4.3 的方法调查回答“是”的概率  $p_1$  和服用兴奋剂的概率  $p$ , 由书上第 2.4 节的例 4.3 得  $p = 2p_1 - 1$ . 设一次试验调查  $n$  个人, 随机变量  $\hat{p}_1$  是  $n$  个人中回答“是”的比例,  $\hat{p} := 2\hat{p}_1 - 1$ .

(a) 计算  $E\hat{p}_1, \text{Var}(\hat{p}_1), E\hat{p}, \text{Var}(\hat{p})$ ;

(b) 对  $\varepsilon > 0$ , 证明

$$P(|\hat{p}_1 - p_1| \geq \varepsilon) \leq \frac{1-p^2}{4n\varepsilon^2}, \quad P(|\hat{p} - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1-p^2}{n\varepsilon^2}.$$

**证明.** (a) 由书上的例 2.1 得  $E\hat{p}_1 = p_1, E\hat{p} = p$ .

引入随机变量

$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{第 } j \text{ 个人回答“是”}, \\ 0, & \text{第 } j \text{ 个人回答“否”}, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots,$$

则  $X_1, X_2, \dots$  独立同分布, 且

$$P(X_j = 1) = p_1, \quad EX_j = EX_j^2 = p_1, \quad \hat{p}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j.$$

$\because X_1, X_2, \dots$  独立,  $\therefore$

$$\begin{aligned} E\hat{p}_1^2 &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^2}E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n X_i X_j\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^n EX_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n EX_i EX_j\right) \\ &= \frac{1}{n^2}(np_1 + n(n-1)p_1^2) \\ &= \frac{p_1 + (n-1)p_1^2}{n}. \end{aligned}$$

$\therefore$

$$\text{Var}(\hat{p}_1) = E\hat{p}_1^2 - (E\hat{p}_1)^2 = \frac{p_1(1-p_1)}{n} = \frac{1-p^2}{4n},$$

$$\text{Var}(\hat{p}) = \text{Var}(2\hat{p}_1 + 1) = 4 \text{Var}(\hat{p}_1) = \frac{1-p^2}{n}.$$

(b) 由 Chebyshev 不等式得

$$P(|\hat{p}_1 - p_1| \geq \varepsilon) = P(|\hat{p}_1 - E\hat{p}_1| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(\hat{p}_1) = \frac{1-p^2}{4n\varepsilon^2},$$

$$P(|\hat{p} - p| \geq \varepsilon) = P(|\hat{p} - E\hat{p}| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(\hat{p}) = \frac{1-p^2}{n\varepsilon^2}.$$

**习题 7.7 (有修改)** 对随机变量  $X$  进行观测, 设第  $j$  次观测的结果为  $X_j, X_1, X_2, \dots$  独立同分布, 且与  $X$  同分布. 书上的例 2.2 给出了  $\mu = EX, \sigma^2 = \text{Var}(X), F(x) = P(X \leq x)$  的强相合估计

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j, \quad \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \hat{\mu}_n)^2, \quad F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I[X_j \leq x],$$

(1) 求  $E\hat{\mu}_n, E\hat{\sigma}_n^2, EF_n(x)$ .

(2) 给定  $x, n$ , 求  $\text{Var} F_n(x)$ .

解. (1) 有

$$E\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n EX_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mu = \mu,$$

$$E(F_n(x)) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n EI[X_j \leq x] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(X_j \leq x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(X \leq x) = P(X \leq x).$$



∴

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_n^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \hat{\mu}_n)^2 \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j^2 - \hat{\mu}_n^2 + 2X_j\hat{\mu}_n) \\
 &= \frac{1}{n-1} \left( \sum_{j=1}^n X_j^2 - n\hat{\mu}_n^2 + 2\hat{\mu}_n \sum_{j=1}^n X_j \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \left( \sum_{j=1}^n X_j^2 - n\hat{\mu}_n^2 + 2n\hat{\mu}_n^2 \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n X_j^2 - \frac{n}{n-1} \hat{\mu}_n^2,
 \end{aligned}$$

∴

$$\begin{aligned}
 E\hat{\sigma}_n^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n EX_j^2 - \frac{n}{n-1} E\hat{\mu}_n^2 \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n EX_j^2 - \frac{n}{n-1} E \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \right)^2 \\
 &= \frac{n}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n EX_j^2 - \frac{\sum_{i=1}^n EX_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n EX_i EX_j}{n(n-1)} \\
 &= \frac{n-1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n EX_j^2 - \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (EX)^2 \\
 &= EX^2 - (EX)^2 = \text{Var}(X).
 \end{aligned}$$

(2)  $nF_n(x)$  服从二项分布  $\mathcal{B}(n, P(X_j \leq x)) = \mathcal{B}(n, F(x))$ . ∴

$$\text{Var}(F_n(x)) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(nF_n(x)) = \frac{1}{n^2} \cdot nF(x)(1-F(x)) = \frac{1}{n} F(x)(1-F(x)).$$

注 (1) ∵  $E\hat{\mu}_n = EX$ ,  $E\hat{\sigma}_n^2 = \text{Var}(X)$ ,  $EF_n(x) = F(x)$ , ∴  $E\hat{\mu}_n$ ,  $E\hat{\sigma}_n^2$ ,  $EF_n(x)$  都是无偏估计.

(2) 给定  $x$ , 当  $n$  充分大时, 由中心极限定理得  $\frac{nF_n(x) - nF(x)}{\sqrt{nF(x)(1-F(x))}}$  近似服从标准 Gauss 分布. 当  $X$  服从 Bernoulli 分布时, 可以得到书上的定理 4.1.

第 7.9, 7.10 题需要用到下面的引理.

**引理 14.1** 设  $*$ :  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  是某种二元运算, 如果对任意的有极限的数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n * b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n * \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , 那么对  $X_n \rightarrow x$  a.s.,  $Y_n \rightarrow y$  a.s.,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (X_n * Y_n) = x * y$  a.s.



证明.  $\because X_n \rightarrow x$  a.s.,  $\therefore P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = x\right) = 1$ . 对称地,  $P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = y\right) = 1$ .  $\therefore$  由

$$\begin{aligned} & P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = x \cup \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = y\right) \\ &= P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = x\right) + P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = y\right) - P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = y\right) \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} & P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = y\right) \\ &= P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = x\right) + P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = y\right) - P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = x \cup \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = y\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\because \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (X_n * Y_n) = x * y \right\} \supset \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = y \right\}, \therefore$$

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (X_n * Y_n) = x * y\right) \geq P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = y\right) = 1,$$

$$\therefore P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (X_n * Y_n) = x * y\right) = 1, \text{ 即 } \lim_{n \rightarrow \infty} (X_n * Y_n) = x * y \text{ a.s.}$$

**习题 7.9 (有修改)** 设  $X_0, X_1, \dots$  是独立同分布的随机变量序列,  $\mu = EX_0$ , 对非零常数  $a, b$ , 定义

$$Y_k = aX_k + bX_{k-1} + c, \quad k = 1, 2, \dots$$

计算  $n^{-1} \sum_{k=1}^n Y_k$  的 a.s. 极限.

**解.** 由强大数律,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = EX_0 = \mu, \text{ a.s.}$$

在引理 14.1 中以“+”代“\*”得

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k &= \frac{1}{n} \left( a \sum_{k=1}^n X_k + b \sum_{k=0}^{n-1} X_k + nc \right) \\ &= a \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k + b \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k + c \\ &\rightarrow a\mu + b\mu + c \text{ a.s. } (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

注 (1) 原题没有定义  $X_0$ , 但  $Y_1$  的定义式中有  $X_0$ , 所以这里改了一下题目, 加上了  $X_0$  的定义.

(2)  $\because Y_k$  是否独立不能确定,  $\therefore$  不能直接对  $Y_k$  用强大数律.





**习题 7.10** 设  $X_1, X_2, \dots$  独立同分布, 都在  $(0, \pi/2)$  中均匀分布,

$$Y_n = \frac{\sin X_1 + \sin X_2 + \dots + \sin X_n}{\cos X_1 + \cos X_2 + \dots + \cos X_n}, \quad n \geq 1,$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 计算  $Y_n$  的 a.s. 极限.

**解.** 有

$$E(\cos X_1) = \int_0^{\pi/2} \cos x \frac{2}{\pi} dx = \frac{2}{\pi}, \quad E(\sin X_1) = \int_0^{\pi/2} \sin x \frac{2}{\pi} dx = \frac{2}{\pi}.$$

$\therefore$  当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\frac{\sin X_1 + \sin X_2 + \dots + \sin X_n}{n} \rightarrow E(\sin X_1) = \frac{2}{\pi}, \text{ a.s.}$$

$$\frac{\cos X_1 + \cos X_2 + \dots + \cos X_n}{n} \rightarrow E(\cos X_1) = \frac{2}{\pi}, \text{ a.s.}$$

在引理 14.1 中以 “/” 代 “\*” 得

$$Y_n = \frac{\frac{\sin X_1 + \sin X_2 + \dots + \sin X_n}{n}}{\frac{\cos X_1 + \cos X_2 + \dots + \cos X_n}{n}} \rightarrow \frac{E(\sin X_1)}{E(\cos X_1)} = 1, \text{ a.s.}$$

**习题 7.14** 设选民中赞同某候选人的比例是未知数  $p$ , 已知  $p \in (0.01, 0.99)$ . 对  $p$  进行调查, 为了以 99% 的把握对  $p$  的预测的绝对误差不超过 1%, 需要调查多少选民?

**解.** 设调查了  $n$  人,  $n$  个人中赞同某候选人的人数为  $S_i$ , 则  $S_i \sim \mathcal{B}(n, p)$ . 事件 “调查了  $n$  人时, 对  $p$  的预测的绝对误差不超过 1%” 可以表示为

$$\{-0.01 \leq S_n/n - p \leq 0.01\} = \left\{ -\frac{0.01n}{\sqrt{npq}} \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{0.01n}{\sqrt{npq}} \right\},$$

其中  $q = 1 - p$ .

由平均值不等式,  $\sqrt{pq} \leq \frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}$  (当  $p = q$  时取等号).  $\because p \in (0.01, 0.99)$ ,  $\therefore$  等号可以取到, 有

$$\begin{aligned} \left\{ -\frac{0.01n}{\sqrt{npq}} \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{0.01n}{\sqrt{npq}} \right\} &\subset \left\{ -\frac{0.01n}{\sqrt{n}/2} \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{0.01n}{\sqrt{n}/2} \right\} \\ &= \left\{ -0.02\sqrt{n} \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq 0.02\sqrt{n} \right\}. \end{aligned}$$

先假设  $np \geq 5, nq \geq 5$ . 由中心极限定理得  $\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0, 1)$ .  $\therefore$

$$P(-0.01 \leq S_n/n - p \leq 0.01) \leq P\left(-0.02\sqrt{n} \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq 0.02\sqrt{n}\right) = 2\Phi(0.02\sqrt{n}) - 1.$$

$\therefore$  当  $n = 16641$  时  $2\Phi(0.02\sqrt{n}) - 1 = 0.99$ ,  $\therefore$  需要调查 16641 个人. 有

$$np = 166.41 \geq 5, \quad nq = 166.41 \geq 5.$$

注  $n = 16641$  是对于  $p$  可以取到  $\frac{1}{2}$  而言的. 如果已知  $0.01 < p < 0.4$  或  $0.6 < p < 0.09$ , 那么只需要调查 3835 个人.  $p$  越接近  $1/2$ , 要确定  $p$  所需的信息量就越大.

**习题 7.15** 设独立同分布的随机变量  $X_1, \dots, X_n$  和独立同分布的随机变量  $Y_1, \dots, Y_m$  相互独立,  $EX_1 = \mu_1, \text{Var}(X_1) = \sigma_1^2, EY_1 = \mu_2, \text{Var}(Y_1) = \sigma_2^2$ . 对充分大的  $n, m$ , 求  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Y_k$  的近似分布.

**解.** 由中心极限定理得

$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j - n\mu_1}{\sqrt{n\sigma_1^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad \frac{\sum_{j=1}^m Y_j - m\mu_2}{\sqrt{m\sigma_2^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

$\therefore$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/n), \quad \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m Y_j \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/m).$$

$\therefore X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  相互独立, 由书上第 4 章的定理 1.1 (3) 得  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$  和  $\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m Y_j$  相互独立, 由第 4.27 题得  $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Y_k$  服从 Gauss 分布.

$\therefore$

$$E\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Y_k\right) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j\right) - E\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Y_k\right) = \mu_1 - \mu_2,$$

$$\text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Y_k\right) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j\right) + \text{Var}\left(-\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Y_k\right) = \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m},$$

$\therefore$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Y_k \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right).$$

**习题 7.16** 某保险公司每天平均受理 18 份投保, 每份投保平均缴款  $\mu = 3.2$  万元, 标准差为  $\sigma = 2.8$  万元. 假定每天受理的投保数  $N$  服从 Poisson 分布, 每份投保的缴款相互独立, 且与  $N$  独立. 计算

(1) 明天投保缴款  $S$  万元的数学期望和方差;

(2)  $P(S \leq 50)$ .

**解.** (1)  $\because N$  服从 Poisson 分布,  $\therefore E(N) = \text{Var}(n) = 18$ .

设明天第  $i$  份投保的缴款为  $X_i$ , 则  $X_1, X_2, \dots$  独立同分布. 有

$$E(S|N = n) = n\mu, \quad E(S|N) = N\mu,$$

$\therefore ES = E(E(S|N)) = \mu EN$ . 有

$$E(S^2|N = n) = E\left(\left(\sum_{j=1}^n X_i\right)^2 \middle| N = n\right).$$

$\because N$  与  $\{X_i\}$  独立, 由书上第 4 章的定理 1.1 (3) 得  $N$  与  $\left(\sum_{j=1}^n X_i\right)^2$  独立.  $\therefore$

$$\begin{aligned} E\left(\left(\sum_{j=1}^n X_i\right)^2 \middle| N = n\right) &= E\left(\sum_{j=1}^n X_i\right)^2 \\ &= \text{Var}\left(\sum_{j=1}^n X_i\right) - \left(E\left(\sum_{j=1}^n X_i\right)\right)^2 \\ &= n\sigma^2 + (n\mu)^2. \end{aligned}$$

$\therefore$

$$E(S^2|N) = N\sigma^2 + N^2\mu^2,$$

$$\begin{aligned} ES^2 &= E(N\sigma^2 + N^2\mu^2) \\ &= \sigma^2 EN + \mu^2 EN^2 \\ &= \sigma^2 EN + \mu^2 (\text{Var}(N) + (EN)^2) \\ &= \sigma^2 EN + \mu^2 (EN + (EN)^2), \end{aligned}$$

$$\text{Var}(S) = ES^2 - (ES)^2 = \sigma^2 EN + \mu^2 EN.$$

代入得  $ES = 57.6$ ,  $\text{Var}(S) = 325.44$ .

(2) 可以把一天分成  $m$  ( $m$  足够大) 个不相交的区间, 使得所有区间内的受理的投保数的均值相同. 设  $N_i$  是第  $i$  个区间内受理的投保数,  $S_i$  是第  $i$  个区间内受理的投保的缴款总数, 则  $N_i \sim \mathcal{P}(18/m)$ ,  $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_m$ .

由中心极限定理得  $S$  近似服从 Gauss 分布.  $\therefore$

$$P(S \leq 50) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\text{Var}(S)}} \leq \frac{50 - ES}{\sqrt{\text{Var}(S)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{50 - ES}{\sqrt{\text{Var}(S)}}\right).$$

代入得  $P(S \leq 50) \approx 0.3372$ .

评论  $\because N$  的值不确定,  $N$  的值有可能很小,  $\therefore$  不能由于每天平均受理的投保数很多就认为  $S$  一定是很多次投保的缴款数之和, 近似服从 Gauss 分布.

### 习题 7.20 证明公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

证明.

习题 7.21 如果  $\sqrt{n}\xi_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$ , 证明  $\xi_n \xrightarrow{p} 0$ .

证明. 设  $\xi_n$  的分布函数为  $F_n(x)$ , 则  $\sqrt{n}\xi_n$  的分布函数为

$$G_n(x) = P(\sqrt{n}\xi_n \leq x) = P(\xi_n \leq x/\sqrt{n}) = F_n(x/\sqrt{n}).$$

$$\because \sqrt{n}\xi_n \xrightarrow{d} N(0, 1), \therefore \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x) = \Phi(x).$$

$$\because \forall \varepsilon > 0,$$

$$\begin{aligned} P(|\xi_n - 0| \geq \varepsilon) &= 1 - P(-\varepsilon < \xi_n < \varepsilon) \\ &= 1 - F_n(\varepsilon) + F_n(-\varepsilon) \\ &= 1 - G_n(\varepsilon\sqrt{n}) + G_n(-\varepsilon\sqrt{n}) \end{aligned}$$

习题 7.22 设  $X_1, X_2, \cdots$  相互独立,  $X_j \sim \mathcal{B}(j, p_j)$ ,  $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ . 当  $p_j \in [0.1, 0.9]$ ,



证明

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

证明. 有  $\mu_j = EX_j = jp_j, \sigma_j^2 = \text{Var}(X_j) = jp_j(1 - p_j), B_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2. \because p_j \in [0.1, 0.9], \therefore$

$$B_n^2 = \sum_{j=1}^n jp_j(1 - p_j) \geq \sum_{j=1}^n 0.1 \cdot 0.9j = 0.09 \frac{n(n+1)}{2}.$$

有

$$\max_{1 \leq j \leq n} |X_j - \mu_j| < \max_{1 \leq j \leq n} j = n \quad \text{a.s.}$$

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} n/B_n$$

习题 7.23 如果  $\xi_n \xrightarrow{d} N(0, 1), \eta_n \xrightarrow{p} 0$ , 证明  $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$ .

证明.  $\because \xi_n \xrightarrow{d} N(0, 1), \therefore \forall x, \lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n \leq x) = \Phi(x)$ , 即  $\forall \varepsilon, \exists N$ , 当  $n \geq N$  时有  $|P(\xi_n \leq x) - \Phi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

$\therefore$