

概率论笔记和习题

ayhe123^{*}

更新：2022 年 9 月 4 日

1 第 1 章笔记

设 T 是 (有限或可列或不可列的) 指标集. 定义

$$\bigcup_{t \in T} A_t := \{x : \exists t \in T, x \in A_t\}, \quad \bigcap_{t \in T} A_t := \{x : \forall t \in T, x \in A_t\}. \quad (1.1)$$

用 “ \exists ” 和 “ \forall ” 来定义无穷集合的并和交是非常重要的观念, 因为对于无穷集合, 很难用直观的方法 (比如 Venn 图) 来理解.

定理 1.1 (De-Morgan) 设 T 是指标集, 则

$$\overline{\bigcup_{t \in T} A_t} = \bigcap_{t \in T} \overline{A_t}, \quad \overline{\bigcap_{t \in T} A_t} = \bigcup_{t \in T} \overline{A_t}.$$

证明. 有

$$\begin{aligned} \overline{\bigcup_{t \in T} A_t} &= \{x : \neg(\exists t \in T, x \in A_t)\} \\ &= \{x : \forall t \in T, x \notin A_t\} \\ &= \{x : \forall t \in T, x \in \overline{A_t}\} = \bigcap_{t \in T} \overline{A_t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\bigcap_{t \in T} A_t} &= \{x : \neg(\forall t \in T, x \in A_t)\} \\ &= \{x : \exists t \in T, x \notin A_t\} \\ &= \{x : \exists t \in T, x \in \overline{A_t}\} = \bigcup_{t \in T} \overline{A_t}. \end{aligned}$$

^{*}笔记发布在这个网址上: <https://github.com/ayhe123/probabilityTheory-lecturenote>

[†]本笔记采用 CC-BY-4.0 许可证, 更多信息见: <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>

定理 1.2 设 T_1, T_2 是指标集, 则

$$\left(\bigcup_{t \in T_1} A_t \right) \cap \left(\bigcup_{u \in T_2} A_u \right) = \bigcup_{\substack{t \in T_1 \\ u \in T_2}} A_t \cap A_u, \quad \left(\bigcap_{t \in T_1} A_t \right) \cup \left(\bigcap_{u \in T_2} A_u \right) = \bigcap_{\substack{t \in T_1 \\ u \in T_2}} A_t \cup A_u.$$

证明. 第一个等式的两边都表示集合 $\{\omega : \exists t \in T_1, \exists u \in T_2, \omega \in A_t \wedge \omega \in A_u\}$, 第二个等式的两边都表示集合 $\{\omega : \forall t \in T_1, \forall u \in T_2, \omega \in A_t \vee \omega \in A_u\}$.

书上的例 4.3 中, 集合序列 $\frac{\#(C \cap B_n)}{n}$ 单调递增且有上界 1, $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#(C \cap B_n)}{n}$ 一定存在.

书上的定理 6.1 中, 取交或并的下限不一定是 1, 比如对单调增的序列, $\forall m \in \mathbb{N}_+$ 都有

$$P \left(\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

由概率的连续性可以得到下面的定理:

定理 1.3

$$P \left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} P \left(\bigcup_{j=n}^m A_j \right), \quad P \left(\bigcap_{j=n}^{\infty} A_j \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} P \left(\bigcap_{j=n}^m A_j \right).$$

证明. 这里只证明第一个等式, 另一个类似.

设 $C_m = \bigcup_{j=n}^m A_j$, 则 C_m 是单调增的. \therefore

$$RHS = \lim_{m \rightarrow \infty} P(C_m) = P \left(\bigcup_{j=n}^{\infty} C_j \right) = P \left(\bigcup_{j=n}^{\infty} \bigcup_{k=n}^j A_k \right) = LHS.$$

2 第 1 章习题

习题 1.13 直径为 1 的硬币随机落在均匀的方格纸上, 问方格的边长为多少才能使硬币和网格不相交的概率小于 0.01.

解. 作硬币的外接正方形 S , 使得 S 的各边与网格平行. 容易看出, 硬币和网格相交当且仅当 S 和网格相交.

$\therefore S$ 是硬币的外接正方形, $\therefore S$ 的边长为 1.

考虑 S 的任一顶点 (下面以左下角为例) A . S 和网格不相交当且仅当 A 位于图 1 中的蓝色区域.

设方格的边长为 x , 则图 1 中的蓝色区域的边长为 $x - 1$. $\because A$ 是在方格上随机取点, $\therefore A$ 落在蓝色区域的概率

$$p = \frac{(x-1)^2}{x^2} \leq 0.01.$$

$$\text{解得 } \frac{1}{11} \leq x \leq \frac{10}{9}.$$

当 $x \leq 1$ 时硬币和网格一定相交, \therefore 条件为 $1 \leq x \leq \frac{10}{9}$.

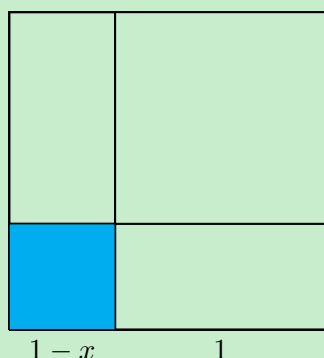


图 1: S 和网格不相交的充要条件

习题 1.14 在同一小时内有两辆汽车独立地到达同一个加油站加油, 车 A 加油需要 5min, 车 B 加油需要 8min. 如果每辆车在这一小时内等可能地到达, 计算这两辆汽车在加油站不能相遇的概率.

解. 设 A, B 在加油站的时间分别为区间 $(x, x+5)$ 和 $(y, y+8)$, 如图 2.

考虑两辆汽车在加油站相遇的情形会比较方便. 从图 2 可以看出要使得两辆汽车在加油站相遇, A, B 到达加油站的时刻 x, y 应满足以下条件^a:

$$\begin{cases} y + 8 > x, \\ x + 5 > y. \end{cases}$$

设 $\Omega = [0, 60]^2$, Ω 中元素的第一个分量是 A 到达加油站的时刻, 第二个分量是 B 到达加油站的时刻.

设事件 C 表示两辆汽车在加油站相遇, 则 C 对应的集合为

$$\begin{cases} y + 8 > x, \\ x + 5 > y, \\ 0 < x < 60, \\ 0 < y < 60. \end{cases}$$

C 对应的区域是图 3 中的蓝色区域, \overline{C} 对应的区域是图 3 左上和右下的两个三角形.

\therefore

$$P(\overline{C}) = \frac{\frac{55^2}{2} + \frac{52^2}{2}}{60^2} \approx 0.796.$$

^a \therefore 区域的边界的测度为 0, 不会影响概率, \therefore 不用考虑是否取等号.

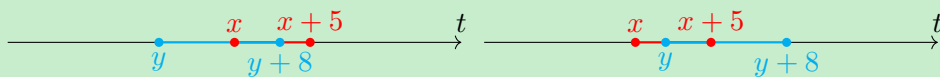


图 2: A, B 在加油站相遇的两种情况, 红色表示 A , 蓝色表示 B

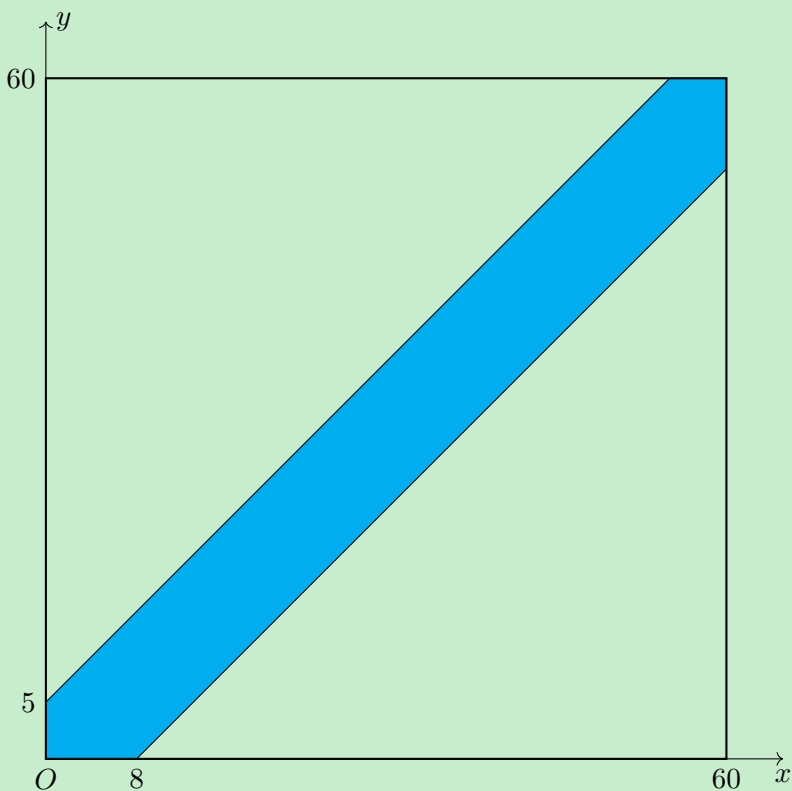


图 3: C 对应的区域

习题 1.17 证明:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

证明. 设 $A_0 = \emptyset, B_j = A_j - \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i$.

设 $\omega \in \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. 由式 (1.1) 的定义, $\exists i \in \mathbb{N}_+$ 使得 $\omega \in B_i$.

由 $B_i \subset A_i$ 得 $\omega \in A_i$. $\therefore \omega \in \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \therefore \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$.

设 $\omega \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. 由式 (1.1) 的定义, $\exists i \in \mathbb{N}_+$ 使得 $\omega \in A_i$.

$\therefore \exists k \in \mathbb{N}_+$ 使得 $\omega \in A_k$, 且 $\forall i < k, \omega \notin A_i$. $\therefore \omega \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$, $\therefore \omega \in B_k$. $\therefore \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$.

$\therefore \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. \therefore

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right).$$

$\because \forall j, k \in \mathbb{N}_+, B_j \subset A_j, B_{j+k} = A_{j+k} - \bigcup_{i=1}^{j+k-1} A_i \subset A_{j+k} - A_j$, $\therefore B_j, B_{j+k}$ 互不相容. 由可列可加性得

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B_j).$$

$\because B_j \subset A_j$, 由书上的定理 5.1 (5) 得 $P(B_j) < P(A_j)$, \therefore

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(B_j) < \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

习题 1.18 设 A_1, A_2, \dots 的概率都为 1, 证明:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) = 1, \quad P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = 1.$$

证明. 设 $B_i = \bar{A}_i$, 则 B_1, B_2, \dots 的概率都为 0.

由书上的例 5.2 得

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n B_j\right) = 0, \quad P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = 0.$$

由书上的定理 5.1 (3) 得

$$P\left(\overline{\bigcup_{j=1}^n B_j}\right) = 1, \quad P\left(\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j}\right) = 1.$$

由定理 1.1 得

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^n \bar{B}_j\right) = P\left(\overline{\bigcup_{j=1}^n B_j}\right) = 1,$$

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bar{B}_j\right) = P\left(\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j}\right) = 1.$$

习题 1.19 对于事件 A, B , 验证

$$P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(\bar{A}\bar{B}) = 1.$$

证明. 由定理 1.2 得

$$\Omega = (A + \bar{A})(B + \bar{B}) = AB + A\bar{B} + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B}.$$

容易验证 $AB, A\bar{B}, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}$ 互不相容, 由可列可加性得

$$1 = P(\Omega) = P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(\bar{A}\bar{B}).$$

3 第 2 章笔记

补充几个定理的证明.

定理 3.1 如果事件 A 的概率为 1 或 0, 则 A 与任意事件 B 相互独立.

证明. 设 $P(A) = 1$, 则由书上第 1 章的例 5.1 得 $P(AB) = P(B) = P(A)P(B)$, 即 A, B 相互独立.

设 $P(A) = 0$, 则 $P(\bar{A}) = 1$, $\therefore \bar{A}, B$ 相互独立, $\therefore A, B$ 相互独立.

定理 3.2 (Borel-Cantelli 引理) 对事件列 $\{A_n\}$, 有:

(1) 如果 $\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) < \infty$, 则 $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) = 0$;

(2) 如果 $\{A_j\}$ 相互独立, $\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) = \infty$, 则 $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) = 1$.

证明. (1) 令 $C_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j$, 则 C_n 是单调减的, 由书上第 1 章的定理 6.1 得

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n).$$

由书上第 1 章的定理 5.1 (6) 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^{\infty} P(A_j).$$

$$\because \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) < \infty, \therefore \sum_{j=n}^{\infty} P(A_j) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty). \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = 0.$$

(2) 与 (1) 一样, 有

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right).$$

由定理 1.3 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{j=n}^m A_j\right).$$

由定理 1.1 得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{j=n}^m A_j\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - P\left(\bigcap_{j=n}^m \bar{A}_j\right)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{j=n}^m \bar{A}_j\right)\right). \end{aligned}$$

由书上的例 2.5 (2) 得 \bar{A}_j 相互独立. \therefore

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{j=n}^m \bar{A}_j\right)\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=n}^m P(\bar{A}_j)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=n}^m (1 - P(A_j))\right). \end{aligned}$$

$\because \forall x > 0, 1 - x \leq e^{-x}, \therefore$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=n}^m (1 - P(A_j)) \right) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=n}^m \exp(-P(A_j)) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \lim_{m \rightarrow \infty} \exp \left(- \sum_{j=n}^m P(A_j) \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \exp \left(- \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^m P(A_j) \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \exp \left(- \sum_{j=n}^{\infty} P(A_j) \right) \right). \end{aligned}$$

$\because \forall n, \sum_{j=n}^{\infty} P(A_j) = \infty, \therefore \forall n, \exp \left(- \sum_{j=n}^{\infty} P(A_j) \right) = 0. \therefore$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \exp \left(- \sum_{j=n}^{\infty} P(A_j) \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 0) = 1.$$

在第 (2) 条中有 $\{A_j\}$ 相互独立的条件. 下面的例子说明, 如果 $\{A_j\}$ 不相互独立, 则 Borel-Cantelli 引理不一定成立.

4 第 2 章习题

习题 2.10 某人参加微积分和线性代数的考试, 无论哪门课先考, 微积分和线性代数通过的概率分别是 a, b , 在微积分先考并通过的条件下, 线性代数通过的概率是 c . 当微积分先考时, 计算

- (a) 两门课都通过的概率;
- (b) 微积分没通过的条件下, 线性代数通过的概率;
- (d) 至少一门通过的概率;
- (e) 至少一门不通过的概率.

解. 设“微积分通过”和“线性代数通过”的事件分别为 A, B , “微积分先考”的事件为 C , 则 $P_C(A) = P_{\bar{C}}(A) = a, P_C(B) = P_{\bar{C}}(B) = b, P_C(B|A) = P(B|AC) = c$.

- (a) “两门课都通过”的事件为 AB . 有 $P_C(AB) = P_C(B|A)P_C(A) = ac$.

(b) “微积分没通过的条件下, 线性代数通过”的事件为 $B|\bar{A}$. 由全概率公式,

$$P_C(B) = P_C(B|A)P_C(A) + P_C(B|\bar{A})P_C(\bar{A}) = ac + (1-a)P_C(B|\bar{A}).$$

\therefore

$$P_C(B|\bar{A}) = \frac{b-ac}{1-a}.$$

(d) 设“至少一门通过”的事件为 C , 则 $\bar{C} = \bar{A}\bar{B}$. 有

$$\begin{aligned} P_C(C) &= 1 - P_C(\bar{A}\bar{B}) \\ &= 1 - P_C(\bar{B}|\bar{A})P_C(\bar{A}) \\ &= 1 - (1 - P_C(B|\bar{A}))P_C(\bar{A}) \\ &= a + b - ac. \end{aligned}$$

习题 2.12 投 2 个均匀的骰子, 已知至少有一个骰子的点数是 3.

(a) 计算这两个骰子的点数之和为 7 的概率;

(b) 两个骰子的点数之和更有可能是 7 还是 6?

解. (a) 设“第一个骰子的点数为 i ”的事件为 A_i , “第二个骰子的点数为 i ”的事件为 B_i , 则“至少有一个骰子的点数是 3”的事件为 $A_3 \cup B_3$. 由加法公式,

$$P(A_3 \cup B_3) = P(A_3) + P(B_3) - P(A_3B_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

“两个骰子的点数之和为 7 的概率”的事件为 $A_3B_4 + A_4B_3$, 概率为 $\frac{2}{36}$.

\therefore 已知至少有一个骰子的点数是 3 的情况下, 两个骰子的点数之和为 7 的概率为

$$\frac{2/36}{11/36} = \frac{2}{11}.$$

(b) “两个骰子的点数之和为 6 的概率”的事件为 A_3B_3 , 概率为 $\frac{1}{36}$.

\therefore 已知至少有一个骰子的点数是 3 的情况下, 两个骰子的点数之和为 6 的概率为

$$\frac{1/36}{11/36} = \frac{1}{11} \leq \frac{2}{11}.$$

\therefore 两个骰子的点数之和更有可能是 7.

可以用两种不同的方式来看待条件概率, 一种是作为条件的事件 C 改变了样本空间 Ω , 另一种是 C 没有改变 Ω , 但改变了 \mathcal{F} 上的概率 (从原来的 P 变为 P_C). 我们通常采用后一种看法, 但有时前一种看法会更方便.

解 (另一种解法). 用 (a, b) 来表示一次试验, 含义是“第一个骰子的点数为 a , 第二个骰子的点数为 b .” 已知至少有一个骰子的点数是 3 的情况下, 样本空间为

$$\Omega = \{(1, 3), (2, 3), \cdots, (6, 3), (3, 1), (3, 2), \cdots, (3, 6)\}.$$

有 $\#\Omega = 11$ (注意 $(3, 3)$ 只计算了一次).

“两个骰子的点数之和为 7 的概率”的事件为 $\{(3, 4), (4, 3)\}$, $P(\{(3, 4), (4, 3)\}) = \frac{2}{11}$,
 “两个骰子的点数之和为 6 的概率”的事件为 $\{(3, 3)\}$, $P(\{(3, 3)\}) = \frac{1}{11}$.

习题 2.19 甲和另一人下棋, 每局有甲输, 甲赢, 平局三种结果, 每局获胜者得 1 分, 累积多于对手 2 分者获胜. 设每局的结果相互独立, 甲每局获胜的概率为 p , 求甲最终获胜的概率.

解. 设“甲在某一局获胜”, “某一局是平局”, “甲在某一局没获胜”的事件分别为 A_1, A_2, A_3 , “某一局前甲比对手多 k 分且甲最终获胜”的事件为 B_k . 由全概率公式,

$$P(B_k) = P(B_k|A_1)P(A_1) + P(B_k|A_2)P(A_2) + P(B_k|A_3)P(A_3).$$

设 $r = P(A_3)$, $q(k) = P(B_k)$, 则 $q(-2) = 0$, $q(2) = 1$, 甲最终获胜的概率为 $q(0)$.

$$q(k) = q(k+1)p + q(k)(1-p-r) + q(k-1)r.$$

\therefore

$$q(k) = \frac{p}{p+r}q(k+1) + \frac{r}{p+r}q(k-1).$$

代入得

$$\begin{aligned} q(0) &= \frac{p}{p+r}q(1) + \frac{r}{p+r}q(-1) \\ &= \frac{p}{p+r} \left(\frac{p}{p+r}q(2) + \frac{r}{p+r}q(0) \right) + \frac{r}{p+r} \left(\frac{p}{p+r}q(0) + \frac{r}{p+r}q(-2) \right) \\ &= \frac{p}{p+r} \left(\frac{p}{p+r} + \frac{r}{p+r}q(0) \right) + \frac{r}{p+r} \cdot \frac{p}{p+r}q(0) \\ &= \frac{p^2}{(p+r)^2} + \frac{2pr}{(p+r)^2}q(0). \end{aligned}$$

解得

$$q(0) = \frac{p^2}{p^2 + r^2}.$$

习题 2.20 用红, 黑两种药治疗同一种疾病, 为了决定用哪种药, 医生将口袋中放入 r 个红球和 b 个黑球后任取一个球, 取到黑球用黑药, 并将球放回, 取到红球用红药, 并将球放回. 如果药物有效就加入一个相同颜色的球. 用 B_i 表示第 i 次取球时取到黑球, 设两种药都一定有效.

(b) 计算 $P(B_2), P(B_3)$;

(c) 计算 $P(B_n)$.

解. (b)

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|\bar{B}_1)P(\bar{B}_1) \\ &= \frac{b+1}{r+b+1} \cdot \frac{b}{r+b} + \frac{b}{r+b+1} \cdot \frac{r}{r+b} \\ &= \frac{b(r+b+1)}{(r+b+1)(r+b)} = \frac{b}{r+b}. \end{aligned}$$

由第 1.19 题得 $B_1B_2, B_1\bar{B}_2, \bar{B}_1B_2, \bar{B}_1\bar{B}_2$ 是完备事件组. 由全概率公式,

$$\begin{aligned} P(B_3) &= P(B_3|B_1B_2)P(B_1B_2) + P(B_3|B_1\bar{B}_2)P(B_1\bar{B}_2) \\ &\quad + P(B_3|\bar{B}_1B_2)P(\bar{B}_1B_2) + P(B_3|\bar{B}_1\bar{B}_2)P(\bar{B}_1\bar{B}_2) \\ &= P(B_3|B_1B_2)P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_3|B_1\bar{B}_2)P(\bar{B}_2|B_1)P(B_1) \\ &\quad + P(B_3|\bar{B}_1B_2)P(B_2|\bar{B}_1)P(\bar{B}_1) + P(B_3|\bar{B}_1\bar{B}_2)P(\bar{B}_2|\bar{B}_1)P(\bar{B}_1) \\ &= \frac{b+2}{r+b+2} \cdot \frac{b+1}{r+b+1} \cdot \frac{b}{r+b} + \frac{b+1}{r+b+1} \cdot \frac{r}{r+b+1} \cdot \frac{b}{r+b} \\ &\quad + \frac{b+1}{r+b+2} \cdot \frac{b}{r+b+1} \cdot \frac{r}{r+b} + \frac{b}{r+b+2} \cdot \frac{r+1}{r+b+1} \cdot \frac{r}{r+b} \\ &= \frac{(b+2)(b+1)b + 2(b+1)br + (r+1)rb}{(r+b+2)(r+b+1)(r+b)} \\ &= b \cdot \frac{b^2 + 3b + 2 + 2br + 2r + r^2 + r}{(r+b+2)(r+b+1)(r+b)} = \frac{b}{r+b}. \end{aligned}$$

(c) $P(B_n) = \frac{b}{r+b}$. $n=1$ 的情形是显然的.

假设 $P(B_{n-1}) = \frac{b}{r+b}$. 如果开始时口袋中有 r' 个红球和 b' 个黑球, 那么第 $n-1$ 次取球时取到黑球的概率为 $\frac{b'}{r'+b'}$.

可以认为试验是从第 2 次取球时开始的, 这时第 $n-1$ 次取球时取到黑球对应事件 $B_n|B_1$ 或 $B_n|\bar{B}_1$. 如果第 1 次取球时取到黑球, 那么试验开始时口袋中有 r 个红球和 $b+1$ 个黑球; 如果第 1 次取球时取到红球, 那么试验开始时口袋中有 $r+1$ 个红球和 b 个黑球. \therefore

$$P(B_n|B_1) = \frac{b+1}{r+b+1}, \quad P(B_n|\bar{B}_1) = \frac{b}{r+b+1}.$$

由全概率公式得

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P(B_n|B_1)P(B_1) + P(B_n|\bar{B}_1)P(\bar{B}_1) \\ &= \frac{b+1}{r+b+1} \cdot \frac{b}{r+b} + \frac{b}{r+b+1} \cdot \frac{r}{r+b} \\ &= \frac{b}{r+b}. \end{aligned}$$

习题 2.28 口袋中有一个红球和一个黑球, 每次从口袋中有放回地任取一个球, 且第 j 次取球后再加入 j 个红球. 如果一直做下去, 能够取到黑球多少次?

解. 用 A_j 表示第 j 次取球时取到黑球. 第 j 次取球时口袋中有 $2 + \sum_{i=1}^{j-1} i = 2 + \frac{j(j-1)}{2}$ 个球. \therefore

$$P(A_j) = \frac{1}{2 + \frac{j(j-1)}{2}}.$$

$\therefore \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{P(A_j)}{1/j^2} = 1$ 而 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty, \therefore \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) < \infty$, 由定理 3.2 得 $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) = 0$, 即只有有限次取到黑球.

习题 2.29 在习题 2.28 中, 若第 j 次取球后再加入 j 个红球和 1 个黑球, 能够取到黑球多少次?

解. 用 A_j 表示第 j 次取球时取到黑球. 第 j 次取球时口袋中有 $2 + (j-1) + \sum_{i=1}^{j-1} i = 1 + \frac{j(j+1)}{2}$ 个球, 其中 $j-1$ 个是黑球. \therefore

$$P(A_j) = \frac{j-1}{1 + \frac{j(j+1)}{2}}.$$

$\therefore \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{P(A_j)}{1/j} = 1$ 而 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty, \therefore \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) = \infty$, 由定理 3.2 得 $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right) = 1$, 即有无限次取到黑球.

习题 2.30 证明全概率公式: 如果事件 A_1, A_2, \dots 互不相容, $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, 则

$$P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)P(B|A_j).$$

证明. 设 $\omega \in B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right)$, 则 $\omega \in B$ 且 $\exists j \in \mathbb{N}, \omega \in A_j$. $\therefore \exists j \in \mathbb{N}, \omega \in A_j B$. \therefore

$$B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j B$$

由定理 1.2 得

$$B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j B.$$

$\therefore A_1, A_2, \dots$ 互不相容, $\therefore A_1 B, A_2 B, \dots$ 互不相容. 由书上第 1 章的定义 4.1(c) 得

$$P(B) = P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j B\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j B).$$

由乘法公式得

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B|A_j)P(A_j).$$

习题 2.31 证明 Bayes 公式: 如果事件 A_1, A_2, \dots 互不相容, $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, 则 $P(B) > 0$ 时有

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i)}, \quad j \geq 1.$$

证明. 由乘法公式得

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B)}.$$

由第 2.30 得

$$\frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i)}.$$

习题 2.33 如果你的水平略高于对手, 为了保证比赛获胜, 你期望比赛规则是三局两胜还是五局三胜?

解. 见 <http://lanqi.org/everyday/19943/>.

习题 2.35 设想如下的抽奖节目: 三扇关闭的门后各有一个奖品, 其中之一是汽车, 其余是羊. 每扇门后是汽车的概率相同. 猜奖者任选一扇门后得到门后的奖品. 当猜奖者选中一扇门尚未打开时, 主持人打开了另外两扇门之一, 发现门后是羊. 这时猜奖者有机会改猜剩下的那扇门. 在下面的情况下, 计算猜奖者换门或不换门得到汽车的概率:

(a) 假设主持人知道汽车在哪扇门后;

(b) 假设主持人不知道汽车在哪扇门后;

(c) 假设主持人知道汽车在哪扇门后的概率为 0.6.

解. 称猜奖者一开始选中的门是“1 号门”, 主持人打开的门是“2 号门”, 剩下的那扇门是“3 号门”, A_i ($i = 1, 2, 3$) 表示事件“汽车在 i 号门后”, B 表示事件“主持人打开 2 号门, 发现门后是羊”. 要求 $P(A_1|B)$ 和 $P(A_3|B)$. 由 Bayes 公式得

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^3 P(B|A_j)P(A_j)}.$$

$$\because P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}, \therefore$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^3 P(B|A_j)}.$$

首先, “主持人打开 2 号门, 发现门后是羊” 意味着车不可能在 2 号门后, 即 $P(B|A_2) = 0$. 其余的条件概率会随情况而变化.

(a) 如果汽车在 1 号门后, 那么主持人可以从 2 号和 3 号门中任选一扇打开, \therefore

$$P(B|A_1) = \frac{1}{2}.$$

如果汽车在 3 号门后, 那么主持人一定会打开 2 号门, $\therefore P(B|A_3) = 1$. \therefore

$$P(A_1|B) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{3}, \quad P(A_3|B) = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3}.$$

(b) \because 主持人不知道汽车在哪扇门后, \therefore 无论汽车在哪扇门后, 主持人都会从 2 号和 3 号门中任选一扇打开, $\therefore P(B|A_1) = P(B|A_3) = \frac{1}{2}$. $\therefore P(A_1|B) = P(A_3|B) = \frac{1}{2}$.

(c) 设“主持人知道汽车在哪扇门后”为事件 C , 则由 (a) 得 $P_C(B|A_1) = \frac{1}{2}$, $P_C(B|A_3) = 1$, 由 (b) 得 $P_{\bar{C}}(B|A_1) = P_{\bar{C}}(B|A_3) = \frac{1}{2}$. 由全概率公式得

$$P(B|A_1) = P_C(B|A_1)P(C) + P_{\bar{C}}(B|A_1)P(\bar{C}) = \frac{1}{2},$$

$$P(B|A_3) = P_C(B|A_3)P(C) + P_{\bar{C}}(B|A_3)P(\bar{C}) = \frac{4}{5}.$$

∴

$$P(A_1|B) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{4}{5}} = \frac{5}{13}, \quad P(A_3|B) = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{2} + \frac{4}{5}} = \frac{8}{13}.$$

习题 2.36 在书上的例 1.4 中, 当全班有 n 个人时, 用 B_n 表示至少有一人得到自己的作业本, 用 D_k 表示恰好有 k 个人得到自己的作业本, 计算 $\# \overline{B}_n$ 和 $P(D_k)$.

解. 由书上的例 1.4 得 $P(B_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}$. ∴

$$P(\overline{B}_n) = 1 - P(B_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{i!}.$$

∴

$$\# \overline{B}_n = \# \Omega P(\overline{B}_n) = n! \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{i!}.$$

\overline{B}_{n-k} 表示“把 $n-k$ 个作业本随机分给 $n-k$ 个人, 没有人得到自己的作业本”. 恰好有 k 个人得到自己的作业本意味着剩下 $n-k$ 个人中没有人得到自己的作业本. ∴

$$D_k = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_k} \overline{B}_{n-k},$$

$$P(D_k) = C_n^k \frac{(n-k)!}{n!} P(\overline{B}_{n-k}) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{i!}.$$

5 第 3 章笔记

为了引入随机变量的定义, 首先需要介绍一些测度论的概念.

定义 5.1 设 Ω 是任意的集合, \mathcal{F} 是 Ω 上的 σ 域 (\mathcal{F} 是 Ω 的子集构成的集合且 \mathcal{F} 满足书上第 1 章第 4 节开头的条件), 则称 (Ω, \mathcal{F}) 是一个可测空间.

定义 5.2 设 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ 是两个可测空间, 如果函数 $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ 满足: $\forall A \in \mathcal{F}_2, f$ 在 A 上的原像 $\{\omega | f(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}_1$, 则称 f 是一个可测变换.

从概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 可以自然地得到一个可测空间 (Ω, \mathcal{F}) . 设 \mathcal{R} 是包含 \mathbb{R} 上的区间全体的 σ 域. 按照定义, $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ 是一个可测空间, 称为 **Borel 可测集**. 有:

定义 5.3 设 (Ω, \mathcal{F}, P) 是概率空间, $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ 是 Borel 可测集, 称可测变换 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 是 Ω 上的随机变量.

在初等概率论中, 可以简单地认为 Ω 上的随机变量是 Ω 上的实值函数.

例 5.1 (书上的例 1.3(2)) 设 X 是随机变量, $x \in \mathbb{R}$, 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x - 1/n\} = \{X < x\}.$$

证明. 设 $\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x - 1/n\}$, 则 $\exists m \in \mathbb{N}_+, X(\omega) \leq x - \frac{1}{m} < x$. $\therefore \omega \in \{X < x\}$.
 $\therefore \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x - 1/n\} \subset \{X < x\}$.

设 $\omega \in \{X < x\}$, 则 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $X(\omega) \leq x - \varepsilon$. 取 $m \geq \frac{1}{\varepsilon}$, 则 $\omega \in \{X \leq x - 1/m\}$.
 $\therefore \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x - 1/n\}$. $\therefore \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq x - 1/n\} \supset \{X < x\}$.

随机变量 X 可以由其分布函数 $F(x) = P(X \leq x)$ 唯一确定. 之后用 $X \sim F(x)$ 来表示由 $F(x)$ 确定的随机变量.

6 第 3 章习题

习题 3.1 证明:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$$

证明. $\because \lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ 存在, $\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq n)$.

$\because \{X \leq n\}$ 单调递增, 由概率的连续性得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq n\}\right) = P(X < \infty) = 1.$$

$\because \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ 存在, $\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq -n)$.

$\because \{X \leq -n\}$ 单调递减, 由概率的连续性得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq -n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq -n\}\right) = P(X \leq -\infty) = 0.$$

习题 3.2 证明: 如果常数 a, b, c 使得 $g(x) = \exp(ax^2 + bx + c)$, $x \in \mathbb{R}$ 是概率密度, 则 $a < 0$.

证明. 证明逆否命题. 若 $a = 0$, 则 $g(x) = e^{bx+c}$, $\therefore g$ 在 \mathbb{R} 上不可积, $\therefore g$ 不是概率密度.

若 $a > 0$, 则 $g(x) = \exp\left(a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + c\right)$. $\therefore g(x) \rightarrow \infty (x \rightarrow \pm\infty)$, $\therefore g$ 在 \mathbb{R} 上不可积, $\therefore g$ 不是概率密度.

习题 3.9 甲每天收到的电子邮件数服从 Poisson 分布 $\mathcal{P}(\lambda)$, 且每封电子邮件被过滤掉的概率为 0.2.

(c) 已知甲看到了自己的 k 封电子邮件, 计算他有 m 封电子邮件被过滤掉的概率.

(d) 甲每天看到的电子邮件数与被过滤掉的电子邮件数是否独立?

解. (c) 设 A_k 表示事件“甲看到了 k 封电子邮件”, B_m 表示事件“甲有 m 封电子邮件被过滤掉”, 则事件 $A_k B_m$ 意味着甲一共收到了 $k + m$ 封电子邮件. \therefore

$$P(A_k B_m) = \frac{\lambda^{k+m}}{(k+m)!} e^{-\lambda} \cdot C_{k+m}^k \cdot 0.8^k \cdot 0.2^m.$$

由书上的例 2.3 得甲每天看到的电子邮件数服从 Poisson 分布 $\mathcal{P}(0.8\lambda)$. 有

$$\begin{aligned} P(B_m|A_k) &= \frac{P(A_k B_m)}{P(A_k)} \\ &= \frac{\frac{\lambda^{k+m}}{(k+m)!} e^{-\lambda} \cdot C_{k+m}^k \cdot 0.8^k \cdot 0.2^m}{\frac{(0.8\lambda)^k}{k!} e^{-0.8\lambda}} \\ &= \frac{\lambda^m}{m!} e^{-0.2\lambda} \cdot 0.2^m. \end{aligned}$$

(d) 由书上的例 2.3 得甲每天被过滤掉的电子邮件数服从 Poisson 分布 $\mathcal{P}(0.2\lambda)$. 有

$$P(B_m) = \frac{(0.2\lambda)^m}{m!} e^{-0.2\lambda} = P(B_m|A_k).$$

\therefore 甲每天看到的电子邮件数与被过滤掉的电子邮件数相互独立.

习题 3.10 设车间有 100 台型号相同的机床相互独立地工作, 每台机床在时间 $(0, t]$ 内发生故障的概率为 0.01, 发生故障的机床需要一人来维修, 且一人在 $(0, t]$ 内只能维修一台机床. 考虑两种配备维修工人的方法:

(a) 5 个人每人负责 20 台机床.

(b) 3 个人同时负责 100 台机床.

在以上两种情况下计算机床在时间 $(0, t]$ 内发生故障时不能被及时维修的概率.

解. (a) 考虑 5 个维修工人中的任意一个 (记为工人甲). 工人甲负责的机床中发生故障的机床数 n 服从二项分布 $\mathcal{B}(20, 0.01)$, 他能及时维修这 20 台机床的概率为 $P(n \leq 1) = 0.99^{20} + C_{20}^1 \cdot 0.99^{19} \cdot 0.01 \approx 0.98314$.

\therefore 全部 100 台机床在时间 $(0, t]$ 内发生故障时不能被及时维修的概率为 $1 - 0.98314^5 \approx 0.0815$.

(b) 100 台机床中发生故障的机床数 n 服从二项分布 $\mathcal{B}(100, 0.01)$. 机床在时间 $(0, t]$ 内发生故障时不能被及时维修的概率为

$$\begin{aligned} 1 - P(n \leq 3) &= 1 - (0.99^{100} + C_{100}^1 \cdot 0.99^{99} \cdot 0.01 \\ &\quad + C_{100}^2 \cdot 0.99^{98} \cdot 0.01^2 + C_{100}^3 \cdot 0.99^{97} \cdot 0.01^3) \\ &\approx 0.0184. \end{aligned}$$

习题 3.14 一个使用了 t 小时的电阻在 Δt 内失效的概率是 $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, 设该电阻的使用寿命是连续型随机变量 X , 求 X 的分布.

解. 该电阻在 Δt 内不失效的概率是 $1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t)$, \therefore

$$P(X > t + \Delta t | X > t) = 1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t).$$

\therefore

$$P(X > t + \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t))P(X > t).$$

设 X 的分布函数为 $F(x)$, 则

$$\begin{aligned} F(t + \Delta t) &= 1 - P(X > t + \Delta t) \\ &= 1 - (1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t))P(X > t) \\ &= 1 - (1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t))(1 - F(t)) \\ &= (\lambda \Delta t + o(\Delta t))(1 - F(t)) + F(t). \end{aligned}$$

\therefore

$$\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = (\lambda + o(1))(1 - F(t)) \quad (\Delta t \rightarrow 0).$$

\therefore

$$\frac{dF}{dt} = \lambda(1 - F).$$

解得

$$F(x) = 1 - Ce^{-\lambda x}.$$

由 $\int_0^\infty F(x)dx = 1$ 得 $C = 1$. $\therefore X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

习题 3.16 设 $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, 计算 $Y = \sqrt{X}$ 的概率分布.

解. $\because X$ 是取值为 \mathbb{N} 的离散型随机变量, $\therefore Y$ 是离散型随机变量. 有

$$P(Y = y) = P(X = y^2) = \frac{\lambda^{y^2}}{(y^2)!} e^{-\lambda}, \quad y \in \{z : z^2 \in \mathbb{N}\}.$$

习题 3.17 设电流 I 在 $8 \sim 9\text{A}$ 间均匀分布. 当电流通过 2Ω 的电阻时, 消耗的功率 (单位: W) 是 $W = 2I^2$. 求 W 的概率密度.

解. 有 $P(128 < W \leq 162) = P(8 < I \leq 9) = 1$. 对 $w \in (128, 162)$,

$$\begin{aligned} P(W = w) &= P(2I^2 = w) \\ &= P\left(I = \sqrt{\frac{w}{2}}\right) + P\left(I = -\sqrt{\frac{w}{2}}\right) \\ &= 1 \cdot \left|\frac{d}{dw} \sqrt{\frac{w}{2}}\right| dw + 0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{8w}}. \end{aligned}$$

\therefore

$$P_W(w) = \frac{1}{\sqrt{8w}}, \quad w \in (128, 162).$$

习题 3.20 (c) 设 X 有分段连续的概率密度 $f(x)$. 求 $Y = \tan X$ 的概率密度.

解. Y 的取值为 \mathbb{R} . 有

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= P(\tan X = y) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(X = \arctan y + n\pi) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2} f(\arctan y + n\pi). \end{aligned}$$

\therefore

$$P_Y(y) = \frac{1}{1+y^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\arctan y + n\pi).$$

习题 3.21 设 $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

(a) 已知 $n = 19, p = 0.7$, 求 $p_k = P(X = k)$ 的最大值点 k ;

(b) 已知 $n = 19, X = 9$, 求使得 $P(X = 9)$ 最大的 p .

解. (a) 设 $k < 19$. \therefore

$$P(X = k) = C_{19}^k \cdot 0.7^k \cdot 0.3^{19-k} = \frac{19!}{k!(19-k)!} \cdot 0.7^k \cdot 0.3^{19-k},$$

$$P(X = k+1) = \frac{19!}{(k+1)!(19-k-1)!} \cdot 0.7^{k+1} \cdot 0.3^{19-k-1},$$

\therefore

$$\begin{aligned} p_k - p_{k+1} &= \frac{19!}{k!(19-k)!} \cdot 0.7^k \cdot 0.3^{19-k} - \frac{19!}{(k+1)!(19-k-1)!} \cdot 0.7^{k+1} \cdot 0.3^{19-k-1} \\ &= \frac{19!}{k!(19-k-1)!} \cdot 0.7^k \cdot 0.3^{19-k-1} \left(\frac{0.3}{19-k} - \frac{0.7}{k+1} \right). \end{aligned}$$

\therefore 当 $\frac{0.3}{19-k} - \frac{0.7}{k+1} > 0, k > 13$ 时 $p_k > p_{k+1}$, 当 $k < 13$ 时 $p_k < p_{k+1}$, 当 $k = 13$ 时 $p_k = p_{k+1}$.

\therefore 当 $k = 13, 14$ 时 p_k 取最大值.

(b) $P(X = 9) = C_{19}^9 p^9 (1-p)^{10}$. 只需求 $f(p) = \ln P(X = 9)$ 的最大值点. 有

$$f(p) = \ln C_{19}^9 + 9 \ln p + 10 \ln(1-p), \quad \frac{df}{dp} = \frac{9}{p} - \frac{10}{1-p}.$$

\therefore 当 $p = \frac{9}{19}$ 时 $P(X = 9)$ 最大.

习题 3.23 设 $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

(a) 已知 $\lambda = 23.8$, 求 $p_k = P(X = k)$ 的最大值点 k ;

(b) 已知 $X = 21$, 求使得 $P(X = 21)$ 最大的 λ .

解. (a) 对 $k \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} P(X = k+1) - P(X = k) &= \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda}{k+1} - 1 \right). \end{aligned}$$

当 $k < \lambda - 1$ 时有 $P(X = k+1) > P(X = k)$, 当 $k > \lambda - 1$ 时有 $P(X = k+1) < P(X = k)$, \therefore 当 $k = 23$ 时 p_k 取最大值.

$$(b) P(X = 21) = \frac{\lambda^{21}}{21!} e^{-\lambda}. \text{ 令}$$

$$f(\lambda) = \ln P(X = 21) = 21 \ln \lambda - \ln 21! - \lambda,$$

有

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{21}{\lambda} - 1.$$

\therefore 当 $\lambda = 21$ 时 $P(X = 9)$ 最大.

习题 3.25 将一个骰子投掷 n 次, 用 m 表示掷得的最小点数, 用 M 表示掷得的最大点数. 计算

$$(a) P(m = k), 1 \leq k \leq 6;$$

$$(b) P(M = k), 1 \leq k \leq 6;$$

$$(c) P(m = 2, M = 5).$$

解. 设第 i 次掷得的点数为 X_i , 则 X_i 相互独立, $P(X_i = k) = \frac{1}{6} (k = 1, \dots, 6)$.

(a)

$$\begin{aligned} P(m \geq k) &= P(X_1 \geq k, X_2 \geq k, \dots, X_n \geq k) \\ &= P(X_1 \geq k)P(X_2 \geq k) \cdots P(X_n \geq k) \\ &= \left(\frac{6 - k + 1}{6} \right)^n, \end{aligned}$$

$$P(m > k) = P(m \geq k + 1) = \left(\frac{6 - (k + 1) + 1}{6} \right)^n = \left(\frac{6 - k}{6} \right)^n,$$

\therefore

$$P(m = k) = P(m \geq k) - P(m > k) = \frac{(6 - k + 1)^n - (6 - k)^n}{6^n}.$$

(b)

$$\begin{aligned} P(M \leq k) &= P(X_1 \leq k, X_2 \leq k, \dots, X_n \leq k) \\ &= P(X_1 \leq k)P(X_2 \leq k) \cdots P(X_n \leq k) \\ &= \left(\frac{k}{6} \right)^n, \end{aligned}$$

$$P(M = k) = P(M \leq k) - P(M \leq k - 1) = \frac{k^n - (k - 1)^n}{6^n}.$$

(c)

$$P(m \geq k_1, M \leq k_2) = \left(\frac{k_2 - k_1 + 1}{6} \right)^n, \quad k_1 \leq k_2.$$

$$\begin{aligned} P(m=2, M=5) &= P(m \geq 2, M \leq 5) - P(\{m \geq 3, M \leq 5\} \vee \{m \geq 2, M \leq 4\}) \\ &= P(m \geq 2, M \leq 5) - P(m \geq 3, M \leq 5) \\ &\quad - P(m \geq 2, M \leq 4) + P(m \geq 3, M \leq 4) \\ &= \left(\frac{5-2+1}{6} \right)^n - \left(\frac{5-3+1}{6} \right)^n - \left(\frac{4-2+1}{6} \right)^n + \left(\frac{4-3+1}{6} \right)^n \\ &= \frac{2^n}{3^n} - 2 \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

习题 3.26 设点随机地落在中心为原点, 半径为 R 的圆周上, 求落点横坐标的概率密度 $f(x)$.

解. X 的取值为 $(-R, R)$. 当 $0 \leq x < R$ 时有

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= \frac{\frac{1}{2} \left(2\pi - 2 \arccos \frac{x}{R} \right) R^2 - 2 \cdot \frac{x\sqrt{R^2 - x^2}}{2}}{\pi R^2} \\ &= 1 - \frac{\arccos \frac{x}{R}}{\pi} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x}{R} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R} \right)^2}. \end{aligned}$$

\therefore

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\partial P(X \leq x)}{\partial x} \\ &= \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial P(X \leq x)}{\partial (x/R)} \\ &= \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{2\sqrt{1 - (x/R)^2}}{\pi} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2}. \end{aligned}$$

显然 $f(x) = f(-x)$. \therefore

$$f(x) = \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2}, \quad -R < x < R.$$

注 书上的答案应该有点问题. 下面这行 Mathematica 代码可以用来画 $\frac{2\sqrt{16-x^2}}{16\pi}$ (这里的答案当 $R=4$ 时的情形) 以及 $\frac{1}{\pi\sqrt{16-x^2}}$ (书上的答案当 $R=4$ 时的情形) 的图象, 可以看到 $\frac{1}{\pi\sqrt{16-x^2}}$ 的值在 $x=\pm 4$ 处比较大, 在 $x=0$ 处比较小, 这与实际情况不符.

```
Plot[{2 Sqrt[16 - x^2]/(16 Pi), 1/(Pi Sqrt[16 - x^2])}, {x, -4, 4},
PlotLabels -> Automatic]
```

习题 3.28 设 X 有概率密度 $f(x) = cx/\pi^2, x \in (0, \pi)$. 求 $Y = \sin X$ 的概率密度.

解. 由 $\int_0^\pi f(x) dx = 1$ 得 $c = 2$.

Y 的取值为 $(0, 1]$. 对 $y \in (0, 1]$, 有

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= P(\sin X = y) \\ &= P(X = \arcsin y) + P(X = \pi - \arcsin y) \\ &= \frac{2 \arcsin y}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{2(\pi - \arcsin y)}{\pi^2} \cdot \left| -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right| \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \end{aligned}$$

习题 3.30 设 $f(x)$ 是 $[0, \infty)$ 上的连续函数. 证明:

(1) 如果 $\forall x, y > 0$, 有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 则 $\exists a$ 使得 $f(x) = ax, x \geq 0$;

(2) 如果 $\forall x, y > 0$, 有 $f(x+y) = f(x)f(y) > 0$, 则 $\exists b$ 使得 $f(x) = e^{bx}, x \geq 0$.

证明. (1) 用数学归纳法证明: $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = f(1) \cdot n$. 当 $n = 0$ 时有 $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0), \therefore f(0) = 0 = f(1) \cdot 0$.

假设有 $f(n-1) = f(1) \cdot (n-1)$, 则

$$f(n) = f((n-1) + 1) = f(n-1) + f(1) = f(1) \cdot (n-1) + f(1) = nf(1).$$

$\therefore \forall n \in \mathbb{N}, f(n) = f(1) \cdot n$.

设 $a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}_+$. 有

$$\begin{aligned} qf(a) &= f(a) + f(a) + \underbrace{f(a) + \cdots + f(a)}_{q-2 \uparrow f(a)} \\ &= f(2a) + \underbrace{f(a) + \cdots + f(a)}_{q-2 \uparrow f(a)} \\ &= \cdots \\ &= f(qa) = f(p). \end{aligned}$$

$\therefore p \in \mathbb{N}, \therefore f(p) = pf(1). \therefore qf(a) = pf(1), f(a) = \frac{p}{q}f(1).$

$\therefore f$ 是 $[0, \infty)$ 上的连续函数, $\therefore f$ 在 $[0, \infty)$ 上任意一点处的极限存在且等于 f 在该点的值. \therefore 对收敛到 $[0, \infty)$ 上任意一点 x_0 的数列 a_1, a_2, \cdots , 有

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n).$$

$\forall x \in [0, \infty)$, 存在有理数列 a_1, a_2, \dots 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n f(1) = f(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x f(1).$$

(2) 用数学归纳法证明: $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = (f(1))^n$. 当 $n = 0$ 时有 $f(0) = f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0), \therefore f(0) = 1 = (f(1))^0$.

假设有 $f(n-1) = (f(1))^{n-1}$, 则

$$f(n) = f((n-1) + 1) = f(n-1)f(1) = (f(1))^{n-1}f(1) = (f(1))^n.$$

$$\therefore \forall n \in \mathbb{N}, f(n) = (f(1))^n.$$

设 $a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}_+$. 与 (1) 类似, 有

$$(f(a))^q = f(qa) = f(p) = (f(1))^p.$$

\therefore

$$f(a) = (f(1))^{p/q}.$$

与 (1) 类似, 用 f 的连续性可以得到: $\forall x \in [0, \infty), f(x) = (f(1))^x = e^{x \ln f(1)}$.

7 第 4 章笔记

7.1 边缘分布函数

书上没有给出 n 维随机向量的边缘分布函数的定义. 这里补充一下.

定义 7.1 设随机向量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的联合分布函数为 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 称用 ∞ 替换 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的一部分变量 (不是所有的变量) 得到的函数为 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的 **边缘分布函数**.

联合分布函数唯一确定了所有的边缘分布函数, 而即使所有的边缘分布函数都已知, 联合分布函数仍然不能唯一确定.

例 7.1 容易验证, 表 1 中的两个不同的分布具有相同的边缘分布函数.

p_{ij}	y_1	y_2	p_{ij}	y_1	y_2
x_1	1/4	1/4	x_1	1/3	1/6
x_2	1/4	1/4	x_2	1/6	1/3

表 1: 两个不同的分布

7.2 随机变量的独立性

补充几个定理的证明.

定理 7.1 随机向量 (X_1, \dots, X_n) 相互独立当且仅当 $\forall x_1, x_2, \dots, x_n$, 事件 $\{X_1 \leq x_1\}, \{X_2 \leq x_2\}, \dots, \{X_n \leq x_n\}$ 相互独立.

证明. 由书上的定义 1.2, 随机向量 (X_1, \dots, X_n) 相互独立当且仅当下式成立:

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2) \cdots P(X_n \leq x_n). \quad (7.1)$$

(\Leftarrow) 在书上第 2 章的定义 2.2 中取 $k = n$ 即得式 (7.1).

$(\Rightarrow) \forall 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$.

在式 (7.1) 中令 $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k\}, x_i = \infty$, 得

$$P(X_{j_1} \leq x_{j_1}, X_{j_2} \leq x_{j_2}, \dots, X_{j_k} \leq x_{j_k}) = P(X_{j_1} \leq x_{j_1})P(X_{j_2} \leq x_{j_2}) \cdots P(X_{j_k} \leq x_{j_k}).$$

由书上第 2 章的定义 2.2 得事件 $\{X_1 \leq x_1\}, \{X_2 \leq x_2\}, \dots, \{X_n \leq x_n\}$ 相互独立.

7.3 连续型随机向量

如果联合密度是连续的, 那么所有的边缘密度都是连续的, 反之不成立.

例 7.2 设 X 有连续的概率密度 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} (\lambda > 0)$, $Y = X$, 则随机向量只在射线 $l: y = x (x > 0)$ 上有非负取值. \therefore 对于任意的 \mathbb{R}^2 的长方形子集 D 和函数 f , 有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{l \cap D} f(x, y) dx dy.$$

\therefore 直线是零测集, $\therefore \iint_{l \cap D} f(x, y) dx dy = 0$.

考虑 $D = \{(x, y) | 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1\}$, 则 $P((X, Y) \in D) = P(0 < X \leq 1) = 1 - e^{-\lambda} > 0$, 但 $\nexists f$ 使得 $\iint_D f(x, y) dx dy = 1 - e^{-\lambda}$. 由书上的定义 3.1, $\therefore (X, Y)$ 不是连续型随机向量, 没有联合密度.

类比离散型随机向量来理解书上的定理 3.2.

例 7.3 设 X, Y 是取值为 \mathbb{Z} 的离散型随机变量, $p_{ij} = P(X = i, Y = j)$, 有

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(X = i, Y \leq j) - P(X = i, Y \leq j - 1) \\ &= P(X \leq i, Y \leq j) - P(X \leq i - 1, Y \leq j) \\ &\quad - (P(X \leq i, Y \leq j - 1) - P(X \leq i - 1, Y \leq j - 1)), \end{aligned}$$

可以将 $P(X = i, Y \leq j) = P(X \leq i, Y \leq j) - P(X \leq i - 1, Y \leq j)$ 理解为离散的“偏导数”，将 p_{ij} 理解为离散的“二阶混合偏导”。

例 7.4 需要用到下面的定理.

定理 7.2 (书上定理 3.2 的推广) 设 D 是 \mathbb{R}^n 上的开集, 随机变量 X_1, \dots, X_n 的联合分布函数 $F(x_1, \dots, x_n)$ 在 D 中可微, 且有连续的 n 阶混合偏导数. 如果 $P((X_1, \dots, X_n) \in D) = 1$, 那么

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}, & (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明. 略.

可以把书上的例 3.2 推广到一般情形.

例 7.4 一部手机陆续收到短信. 假设在不相交的时间段内收到的短信数相互独立, 且在任何长为 h 的时间段内收到的短信服从参数为 μh 的 Poisson 分布. 从 $t = 0$ 开始, 用 X_i 表示第 i 个短信的到达时刻, 则 X_1, X_2, \dots, X_n 的概率密度为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mu^n e^{-\mu x_n}, \quad x_n > x_{n-1} > \cdots > x_1 > 0.$$

证明. 用数学归纳法. 由书上的例 3.2 得 $n = 2$ 时成立. 假设 X_1, X_2, \dots, X_{n-1} 的概率密度为

$$g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \mu^{n-1} e^{-\mu x_{n-1}}, \quad x_{n-1} > \cdots > x_1 > 0.$$

对于 $x_n > x_{n-1} > \cdots > x_1 > 0$, 定义 $x_0 = 0$, 用 N_i 表示 $[x_{i-1}, x_i]$ 内收到的短信数, 则 N_1, N_2, \dots, N_n 相互独立, 且 $N_i \sim \mathcal{P}(\mu(x_i - x_{i-1}))$. 有

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq x_1, \dots, X_{n-1} \leq x_{n-1}, X_n > x_n) &= P(N_1 = 1, \dots, N_{n-1} = 1, N_n = 0) \\ &= P(N_1 = 1) \cdots P(N_{n-1} = 1) P(N_n = 0) \\ &= e^{-\mu(x_n - x_{n-1})} \prod_{i=1}^{n-1} \mu(x_i - x_{i-1}) e^{-\mu(x_i - x_{i-1})} \\ &= \mu^{n-1} e^{-\mu x_n} \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

∴

$$\begin{aligned}
& F(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_{n-1} \leq x_{n-1}) - P(X_1 \leq x_1, \dots, X_{n-1} \leq x_{n-1}, X_n > x_n) \\
&= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_{n-1} \leq x_{n-1}) - \mu^{n-1} e^{-\mu x_n} \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i-1}).
\end{aligned}$$

由定理 7.2, 当 $x_{n-1} > \dots > x_1 > 0$ 时有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-1}} &= g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) - \frac{\partial \left(\mu^{n-1} e^{-\mu x_n} \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i-1}) \right)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-1}} \\
&= \mu^{n-1} e^{-\mu x_{n-1}} - \mu^{n-1} e^{-\mu x_n} \frac{\partial \left(\prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i-1}) \right)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-1}}.
\end{aligned}$$

∴

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \left(\prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i-1}) \right)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-1}} &= \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \left(\prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i-1}) \right) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-2}} \left(\prod_{i=1}^{n-2} (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{\partial (x_{n-1} - x_{n-2})}{\partial x_{n-1}} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-2}} \left(\prod_{i=1}^{n-2} (x_i - x_{i-1}) \right) \\
&= \dots \\
&= \frac{\partial (x_1 - x_0)}{\partial x_1} = 1,
\end{aligned}$$

∴

$$\frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-1}} = \mu^{n-1} e^{-\mu x_{n-1}} - \mu^{n-1} e^{-\mu x_n}, \quad x_{n-1} > \dots > x_1 > 0.$$

由定理 7.2,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-1}} \right) = \mu^n e^{-\mu x_n}, \quad x_n > x_{n-1} > \dots > x_1 > 0.$$

7.4 连续型随机向量的独立性

设 X 有概率密度 $f_X(x)$. 考察那些使得 $P(X = x) > 0$ 的 x 组成的集合. 由书上第 3 章的定义 2.2 得 $P(X = x) > 0$ 当且仅当 $f_X(x) > 0$. 称 $\{x | f_X(x) > 0\}$ 为 X 的**支集**或**取值**. 如果随机向量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 有概率密度 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 则称 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) | f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0\}$ 为 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的支集.

对 (X, Y) , 已知 $X = x_0$ 时, Y 的支集为 $\{y | f(x_0, y) > 0\}$. 如果 X, Y 相互独立, 那么 Y 的支集为 $\{y | f_X(x_0)f_Y(y) > 0\}$.

$\because X = x_0, \therefore f_X(x_0) > 0, \therefore Y$ 的支集为 $\{y | f_Y(y) > 0\}$. 取逆否命题就得到书上的定理 3.4 (1).

8 第 4 章习题

习题 4.4 常数 a 是随机变量, 按定义证明 a 与任何随机变量 Y 独立.

证明. \because 当 $b \geq a$ 时有 $P(a \leq b) = 1, P(a \leq b, Y \leq y) = P(Y \leq y)$, 当 $b < a$ 时有 $P(a \leq b) = P(a \leq b, Y \leq y) = 0, \therefore \forall b, y$ 都有

$$P(a \leq b, Y \leq y) = P(Y \leq y)P(a \leq b).$$

由书上的定义 1.1 得 a 与 Y 独立.

习题 4.5 证明: 对于固定的 x , 联合分布函数 $F(x, y)$ 关于 y 单调不减且右连续.

证明. 对 $y_1 \leq y_2$, 有 $\{X = x, Y = y_1\} \subset \{X = x, Y = y_2\}$. $\therefore F(x, y_1) < F(x, y_2)$. $\therefore F(x, y)$ 关于 y 单调不减.

\because 关于 y 的函数 $F(x, y + \delta)$ 关于 δ 单调有界, \therefore 当 $\delta \downarrow 0$ 时有极限, 且该极限等于任意递减趋于 y 的数列的函数值的极限. \therefore

$$\lim_{\delta \downarrow 0} F(x, y + \delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(x, y + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\{X \leq x\} \cap \left\{Y \leq y + \frac{1}{n}\right\}\right)$$

由概率的连续性得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\{X \leq x\} \cap \left\{Y \leq y + \frac{1}{n}\right\}\right) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\{X \leq x\} \cap \left\{Y \leq y + \frac{1}{n}\right\}\right)\right) \\ &= P\left(\{X \leq x\} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{Y \leq y + \frac{1}{n}\right\}\right)\right) \\ &= P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = F(x, y). \end{aligned}$$

$\therefore F(x, y)$ 关于 y 右连续.

习题 4.6 设 $X \sim \mathcal{B}(n, p), Y \sim \mathcal{B}(m, p)$, X, Y 相互独立, 计算 $X + Y$ 的概率分布.

解. 对 $0 \leq z \leq m + n$, 有

$$P(X + Y = z) = \sum_{i+j=z} P(X = i, Y = j).$$

$\because X, Y$ 相互独立, \therefore

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=z} P(X = i, Y = j) &= \sum_{i+j=z} P(X = i)P(Y = j) \\ &= \sum_{i+j=z} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} C_m^j p^j (1-p)^{m-j} \\ &= p^z (1-p)^{m+n-z} \sum_{i+j=z} C_n^i C_m^j. \end{aligned}$$

考察等式

$$(1+x)^n (1+x)^m = (1+x)^{m+n}$$

两边的展开式, 左边的 x^k 一项的系数为 $\sum_{i+j=k} C_n^i C_m^j$, 右边的 x^k 一项的系数为 C_{m+n}^k , \therefore

$$\sum_{i+j=k} C_n^i C_m^j = C_{m+n}^k.$$

\therefore

$$\sum_{i+j=z} P(X = i, Y = j) = C_{m+n}^k p^z (1-p)^{m+n-z},$$

$\therefore X + Y \sim \mathcal{B}(m + n, p)$.

习题 4.9 设随机变量 X, Y 独立同分布, 证明

$$P(a < \min(X, Y) \leq b) = P^2(X > a) - P^2(X > b).$$

证明.

$$\begin{aligned} P(a < \min(X, Y) \leq b) &= P(\min(X, Y) > a) - P(\min(X, Y) > b) \\ &= P(X > a, Y > a) - P(X > b, Y > b). \end{aligned}$$

$\because X, Y$ 相互独立, \therefore

$$P(X > a, Y > a) - P(X > b, Y > b) = P(X > a)P(Y > a) - P(X > b)P(Y > b).$$

$\because X, Y$ 同分布, $\therefore P(Y > x) = P(X > x)$,

$$P(X > a)P(Y > a) - P(X > b)P(Y > b) = P^2(X > a) - P^2(X > b).$$

习题 4.11 设 a 是常数, (X, Y) 有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} ax^2y, & x^2 < y < 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

求 X, Y 的边缘密度, 说明 X, Y 不独立.

解. 由

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \iint_{x^2 < y < 1} ax^2y dx dy = 1$$

得 $a = \frac{21}{4}$. 有

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{x^2}^1 \frac{21}{4} x^2 y dy = \frac{21}{8} x^2 (1 - x^2), \quad -1 < x < 1,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{21}{4} x^2 y dx = \frac{7}{2} y^2 \sqrt{y}, \quad 0 < y < 1.$$

$\because f_X(x)f_Y(y) \neq f(x, y)$, $\therefore X, Y$ 不独立.

习题 4.14 设随机变量 X, Y 相互独立, $X \sim \mathcal{E}(\lambda), Y \sim \mathcal{E}(\mu)$, 计算 $P(X > Y)$.

解. $\because X, Y$ 相互独立且分别有概率密度, 由书上的定理 3.1 得 (X, Y) 有概率密度

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} = \lambda \mu e^{-(\lambda x + \mu y)}, \quad x > 0, y > 0.$$

\therefore

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= \iint_{\mathbb{R}_+^2} f(x, y) I[x > y] dx dy \\ &= \int_0^{\infty} dx \int_0^x f(x, y) dy \\ &= \int_0^{\infty} dx \int_0^x \lambda \mu e^{-(\lambda x + \mu y)} dy \\ &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\mu x}) dx \\ &= 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \end{aligned}$$

习题 4.16 设 $p = 1 - q \in (0, 1)$, $0 < \alpha < q/p$. 假设一个家庭有 n 个小孩的概率为

$$p_n = \begin{cases} \alpha p^n, & n \geq 1, \\ 1 - \alpha p/q, & n = 0. \end{cases}$$

如果男婴和女婴的出生是等可能的且相互独立, 求一个家庭有 n 个男孩的概率.

解. 设 X 为一个家庭中的小孩的个数, Y 为一个家庭中的男孩的个数, 则 $P(X = x) = p_x$.

由全概率公式得

$$P(Y = y) = \sum_{x=0}^{\infty} P(Y = y|X = x)P(X = x).$$

\therefore 男婴和女婴的出生是等可能的且相互独立, \therefore

$$P(Y = y|X = x) = \begin{cases} C_x^y \left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{x-y}, & x \geq y, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} = \begin{cases} C_x^y \frac{1}{2^x}, & x \geq y, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

\therefore

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \left(1 - \alpha \frac{p}{q}\right) C_0^0 \frac{1}{2^0} + \sum_{x=0}^{\infty} C_x^0 \frac{1}{2^x} \cdot \alpha p^x \\ &= 1 - \alpha \frac{p}{q} + \sum_{x=1}^{\infty} \alpha C_x^0 \left(\frac{p}{2}\right)^x \\ &= 1 - \alpha \frac{p}{q} + \alpha \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{p}{2}\right)^x \\ &= 1 - \alpha \frac{p}{q} + \alpha \frac{p/2}{1 - p/2} \\ &= 1 - \alpha \frac{p}{q} + \alpha \frac{p}{1 + q}, \end{aligned}$$

当 $y \neq 0$ 时有

$$P(Y = y) = \sum_{x=y}^{\infty} C_x^y \frac{1}{2^x} \cdot \alpha p^x$$

习题 4.17 设随机向量 (X, Y) 有联合密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 + xy}{4}, & x, y \in (-1, 1), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明 X^2, Y^2 相互独立, 但 X, Y 不独立.

解. $\because \forall x_0 \in (-1, 1)$,

$$\frac{f(x, y)}{f(x_0, y)} = \frac{1 + xy}{1 + x_0 y}$$

都是 y 的函数, 由书上的定理 3.4 (2) 得 X, Y 不独立.

令 $U = X^2, V = Y^2$, 则 $X = \sqrt{U}, Y = \sqrt{V}$,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{vmatrix} = 4xy, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} = \frac{1}{4xy} = \frac{1}{4\sqrt{uv}}.$$

\therefore

$$\begin{aligned} P(U = u, V = v) &= P(X = \sqrt{u}, Y = \sqrt{v}) + P(X = -\sqrt{u}, Y = \sqrt{v}) \\ &\quad + P(X = \sqrt{u}, Y = -\sqrt{v}) + P(X = -\sqrt{u}, Y = -\sqrt{v}) \\ &= \frac{1 + \sqrt{u}\sqrt{v}}{4} dx dy + \frac{1 + (-\sqrt{u})\sqrt{v}}{4} dx dy \\ &\quad + \frac{1 + (-\sqrt{u})(-\sqrt{v})}{4} dx dy + \frac{1 + \sqrt{u}(-\sqrt{v})}{4} dx dy \\ &= \frac{4 + 2\sqrt{u}\sqrt{v} - 2\sqrt{u}\sqrt{v}}{4} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \\ &= \frac{1}{4\sqrt{uv}} du dv. \end{aligned}$$

$\therefore (U, V)$ 有联合密度

$$g(u, v) = \frac{1}{4\sqrt{uv}}, u, v \in (0, 1).$$

U 的边缘密度为

$$f_U(u) = \int_0^1 \frac{1}{4\sqrt{uv}} dv = \frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

对称地, $f_V(v) = \frac{1}{2\sqrt{v}}$. $\because g(u, v) = f_U(u)f_V(v)$, $\therefore U, V$ 相互独立.

习题 4.18 设 D 是非负连续函数 $g(x)$ 与 x 轴所夹的区域, D 的面积 $m(D) \in (0, \infty)$. 设 (X, Y) 在 D 上均匀分布, 求 X 的概率密度.

解. 设 $x_0 \in \mathbb{R}$. 有

$$\begin{aligned} P(X \leq x_0) &= \iint_D \frac{1}{m(D)} I[X \leq x_0] dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{x_0} dx \int_0^{g(x)} \frac{1}{m(D)} dy \\ &= \int_{-\infty}^{x_0} \frac{g(x)}{m(D)} dx. \end{aligned}$$

$\therefore X$ 有概率密度

$$f_X(x) = \frac{g(x)}{m(D)},$$

其中 $m(D) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$.

习题 4.19 设随机变量 X 服从二项分布 $\mathcal{B}(n, p)$, Y 服从指数分布 $\mathcal{E}(\lambda)$. 当 X, Y 独立时, 求 $Z = Y - X$ 的分布函数和概率密度.

解. $\because Y \sim \mathcal{E}(\lambda), \therefore P(Y \leq y) = (1 - e^{-\lambda y})I[y \geq 0]$.

由全概率公式得

$$\begin{aligned} P(Y - X \leq z) &= \sum_{k=0}^n P(Y - X \leq z | X = k) P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n P(Y \leq z + k | X = k) P(X = k). \end{aligned}$$

$\because X, Y$ 相互独立, \therefore

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n P(Y \leq z + k | X = k) P(X = k) &= \sum_{k=0}^n P(Y \leq z + k) P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n (1 - e^{-\lambda(z+k)}) I[z + k \geq 0] C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n (1 - e^{-\lambda(z+k)}) I[z \geq -k] C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

\therefore

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \sum_{k=0}^n (1 - e^{-\lambda(z+k)}) I[z \geq -k] C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \\ f_Z(z) &= \frac{dF_Z(z)}{dz} = \lambda e^{-\lambda(z+k)} I[z \geq -k] C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

习题 4.22 设随机变量 X, Y 独立, X 有概率密度 $f(x)$, Y 有离散型概率分布 $P(Y = a_i) = p_i > 0 (i = 1, 2, \dots)$. 证明:

(1) 若 a_1, a_2, \dots 都不为 0, 证明 $Z = XY$ 有概率密度

$$h(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{|a_i|} f\left(\frac{z}{a_i}\right).$$

(2) 若有某个 $a_i = 0$, 则 Z 不是连续型随机变量.

证明. (1) 由全概率公式得

$$\begin{aligned} P(Z = z) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(XY = z | Y = a_i) P(Y = a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P\left(X = \frac{z}{a_i} \middle| Y = a_i\right) P(Y = a_i). \end{aligned}$$

$\because X, Y$ 独立, \therefore

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} P\left(X = \frac{z}{a_i} \middle| Y = a_i\right) P(Y = a_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} P\left(X = \frac{z}{a_i}\right) P(Y = a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} f\left(\frac{z}{a_i}\right) \cdot \frac{1}{|a_i|} p_i. \end{aligned}$$

(2) 不妨设 $a_1 = 0$. $\because \{Z = 0\} = \{XY = 0\} \supset \{Y = 0\} \supset \{Y = a_1\}$, $\therefore P(Z = 0) \geq P(Y = a_1) > 0$. $\therefore Z$ 不是连续型随机变量.

习题 4.23 设随机向量 (X, Y) 有联合密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, & x, y > 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

解. 令 $W = X$, 则 $X = W, Y = Z - W$,

$$\frac{\partial(z, w)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(z, w)} = \left(\frac{\partial(z, w)}{\partial(x, y)}\right)^{-1} = -1.$$

$$\begin{aligned} P(Z = z, W = w) &= P(X = w, Y = z - w) \\ &= f(w, z - w) dx dy \\ &= \frac{1}{2} z e^{-z} dw dz, \quad w > 0, z > 0, \end{aligned}$$

\therefore

$$f_Z(z) = \frac{1}{2} z e^{-z}, \quad z > 0.$$

习题 4.25 设随机变量 U, V 独立, 都服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布.

(a) 计算 $R = \sqrt{-2 \ln U}$ 和 $\Theta = 2\pi V$ 的概率密度;

(b) 证明 $X = R \cos \Theta, Y = R \sin \Theta$ 独立, 都服从 Gauss 分布.

证明. (a) R 的取值为 $(0, \infty)$, Θ 的取值为 $(0, 2\pi)$. 有

$$P(R=r) = P(\sqrt{-2\ln U} = r) = P(U = e^{-r^2/2}) = |-re^{-r^2/2}| = re^{-r^2/2}, \quad r \in (0, \infty),$$

$$P(\Theta = \theta) = P\left(V = \frac{\theta}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}, \quad \theta \in (0, 2\pi).$$

(b) (X, Y) 的取值为 $\{X^2 + Y^2 \neq 0\}$. 由 $X = R \cos \Theta, Y = R \sin \Theta$ 得 $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$,

$$\Theta = g(X, Y) = \begin{cases} 0 & Y = 0, X > 0 \\ \pi & Y = 0, X < 0 \\ \arctan \frac{Y}{X} & Y \neq 0, X \geq 0 \\ \pi - \arctan \frac{Y}{X} & Y \neq 0, X < 0 \end{cases}.$$

有

$$\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} = \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right)^{-1} = \frac{1}{r}.$$

\therefore

$$\begin{aligned} P(X=x, Y=y) &= P(R = \sqrt{x^2 + y^2}, \Theta = g(X, Y)) \\ &= \frac{1}{2\pi} re^{-r^2/2} dr d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} re^{-r^2/2} \cdot \frac{1}{r} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy. \end{aligned}$$

$\therefore (X, Y)$ 有概率密度

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}.$$

容易验证 X, Y 都服从 Gauss 分布且相互独立.

证明第 4.27 题需要先证明下面的引理.

引理 8.1 设取值为 \mathbb{R} 的连续型随机变量 X, Y, Z 相互独立, 则 $\forall a, b \in \mathbb{R}, aX + bY$ 与 Z 相互独立.^a

^a这可以由书上的定理 1.1 (3) 得到, 由于那里没有证明, 所以还是单独拿出来作为一个引理.

证明. $\because X, Y, Z$ 是连续型随机变量, $\therefore (X, Y, Z)$ 有概率密度 $f(x, y, z)$. $\because X, Y, Z$ 相互独立,

\therefore

$$f(x, y, z) = f_X(x)f_Y(y)f_Z(z) = f_{X,Y}(x, y)f_Z(z),$$

其中 $f_{X,Y}(x,y)$ 是 (X,Y) 的联合密度. 设

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix},$$

与第 4.33 题类似, 有

$$\begin{aligned} P(U = u, V = v, Z = z) &= P(X = a_1u + b_1v, Y = c_1u + d_1v, Z = z) \\ &= f_{X,Y}(a_1u + b_1v, c_1u + d_1v) f_Z(z) du dv dz \\ &= f_{U,V}(u, v) f_Z(z) du dv dz, \end{aligned}$$

其中 $f_{U,V}(u, v)$ ($u, v \in \mathbb{R}$) 是 (U, V) 的联合密度. \therefore

$$\begin{aligned} P(U \leq u_0, Z \leq z_0) &= P(U \leq u_0, V \leq \infty, Z \leq z_0) \\ &= \int_{-\infty}^{z_0} f_Z(z) dz \int_{-\infty}^{u_0} du \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, v) dv \\ &= \int_{-\infty}^{z_0} f_Z(z) dz \int_{-\infty}^{u_0} f_U(u) du \\ &= P(U \leq u_0) P(Z \leq z_0). \end{aligned}$$

$\therefore U = aX + bY$ 与 Z 相互独立.

习题 4.27 设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 都服从 Gauss 分布, a_1, a_2, \dots, a_n 是不全为 0 的常数, 证明 $U = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$ 服从 Gauss 分布.

证明. 用数学归纳法. $n = 1$ 时的情形是显然的.

假设对相互独立的随机变量 X_1, \dots, X_{n-1} 和任意不全为 0 的常数 a_1, \dots, a_{n-1} , $U' = a_1X_1 + \dots + a_{n-1}X_{n-1}$ 服从 Gauss 分布.

$\therefore X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, 由引理 8.1 得 $a_1X_1 + a_2X_2, X_3, \dots, X_n$ 相互独立, $\therefore 1 \cdot (a_1X_1 + a_2X_2) + a_3X_3, X_4, \dots, X_n$ 相互独立, $\dots, \therefore U'$ 与 X_n 相互独立.

由书上的定理 6.2 (3) 得 (U', X) 服从二维 Gauss 分布, 由书上的定理 6.2 (5) 得 $U = 1 \cdot U' + a_nX_n$ 服从 Gauss 分布.

习题 4.28 (b) 设随机向量 (X_1, X_2) 服从二维 Gauss 分布, 有联合密度

$$f(x_1, x_2) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right)}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}},$$

设 $f_1(x)$ 是 X_1 的边缘密度, 验证

$$\frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(x_2-\mu_x)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\right)$$

关于 x_2 是 Gauss 概率密度, 其中 $\mu_x = \mu_2 + (\rho\sigma_2/\sigma_1)(x_1 - \mu_1)$.

证明. 由书上的定理 6.2 (1) 得

$$f_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right).$$

\therefore

$$\frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_2} e^u,$$

其中

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right) + \frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \\ &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left((1-(1-\rho^2))\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\rho^2(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\rho(x_1-\mu_1)}{\sigma_1} - \frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\left(x_2-\mu_2 - \frac{\rho\sigma_2(x_1-\mu_1)}{\sigma_1}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}(x_2-\mu_x)^2. \end{aligned}$$

习题 4.30 设随机变量 X, Y 相互独立, $X \sim \mathcal{E}(\lambda), Y \sim \mathcal{E}(\mu)$. 求 $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$ 和 $W = X/Y$ 的概率密度.

解. 有

$$\begin{aligned} P(\min(X, Y) \leq u) &= P(\{X \leq u\} \cup \{Y \leq u\}) \\ &= P(X \leq u) + P(Y \leq u) - P(X \leq u, Y \leq u). \end{aligned}$$

$\therefore X, Y$ 相互独立, \therefore

$$\begin{aligned} & P(X \leq u) + P(Y \leq u) - P(X \leq u, Y \leq u) \\ &= P(X \leq u) + P(Y \leq u) - P(X \leq u)P(Y \leq u) \\ &= 1 - (P(X \leq u) - 1)(P(Y \leq u) - 1) \\ &= 1 - (1 - e^{-\lambda u} - 1)(1 - e^{-\mu u} - 1) \\ &= 1 - e^{-(\lambda+\mu)u}. \end{aligned}$$

$\therefore U$ 有概率密度

$$f_U(u) = (\lambda + \mu)e^{-(\lambda+\mu)u}, \quad u \in (0, \infty).$$

有

$$\begin{aligned} P(\max(X, Y) \leq v) &= P(X \leq v, Y \leq v) \\ &= P(X \leq v)P(Y \leq v) \\ &= (1 - e^{-\lambda v})(1 - e^{-\mu v}) \\ &= 1 - e^{-\lambda v} - e^{-\mu v} + e^{-(\lambda+\mu)v}. \end{aligned}$$

$\therefore V$ 有概率密度

$$f_V(v) = \lambda e^{-\lambda v} + \mu e^{-\mu v} - (\lambda + \mu)e^{-(\lambda+\mu)v}, \quad v \in (0, \infty).$$

$\therefore X, Y$ 相互独立, $\therefore (X, Y)$ 有联合密度

$$f(x, y) = \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} = \lambda \mu e^{-(\lambda x + \mu y)}.$$

设 $Z = Y$, 则 $X = WZ$, $\frac{\partial(x, y)}{\partial(w, z)} = z$. 对 $w, z \in (0, \infty)$, 有

$$\begin{aligned} P(Z = z, W = w) &= P(X = wz, Y = z) \\ &= f(wz, z) dx dy \\ &= \lambda \mu e^{-(\lambda w + \mu)z} z dw dz. \end{aligned}$$

\therefore

$$P(W \leq w_0) = P(Z \leq \infty, W \leq w_0) = \int_0^{w_0} dw \int_0^\infty \lambda \mu e^{-(\lambda w + \mu)z} z dz.$$

∴

$$\begin{aligned}
 f_W(w) &= \int_0^\infty \lambda \mu e^{-(\lambda w + \mu)z} z dz \\
 &= -\frac{\lambda \mu}{\lambda w + \mu} \int_0^\infty z d e^{-(\lambda w + \mu)z} \\
 &= \frac{\lambda \mu}{\lambda w + \mu} \int_0^\infty e^{-(\lambda w + \mu)z} dz \\
 &= \frac{\lambda \mu}{(\lambda w + \mu)^2}, \quad w \in (0, \infty).
 \end{aligned}$$

注 在平面上作出 $\min(X, Y) \leq u$ 和 $\max(X, Y) \leq v$ 对应的区域如图 4 中的蓝色区域. 可以对区域 D_1, D_2 积分得到 $\min(X, Y), \max(X, Y)$ 的分布函数.

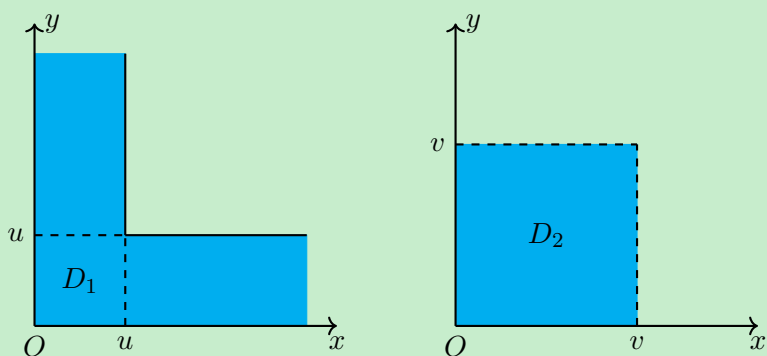


图 4: 左图为 $D_1 = \{\min(X, Y) \leq u\}$, 右图为 $D_2 = \{\max(X, Y) \leq v\}$

习题 4.31 设随机向量 (X, Y) 有联合密度 $f(x)g(y)$, (U, V) 有联合密度

$$p(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} f(u)g(v), & u \geq v, \\ 0 & u < v, \end{cases}$$

(a) 求 U, V 的边缘密度;

(b) 证明 $\alpha = P(X \geq Y)$.

证明. (a) ∵

$$\begin{aligned}
 P(U \leq u) &= \int \int_{x \leq u} \frac{1}{\alpha} f(x)g(y) I[x < y] dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^u \frac{1}{\alpha} f(x) dx \int_{-\infty}^x g(y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^u \frac{1}{\alpha} f(x) G(x) dx,
 \end{aligned}$$

其中 $G(x) = \int_{-\infty}^x g(y)dy$, $\therefore U$ 的概率密度为 $f_U(u) = \frac{1}{\alpha} f(x)G(x)$. \therefore

$$\begin{aligned} P(V \leq v) &= 1 - P(V > v) \\ &= 1 - \iint_{y>v} \frac{1}{\alpha} f(x)g(y)I[x < y]dxdy \\ &= 1 - \int_v^{\infty} \frac{1}{\alpha} g(y)dy \int_y^{\infty} f(x)dx \\ &= 1 - \int_v^{\infty} \frac{1}{\alpha} g(y)F(y)dy, \end{aligned}$$

其中 $F(y) = \int_{-\infty}^y f(x)dx$, $\therefore U$ 的概率密度为 $f_V(v) = \frac{1}{\alpha} g(y)F(y)$.

(b) 有

$$\begin{aligned} P(X \geq Y) &= \iint_{x \geq y} f(x)g(y)dxdy \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} f(x)dx \int_{-\infty}^x g(y)dy \\ &= \alpha \cdot P(U \leq \infty) = \alpha. \end{aligned}$$

习题 4.32 随机变量 X, Y 相互独立, X 有分布函数 $F_X(x)$ 和概率密度 $f_X(x) = F'_X(x)$. 如果 $P(Y > y) = (P(X > y))^\beta$, 其中 β 是正常数, 求 $P(X \geq Y)$.

解. Y 的分布函数为

$$F_Y(y) = 1 - P(Y > y) = 1 - (P(X > y))^\beta = 1 - (1 - F_X(x))^\beta.$$

$\therefore X$ 有概率密度 $f_X(x)$, $\therefore F_X(x)$ 可导. $\therefore F_Y(y)$ 可导. $\therefore Y$ 有概率密度 $f_Y(y) = F'_Y(y)$. 有

$$\begin{aligned} P(X \geq Y) &= \iint_{x \geq y} f_X(x)f_Y(y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx \int_{-\infty}^x f_Y(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)F_Y(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F'_X(x)(1 - (1 - F_X(x))^\beta)dx. \end{aligned}$$

令 $t = F_X(x)$, 则 $x = \infty$ 时 $t = 1$, $x = -\infty$ 时 $t = 0$. 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} F'_X(x)(1 - (1 - F_X(x))^\beta)dx = \int_0^1 (1 - (1 - t)^\beta)dt = \frac{\beta}{1 + \beta}.$$

习题 4.33 (有修改) 证明: 如果 \mathbb{R}^2 上的随机向量 (X, Y) 有联合密度 $f(x, y)$, (U, V) 由线性变换

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

决定, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix},$$

则 (U, V) 有联合密度

$$g(u, v) = \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} f((u - \mu_1, v - \mu_2) \mathbf{A}^{-T}), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

其中 $\mathbf{A}^{-T} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.

证明. $\forall u, v$, 有

$$\begin{aligned} P(U = u, V = v) &= P\left(\mathbf{A} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \\ &= P\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} u - \mu_1 \\ v - \mu_2 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

$$\because \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = |\mathbf{A}^{-1}|, \therefore$$

$$\begin{aligned} P\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} u - \mu_1 \\ v - \mu_2 \end{pmatrix}\right) &= f\left(\left(\mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} u - \mu_1 \\ v - \mu_2 \end{pmatrix}\right)^T\right) |\det \mathbf{A}^{-1}| du dv \\ &= f((u - \mu_1, v - \mu_2) \mathbf{A}^{-T}) |\det \mathbf{A}^{-1}| du dv \\ &= \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} f((u - \mu_1, v - \mu_2) \mathbf{A}^{-T}) du dv. \end{aligned}$$

\therefore

$$g(u, v) = \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} f((u - \mu_1, v - \mu_2) \mathbf{A}^{-T}).$$

9 第 5 章笔记

可以证明, 任意的概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上所有有二阶矩的随机变量构成的线性空间 (其中的加法和纯量乘法是随机变量的加法和纯量乘法) 是一个 **Hilbert** 空间, 内积为 $\langle X, Y \rangle = E(XY)$. 这个 **Hilbert** 空间是无穷维的. 第 7 章第 6 节介绍的均方收敛可以看成是在这个 **Hilbert** 空间中收敛.

书上的例 4.5 用到了下面的引理.

引理 9.1 设 X 是随机变量, 如果 $\int_0^\infty P(|X| > x)dx = 0$, 那么 $\forall x > 0, P(|X| > x) = 0$.

证明. 假设 $\exists x_0 > 0$ 使得 $P(|X| > x_0) = \varepsilon > 0$, 则 $\forall x \in (0, x_0), P(|X| > x) \geq P(|X| > x_0) = \varepsilon$. \therefore

$$\int_0^\infty P(|X| > x)dx \geq \int_0^{x_0} P(|X| > x)dx \geq x_0\varepsilon > 0.$$

这与 $\int_0^\infty P(|X| > x)dx = 0$ 矛盾.

补充几个定理的证明.

定理 9.1 (书上的定理 5.2) 设 a, b, c 是常数, $\mu_j = EX_j, \text{Var}(X_j) < \infty$ ($1 \leq j \leq n$), 则

$$(4) \text{Var} \left(\sum_{j=1}^n X_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (E(X_i X_j) - \mu_i \mu_j);$$

$$(5) \text{ 当 } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ 相互独立时, } \text{Var} \left(\sum_{j=1}^n X_j \right) = \sum_{j=1}^n \text{Var}(X_j).$$

证明. (4) 有

$$\begin{aligned} & \text{Var} \left(\sum_{j=1}^n X_j \right) \\ &= E \left(\sum_{j=1}^n X_j - \sum_{j=1}^n \mu_j \right)^2 \\ &= E \left(\left(\sum_{j=1}^n X_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n \mu_j \right)^2 - 2 \left(\sum_{j=1}^n X_j \right) \left(\sum_{j=1}^n \mu_j \right) \right) \\ &= E \left(\left(\sum_{j=1}^n X_j \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^n \mu_j \right)^2 - 2 \left(\sum_{j=1}^n X_j - \sum_{j=1}^n \mu_j \right) \left(\sum_{j=1}^n \mu_j \right) \right) \\ &= E \left(\sum_{j=1}^n X_j \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^n \mu_j \right)^2 - E \left(2 \left(\sum_{j=1}^n X_j - \sum_{j=1}^n \mu_j \right) \left(\sum_{j=1}^n \mu_j \right) \right) \\ &= E \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \right) - \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i \mu_j \right) - 2 \left(\sum_{j=1}^n \mu_j \right) \left(\sum_{j=1}^n EX_j - \sum_{j=1}^n \mu_j \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(X_i X_j) \right) - \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i \mu_j \right) - 2 \left(\sum_{j=1}^n \mu_j \right) \sum_{j=1}^n (EX_j - \mu_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (E(X_i X_j) - \mu_i \mu_j). \end{aligned}$$

(5) $\because X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, $\therefore \forall i, j = 1, 2, \dots, n, j \neq i, E(X_i X_j) = EX_i EX_j$. 由 (4) 得

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (E(X_i X_j) - \mu_i \mu_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (EX_i EX_j - \mu_i \mu_j) + \sum_{i=1}^n (EX_i^2 - \mu_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^n (EX_i^2 - (EX_i)^2) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i). \end{aligned}$$

定理 9.2 (书上的定理 6.2) 设 ρ_{XY} 是 X, Y 的相关系数, 则有

- (1) $|\rho_{XY}| \leq 1$;
- (2) $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件为有常数 a, b 使得 $P(Y = a + bX) = 1$;
- (3) 如果 X, Y 独立, 则 X, Y 不相关.

证明. (1) 由定义,

$$|\rho_{XY}| = \frac{|E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y))|}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

由内积不等式 (书上的定理 6.1),

$$|E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y))| \leq \sqrt{E(X - \mu_X)^2 E(Y - \mu_Y)^2} = \sigma_X \sigma_Y, \quad (9.1)$$

$$\therefore |\rho_{XY}| \leq 1.$$

(2) 由内积不等式取等号的充要条件得式 (9.1) 成立的充要条件是有常数 a, b 使得 $P(Y - \mu_Y = a + b(X - \mu_X)) = 1$, 即有常数 $b, a' = a + \mu_Y - b\mu_X$ 使得 $P(Y = a' + bX) = 1$.

(3) $\because X, Y$ 独立, \therefore 由书上的定理 4.1 得 $E(XY) = EXEY$. 由书上的式 (6.6) 得

$$\sigma_{XY} = E(XY) - EXEY = 0.$$

设随机向量 (X, Y) 服从二维 Gauss 分布, 则分布由 X 的均值 μ_X , 方差 σ_X , Y 的均值 μ_Y , 方差 σ_Y , X, Y 的相关系数 ρ_{XY} 这 5 个量完全确定. \therefore 可以用 $(X, Y) \sim N(\mu_X, \mu_Y; \sigma_X, \sigma_Y; \rho_{XY})$ 来表示 (X, Y) 服从由这 5 个量确定的二维 Gauss 分布.

10 第 5 章习题

习题 5.5 一部手机收到的短信中有 $p = 2\%$ 是广告, 你期望相邻的两次广告短信中有多少个不是广告短信?

解. 设 X 为相邻的两次广告短信中不是广告短信的数目, 则 $P(X = k) = p^k(1 - p)$. 有

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} kp^k(1 - p) \\ &= p(1 - p) \sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} \\ &= p(1 - p) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} x^k \right) \Big|_{x=p} \\ &= p(1 - p) \left(\frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) \Big|_{x=p} \\ &= p(1 - p) \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{1 - x} \right) \Big|_{x=p} \\ &= p(1 - p) \cdot \frac{1}{(1 - p)^2} = \frac{p}{1 - p}. \end{aligned}$$

把 $p = 2\%$ 代入得 $EX = 49$.

习题 5.8 设 X, Y 独立, 都服从 Gauss 分布, 求 $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的数学期望.

解. 由书上的定理 4.3 得 R 有 Rayleigh 概率密度

$$f_R(r) = re^{-r^2/2}.$$

\therefore

$$\begin{aligned} ER &= \int_{-\infty}^{\infty} r^2 e^{-r^2/2} dr \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} re^{-r^2/2} dr^2/2 \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\infty} t^{1/2} e^{-t} dt \\ &= \sqrt{2} \Gamma(3/2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

习题 5.9 设 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布, 且 $P(X_i > 0) = 1$. 对于 $k \leq n$, 计算

$$E \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_k}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}.$$

解. 设

$$Y_i = \frac{X_i}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

$\because X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布, $\therefore Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 同分布. $\because P(X_i > 0) = 1, \therefore P(Y_i > 0) = 1$. 有

$$1 = E \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{X_1 + X_2 + \dots + X_n} = EY_1 + EY_2 + \dots + EY_n = nEY_1,$$

$$E \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_k}{X_1 + X_2 + \dots + X_n} = EY_1 + EY_2 + \dots + EY_k = kEY_1,$$

\therefore

$$E \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_k}{X_1 + X_2 + \dots + X_n} = \frac{k}{n}.$$

习题 5.12 设 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 有共同的离散分布 $p_k = P(X = k), k = 1, 2, \dots$. 引入 $u_k = p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1}, v_k = 1 - u_k$, 证明:

$$E[\min(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^n, \quad E[\max(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - u_k^n).$$

证明. 由书上的定理 3.2 (3) 得

$$\begin{aligned} E[\min(X_1, X_2, \dots, X_n)] &= \sum_{k=1}^{\infty} P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 \geq k, X_2 \geq k, \dots, X_n \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 \geq k)P(X_2 \geq k) \cdots P(X_n \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - P(X_1 \leq k-1))(1 - P(X_2 \leq k-1)) \cdots (1 - P(X_n \leq k-1)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} v_k^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\max(X_1, X_2, \dots, X_n)] &= \sum_{k=1}^{\infty} P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 1 - P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) < k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 1 - P(X_1 < k, X_2 < k, \dots, X_n < k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 1 - P(X_1 < k)P(X_2 < k) \cdots P(X_n < k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 1 - u_k^n.
\end{aligned}$$

习题 5.14 (1) 设 (X, Y) 有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2x^2y^3}, & x > 1, 1 < xy < x^2, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

计算 EY .

解. 有 $1 < xy < x^2 \Rightarrow \frac{1}{x} < y < x$. 由书上的定理 3.1 (2),

$$\begin{aligned}
EY &= \iint_{\mathbb{R}^2} y f(x, y) dx dy \\
&= \int_1^{\infty} dx \int_{1/x}^x y \frac{3}{2x^3y^2} dy \\
&= \int_1^{\infty} \frac{3}{2x^3} dx \int_{1/x}^x \frac{1}{y} dy \\
&= \int_1^{\infty} \frac{3(\ln x - \ln(1/x))}{2x^3} dx \\
&= \int_1^{\infty} \frac{3 \ln x}{x^2} d \ln x \\
&= \int_0^{\infty} 3te^{-2t} dt = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

习题 5.17 (b) 设 5 台计算机独立工作, 每台计算机感染病毒前的时间 (分别记作 X_1, \dots, X_5) 都服从参数为 λ 的指数分布 $\mathcal{E}(\lambda)$. 对 5 台计算机都感染病毒前的时间的数学期望是多少?

解. 记 $Y = \max(X_1, \dots, X_5)$, 则

$$\begin{aligned} P(Y > y) &= 1 - P(Y \leq y) \\ &= 1 - P(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \dots, X_5 \leq y) \\ &= 1 - P(X_1 \leq y)P(X_2 \leq y) \cdots P(X_5 \leq y) \\ &= 1 - (1 - e^{-\lambda y})^5 \\ &= 1 - \left(1 + \sum_{i=1}^5 C_5^i (-e^{-\lambda y})^i \right) \\ &= \sum_{i=1}^5 C_5^i (-1)^{i-1} e^{-\lambda i y}. \end{aligned}$$

由书上的定理 3.1 (3) 得

$$\begin{aligned} EY &= \int_0^\infty P(Y > y) dy \\ &= \int_0^\infty \sum_{i=1}^5 C_5^i (-1)^{i-1} e^{-\lambda i y} dy \\ &= \sum_{i=1}^5 C_5^i (-1)^{i-1} \int_0^\infty e^{-\lambda i y} dy \\ &= \sum_{i=1}^5 C_5^i \frac{1}{\lambda i} (-1)^{i-1} = \frac{137}{60\lambda}. \end{aligned}$$

习题 5.20 设 $n \geq 2$, X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布,

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \hat{\mu})^2,$$

验证 $E\hat{\mu} = EX_1, E\hat{\sigma}^2 = \text{Var}(X_1)$.

证明. $\because X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布, \therefore

$$E\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n EX_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n EX_1 = EX_1.$$

∴

$$\begin{aligned}
 E\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n E(X_j - \hat{\mu})^2 \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n E \left(X_j - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n E \left(\frac{n-1}{n} X_j - \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n X_i \right)^2 \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n E \left(\frac{n-1}{n} (X_j - EX_1) - \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (X_i - EX_1) \right)^2.
 \end{aligned}$$

令 $Y_i = X_i - EX_1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 则 Y_i 独立同分布, 均值为 0, 方差为 $\text{Var}(X_1)$.

$\therefore \forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, \hat{i}, \dots, n, E(X_i X_j) = E(X_i)E(X_j) = 0$. 有

$$\begin{aligned}
 & E\hat{\sigma}^2 \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n E \left(\frac{n-1}{n} Y_j - \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n Y_i \right)^2 \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n E \left(\left(\frac{n-1}{n} Y_j \right)^2 + \left(\frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n Y_i \right)^2 - 2 \frac{n-1}{n} Y_j \left(\frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n Y_i \right) \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{n-1}{n} \right)^2 EY_j^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n E(Y_i Y_k) - 2 \frac{n-1}{n^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n E(Y_i Y_j) \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{n-1}{n} \right)^2 EY_j^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n EY_i^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j \\ k \neq i}}^n E(Y_i Y_k) - 2 \frac{n-1}{n^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n E(Y_i Y_j) \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{n-1}{n} \right)^2 E(Y_j - EY_j)^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n E(Y_i - EY_i)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \text{Var}(X_1) + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \text{Var}(X_1) \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{(n-1)^2}{n^2} \text{Var}(X_1) + \frac{n-1}{n^2} \text{Var}(X_1) \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_1).
 \end{aligned}$$

习题 5.22 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是相互独立的随机变量, $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$. 求满足 $\sum_{j=1}^n a_j = 1, a_j \geq 0$ 的常数 a_1, a_2, \dots, a_n 使得 $Y = \sum_{j=1}^n a_j X_j$ 的方差最小.

解. $\because X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, \therefore

$$\begin{aligned}
 & P(a_1 X_1 \leq x_1, a_2 X_2 \leq x_2, \dots, a_n X_n \leq x_n) \\
 &= P(X_1 \leq x_1/a_1, X_2 \leq x_2/a_2, \dots, X_n \leq x_n/a_n) \\
 &= P(X_1 \leq x_1/a_1) P(X_2 \leq x_2/a_2) \cdots P(X_n \leq x_n/a_n) \\
 &= P(a_1 X_1 \leq x_1) P(a_2 X_2 \leq x_2) \cdots P(a_n X_n \leq x_n).
 \end{aligned}$$

$\therefore a_1X_1, a_2X_2, \dots, a_nX_n$ 相互独立. 由定理 9.1 (5) 得

$$\text{Var}(Y) = \sum_{j=1}^n \text{Var}(a_jX_j) = \sum_{j=1}^n a_j^2 \sigma_j^2.$$

由 Cauchy 不等式得

$$1 = \sum_{j=1}^n a_j \sigma_j \cdot \frac{1}{\sigma_j} \leq \left(\sum_{j=1}^n (a_j \sigma_j)^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_j^2} \right),$$

当且仅当 $a_j \sigma_j = \lambda \cdot \frac{1}{\sigma_j}, j = 1, 2, \dots, n$ 时取等号. $\therefore a_j = \frac{\sigma_j^{-2}}{\sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2}}, j = 1, 2, \dots, n.$

习题 5.25 设非负随机变量 X 有离散分布 $p_j = P(X = x_j), j \geq 1$. 证明:

$$(1) P(X > x) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j I[x < x_j];$$

$$(2) EX = \int_0^{\infty} P(X > x) dx.$$

证明. (1) 有 $\forall j, P(X > x | X = x_j) = I[x < x_j]$. 由全概率公式得

$$P(X > x) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X > x | X = x_j) P(X = x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j I[x < x_j].$$

(2) 由 (1) 得

$$\int_0^{\infty} P(X > x) dx = \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_j I[x < x_j] dx.$$

$\therefore \sum_{j=1}^{\infty} p_j I[x < x_j] \leq \sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$, 由 Weierstrass 判别法得 $\sum_{j=1}^{\infty} p_j I[x < x_j]$ 在 $(0, \infty)$ 上一致收敛, \therefore 求和号和积分号可以交换次序. 有

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_j I[x < x_j] dx &= \sum_{j=1}^{\infty} p_j \int_0^{\infty} I[x < x_j] dx \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} p_j \int_0^{x_j} dx \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} p_j x_j = EX. \end{aligned}$$

习题 5.26 如果 $\text{Cov}(X, Y) = 0$, 验证 $\rho(X + Y, X - Y) = \frac{\text{Var}(X) - \text{Var}(Y)}{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)}.$

证明. 定义 $E^2X := (EX)^2$. 由书上的式 (6.6) 得

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X+Y, X-Y) &= E((X+Y)(X-Y)) - E(X+Y)E(X-Y) \\ &= E(X^2 - Y^2) - (EX + EY)(EX - EY) \\ &= EX^2 - EY^2 - (E^2X - E^2Y) \\ &= (EX^2 - E^2X) - (EY^2 - E^2Y) \\ &= \operatorname{Var}(X) - \operatorname{Var}(Y).\end{aligned}$$

由书上的式 (5.2) 得

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X \pm Y) &= E(X \pm Y)^2 - E^2(X \pm Y) \\ &= E(X^2 + Y^2 \pm 2XY) - (EX \pm EY)^2 \\ &= EX^2 + EY^2 \pm 2E(XY) - (E^2X + E^2Y \pm 2EXEY) \\ &= (EX^2 - E^2X) + (EY^2 - E^2Y) \pm 2(E(XY) - EXEY) \\ &= \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) \pm 2\operatorname{Cov}(X, Y).\end{aligned}$$

$$\because \operatorname{Cov}(X, Y) = 0, \therefore \operatorname{Var}(X \pm Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y),$$

$$\begin{aligned}\rho(X+Y, X-Y) &= \frac{\operatorname{Cov}(X+Y, X-Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X+Y)\operatorname{Var}(X-Y)}} \\ &= \frac{\operatorname{Var}(X) - \operatorname{Var}(Y)}{\sqrt{(\operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y))^2}} \\ &= \frac{\operatorname{Var}(X) - \operatorname{Var}(Y)}{\operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)}.\end{aligned}$$

习题 5.28 设 (X, Y) 有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} x+y & x \in (0, 1), y \in (0, 1), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

计算 $\operatorname{Cov}(X, Y)$.

解. 有

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \int_0^1 (x+y)dy = x + \frac{1}{2}, \quad x \in (0, 1), \\ EX &= \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \frac{7}{12}.\end{aligned}$$

对称地, 有 $EY = \frac{7}{12}$.

$$E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xyf(x, y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 xy(x+y)dy = \frac{1}{3}.$$

\therefore

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EXEY = -\frac{1}{144}.$$

习题 5.30 设活塞的直径 X 的平均值为 20.00cm, 标准差为 0.02; 气缸的直径 Y 的平均值为 20.10cm, 标准差为 0.02. 设 X 与 Y 独立且都服从 Gauss 分布, 计算活塞能装入气缸的概率.

解. 事件“活塞能装入气缸”等价于事件 $A = \{X < Y\}$. 设 (X, Y) 的联合密度为 $f(x, y)$, 则

$$P(A) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)I[x < y]dxdy = \iint_{x < y} f(x, y)dxdy.$$

由题得

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \cdot 0.02^2} \exp\left(-\frac{(x-20.0)^2}{2 \cdot 0.02^2} - \frac{(y-20.1)^2}{2 \cdot 0.02^2}\right).$$

\therefore

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\pi \cdot 0.02^2} \exp\left(-\frac{(x-20.0)^2}{2 \cdot 0.02^2} - \frac{(y-20.1)^2}{2 \cdot 0.02^2}\right) dx \approx 0.9998.$$

注 我不会算这个积分, 所以用了 Mathematica 的数值积分来计算. 理论上, 对 $\forall a$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\pi \cdot 0.02^2} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot 0.02^2} - \frac{(y-a-0.1)^2}{2 \cdot 0.02^2}\right) dx$$

的值都一样, 都为 $P(A)$, 但是在 Mathematica 中, 上式取不同的 a , 计算结果不一样.

取 $a = -10, 0, 10, 20$ 分别计算上式的 Mathematica 程序如下:

```
a = {-10, 0, 10, 20};
NIntegrate[
  1/(2 Pi 0.02^2)*Exp[-(x - a)^2/(2*0.02^2) - (y - a - 0.1)^2/(2*0.02^2)],
  {y, -Infinity, Infinity}, {x, -Infinity, y},
  MinRecursion -> 100, MaxRecursion -> 100]
```

习题 5.32 设 X 的概率密度是偶函数, $0 < EX^2 < \infty$, 证明 $|X|$ 与 X 不相关也不独立.

证明. $\because X$ 的概率密度是偶函数, $\therefore EX = 0$, \therefore

$$\text{Cov}(X, |X|) = E(X|X|) - EXE|X| = E(X|X|).$$

设 X 的概率密度为 $f(x)$. $\because f(x)$ 是偶函数, $\therefore x|x|f(x)$ 是奇函数,

$$E(X|X|) = \int_{-\infty}^{\infty} x|x|f(x)dx = 0.$$

$\therefore X, |X|$ 不相关.

若 $X = x$, 则 $|X|$ 的取值只能为 $|x|$. $\therefore X, |X|$ 不独立.

习题 5.33 设 $X \sim N(0, \sigma^2)$, $n \in \mathbb{N}_+$, 验证

$$EX^n = \begin{cases} \sigma^n(n-1)!!, & n = 2m, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明. 有

$$EX^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx.$$

当 $n = 2m + 1$ 时, 被积函数是奇函数, $\therefore EX^n = 0$. 当 $n = 2m$ 时, 被积函数是偶函数, 有

$$EX^n = 2 \int_0^{\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx.$$

令 $t = \frac{x^2}{2\sigma^2}$, 则 $x = \sigma\sqrt{2t}$, $dx = \frac{\sigma}{\sqrt{2t}} dt$. 代入得

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx &= 2 \int_0^{\infty} (\sigma\sqrt{2t})^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t} \frac{\sigma}{\sqrt{2t}} dt \\ &= 2 \frac{\sigma^n}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (\sqrt{2t})^{n-1} e^{-t} dt \\ &= 2 \frac{\sigma^n 2^{n/2-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{(n-1)/2} e^{-t} dt \\ &= \frac{\sigma^n 2^{n/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right). \end{aligned}$$

$\because \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, \therefore

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) &= \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n/2}} (n-1)!! \cdot \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

$\therefore EX = \sigma^n(n-1)!!$.

习题 5.35 (以及 5.18) 设点随机地落在中心为原点, 半径为 R 的圆周上, 落点坐标是 (X, Y) , 求 X, Y 的方差和协方差.

解. 由第 3.26 题得 x 有概率密度

$$f(x) = \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2}, \quad -R < x < R.$$

$\because f(x)$ 是偶函数, $\therefore EX = \int_{-R}^R xf(x)dx = 0$. 对称地, $EY = 0$. $\therefore \text{Var}(X) = EX^2, \text{Var}(Y) = EY^2, \text{Cov}(X, Y) = E(XY)$.

由对称性得 $EX^2 = EY^2, \therefore$

$$EX^2 = \frac{EX^2 + EY^2}{2} = \frac{E(X^2 + Y^2)}{2}.$$

有

$$\begin{aligned} E(X^2 + Y^2) &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} (x^2 + y^2) \frac{1}{\pi R^2} dx dy \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 \cdot r dr \\ &= \frac{R^2}{2}. \end{aligned}$$

$$\therefore EX^2 = EY^2 = \frac{R^2}{4}.$$

有

$$E(XY) = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} xy \frac{1}{\pi R^2} dx dy = 0.$$

注 书上的答案应该有点问题, 我用 Mathematica 算 $\int_{-R}^R x^2 f(x)dx$ 的结果也是 $\frac{R^2}{4}$.

第 5.36 题需要用到下面的引理.

引理 10.1 设 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 都服从参数为 λ 的指数分布, 则 $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 有密度函数

$$f_Z(z) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda z} z^{n-1}, \quad z > 0.$$

证明. 用数学归纳法. $n=1$ 时的情形由指数分布的定义得.

假设对符合题目要求的 $X_1, \dots, X_{n-1}, X_n, W = X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1}$ 有密度函数

$$f_W(w) = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} e^{-\lambda w} w^{n-2}, \quad w > 0.$$

令 $Z = W + X_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, 则

$$P(Z \leq z) = \iiint_{\substack{x+w \leq z \\ x > 0 \\ w > 0}} P(X_n = x, W = w).$$

由引理 8.1 可以归纳地得到^a: W 与 X_n 独立. $\therefore P(X_n = x, W = w) = P(X_n = x)P(W = w) = f_{X_n}(x)f_W(w)dx dw$, 其中 $f_{X_n}(x)$ 是 X_n 的概率密度. \therefore

$$\begin{aligned} \iiint_{\substack{x+w \leq z \\ x > 0 \\ w > 0}} P(X_n = x, W = w) &= \iiint_{\substack{x+w \leq z \\ x > 0 \\ w > 0}} f_{X_n}(x)f_W(w)dx dw \\ &= \int_0^z f_W(w)dw \int_0^{z-w} f_{X_n}(x)dx \\ &= \int_0^z \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} e^{-\lambda w} w^{n-2} dw \int_0^{z-w} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} \int_0^z e^{-\lambda w} (1 - e^{-\lambda(z-w)}) w^{n-2} dw \\ &= \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} \int_0^z (e^{-\lambda w} - e^{-\lambda z}) w^{n-2} dw \\ &= \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} \left(\int_0^z e^{-\lambda w} w^{n-2} dw - e^{-\lambda z} \int_0^z w^{n-2} dw \right). \end{aligned}$$

\therefore

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{\partial}{\partial z} P(Z \leq z) \\ &= \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_0^z e^{-\lambda w} w^{n-2} dw - e^{-\lambda z} \int_0^z w^{n-2} dw \right) \\ &= \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} \left(e^{-\lambda z} z^{n-2} - e^{-\lambda z} z^{n-2} - (-\lambda) e^{-\lambda z} \int_0^z w^{n-2} dw \right) \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-2)!} e^{-\lambda z} \int_0^z w^{n-2} dw \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda z} z^{n-1}. \end{aligned}$$

\therefore 原命题对 n 个变量也成立.

^a参考第 4.27 题.

习题 5.36 (a) 假设你的手机收到短信的时间间隔是相互独立的随机变量, 都服从参数为 $\lambda = 1/2$ 的指数分布. 现在你在等一个朋友的短信, 如果每个短信以概率 $p = 0.1$ 来自你的这位朋友, 从 $t = 0$ 开始, 用 Y 表示等待时间的长度. 计算等待时间 Y 的概率分布.

解. 设你朋友的短信是第 X 个到达的短信, 则 X 服从几何分布, $P(X = k) = pq^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, $q = 1 - p$. 由全概率公式得

$$P(Y = y) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Y = y|X = n)P(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Y = y|X = n)pq^{n-1}.$$

在你朋友的短信是第 n 个到达的短信的情况下, 等待时间是 n 个独立的指数分布之和. 由引理 10.1 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(Y = y|X = n)pq^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda y} y^{n-1} pq^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda y} y^{n-1} pq^{n-1} \\ &= \lambda p e^{-\lambda y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda y q)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \lambda p e^{-\lambda y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda y q)^n}{n!} \\ &= \lambda p e^{-\lambda y} e^{\lambda y q} \\ &= \lambda p e^{-\lambda p y}. \end{aligned}$$

把 $\lambda = 1/2, p = 0.1$ 代入得 $Y \sim \mathcal{E}(1/20)$.

11 第 6 章笔记

由书上的定理 3.1 (3) 得

$$EX = E(E(X|Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X|Y = y)P(Y = y)dy.$$

这可以看成是书上的定理 1.1 (1) 对连续型随机变量的推广.

条件数学期望 $E(X|Y)$ 按定义是用一个 $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 的函数 Y 代替 \mathbb{R} 上的函数

$$m(y) := E(X|Y = y)$$

中的 y . $\because \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 的函数与 \mathbb{R} 上的函数复合仍然是 $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 的函数, $\therefore E(X|Y)$ 是一个随机变量. 用类似的方法可以解释书上第 7 章的式 (6.2).

例 11.1 (书上第 7 章的式 (6.2)) 对于 $x \in \mathbb{N}_+$, 有

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} I[x \geq k].$$

将 x 替换为 $\Omega \rightarrow \mathbb{N}_+$ 的随机变量 X , 则有

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} I[X \geq k].$$

12 第 6 章习题

习题 6.1 (a) 设 N_1, N_2, \dots 独立同分布, $N_1 \sim \mathcal{B}(8, 0.6)$, $M \sim \mathcal{P}(10)$, M 与 $\{N_j\}$ 独立. 对于 $T = \sum_{j=1}^M N_j$, $k \geq 1$, 给出 $T|\{M = k\}$ 的概率分布.

解. N_j 表示成功概率为 0.6 的 8 次独立重复试验中成功的次数. $\because N_1, N_2, \dots$ 独立, $\therefore T|\{M = k\} = N_1 + \dots + N_k$ 表示成功概率为 0.6 的 $8k$ 次独立重复试验中成功的次数, 服从二项分布 $\mathcal{B}(8k, 0.6)$.

习题 6.2 设 $N \sim \mathcal{B}(8, 0.6)$, $M \sim \mathcal{P}(10)$, M 与 N 独立. 如果一棋手将参加 M 场比赛, 每场比赛预计下 N 盘棋, 他期望总共能下多少盘棋?

解. 设这个棋手一共要下 X 盘棋. 与 6.1 类似, 有 $X|\{M = k\} \sim \mathcal{B}(8k, 0.6)$. $\therefore E(X|M = k) = 4.8k$. 由书上的定理 1.1 (3) 得

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{\infty} E(X|M = k)P(M = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 4.8k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= 4.8\lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= 4.8\lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = 4.8\lambda. \end{aligned}$$

把 $\lambda = 10$ 代入得 $EX = 48$.

习题 6.3 设 N 服从参数为 p 的几何分布, X_1, X_2, \dots 相互独立, 都服从参数为 λ 的指数分布, 当 N 和 $\{X_j\}$ 独立时, 计算 $W = \sum_{j=1}^N X_j$ 的数学期望.

解. 由引理 10.1, $W|\{N = n\}$ 有概率密度

$$f_W(w; n) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda w} w^{n-1}, \quad w > 0.$$

∴

$$E(W|N=n) = \int_0^\infty w f_W(w;n) dw = \int_0^\infty \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda w} w^n dw.$$

令 $t = \lambda w$, 得

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda w} w^n dw &= \frac{1}{\lambda(n-1)!} \int_0^\infty e^{-t} t^n dt \\ &= \frac{1}{\lambda(n-1)!} \Gamma(n+1) = \frac{n}{\lambda}. \end{aligned}$$

由书上的定理 1.1 (3) 得

$$\begin{aligned} EW &= \sum_{n=1}^\infty E(W|N=n)P(N=n) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{\lambda} q^{n-1} p \\ &= \frac{p}{\lambda} \left(\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^\infty x^n \right) \Big|_{x=q} \\ &= \frac{p}{\lambda} \left(\frac{1}{(1-x)^2} \right) \Big|_{x=q} = \frac{1}{\lambda p}. \end{aligned}$$

习题 6.4 某出租车在一天内遇到的红灯数 N 满足参数为 λ 的 Poisson 分布. 如果在每个红灯处的等待时间相互独立, 都在 $(0, 2)$ 中均匀分布, 计算他一天内用于等候红灯的时间 X 的数学期望和方差.

解. 设 X_1, X_2, \dots 是在第 i 个红灯处的等待时间, 则 $X|\{N=n\} = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, X_i 独立同分布, $X_1 \sim \mathcal{U}(0, 2)$, N 与 $\{X_i\}$ 独立. 有

$$E(X|N=n) = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n = nEX_1 = n,$$

$$\begin{aligned} E(X^2|N=n) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_n)^2 \\ &= E \left(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n X_i X_j \right) \\ &= nEX_1^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n EX_i EX_j \\ &= \frac{4n}{3} + n(n-1). \end{aligned}$$

由书上的定理 1.1 (1) 得

$$EX = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)E(X|N=n) = \lambda,$$

$$\begin{aligned} EX^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)E(X^2|N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4n}{3} + n(n-1) \right) \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-2)!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{4}{3} \lambda + \lambda^2. \end{aligned}$$

\therefore

$$\text{Var}(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{4}{3}\lambda.$$

习题 6.9 设 (X, Y) 有联合密度 $f(x, y) = ye^{-y(x+1)}, x > 0, y > 0$. 计算 $X|\{Y=y\}, Y|\{X=x\}$ 的概率密度 $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$.

解. $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$ 可以由 $f(x, y)$ 除以一个归一化因子得到. 有

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{\int_0^{\infty} f(x, y) dx} = \frac{ye^{-y(x+1)}}{e^{-y}} = ye^{-yx},$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{\int_0^{\infty} f(x, y) dy} = (x+1)^2 ye^{-y(x+1)}.$$

习题 6.14 假设某设备的使用寿命 Y 服从 Weibull 分布, 有概率密度

$$f(y) = aby^{b-1}e^{-ay^b}, \quad y \geq 0.$$

对 $b = 1/2$, 计算平均寿命 $E(Y-t|Y>t)$.

解. 由书上的定理 3.2,

$$\begin{aligned} E(Y|Y > t) &= \frac{E(YI[Y > t])}{P(Y > t)} \\ &= \frac{\int_t^\infty y f(y) dy}{\int_t^\infty f(y) dy} \\ &= \frac{ab \int_t^\infty y^{1/2} e^{-ay^{1/2}} dy}{ab \int_t^\infty y^{-1/2} e^{-ay^{1/2}} dy} \\ &= \frac{\int_t^\infty y^{1/2} e^{-ay^{1/2}} dy}{\int_t^\infty y^{-1/2} e^{-ay^{1/2}} dy}. \end{aligned}$$

令 $u = ay^{1/2}$, 则 $y = (u/a)^2$, $dy = \frac{2}{a^2} u du$. 有

$$\begin{aligned} \frac{\int_t^\infty y^{1/2} e^{-ay^{1/2}} dy}{\int_t^\infty y^{-1/2} e^{-ay^{1/2}} dy} &= \frac{\int_{a\sqrt{t}}^\infty (u/a) e^{-u} (2/a^2) u du}{\int_{a\sqrt{t}}^\infty (u/a)^{-1} e^{-u} (2/a^2) u du} \\ &= \frac{\int_{a\sqrt{t}}^\infty u^2 e^{-u} du}{a^2 \int_{a\sqrt{t}}^\infty e^{-u} du} \\ &= \frac{e^{-a\sqrt{t}} (2 + 2a\sqrt{t} + a^2 t)}{a^2 e^{-a\sqrt{t}}} \\ &= \frac{2 + 2a\sqrt{t} + a^2 t}{a^2}. \end{aligned}$$

\therefore

$$E(Y - t|Y > t) = E(Y|Y > t) - E(t|Y > t) = \frac{2 + 2a\sqrt{t} + a^2 t}{a^2} - t.$$

习题 6.15 在某地任选一名出租车司机, 假设其开车经验 $Y \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, 有概率密度

$$f_Y(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\beta y}, \quad y > 0.$$

如果开车经验为 y 的司机在一周内的收入 (单位: 元) 为 $N \sim \mathcal{P}(y)$, 已知一个司机在一周内的收入为 n 元, 计算他的开车经验的概率密度.

解.

习题 6.17 一台计算机有 7 个 USB 接口, 至少有 5 个接口正常时, 就认为计算机的 USB 接口能用. 假设开始时每个 USB 接口都正常, 其寿命 X_1, X_2, \dots, X_7 相互独立, 都服从参数为 λ 的指数分布. 计算这台计算机的 USB 能用的时间 Y 的概率分布.

解. 如果 $Y = y$, 则有两个 USB 接口在 y 时刻以前损坏, 有一个 USB 接口在 y 时刻损坏, 其

余的 USB 接口在 y 时刻或以后损坏. \therefore

$$\begin{aligned} P(Y=y) &= \frac{7!}{2!1!4!} P(X_1 < y, X_2 < y, X_3 = y, X_4 \geq y, X_5 \geq y, X_6 \geq y, X_7 \geq y) \\ &= 105(P(X_1 < y))^2 P(X_1 = y)(P(X_1 \geq y))^4 \\ &= 105\lambda e^{-2\lambda y}(1 - e^{-\lambda y})^2 dy, \end{aligned}$$

$\therefore Y$ 的概率密度为 $105\lambda e^{-2\lambda y}(1 - e^{-\lambda y})^2$.

习题 6.20 设 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布, 都服从参数为 λ 的指数分布, 证明随机变量

$$Y_1 = X_{(1)}, \quad Y_k = X_{(k)} - X_{(k-1)}, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

相互独立, 且 $Y_i \sim \mathcal{E}((n+1-i)\lambda)$.

证明. $\because Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 是连续型随机变量的线性组合, $\therefore Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 是连续型随机变量. 有

$$\begin{aligned} &P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_n = y_n) \\ &= P(X_{(1)} = y_1, X_{(2)} = y_1 + y_2, \dots, X_{(n)} = y_1 + y_2 + \dots + y_n) \\ &= n!P(X_1 = y_1)P(X_1 = y_1 + y_2) \cdots P(X_1 = y_1 + y_2 + \dots + y_n). \end{aligned}$$

令 $u_1 = y_1, u_2 = y_1 + y_2, \dots, u_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$, 则

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} = 1.$$

$$\begin{aligned} &n!P(X_1 = y_1)P(X_1 = y_1 + y_2) \cdots P(X_1 = y_1 + y_2 + \dots + y_n) \\ &= n!\lambda e^{-\lambda y_1} \cdot \lambda e^{-\lambda y_1 + y_2} \cdots \lambda e^{-\lambda(y_1 + y_2 + \dots + y_n)} du_1 du_2 \cdots du_n \\ &= n\lambda e^{-n\lambda y_1} \cdot (n-1)\lambda e^{-(n-1)\lambda y_2} \cdots 2\lambda e^{-2\lambda y_{n-1}} \cdot \lambda e^{-\lambda y_n} dy_1 dy_2 \cdots dy_n. \end{aligned}$$

设 Y_i 的概率密度为 $f_{Y_i}(y_i)$, Y_1, Y_2, \dots, Y_n 的联合密度为 $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$, 则

$$\begin{aligned} f_{Y_i}(y_i) &= \int \cdots \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_n = y_n) dy_1 \cdots dy_{i-1} dy_{i+1} \cdots dy_n \\ &= (n-i+1)\lambda e^{-(n-i+1)\lambda y_i} \int_0^\infty n\lambda e^{-n\lambda y_1} dy_1 \cdots \int_0^\infty (n-i+2)\lambda e^{-(n-i+2)\lambda y_{i-1}} dy_{i-1} \\ &\quad \cdot \int_0^\infty (n-i)\lambda e^{-(n-i)\lambda y_{i+1}} dy_{i+1} \cdots \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y_n} dy_n \\ &= (n-i+1)\lambda e^{-(n-i+1)\lambda y_i}. \end{aligned}$$

$$\therefore Y_i \sim \mathcal{E}((n+1-i)\lambda).$$

\therefore

$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_n = y_n) = f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2) \cdots f_{Y_n}(y_n)dy_1dy_2 \cdots dy_n,$$

\therefore

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2) \cdots f_{Y_n}(y_n).$$

$\therefore Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 相互独立.

习题 6.21 设取非负整数值的随机变量 X 有母函数 $g(s)$, 对非负整数 a, b , 求 $Y = aX + b$ 的母函数 $h(s)$.

解. Y 的取值为 $\{ja + b | j \in \mathbb{R}\}$. 有

$$\begin{aligned} g(s) &= \sum_{j=0}^{\infty} s^j P(X = j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (s^{1/a})^{ja} P(Y = ja + b) \\ &= (s^{1/a})^{-b} \sum_{j=0}^{\infty} (s^{1/a})^{ja+b} P(Y = ja + b) \\ &= s^{-b/a} h(s^{1/a}). \end{aligned}$$

\therefore

$$h(s^{1/a}) = g(s)s^{b/a} \Rightarrow h(s) = g(s^a)s^b.$$

习题 6.24 两人各抛均匀的硬币 n 次, 计算甲的正面次数恰好大于乙的正面次数 k 次的概率.

解. 设甲的正面次数为 X_1 , 乙的正面次数为 X_2 , $K = X_1 - X_2$, 则事件“甲的正面次数恰好大于乙的正面次数 k 次”为 $\{K = k\}$.

$X_1, X_2 \sim \mathcal{B}(n, 0.5)$, 有母函数

$$g_{X_1}(s) = g_{X_2}(s) = \frac{1}{2^n}(s+1)^n.$$

有

$$\begin{aligned}\sum_{i=-n}^n s^i P(K=i) &= E(s^K) \\&= E(s^{X_1-X_2}) \\&= E(s^{X_1} s^{-X_2}) \\&= E(s^{X_1}) E(s^{-X_2}) \\&= E(s^{X_1}) E((s^{-1})^{X_2}) \\&= g_{X_1}(s) g_{X_2}(s^{-1}) \\&= \frac{1}{2^{2n}} (s+1)^n \left(\frac{1}{s}+1\right)^n \\&= \frac{1}{2^{2n} s^n} (s+1)^{2n} \\&= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{i=-n}^n C_{2n}^i s^{-n+i}.\end{aligned}$$

考察上式两边的 s^k 项, 有

$$P(K=k) = \frac{C_{2n}^{k+n}}{2^{2n}}.$$

评论 K 的取值可能是负数, $\therefore K$ 没有母函数.

第 6.29, 6.30 题需要用到下面的引理, 书上第 7 章的定理 3.1 也可以用这个引理来证明一般的情形.

引理 12.1 若随机变量 X 的特征函数为 $\phi_X(t)$, 则随机变量 $Y = a(X+b)$ 的特征函数为 $\phi_Y(t) = \phi_X(at)e^{iab t}$.

证明. 由 $Y = a(X+b)$ 得 $X = a^{-1}Y - b$. 有

$$\phi_X(t) = Ee^{itX} = Ee^{it(a^{-1}Y-b)} = E(e^{it(a^{-1}Y)}e^{-itb}) = e^{-itb}Ee^{i(ta^{-1})Y}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

令 $s = ta^{-1}$, 则 $t = as$,

$$\phi_X(as) = e^{-iabs}Ee^{isY} \Rightarrow \phi_Y(s) = Ee^{isY} = \phi_X(as)e^{iabs}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

习题 6.29 设 X_1, X_2, \dots 独立同分布, 都在 $(-1, 1)$ 中均匀分布. 定义

$$Y_n = \sqrt{\frac{3}{n}} \sum_{j=1}^n X_j.$$

(1) 计算 X_1 的特征函数 $\phi_X(t)$;

(2) 计算 Y_n 的特征函数 $\phi_{Y_n}(t)$, 证明 $Y_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$.

证明. (1) $\because X_1$ 在 $(-1, 1)$ 中均匀分布, \therefore

$$E \cos(tX) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \cos(tx) dx = \frac{\sin t}{t}, \quad E \sin(tX) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \sin(tx) dx = 0.$$

\therefore

$$\phi_X(t) = E \cos(tX) + iE \sin(tX) = \frac{\sin t}{t}.$$

(2) 有

$$\frac{Y_n}{\sqrt{3/n}} = \sum_{j=1}^n X_j.$$

令 $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. 由书上的定理 6.2 (2) 得 S_n 的特征函数为

$$\phi_{S_n}(t) = \frac{\sin^n t}{t^n}.$$

由引理 12.1 得

$$\phi_{Y_n}(t) = \phi_{S_n}(t\sqrt{3/n}) = \left(\frac{\sin(t\sqrt{3/n})}{t\sqrt{3/n}} \right)^n.$$

$\frac{\sin(t\sqrt{3/n})}{t\sqrt{3/n}}$ 有 Taylor 展开式

$$\frac{\sin(t\sqrt{3/n})}{t\sqrt{3/n}} = 1 - \frac{3t^2/n}{3!} + o((t/\sqrt{3/n})^3) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o(1/n),$$

由书上的式 (6.15) 得

$$\phi_{Y_n}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(1/n) \right)^n \rightarrow e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

由书上的定理 6.3 得 $Y_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$.

习题 6.30 设 X_1, X_2, \dots 独立同分布, $X_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$. 定义

$$S_n = \sum_{j=1}^n X_j, \quad Y_n = \frac{S_n - n/\lambda}{\sqrt{n/\lambda^2}}.$$

(1) 计算 X_1 的特征函数 $\phi_X(t)$;

(2) 计算 Y_n 的特征函数 $\phi_{Y_n}(t)$;

(3) 证明 $Y_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$.

证明. (1) 有

$$\phi_X(t) = Ee^{itX} = \int_0^\infty e^{itx} \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

(2) 由书上的定理 6.2 (2) 得 S_n 的特征函数为

$$\phi_{S_n}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^n.$$

由引理 12.1 得

$$\begin{aligned}\phi_{Y_n}(t) &= \phi_{S_n}(t/\sqrt{n/\lambda^2})e^{-it(n/\lambda)/\sqrt{n/\lambda^2}} \\ &= \left(\frac{1}{1 - it/\sqrt{n}} \right)^n (e^{-it/\sqrt{n}})^n \\ &= \left(\frac{e^{-it/\sqrt{n}}}{1 - it/\sqrt{n}} \right)^n.\end{aligned}$$

\therefore

$$\begin{aligned}e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2} + o(|z|^2) \\ &= 1 + z + \frac{z^2 + z^3}{2} + o(|z|^2) \\ &= (1 + z) \left(1 + \frac{z^2}{2} + o(|z|^2) \right), \quad \forall z \in \mathbb{C},\end{aligned}$$

\therefore

$$\frac{e^{-it/\sqrt{n}}}{1 - it/\sqrt{n}} = 1 + \frac{(-it/\sqrt{n})^2}{2} + o(|-it/\sqrt{n}|^2) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o(1/n).$$

由书上的定理 6.3 得 $Y_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$.

习题 6.34 对 $n = 1, 2, \dots$, 设 $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$. 证明 $X_n \xrightarrow{d} \mathcal{P}(\lambda)$.

证明. 由书上的式 (6.5) 得 X_n 的分布函数为

$$\phi_{X_n}(t) = (1 - p_n(1 - e^{it}))^n = \left(1 + \frac{\lambda(e^{it} - 1)}{n} \right)^n.$$

\therefore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{X_n}(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1)),$$

由书上的定理 6.3 得 $X_n \xrightarrow{d} \mathcal{P}(\lambda)$.

习题 6.35 设 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布, $S_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k, k \leq n$. 如果 $E(|X_1||S_n)$ 存在, 计算 $E(S_k|S_n)$.

解. $\because E(|X_1||S_n)$ 存在, $\therefore E(X_1|S_n)$ 存在. 由书上的例 3.8 得 $E(X_1|S_n) = S_n/n$. \therefore

$$\begin{aligned} E(S_k|S_n) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_k|S_n) \\ &= E(X_1|S_n) + E(X_2|S_n) + \dots + E(X_n|S_n) \\ &= kE(X_1|S_n) = \frac{kS_n}{n}. \end{aligned}$$

13 第 7 章笔记

Markov 不等式中的不等号可以全部换成严格的不等号, 要证明这个结论, 只需将原证明的不等号全部换成严格的不等号即可.

设 ξ_1, ξ_2, \dots 是随机变量, 如果 $\xi_n \xrightarrow{p} 0$, 则记为 $\xi_n = o_p(1)$.

书上的定理 2.2 说明依概率收敛比几乎处处收敛要弱. 与弱大数律类似, 把强相合估计中的几乎处处收敛换成依概率收敛, 可以得到 (弱) 相合估计的定义.

定义 13.1 设 w 是参数, w_n 是 w 的估计量, 如果当 $n \rightarrow \infty$ 时, $w_n \xrightarrow{p} w$, 则称 w_n 是 w 的相合估计.

相合估计不一定比不相合估计要好, 比如给线性回归的损失函数加上 L1 正则化会使得对参数的估计是不相合的, 但是加上 L1 正则化有很多好处.

Lindeberg-Feller 定理的直观理解为:

- 书上的式 (5.2) 的分母中有 $B_n^2 \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 满足 Lindeberg 条件意味着 X_j 的随机性不能减小得太快, 否则 $\sum_{j=1}^n \frac{1}{B_n} (X_j - \mu_j)$ 会收敛到常数;
- 书上的式 (5.2) 的分子中有 $E((X_j - \mu_j)^2 I[|X_j - \mu_j| \geq \varepsilon B_n])$, 这当 $|X_j - \mu_j|$ 足够大时为 X_j 的方差. 如果对 $\forall j, |X_j - \mu_j| \geq \varepsilon B_n$, 那么 $E((X_j - \mu_j)^2 I[|X_j - \mu_j| \geq \varepsilon B_n]) = B_n^2$, 式 (5.2) 不收敛. \therefore 满足 Lindeberg 条件意味着不能有很多的 X_j 满足 $|X_j - \mu_j| \geq \varepsilon B_n$.

书上的推论 5.2 体现了这两个直观理解.

从概率空间的角度来定义随机变量的 a.s. 收敛性.

定义 13.2 设 (Ω, \mathcal{F}, P) 是概率空间, 随机变量 X, X_1, X_2, \dots 是 Ω 上的函数, 则 $X_n \rightarrow X$ a.s. 可以定义为对 $\exists A \subset \Omega$ 满足 $P(A) = 1$, 函数列 $\{X_n(\omega)\}$ 在 A 上收敛到 $X(\omega)$.

定理 13.1 随机变量 X, X_1, X_2, \dots 满足定义 13.2 定义的 $X_n \rightarrow X$ a.s. 当且仅当 X, X_1, \dots 满足书上第 2 节定义的 $X_n \rightarrow X$ a.s..

证明. (\Rightarrow) \because 函数列 $\{X_n(\omega)\}$ 在 A 上收敛到 $X(\omega)$, $\therefore A \subset \{X_n \rightarrow X\}$. $\therefore P(X_n \rightarrow X) \geq P(A) = 1$.

(\Leftarrow) 取 $A = \{X_n \rightarrow X\}$ 得.

书上的例 6.3 省略了一些东西.

例 13.1 (书上的例 6.3 的前半部分) 设 $X \in \mathcal{U}(0, 1)$. 定义

$$\xi_n = nI[X < 1/n], \quad n = 1, 2, \dots$$

$\because \forall x > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时有 $x > 1/n$, \therefore 如果 $X = x > 0$, 那么 $\exists N$, 当 $n > N$ 时有 $\xi_n = 0$.

\therefore 函数列 $\xi_n(\omega)$ 在 $\{X > 0\}$ 上收敛到 0. $\because P(X > 0) = 1$, 由定义 13.2 得 $\xi_n \rightarrow 0$ a.s.

补充书上定理 6.3 证明的一些细节. 下面所有的收敛都是 a.s. 收敛.

定理 13.2 沿用书上定理 6.3 的符号. 有: \tilde{X}_n 单调不减收敛到 \tilde{Y} .

证明. 当 $X_n \leq M$ 时 $\tilde{X}_n = X_n$ 单调不减, 当 $X_n > M$ 时 $\tilde{X}_n = M$, $\therefore \tilde{X}_n$ 单调不减.

如果 $Y \leq M$, 那么 $X_n \leq Y \leq M$, 这时有 $\tilde{X}_n = X_n, \tilde{Y} = Y$, $\therefore \tilde{X}_n$ 收敛到 \tilde{Y} .

如果 $Y > M$, $\because X_n$ 单调不减收敛到 Y , $\therefore \exists N$, 当 $n > N$ 时 $X_n > M$. 这时 $\tilde{X}_n = M = Y$. $\therefore \tilde{X}_n$ 收敛到 \tilde{Y} .

有界收敛定理 (书上的定理 6.4) 和控制收敛定理 (书上的定理 6.6) 给出了从依概率收敛推出 L^1 收敛的一个条件: 随机变量序列有界或被一个期望有界的随机变量控制.

14 第 7 章习题

习题 7.2 证明: 设非负随机变量 X 有概率密度 $f(x)$, 则 \forall 正数 M , 有

$$P(X \geq M) \leq \frac{1}{M} \int_M^\infty x f(x) dx.$$

证明. $\because X$ 有概率密度 $f(x)$, \therefore

$$\begin{aligned} MP(X \geq M) &= M \int_M^\infty f(x) dx \\ &= \int_M^\infty M f(x) dx \\ &\leq \int_M^\infty x f(x) dx. \end{aligned}$$

习题 7.3 证明: 设非负随机变量 X 有分布函数 $F(x)$, 则 \forall 正数 M , 有

$$P(X > M) \leq \frac{\sqrt{(1 - F(M))EX^2}}{M}.$$

证明. $\because X$ 的取值非负, $\therefore \forall M > 0, P(X > M) = P(X^2 > M^2)$. 由 Markov 不等式,

$$P(X > M) = P(X^2 > M^2) < \frac{EX^2}{M^2}.$$

\therefore

$$(P(X > M))^2 \leq \frac{P(X > M)EX^2}{M^2} = \frac{(1 - F(M))EX^2}{M^2}, \quad (14.1)$$

这里取等号是因为 $P(X > M)$ 可能 $= 0$. \therefore

$$P(X > M) \leq \frac{\sqrt{(1 - F(M))EX^2}}{M}.$$

习题 7.4 设非负随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布, 对 $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, 证明

$$P(X_{(1)} \geq M) \leq \left(\frac{EX_1^2 P(X_1 \geq M)}{M^2} \right)^{n/2}.$$

证明. 与式 (14.1) 类似, 由 Markov 不等式得

$$P(X_1 \geq M) \leq \left(\frac{P(X_1 \geq M)EX_1^2}{M^2} \right)^{1/2}.$$

$\because X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布, \therefore

$$P(X_{(1)} \geq M) = (P(X_1 \geq M))^n \leq \left(\frac{P(X_1 \geq M)EX_1^2}{M^2} \right)^{n/2}.$$

习题 7.5 设 X 有概率密度 $f(x) = \frac{x^m}{m!}e^{-x}$, $x \geq 0$, 计算 EX , $\text{Var}(X)$, 证明

$$P(0 < X < 2(m+1)) \geq \frac{m}{m+1}.$$

证明. 有

$$\begin{aligned} EX &= \int_0^\infty xf(x)dx = \frac{1}{m!} \int_0^\infty x^{m+1}e^{-x}dx = \frac{\Gamma(m+2)}{m!} = m+1, \\ EX^2 &= \int_0^\infty x^2f(x)dx = \frac{1}{m!} \int_0^\infty x^{m+2}e^{-x}dx = \frac{\Gamma(m+3)}{m!} = (m+1)(m+2), \\ \text{Var}(X) &= EX^2 - (EX)^2 = m+1. \end{aligned}$$

由 Chebyshev 不等式,

$$P(|X - (m+1)| \geq (m+1)) \leq \frac{m+1}{(m+1)^2} = \frac{1}{m+1},$$

\therefore

$$P(0 < X < 2(m+1)) = 1 - P(|X - (m+1)| \geq (m+1)) = \frac{m}{m+1}.$$

习题 7.6 用书上第 2.4 节的例 4.3 的方法调查回答“是”的概率 p_1 和服用兴奋剂的概率 p , 由书上第 2.4 节的例 4.3 得 $p = 2p_1 - 1$. 设一次试验调查 n 个人, 随机变量 \hat{p}_1 是 n 个人中回答“是”的比例, $\hat{p} := 2\hat{p}_1 - 1$.

(a) 计算 $E\hat{p}_1, \text{Var}(\hat{p}_1), E\hat{p}, \text{Var}(\hat{p})$;

(b) 对 $\varepsilon > 0$, 证明

$$P(|\hat{p}_1 - p_1| \geq \varepsilon) \leq \frac{1-p^2}{4n\varepsilon^2}, \quad P(|\hat{p} - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1-p^2}{n\varepsilon^2}.$$

证明. (a) 由书上的例 2.1 得 $E\hat{p}_1 = p_1, E\hat{p} = p$.

引入随机变量

$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{第 } j \text{ 个人回答“是”,} \\ 0, & \text{第 } j \text{ 个人回答“否”,} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots,$$

则 X_1, X_2, \dots 独立同分布, 且

$$P(X_j = 1) = p_1, \quad EX_j = EX_j^2 = p_1, \quad \hat{p}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j.$$

$\because X_1, X_2, \dots$ 独立, \therefore

$$\begin{aligned} E\hat{p}_1^2 &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^2}E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n X_i X_j\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^n EX_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n EX_i EX_j\right) \\ &= \frac{1}{n^2}(np_1 + n(n-1)p_1^2) \\ &= \frac{p_1 + (n-1)p_1^2}{n}. \end{aligned}$$

\therefore

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{p}_1) &= E\hat{p}_1^2 - (E\hat{p}_1)^2 = \frac{p_1(1-p_1)}{n} = \frac{1-p^2}{4n}, \\ \text{Var}(\hat{p}) &= \text{Var}(2\hat{p}_1 + 1) = 4\text{Var}(\hat{p}_1) = \frac{1-p^2}{n}. \end{aligned}$$

(b) 由 Chebyshev 不等式得

$$\begin{aligned} P(|\hat{p}_1 - p_1| \geq \varepsilon) &= P(|\hat{p}_1 - E\hat{p}_1| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(\hat{p}_1) = \frac{1-p^2}{4n\varepsilon^2}, \\ P(|\hat{p} - p| \geq \varepsilon) &= P(|\hat{p} - E\hat{p}| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(\hat{p}) = \frac{1-p^2}{n\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

习题 7.7 (有修改) 对随机变量 X 进行观测, 设第 j 次观测的结果为 X_j, X_1, X_2, \dots 独立同分布, 且与 X 同分布. 书上的例 2.2 给出了 $\mu = EX, \sigma^2 = \text{Var}(X), F(x) = P(X \leq x)$ 的强相合估计

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j, \quad \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \hat{\mu}_n)^2, \quad F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I[X_j \leq x],$$

(1) 求 $E\hat{\mu}_n, E\hat{\sigma}_n^2, EF_n(x)$.

(2) 给定 x, n , 求 $\text{Var} F_n(x)$.

解. (1) 有

$$\begin{aligned} E\hat{\mu}_n &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n EX_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mu = \mu, \\ E(F_n(x)) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n EI[X_j \leq x] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(X_j \leq x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(X \leq x) = P(X \leq x). \end{aligned}$$

∴

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_n^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \hat{\mu}_n)^2 \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j^2 - \hat{\mu}_n^2 + 2X_j \hat{\mu}_n) \\
 &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^n X_j^2 - n\hat{\mu}_n^2 + 2\hat{\mu}_n \sum_{j=1}^n X_j \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^n X_j^2 - n\hat{\mu}_n^2 + 2n\hat{\mu}_n^2 \right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n X_j^2 - \frac{n}{n-1} \hat{\mu}_n^2,
 \end{aligned}$$

∴

$$\begin{aligned}
 E\hat{\sigma}_n^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n EX_j^2 - \frac{n}{n-1} E\hat{\mu}_n^2 \\
 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n EX_j^2 - \frac{n}{n-1} E \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \right)^2 \\
 &= \frac{n}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n EX_j^2 - \frac{\sum_{i=1}^n EX_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n EX_i EX_j}{n(n-1)} \\
 &= \frac{n-1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n EX^2 - \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (EX)^2 \\
 &= EX^2 - (EX)^2 = \text{Var}(X).
 \end{aligned}$$

(2) $nF_n(x)$ 服从二项分布 $\mathcal{B}(n, P(X_j \leq x)) = \mathcal{B}(n, F(x))$. ∴

$$\text{Var}(F_n(x)) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(nF_n(x)) = \frac{1}{n^2} \cdot nF(x)(1-F(x)) = \frac{1}{n} F(x)(1-F(x)).$$

注 (1) ∵ $E\hat{\mu}_n = EX$, $E\hat{\sigma}_n^2 = \text{Var}(X)$, $EF_n(x) = F(x)$, ∴ $E\hat{\mu}_n, E\hat{\sigma}_n^2, EF_n(x)$ 都是无偏估计.

(2) 给定 x , 当 n 充分大时, 由中心极限定理得 $\frac{nF_n(x) - nF(x)}{\sqrt{nF(x)(1-F(x))}}$ 近似服从标准 Gauss 分布. 当 X 服从 Bernoulli 分布时, 可以得到书上的定理 4.1.

第 7.9, 7.10 题需要用到下面的引理.

引理 14.1 设 $*$: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 是某种二元运算, 如果对任意的有极限的数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n * b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n * \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, 那么对 $X_n \rightarrow x$ a.s., $Y_n \rightarrow y$ a.s., $\lim_{n \rightarrow \infty} (X_n * Y_n) = x * y$ a.s.

证明. $\because X_n \rightarrow x$ a.s., $\therefore P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = x\right) = 1$. 对称地, $P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = y\right) = 1$. \therefore 由

$$\begin{aligned} & P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = x \cup \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = y\right) \\ &= P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = x\right) + P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = y\right) - P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = y\right) \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} & P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = y\right) \\ &= P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = x\right) + P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = y\right) - P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = x \cup \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = y\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\because \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (X_n * Y_n) = x * y \right\} \supset \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = y \right\}, \therefore$$

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (X_n * Y_n) = x * y\right) \geq P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = y\right) = 1,$$

$$\therefore P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (X_n * Y_n) = x * y\right) = 1, \text{ 即 } \lim_{n \rightarrow \infty} (X_n * Y_n) = x * y \text{ a.s.}$$

习题 7.9 (有修改) 设 X_0, X_1, \dots 是独立同分布的随机变量序列, $\mu = EX_0$, 对非零常数 a, b , 定义

$$Y_k = aX_k + bX_{k-1} + c, \quad k = 1, 2, \dots$$

计算 $n^{-1} \sum_{k=1}^n Y_k$ 的 a.s. 极限.

解. 由强大数律,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = EX_0 = \mu, \text{ a.s.}$$

在引理 14.1 中以“+”代“*”得

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k &= \frac{1}{n} \left(a \sum_{k=1}^n X_k + b \sum_{k=0}^{n-1} X_k + nc \right) \\ &= a \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k + b \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k + c \\ &\rightarrow a\mu + b\mu + c \text{ a.s. } (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

注 (1) 原题没有定义 X_0 , 但 Y_1 的定义式中有 X_0 , 所以这里改了一下题目, 加上了 X_0 的定义.

(2) $\because Y_k$ 是否独立不能确定, \therefore 不能直接对 Y_k 用强大数律.

习题 7.10 设 X_1, X_2, \dots 独立同分布, 都在 $(0, \pi/2)$ 中均匀分布,

$$Y_n = \frac{\sin X_1 + \sin X_2 + \dots + \sin X_n}{\cos X_1 + \cos X_2 + \dots + \cos X_n}, \quad n \geq 1,$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 计算 Y_n 的 a.s. 极限.

解. 有

$$E(\cos X_1) = \int_0^{\pi/2} \cos x \frac{2}{\pi} dx = \frac{2}{\pi}, \quad E(\sin X_1) = \int_0^{\pi/2} \sin x \frac{2}{\pi} dx = \frac{2}{\pi}.$$

\therefore 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{\sin X_1 + \sin X_2 + \dots + \sin X_n}{n} \rightarrow E(\sin X_1) = \frac{2}{\pi}, \text{ a.s.}$$

$$\frac{\cos X_1 + \cos X_2 + \dots + \cos X_n}{n} \rightarrow E(\cos X_1) = \frac{2}{\pi}, \text{ a.s.}$$

在引理 14.1 中以 “/” 代 “*” 得

$$Y_n = \frac{\frac{\sin X_1 + \sin X_2 + \dots + \sin X_n}{n}}{\frac{\cos X_1 + \cos X_2 + \dots + \cos X_n}{n}} \rightarrow \frac{E(\sin X_1)}{E(\cos X_1)} = 1, \text{ a.s.}$$

习题 7.14 设选民中赞同某候选人的比例是未知数 p , 已知 $p \in (0.01, 0.99)$. 对 p 进行调查, 为了以 99% 的把握对 p 的预测的绝对误差不超过 1%, 需要调查多少选民?

解. 设调查了 n 人, n 个人中赞同某候选人的人数为 S_i , 则 $S_i \sim \mathcal{B}(n, p)$. 事件 “调查了 n 人时, 对 p 的预测的绝对误差不超过 1%” 可以表示为

$$\{-0.01 \leq S_n/n - p \leq 0.01\} = \left\{ -\frac{0.01n}{\sqrt{npq}} \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{0.01n}{\sqrt{npq}} \right\},$$

其中 $q = 1 - p$.

由平均值不等式, $\sqrt{pq} \leq \frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}$ (当 $p = q$ 时取等号). $\because p \in (0.01, 0.99)$, \therefore 等号可以取到, 有

$$\begin{aligned} \left\{ -\frac{0.01n}{\sqrt{npq}} \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{0.01n}{\sqrt{npq}} \right\} &\subset \left\{ -\frac{0.01n}{\sqrt{n}/2} \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{0.01n}{\sqrt{n}/2} \right\} \\ &= \left\{ -0.02\sqrt{n} \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq 0.02\sqrt{n} \right\}. \end{aligned}$$

先假设 $np \geq 5, nq \geq 5$. 由中心极限定理得 $\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0, 1)$. \therefore

$$P(-0.01 \leq S_n/n - p \leq 0.01) \leq P\left(-0.02\sqrt{n} \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq 0.02\sqrt{n}\right) = 2\Phi(0.02\sqrt{n}) - 1.$$

\therefore 当 $n = 16641$ 时 $2\Phi(0.02\sqrt{n}) - 1 = 0.99$, \therefore 需要调查 16641 个人. 有

$$np = 166.41 \geq 5, \quad nq = 166.41 \geq 5.$$

注 $n = 16641$ 是对于 p 可以取到 $\frac{1}{2}$ 而言的. 如果已知 $0.01 < p < 0.4$ 或 $0.6 < p < 0.09$, 那么只需要调查 3835 个人. p 越接近 $1/2$, 要确定 p 所需的信息量就越大.

习题 7.15 设独立同分布的随机变量 X_1, \dots, X_n 和独立同分布的随机变量 Y_1, \dots, Y_m 相互独立, $EX_1 = \mu_1, \text{Var}(X_1) = \sigma_1^2, EY_1 = \mu_2, \text{Var}(Y_1) = \sigma_2^2$. 对充分大的 n, m , 求 $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Y_k$ 的近似分布.

解. 由中心极限定理得

$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j - n\mu_1}{\sqrt{n\sigma_1^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad \frac{\sum_{j=1}^m Y_j - m\mu_2}{\sqrt{m\sigma_2^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

\therefore

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/n), \quad \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m Y_j \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/m).$$

$\therefore X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ 相互独立, 由书上第 4 章的定理 1.1 (3) 得 $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$ 和 $\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m Y_j$ 相互独立, 由第 4.27 题得 $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Y_k$ 服从 Gauss 分布.

\therefore

$$E\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Y_k\right) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j\right) - E\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Y_k\right) = \mu_1 - \mu_2,$$

$$\text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Y_k\right) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j\right) + \text{Var}\left(-\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Y_k\right) = \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m},$$

\therefore

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m Y_k \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right).$$

习题 7.16 某保险公司每天平均受理 18 份投保, 每份投保平均缴款 $\mu = 3.2$ 万元, 标准差为 $\sigma = 2.8$ 万元. 假定每天受理的投保数 N 服从 Poisson 分布, 每份投保的缴款相互独立, 且与 N 独立. 计算

(1) 明天投保缴款 S 万元的数学期望和方差;

(2) $P(S \leq 50)$.

解. (1) $\because N$ 服从 Poisson 分布, $\therefore E(N) = \text{Var}(n) = 18$.

设明天第 i 份投保的缴款为 X_i , 则 X_1, X_2, \dots 独立同分布. 有

$$E(S|N = n) = n\mu, \quad E(S|N) = N\mu,$$

$\therefore ES = E(E(S|N)) = \mu EN$. 有

$$E(S^2|N = n) = E\left(\left(\sum_{j=1}^n X_i\right)^2 \middle| N = n\right).$$

$\because N$ 与 $\{X_i\}$ 独立, 由书上第 4 章的定理 1.1 (3) 得 N 与 $\left(\sum_{j=1}^n X_i\right)^2$ 独立. \therefore

$$\begin{aligned} E\left(\left(\sum_{j=1}^n X_i\right)^2 \middle| N = n\right) &= E\left(\sum_{j=1}^n X_i\right)^2 \\ &= \text{Var}\left(\sum_{j=1}^n X_i\right) - \left(E\left(\sum_{j=1}^n X_i\right)\right)^2 \\ &= n\sigma^2 + (n\mu)^2. \end{aligned}$$

\therefore

$$E(S^2|N) = N\sigma^2 + N^2\mu^2,$$

$$\begin{aligned} ES^2 &= E(N\sigma^2 + N^2\mu^2) \\ &= \sigma^2 EN + \mu^2 EN^2 \\ &= \sigma^2 EN + \mu^2(\text{Var}(N) + (EN)^2) \\ &= \sigma^2 EN + \mu^2(EN + (EN)^2), \end{aligned}$$

$$\text{Var}(S) = ES^2 - (ES)^2 = \sigma^2 EN + \mu^2 EN.$$

代入得 $ES = 57.6$, $\text{Var}(S) = 325.44$.

(2) 可以把一天分成 m (m 足够大) 个不相交的区间, 使得所有区间内的受理的投保数的均值相同. 设 N_i 是第 i 个区间内受理的投保数, S_i 是第 i 个区间内受理的投保的缴款总数, 则 $N_i \sim \mathcal{P}(18/m)$, $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_m$.

由中心极限定理得 S 近似服从 Gauss 分布. \therefore

$$P(S \leq 50) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\text{Var}(S)}} \leq \frac{50 - ES}{\sqrt{\text{Var}(S)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{50 - ES}{\sqrt{\text{Var}(S)}}\right).$$

代入得 $P(S \leq 50) \approx 0.3372$.

评论 $\because N$ 的值不确定, N 的值有可能很小, \therefore 不能由于每天平均受理的投保数很多就认为 S 一定是很多次投保的缴款数之和, 近似服从 Gauss 分布.

习题 7.20 证明公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

证明.

习题 7.21 如果 $\sqrt{n}\xi_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$, 证明 $\xi_n \xrightarrow{p} 0$.

证明. 设 ξ_n 的分布函数为 $F_n(x)$, 则 $\sqrt{n}\xi_n$ 的分布函数为

$$G_n(x) = P(\sqrt{n}\xi_n \leq x) = P(\xi_n \leq x/\sqrt{n}) = F_n(x/\sqrt{n}).$$

$$\because \sqrt{n}\xi_n \xrightarrow{d} N(0, 1), \therefore \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x) = \Phi(x).$$

$$\because \forall \varepsilon > 0,$$

$$\begin{aligned} P(|\xi_n - 0| \geq \varepsilon) &= 1 - P(-\varepsilon < \xi_n < \varepsilon) \\ &= 1 - F_n(\varepsilon) + F_n(-\varepsilon) \\ &= 1 - G_n(\varepsilon\sqrt{n}) + G_n(-\varepsilon\sqrt{n}) \end{aligned}$$

习题 7.22 设 X_1, X_2, \cdots 相互独立, $X_j \sim \mathcal{B}(j, p_j)$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. 当 $p_j \in [0.1, 0.9]$,

证明

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

证明. 有 $\mu_j = EX_j = jp_j, \sigma_j^2 = \text{Var}(X_j) = jp_j(1 - p_j), B_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2$. $\because p_j \in [0.1, 0.9], \therefore$

$$B_n^2 = \sum_{j=1}^n jp_j(1 - p_j) \geq \sum_{j=1}^n 0.1 \cdot 0.9j = 0.09 \frac{n(n+1)}{2}.$$

有

$$\max_{1 \leq j \leq n} |X_j - \mu_j| < \max_{1 \leq j \leq n} j = n \quad \text{a.s.}$$

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} n/B_n$$

习题 7.23 如果 $\xi_n \xrightarrow{d} N(0, 1), \eta_n \xrightarrow{p} 0$, 证明 $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$.

证明. $\because \xi_n \xrightarrow{d} N(0, 1), \therefore \forall x, \lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n \leq x) = \Phi(x)$, 即 $\forall \varepsilon, \exists N$, 当 $n \geq N$ 时有 $|P(\xi_n \leq x) - \Phi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

\therefore