

傅里叶级数与傅里叶变换

一. 傅里叶级数

对于一个一般的函数 $f(x)$, 我们通常可以对其使用泰勒级数表示:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

上式相当于使用非正交的单项式基底 $\{1, x^1, x^2, x^3, \dots\}$, 对函数 $f(x)$ 在无穷维空间下进行表示。

而对于一个周期函数而言, 泰勒级数显然无法有效表征其周期特性。若我们换用一系列线性无关的周期函数作为基底, 对周期性的表征就得以实现了。而在初等函数的范畴中, 自然选择三角函数作为基底, 于是对于周期函数 $f(x)$, 我们猜测:

$$f(x) \sim g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x$$

其中 $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$, 从而使 $f(x)$ 与三角函数的周期契合。

要使此处 $g(x)$ 尽可能接近 $f(x)$, 我们对其作差进行分析, 更进一步地将二者之差的平方在一个周期上积分从而获取整个周期上的“绝对相差量”, 于是定义:

$$\sigma^2 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [g(x) - f(x)]^2 dx$$

其中 T 为函数周期, 而只要在一个周期上的积分最小化, 在所有周期上的积分也将最小化, 而我们的目标便是找到使得 σ^2 最小的 a_k 与 b_k , 于是对 σ^2 求偏导:

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial a_k} = \frac{\partial}{\partial a_k} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [g(x) - f(x)]^2 dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{\partial}{\partial a_k} [g(x) - f(x)]^2 dx$$

上式交换求导与积分次序是合法的。而由于 $f(x)$ 本身已经固定, 与 a_k 取值无关, 所以对与 $f(x)$ 相关的量求导均为 0, 从而:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^2}{\partial a_k} &= 2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [g(x) - f(x)] \frac{\partial}{\partial a_k} g(x) dx \\ &= 2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x - f(x) \right] \sum_{k=0}^{\infty} \cos \omega_k x dx \end{aligned}$$

令导数为 0, 即得:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x \right) \sum_{k=0}^{\infty} \cos \omega_k x \, dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sum_{k=0}^{\infty} \cos \omega_k x \, dx$$

结合已知的公式：

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(ax) \cos(bx) \, dx = \frac{T}{2} \delta_{ab}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(ax) \sin(bx) \, dx = \frac{T}{2} \delta_{ab}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(ax) \cos(bx) \, dx = 0,$$

其中 δ_{ab} 为 Kronecker delta¹。于是：

$$\frac{T}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sum_{k=0}^{\infty} \cos(\omega_k x) \, dx$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(\omega_k x) \, dx, k \geq 1$$

类似地，

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(\omega_k x) \, dx, k \geq 1$$

特别地，

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \, dx$$

在不断逼近使得 σ^2 最小的情形下，我们便可以认为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 无异了。于是我们便得到了周期函数用三角函数实现的级数展开：

¹ Kronecker delta：克罗内克记号， $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x$$

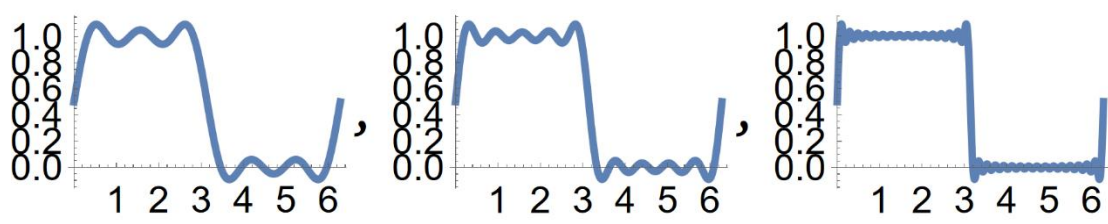
为直观展示傅里叶级数对非光滑函数的逼近能力，我们以方波（ $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$ ）为例进行傅里叶级数展开，以一窥整个逼近过程：

不难发现，可以定义 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$ ，其为奇函数，从而 $g(x)$ 的傅里叶级数展开式

仅含正弦项，
$$b_k = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin\left(\frac{2\pi k}{2\pi} x\right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin(kx) dx = \frac{1-(-1)^k}{k\pi}$$

于是 $b_k = \frac{2}{\pi} \left\{ 1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{7}, 0, \dots \right\}$,

进而 $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(x) + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{5} \sin(5x)$



上图为在 Mathematica 中给出的取方波傅里叶级数前 3 项、前 5 项、前 16 项部分和的作图结果，可见随着项数增加，级数在连续区间内一致收敛。但细心地观察后，我们会发现在间断点附近会出现吉布斯现象，即超量震荡。但虽然间断点处振荡高度几乎不变，其振荡频率越来越大，综合来看仍然收敛。

在分解为三角函数的基础上，根据欧拉公式，可以将傅里叶级数转化为复指数的形式，这也是最初同时使用 \sin 与 \cos 而非使用辅助角公式化为统一的正弦或余弦的一个原因。在保有对称性的情况下，转化更为简便。

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{e^{i\omega_k x} + e^{-i\omega_k x}}{2} + b_k \frac{e^{i\omega_k x} - e^{-i\omega_k x}}{2i} \\
&= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k) e^{i\omega_k x} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + ib_k) e^{-i\omega_k x} \\
&= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k) e^{i\omega_k x} + \frac{1}{2} \sum_{k=-1}^{-\infty} (a_{-k} + ib_{-k}) e^{-i\omega_{-k} x} \\
&= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k) e^{i\omega_k x} + \frac{1}{2} \sum_{k=-1}^{-\infty} (a_{-k} + ib_{-k}) e^{i\omega_k x} \\
&= a_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} c_k e^{i\omega_k x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k x}
\end{aligned}$$

由最后两步可以看出： $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, k > 0;$

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx$$

综合来看有统一表达式：

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i\omega_k x} dx, \text{ for all } k \in \mathbb{Z}$$

二. 连续型傅里叶变换(CFT)

在上一部分的结尾，我们得到了：

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_k t} dt, \text{ for all } k \in \mathbb{Z}$$

这里，系数 c_k 的值反映了频率为 ω_k 的振动在 $f(x)$ 中的强度。当我们将第二式的 ω_k 从离散的 $\frac{2\pi k}{T}$ 推广到任意的连续变量 ω 时，每一个 c 的大小反映了对应频率 ω 的振动在 $f(x)$ 中的成分，此时 c 为关于 ω 的函数：

$$c(\omega) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

而更一般地， $f(x)$ 不是周期函数的情形下，可视作 $T \rightarrow \infty$ ，此时：

$$c(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

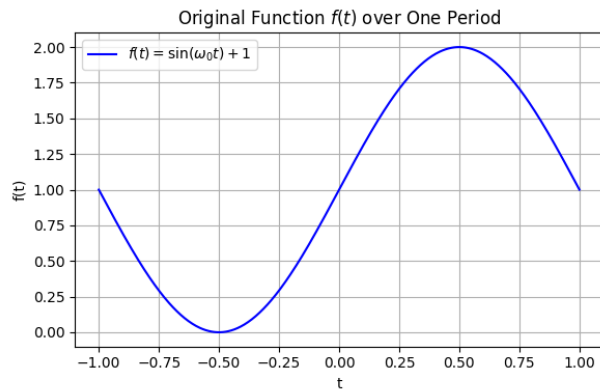
我们还可以从另外一个角度来理解此时的 $c(\omega)$ 。表达式中的复指数项 $e^{-i\omega t}$ 让我们联想到从区间 $0 \sim \frac{2\pi}{\omega}$ 到单位圆的映射，那么 $e^{-i\omega t}$ 可以视为将时域函数 $f(t)$ 映射到复平面的变换算子。考虑一个周期为 T 的函数 $f(t)$ （暂且考虑只有正值以保证几何直观），其在数个周期区间上的采样点 $\{t_n\}$ 通过该映射生成复平面上的一个点集 $z_n = f(t_n) e^{-i\omega t_n}$ ，其中 $|z_n| = f(t_n)$ 保留幅值信息， $\arg(z_n) = -\omega t_n$ 决定相位。那么， $c(\omega)$ 的物理意义可以解释为这个复数点集（看作质点系）的质心位置：

$$c(\omega) = \frac{1}{T} \sum_n z_n$$

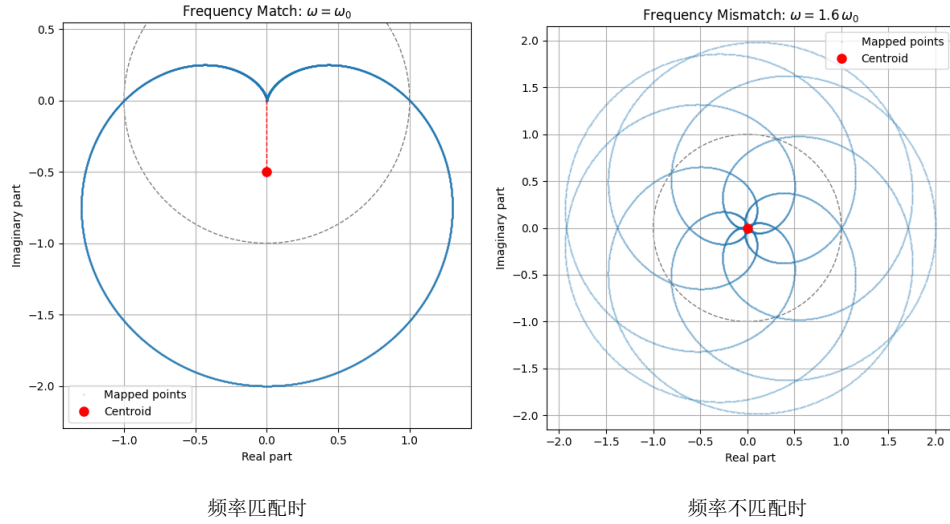
由离散推广到连续情形便是：

$$c(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

当选取的 ω 与基频 $\frac{2\pi}{T}$ 不匹配时，由于圆的均匀对称性，加之映射后的 $f(t)$ 在圆周上的幅度分布杂乱，从而在统计意义上显得分布均匀，质心位置在原点附近小范围摆动；但是当选取的 ω 与 $\frac{2\pi}{T}$ 恰好相等，那么映射后的 $f(t)$ 在圆周上的幅度分布与原来直角坐标系下的幅度分布起伏一致，显示原有的规律性，达到某种“共振”的效果，从而质心偏离原点较大，也就是 $c(\omega)$ 较大。当我们做出 $c(\omega) - \omega$ 的图像时，发现某一个点出线权局部最大值时，则表明原来的函数 $f(t)$ 含有这个基频 ω ，实现频谱分析的效果。而此方法对非周期函数同样适用， $c(\omega) - \omega$ 图像上的峰值对应于 $f(t)$ 的显著频率成分。



$f(t)$ 在一个周期上的图像



但值得注意的是，以上分析得到的 $c(\omega)$ 并不是连续型傅里叶变换（CFT）的结果，严格的连续性傅里叶变换定义中没有 $\frac{1}{T}$ 分子，而是定义为：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

但以上对频率筛选的分析却是合理的，傅里叶变换只是在 $c(\omega)$ 的基础上乘上了其周期。具体而言，某一特定频率的信号延续的时间越长，被放大的倍数就越大。

而对于已知频域信息，要得到原函数的情况，则需要用到傅里叶变换的逆运算——傅里叶逆变换（ICFT）。

根据形式对称性容易猜测： $f(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \right) d\omega$

交换积分顺序，有：

$$RHS = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)} d\omega \right) d\tau$$

依据经典的复指数形式的 δ 函数恒等式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega = 2\pi \delta(x)$$

于是：

$$RHS = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = 2\pi f(t)$$

由此严格导出傅里叶逆变换的最终形式为：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega$$

下面对一个简单的三角函数进行傅里叶变换来验证这一操作在频谱分析上的合理性。

$$f(t) = A \sin \omega_0 t$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A \sin(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt = \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{A}{2} [\delta(\omega_0 - \omega) - \delta(\omega_0 + \omega)]$$

由此可知，一个单频的正弦函数的傅里叶变换得到的函数在 $\omega = \pm\omega_0$ 处有一个直指正无穷的陡升，而其余各点处均为0。但现实中我们是无法采集到这样的信号的，一方面由于分辨率具有上限，观测到的信号都是离散的，不会是连续的函数，另一方面我们无法将整个时间轴上的信号都收集到，往往只是截取了一段时间。于是离散型傅里叶变换(DFT)就显得必要了。

三. 离散型傅里叶变换(DFT)

对于连续性傅里叶变换：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

要让连续的变为离散的，则积分 \rightarrow 求和， $t \rightarrow t_n, \omega \rightarrow \omega_k, dt \rightarrow \delta t$ ，同时函数也变为数列，即 $f(t) \rightarrow x_n, F(\omega) \rightarrow X_k$

若采样间隔为 δt ，总共 N 个数据点，则 $t_n = n\delta t$ ，总时间 $N\delta t$ ，基频定为 $\omega =$

$\frac{2\pi}{N\delta t}$ ，则 $\omega_k = \frac{2\pi k}{N\delta t}$ 。于是：

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\frac{2\pi k}{N\delta t} n\delta t} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\frac{2\pi}{N} kn}$$

类似地，我们可以得到离散型傅里叶逆变换(IDFT)的表达式：

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i\frac{2\pi}{N} kn}$$

总的来说，DFT首先将连续信号 $f(t)$ 在均匀间隔 δt 上进行采样，得到离散的时间信号 x_n 。这个过程是信号离散化的关键步骤，也决定了信号的带宽和频率分辨率。然后，我们将频域的连续变换离散化为有限数量的离散频率点。这样，原来遍布整个实轴的连续的频域 ω 就被离散化为 $\frac{2\pi k}{N\delta t}$ ，并且对应于每个频率的幅度和相位。于是DFT便实现了在有限区间上的离散化。

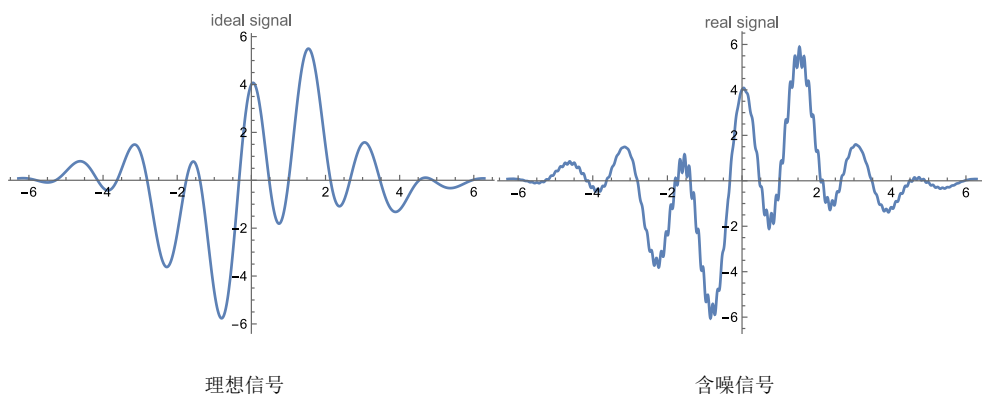
四. 傅里叶分析应用

借助傅里叶变换和傅里叶逆变换，我们可以处理一些原本不易处理的数据。其总体思想是先对初始数据进行傅里叶变换得到频谱信息，再对其进行适当调整后，进行傅里叶逆变换得到我们想要的结果。（以下操作均在 Mathematica

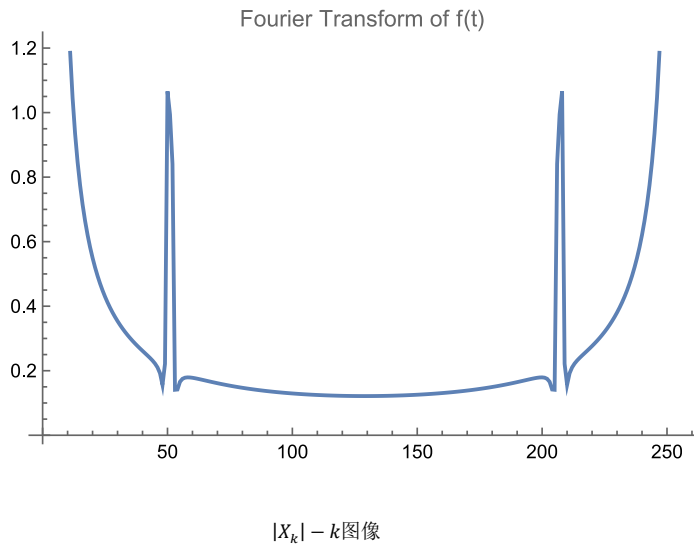
Wolfram 14.1 中进行)

例如我们现在有一个含有高频噪音（下式中 $0.5 \sin t \sin 50t e^{-\frac{t^2}{10}}$ 项）的信号：

$$f(t) = (3 \sin t + 4 \cos 4t + 0.5 \sin t \sin 50t) e^{-\frac{t^2}{10}}$$

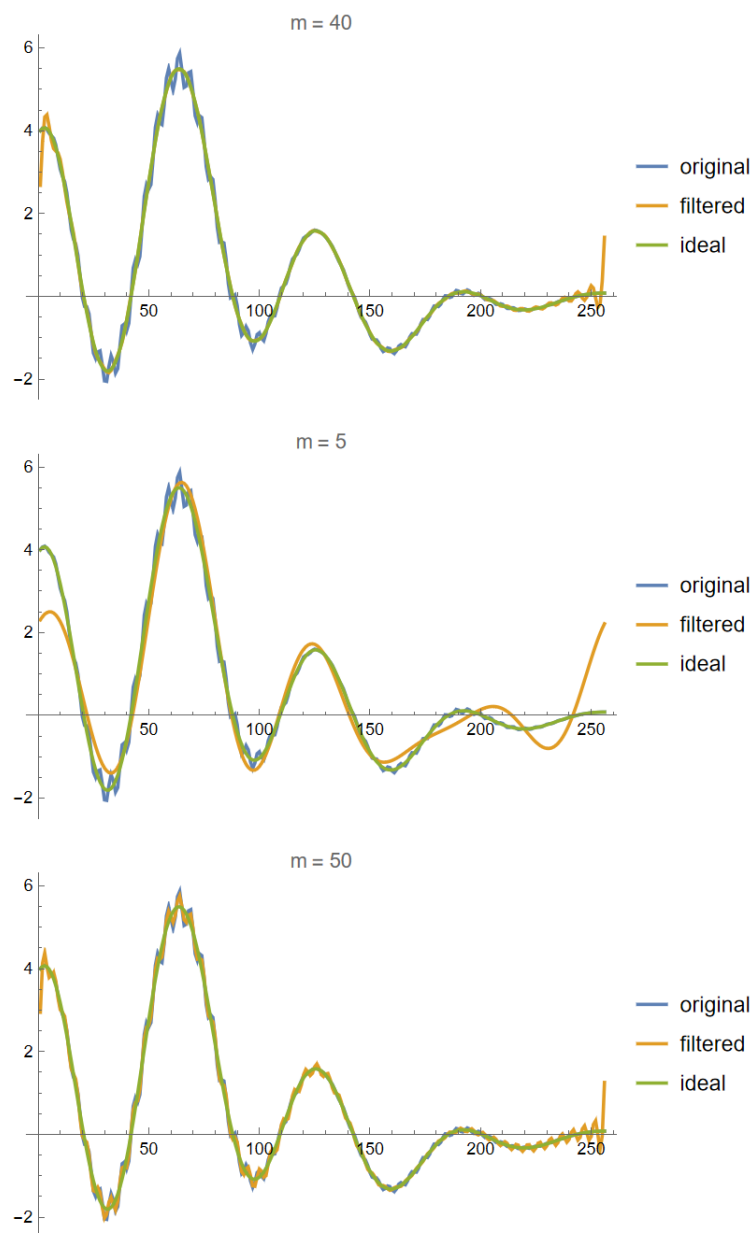


我们想要剔除其中的高频噪音，但我们无从得知信号的解析表达式，只有一段时间内不断获取信号，得到一些分立的数据点的信号强度。设我们等事件间距地获取了 $N = 256$ 个数据（时间总计 $2\pi s$ ），将其做DFT后取其绝对值 $|X_k|$ ，绘图得到如下结果：



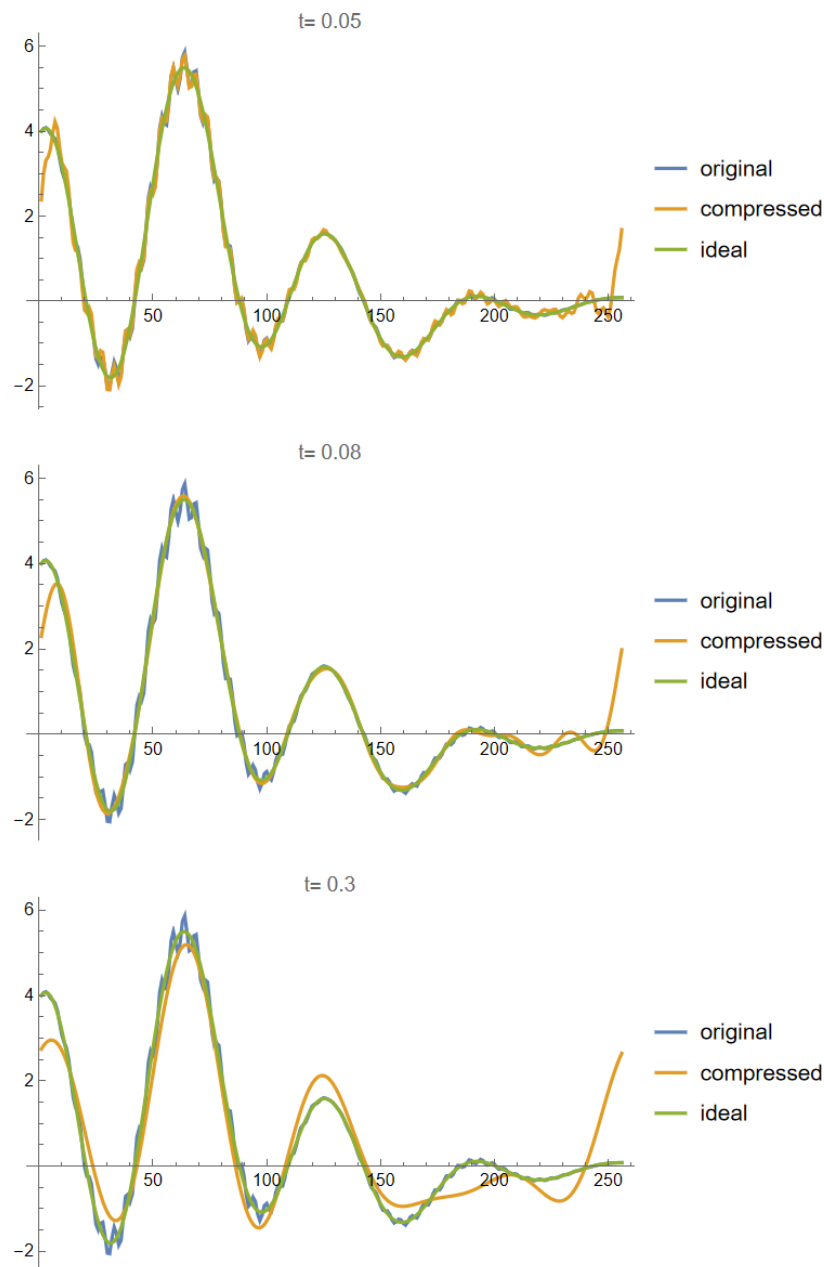
观察上图，发现图像关于 $\frac{N}{2}$ 对称，这是易于理解的，因为根据DFT的表达式，DFT输出的 X_k 关于输入的实数信号 x_n 复共轭对称，即 $X_k = X_{N-k}^*$ ，傅里叶变换的前半部分(从 $k = 0$ 到 $k = \frac{N}{2}$)为频谱的正频率部分，后半部分(从 $k = \frac{N}{2}$ 到 $k = N - 1$)为频谱的负频率部分，取绝对值相当于给出幅度谱，显然关于 $\frac{N}{2}$ 对称。

此外，图像共计有四个峰值，分别位于两端和 50、208 附近。不难发现， $k = 0$ 时表示直流分量(0 Hz)，结合对称性，分析知图像中间是高频部分，两端为低频部分。那么此时我们要做的便是将 50、208 附近的峰值抹去，而留下两端的低频信号，于是设置一个参数 m ，将 $m < k < N - m$ 处的 $|X_k|$ 均令为 0，再进行傅里叶逆变换便可得到去除噪音的信号。



上图中蓝线表示直接获取的信号(*original*)，橙线表示过滤操作后的信号(*filtered*)，绿线表示理想信号(*ideal*，即 $g(t) = (3 \sin t + 4 \cos 4t)e^{-\frac{t^2}{10}}$ ，实际情况未知)，可以看出 $m = 40$ 时，*filtered* 与 *ideal* 相差很小，说明降噪效果很好；当 $m = 5$ 时，*filtered* 与 *ideal* 相差较大，说明理想信号中的一些成分也被“误杀”掉了；当 $m = 50$ 时，*filtered* 仍然呈现锯齿状，与 *original* 几乎无变化。

上面的过程是在做出 X_k 幅度谱图像后，对频率进行分析后再决定 X_k 的保留与否，我们也可以直接根据噪音的振幅一般比信号本身振幅小得多的事实来取舍，这样，我们只要找到 $|X_k|$ 的最大值，将幅度值比 $|X_k|$ 最大值的某个比例（记为 t ）还要小的 X_k 令为 0，再进行傅里叶逆变换即可。

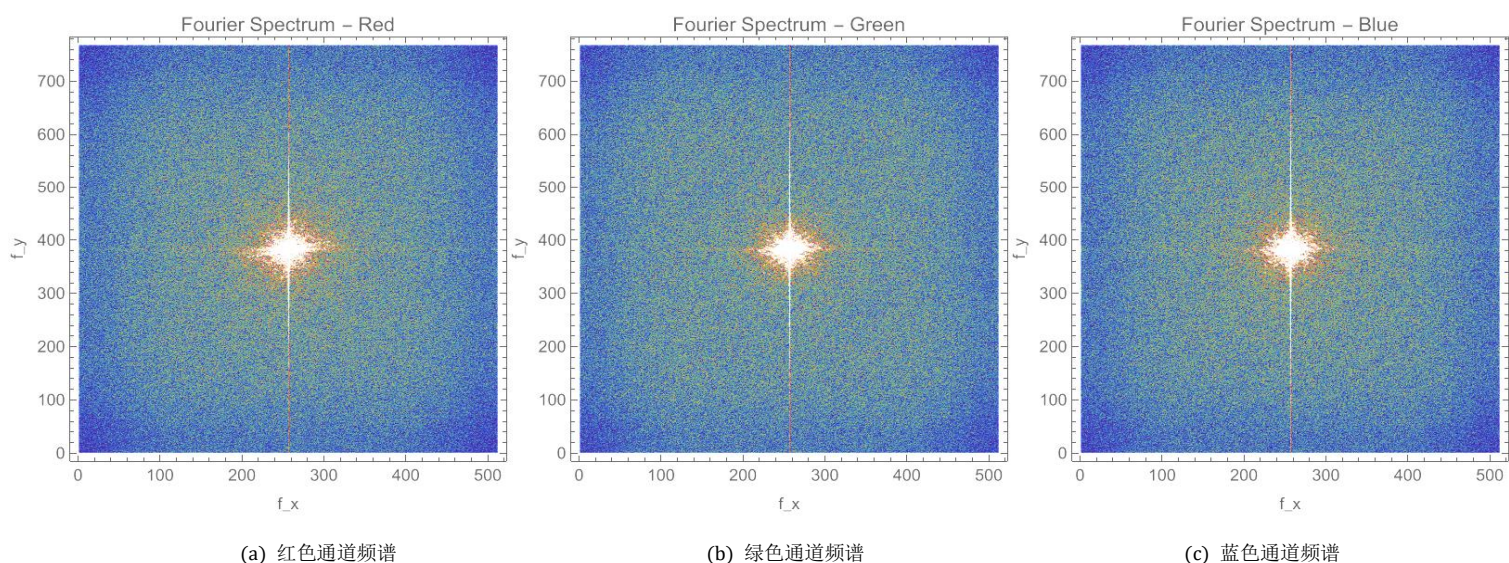


上图中蓝线表示直接获取的信号(*original*)，橙线表示过滤操作后的信号(*compressed*)，绿线表示理想信号(*ideal*)，可以看出 $t = 0.05$ 时 *compressed* 仍然呈现锯齿状，与 *original* 几乎无变化；当 $t = 0.3$ 时，*compressed* 与 *ideal* 相差较大，说明理想信号中的一些成分也被“误杀”掉了；当 $t = 0.08$ 时，*compressed* 与 *ideal* 相差很小，说明降噪效果很好。

除了处理一维信号外，还能据此对图片进行降噪、压缩的操作，但处理难度与急剧上升：一方面图片是二维的，需要进行二维 DFT 及 IDFT，另一方面每一个像素都有其对应的 RGB 值，需要分别对这三个数据进行处理。



如上所示为一张含有较多噪点的彩色照片，读取其每个像素的 RGB 值后进行二维 DFT 做出其频谱图，其中横纵坐标分别代表 f_x 和 f_y 的索引，中心为零频（代码中做了中心化处理），从左到右 f_x 由负变正，从下到上 f_y 由负变正；颜色冷暖代表幅度值的对数大小（一般幅度值差异较大，故取其对数进行缩放），颜色越偏蓝幅度值越小。



由上面三张图可知，RGB 的频率均集中在中心的一小块低频段，而垂直和水平方向上有明显的高频线条，这意味着图像中可能带有周期性噪声。现在采用截断滤波法，用一个半径为 60 圆形过滤器，将圆形以外区域均设置为 0，再进行傅里叶逆变换后便可以实现降噪。



上面两张图中，左图为降噪后，右图为原图，放在一起便于对比。降噪效果是明显的，但图像更加模糊，这自然是由频谱中心圆以外的数据均被舍弃导致的，需要采用更精确的噪点分析方法和更高级的过滤技术才能保证降噪的同时又使图像尽量清晰。此外，调用 Mathematica 内置的 FileByteCount 函数可以迅速比较两张图片的文件大小：原图是修改后的将近四倍，可见这一操作也可以用于图片压缩。

```
b = FileByteCount["C:/Users/HUAWEI/Desktop/filteredImg.jpg"];
|文件字节数
a = FileByteCount["C:/Users/HUAWEI/Desktop/resized.jpg"];
|文件字节数
Print[StringForm["Original file size: `` bytes; Processed file size: `` bytes", a, b]]
|打印 |字符串形式
Original file size: 121452 bytes; Processed file size: 31151 bytes
```

五. 总结

傅里叶分析作为现代信号处理和图像处理的核心数学工具，其重要性不言而喻。以上探讨了从傅里叶级数到傅里叶变换的理论发展，并举例阐述了其在信号降噪和图像处理中的实际应用。

理论层面，我们首先建立了周期函数的傅里叶级数展开。随后，通过将周期推广至无穷大，自然过渡到连续傅里叶变换，实现了对非周期函数的频域分析。而后离散傅里叶变换的引入，则为实际应用中的信号处理提供了理论基础。

在应用层面，我们重点探讨了基于频谱分析的降噪方法。通过构建合适的频域滤波器，我们能够有效分离信号中的有用成分和噪声。实验结果表明，合理选择滤波参数可以在保持图像主要特征的同时有效抑制噪声。