Exercício 1

Considere uma cidade com n homens e n mulheres que desejam se casar com alguém do sexo oposto. Assuma que existem k homens bons e n-k homens maus. Da mesma forma, existem k mulheres boas e n-k mulheres más. Todas as pessoas prefeririam se casar com qualquer pessoa boa do que com qualquer pessoa má. Em outras palavras, os rankings de preferências de todos incluem todas as pessoas boas (em alguma ordem) em posições mais altas do que qualquer pessoa má.

Mostre que em qualquer casamento estável, todo homem bom sempre estará casado com uma mulher boa.

Exercício

Vamos mostrar por contradição.

Suponha que exista um casamento estável M com um par (m,w), tal que m seja um homem bom e w uma mulher má.

Então deve existir pelo menos uma mulher boa w' casada com um homem mau m' (ou seja, existe o par (m',w') em M) já que o número de homens bons é igual ao número de mulheres boas.

Mas w' (mulher boa) prefere qualquer homem bom a qualquer homem mau, ou seja, w' prefere m (homem bom) a m' (homem mau).

Da mesma forma m (homem bom) prefere qualquer mulher boa a qualquer mulher má, ou seja, prefere w' (mulher boa) a w (mulher ruim)

Então (m, w') é uma instabilidade a M

Exercício 2

Considere uma generalização do Problema do Casamento Estável em que certos pares homem-mulher (ou hospital-estudante) são explicitamente *proibidos*. Em outras palavras, há um conjunto M de n homens, um conjunto W de n mulheres, e um conjunto $F \subseteq M \times W$ de pares que representam casamentos que não são permitidos.

Cada homem m ordena todas as mulheres w tal que $(m,w) \notin F$, e cada mulher w' ordena todos os homens m' tal que $(m', w') \notin F$

Neste cenário mais geral, um casamento é dito estável se ele não exibe nenhuma das seguintes condições (tipos de instabilidade):

Exercício 2

Neste cenário mais geral, um casamento S é dito estável se ele não exibe nenhuma das seguintes condições (tipos de instabilidade):

1. Há dois pares (m,w) e (m’, w’) em S com a propriedade de que $(m,w') \notin F$, m prefere w’ a w e w’ prefere m a m’ (condição de instabilidade geral)
2. Há um par $(m,w) \in S$ e um homem m’ tal que m’ não é parte de nenhum par no casamento S, $(m',w) \notin F$ e w prefere m’ a m (homem solteiro é mais desejado e não é proibido)
3. Há um par $(m,w) \in S$ e uma mulher w’ tal que w’ não é parte de nenhum par no casamento S, $(m,w') \notin F$ e m prefere w’ a w (mulher solteira é mais desejada e não é proibida)
4. Há um homem m e uma mulher w, nenhum deles é parte de nenhum par no casamento S e $(m,w) \notin F$ (há duas pessoas solteiras sem impedimentos para se casarem)

Sob estas condições, um casamento estável pode não ser perfeito.

Exercício 2

Apresente um algoritmo que, para qualquer conjunto de preferências e listas de pares proibidos, produz um casamento estável.

Prove que a solução do algoritmo sempre é um casamento estável.

Solução

Por que algoritmo de Gale-Shapley nao se aplica diretamente?

```
Initially all m ∈ M and w ∈ W are free
While there is a man m who is free and hasn't proposed to
every woman
   Choose such a man m
   Let w be the highest-ranked woman in m's preference list
      to whom m has not yet proposed
   If w is free then
      (m, w) become engaged
   Else w is currently engaged to m'
      If w prefers m' to m then
         m remains free
      Else w prefers m to m'
         (m, w) become engaged
         m' becomes free
      Endif
   Endif
Endwhile
Return the set S of engaged pairs
```

Solução

Por que algoritmo de Gale-Shapley nao se aplica diretamente?

```
Initially all m ∈ M and w ∈ W are free
While there is a man m who is free and hasn't proposed to
every woman
   Choose such a man m
   Let w be the highest-ranked woman in m's preference list
      to whom m has not yet proposed
   If w is free then
      (m, w) become engaged
   Else w is currently engaged to m'
      If w prefers m' to m then
         m remains free
      Else w prefers m to m'
         (m, w) become engaged
         m' becomes free
      Endif
   Endif
Endwhile
Return the set S of engaged pairs
```

Não reconhece pares proibidos

Solução

Vamos alterar a condição do while

```
Initially all m ∈ M and w ∈ W are free
While there is a man m who is free and hasn't proposed to
every woman w for which (m, w) ∉ F
   Choose such a man m
   Let w be the highest-ranked woman in m's preference list
      to which m has not yet proposed
   If w is free then
      (m, w) become engaged
   Else w is currently engaged to m'
      If w prefers m' to m then
         m remains free
      Else w prefers m to m'
         (m, w) become engaged
         m' becomes free
      Endif
   Endif
Endwhile
Return the set S of engaged pairs
```

Solução

Observações:

1. Algoritmo produz um casamento (mesma razão anterior)
   a. Cada homem propõe para mulheres em ordem decrescente de preferência
   b. Depois que uma mulher fica *engaged* pela primeira vez, ela nunca mais fica solteira, apenas troca de parceiro em ordem crescente de preferência
   c. Se homem m não está em um par na solução, m deve ter proposto para todas as mulheres não proibidas
   d. Se mulher w não está em um par na solução, então nenhum homem propôs para w.
2. Algoritmo também termina em $O(n^2)$ iterações
3. Diferentemente da instância anterior, o casamento gerado pode não ser perfeito
4. Casamento estável???
   a. Temos que provar que nenhuma das quatro condições de instabilidade podem ocorrer na solução

Solução

1. Suponha uma instabilidade do tipo

   1) Há dois pares (m,w) e (m’, w’) em S com a propriedade de que (m,w’) $\notin$ F, m prefere w’ a w e w’ prefere m a m’ (condição de instabilidade geral)

   Se m prefere w' a w, então m deve ter proposto para w' (obs 1a) .

   Porém w' rejeitou m para ficar eventualmente com m'.

   Logo w' deve preferir m' a m (obs 1b)

   CONTRADIÇAO

Solução

2. Suponha uma instabilidade do tipo

   2) Há um par (m,w) ∈ S e um homem m’ tal que m’ não é parte de nenhum par no casamento S, (m’,w) ∉ F e w prefere m’ a m (homem solteiro é mais desejado e não é proibido)

   Se (m’,w) ∉ F, então m' deve ter proposto a w (obs 1c)

   Porém w rejeitou m' para ficar eventualmente com m.

   Logo w deve preferir m a m' (obs 1b)

   CONTRADIÇAO

Solução

3. Suponha uma instabilidade do tipo

   3) Há um par $(m,w) \in S$ e uma mulher w' tal que w' não é parte de nenhum par no casamento S, $(m ,w') \notin F$ e m prefere w' a w (mulher solteira é mais desejada e não é proibida)

   Se w' não é parte de nenhum par, então ninguém propôs para w' (obs 1d)

   Particularmente, m nunca propôs a w'.

   Então m deve preferir w a w' (obs 1a)

   CONTRADIÇAO

Solução

4. Suponha uma instabilidade do tipo

   4) Há um homem m e uma mulher w, nenhum deles é parte de nenhum par no casamento S e $(m,w) \notin F$ (há duas pessoas solteiras sem impedimentos para se casarem)

   Se m não é parte de nenhum par, então ele deve ter proposto para todas as mulheres não proibidas (obs 1c)

   Particularmente, m deve ter proposto a w.

   Logo, w tem que ser parte de um par (obs 1d)

   CONTRADIÇAO