400104964

تمرین اول

آیلین رستمی

۱) الف) برای ماتریس متقارن: $\|A\|_2 = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|$

اثبات: $A = U\Sigma V^T$

$$\|A\|_2 = \|\underbrace{U}_{unitary}\Sigma \underbrace{V^T}_{unitary}\|_2 \overset{*}{=} \|\Sigma\|_2 = \sup \frac{\|\Sigma x\|_2}{\|x\|_2}$$

$$= \sup \frac{\sqrt{\lambda_1^2 x_1^2 + \dots + \lambda_n^2 x_n^2}}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \le \frac{|\lambda_{max}|\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = |\lambda_{max}|$$

اثبات *:

$$\|UA\|_2 = \sup \frac{A^TU^Tx}{x^Tx} \xrightarrow{y=U^Tx} = \frac{A^Ty}{y^Ty} = \|A\|_2$$

می‌دانیم: (اثبات به سبک // $J=PAP^{-1}$ و $tr(J)$) $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

و همینطور می‌دانیم (اثبات به سبک // $J=PAP^{-1}$ و $det(J)$) $det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

طبق نامساوی حسابی هندسی:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i} \le \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{n} \longrightarrow \sqrt[n]{det(A)} \le \frac{tr(A)}{n} \quad (1)$$

و از طرفی می‌دانیم:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \le n\,\lambda_{max} \longrightarrow \frac{tr(A)}{n} \le \|A\|_2 \quad (2)$$

$$(1),(2) \quad \sqrt[n]{det(A)} \le \frac{tr(A)}{n} \le \|A\|_2$$

ب) طبق تجزیه schur: $A = QUQ^T$

که ماتریس متعامد

که Q یک ماتریس unitary و U یک ماتریس بالامثلثی است که درایه‌های قطر اصلی آن، مقادیر ویژه A هستند. *

$$\|A\|_F^2 = \|QUQ^T\|_F^2 = tr(QUQ^TQ\,U^TQ^T) = tr(QUU^TQ^T) = tr(\underbrace{Q^TQ}_{I}UU^T)$$

$$= tr(U^TU) = \|U\|_F^2 = \sum_{i,j} u_{ij}^2 \ge \sum \underbrace{|\lambda_i|^2}_{\text{درایه‌های قطر اصلی}}$$ ⟶ قسمت اول اثبات شد

اثبات *: ابتدا ثابت می‌کنیم مقادیر ویژه A و U برابرند

$$|\overbrace{QUQ^T}^{A} - \lambda I| = |QUQ^T - \lambda QQ^T|$$

$det(AB) = det(A)\,det(B)$

$$= |Q||U-\lambda I||Q^T| = |\underbrace{QQ^T}_{1}||U-\lambda I| = |U-\lambda I| \Rightarrow$$ مقادیر ویژه A و U باهم برابرند

حال باید اثبات کنیم مقادیر ویژه U روی قطر آن قرار دارد:

$$|U-\lambda I|=0 \longrightarrow \begin{vmatrix} u_{11}-\lambda & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & u_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

ریشه‌های معادله یا همان مقادیر ویژه، مقادیر روی قطر U هستند.

$$=(u_{11}-\lambda)(u_{22}-\lambda)\cdots(u_{nn}-\lambda)=0 \Longrightarrow$$

حال سمت دوم را اثبات می‌کنیم:

schur decomposition : $A=QUQ^T$

$$AA^T=A^TA \longrightarrow QUU^TQ^T=QU^TUQ^T \xrightarrow{Q^T\times \quad \times Q} UU^T=U^TU$$

$$UU^T_{11}=\sum_{i=1}^n u_{1i}^2=U^TU_{11}=u_{11}^2 \Longrightarrow \forall i\neq 1: u_{1i}=0$$

$$UU^T_{22}=\sum_{i=1}^n u_{2i}^2=U^TU_{22}=u_{22}^2 \Longrightarrow \forall i\neq 2: u_{2i}=0$$

$\vdots$

به همین صورت نتیجه می‌گیریم تمام درایه‌های غیر قطر اصلی U برابر صفر است ← U قطری است

$$\underbrace{\|A\|_F^2=\|U\|_F^2}_{\text{اصل با}}=\sum_{i=1}^n|\lambda_i|^2 \longrightarrow$$ حالت تساوی معادله

عکس این عبارت هم درست است یعنی تساوی فقط در حالتی رخ می‌دهد که U قطری باشد در نتیجه $AA^T=A^TA$:

اگر A مختلط بود به جای تمام T ها در بالا * قرار می‌دهیم و معادله ها همچنان برقرارند.

2) الف)

$$A(x-x^*)=Ax-Ax^*=b-b=0 \Longrightarrow x-x^*\in N(A)$$

ب)

$$x^*=\underbrace{A^T(AA^T)^{-1}b}_{v}\,{}^{*}=A^Tv \qquad v\longrightarrow b=AA^Tv$$

$$(x-x^*).x^*=(x-A^Tv).A^Tv$$

$$=(x^T-v^TA)A^Tv=\underbrace{x^TA^T}_{b^T}v-\underbrace{v^TAA^T}_{b^T}v=0$$

از * نتیجه می‌گیریم x^* عضو column space، A^T یا همان row space، A است.

ج) از آنجایی که $x-x^*$ بر x^* عمود است

$$x=x^*+x_n \quad | \quad x_n\in N(A)$$

$$\|x\|_2^2=x^Tx=(x^*+x_n)^T(x^*+x_n)=x^{*T}x^*+\underbrace{x^{*T}x_n}_{0}+\underbrace{x_n^Tx^*}_{0}+x_n^Tx_n=\|x^*\|_2^2+\|x_n\|_2^2$$

$$\Longrightarrow \|x\|_2^2=\|x^*\|_2^2+\|x_n\|_2^2\geqslant\|x^*\|_2^2$$

د) طبق مراحل بالا داریم $x = x^* + x_n$ که x^* برابر است با $A^T(AA^T)^{-1}Ax$ که متناظر است با نگاشت x روی فضای سطری که پس ماتریس نگاشت به row space برابر است با $A^T(AA^T)^{-1}A$ و ماتریس نگاشت به null space برابر است با $I - A^T(AA^T)A$.

3) الف) ابتدا در تجزیه به ماتریس های بالامثلثی و پایین مثلثی برای M می نویسیم:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I_m \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} A-BD^{-1}C & BD^{-1} \\ 0 & I_m \end{bmatrix}}_{X'} \underbrace{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ C & D \end{bmatrix}}_{Y'}$$

$$M^{-1} = Y^{-1}X^{-1} = Y'^{-1}X'^{-1} \qquad X^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -CA^{-1} & I_m \end{bmatrix} \qquad Y^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ 0 & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$X'^{-1} = \begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \qquad Y'^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & D^{-1} \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}_{1,1} = A^{-1} + A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} = (A-BD^{-1}C)^{-1}$$

ب) اگر در معادله بالا $A=I$ ، $D=-1$ ، $B=u$, $C=v^T$ را جایگذاری کنیم داریم:

$$(I+uv^T) = I + u(-1-v^Tu)^{-1}v^T = I - \frac{uv^T}{1+v^Tu}$$

پس شرط تعریف شدن $(I+uv^T)^{-1}$ این است که $1+v^Tu$ صفر نشود یعنی: $v^Tu \neq -1$

(ماتریس های I و uv^T در هر صورت تعریف شده اند)

ج) در معادله قسمت الف قرار می دهیم: $A=A \quad B=u \quad C=v^T \quad D=-1$

پس داریم

$$(A+uv^T)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}u(-1-v^TA^{-1}u)^{-1}v^TA^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}$$

(۴) الف) ماتریس M را به فرم زیر تجزیه می‌کنیم:

$$M=\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ A^{-1}B^T & I_{n-k} \end{bmatrix}}_{Q^T} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I_k & A^{-1}B \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix}}_{Q}$$

حال می‌خواهیم اثبات کنیم: $M\succ 0 \Longrightarrow A\succ 0 \wedge S\succ 0$

$$M\succ 0 \longrightarrow \forall x\in R^n\setminus\{0\}: \; x^T M x = x^T Q^T \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} Q x > 0$$

$$S\succ 0 \longrightarrow \forall x\in R^{n-k}\setminus\{0\}: x^T S x>0 \;, \qquad A\succ 0 \longrightarrow \forall x\in R^{k}\setminus\{0\}: x^T A x>0$$

← به صورت ماتریس قطری تجزیه می‌کنیم

از آنجایی که دترمینان ماتریس Q برابر یک است ($|Q|^{**}=|I_{n-k}||I_k|=1$) در نتیجه معکوس پذیر و full rank است. در نتیجه Qx همه نقاط فضای R^n را می‌پوشاند و یک به یک است.

تعریف می‌کنیم: $Qx \overset{*}{=} y \longrightarrow x=Q^{-1}y$

$$M\succ 0 \Longrightarrow \forall y\in R^n\setminus\{0\}: y^T Q^{-T} Q^T \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} Q Q^{-1} y = y^T \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} y$$

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to k\times 1 \\ \to (n-k)\times 1 \end{matrix} \longrightarrow \forall y_1\in R^k, y_2\in R^{n-k}, y\neq 0: \; y^T \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} y = y_1^T A y_1 + y_2^T S y_2 > 0$$

$$\rightsquigarrow y_1=0 \;\; \forall y_2\in R^{n-k}\setminus\{0\}: \cancel{y_1^T A y_1}^{\,0} + y_2^T S y_2 > 0 \Longrightarrow S\succ 0$$

$$\rightsquigarrow y_2=0 \;\; \forall y_1\in R^{k}\setminus\{0\}: y_1^T A y_1 + y_2^T S y_2 > 0 \Longrightarrow A\succ 0$$

حال قسمت دوم را مشابه بالا اثبات می‌کنیم: $S\succ 0,\; A\succ 0 \Longrightarrow M\succ 0$

$$\forall y_1\in R^k\setminus\{0\},\; y_1^T A y_1>0 \qquad \forall y_2\in R^{n-k}\setminus\{0\}: y_2^T S y_2>0$$

اگر y_1 و y_2 برابر صفر باشند 0 می‌شود

$$\longrightarrow y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \forall y\in R^n\setminus\{0\}: y^T \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} y>0$$

$$y \overset{*}{=} Qx \longrightarrow \forall x\in R^n\setminus\{0\}: x^T Q^T \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} Q x>0 \Longrightarrow M\succ 0$$

Q قسمت اول اثبات

ب) همانند بالا اثبات می‌کنیم:

$$M = Q^T \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}}_{D} Q$$

$$A \succ 0 \longrightarrow \forall x \in R^k \setminus \{0\} : x^T A x > 0$$

قسمت اول اثبات:

$$A \succ 0 : M \succeq 0 \Rightarrow S \succeq 0$$

$$\forall x \in R^n : x^T Q^T D Q x \geq 0 \qquad |Q| = 1 \Rightarrow \text{invertible} \qquad x = Q^{-1} y$$

$$\Rightarrow \forall y \in R^n : y^T D y \geq 0 \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \forall y_1 \in R^k, y_2 \in R^{n-k} : y_1^T A y_1 + y_2^T S y_2 \geq 0$$

$$y_1 = 0 \quad \forall y_2 \in R^{n-k} : y_2^T S y_2 \geq 0 \Rightarrow S \succeq 0$$

قسمت دوم:

$$A \succ 0 : S \succeq 0 \Rightarrow M \succeq 0$$

$$\forall y_1 \in R^k : y_1^T A y_1 \underset{\text{can be } 0}{\geq} 0 \qquad \forall y_2 \in R^{n-k} : y_2^T S y_2 \geq 0 \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \forall y \in R^n : y^T D y \geq 0 \rightsquigarrow y = Qx \rightarrow \forall x \in R^n \quad x^T Q^T D Q x \geq 0$$

$$\Rightarrow M \succeq 0$$

ج)

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \qquad S = A - BA^{-1}B$$

از آنجایی که $A \succ 0$ است طبق الف می‌دانیم:

$$S \succ 0 \Longleftrightarrow M \succ 0$$

$$x^T S x > 0 \Longleftrightarrow \forall x \in R^n \setminus \{0\} : x^T (A - BA^{-1}B) x = x^T A x - x^T B A^{-1} B x > 0 \; *$$

از آنجایی که A متقارن است می‌توان آن را به صورت $\underset{\text{unitary}}{Q}\underset{\text{قطری}}{D}Q^T$ نوشت (در سوال یک اثبات شد) و از آنجایی که مثبت معین است پس $A^{-\frac{1}{2}}$ به صورت $QD^{-\frac{1}{2}}Q^T$ تعریف می‌شود.

$$y = A^{\frac{1}{2}} x \quad \overset{\text{یک به یک}}{\longleftrightarrow} \quad x = A^{-\frac{1}{2}} y$$

$$* \Longleftrightarrow \forall y \in R^n \setminus \{0\} : y^T y - y^T A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} y > 0 \; ** \rightsquigarrow P = A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \rightsquigarrow \text{متقارن}$$

$$** \Longleftrightarrow \forall y \in R^n \setminus \{0\} : y^T y - y^T P^2 y = y^T (I - P^2) y > 0 \Longleftrightarrow I - P^2 \succ 0 \; ***$$

$P = U \Sigma U^T \qquad P^2 = U \Sigma^2 U^T \rightsquigarrow \qquad \lambda(P^2) = \sigma^2(P) = \sigma^2(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})$

مجموعه λ ها ← مجموعه σ^2 ها

$\lambda(I - P^2) \overset{*}{=} 1 - \lambda(P^2) = 1 - \sigma^2(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})$

مجموعه λ ها

$*** \Leftrightarrow 1 - \sigma^2(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) > 0 \Leftrightarrow \sigma^2(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) < 1 \overset{\sigma > 0}{\Longleftrightarrow} \sigma(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) < 1$

$\Longrightarrow A > 0 : \; M > 0 \Leftrightarrow S > 0 \Leftrightarrow \sigma(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}) < 1$

هر σ

اثبات * :

$\lambda(A) \longrightarrow |A - \lambda I| = 0 \qquad A' = A + I \qquad |A + I - \lambda' I| = |A - (\lambda' - 1) I| = 0$

$\lambda' - 1 = \lambda \Rightarrow \lambda' = \lambda + 1 \Rightarrow \lambda(A + I) = \lambda(A) + 1$

(5) الف) ابتدا ثابت می‌کنیم مقادیر ویژه ماتریس A حقیقی اند:

$Av = \lambda v$

$\langle Av, Av \rangle = \bar{v}\bar{A} Av = \bar{v}\bar{A}\lambda v = \lambda \bar{v} Av = \lambda^2 \bar{v} v = \lambda^2 \|v\|^2 \qquad \lambda^2 = \frac{\langle Av, Av \rangle}{\|v\|^2} \geq 0$

$\Rightarrow \lambda \rightsquigarrow$ real

در سوال الف تمرین ب طبق schur decomposition ثابت کردیم ماتریس متقارن ($AA^T = A^TA$) را می‌توان

به صورت $Q^T \Lambda Q$ نوشت که Q یک ماتریس unitary و Λ ماتریس قطری است که روی قطرهای آن

با مقادیر حقیقی

مقادیر ویژه اش قرار گرفته اند. حال باید ثابت کنیم ستون های Q بردارهای ویژه A هستند:

$A = Q \Lambda Q^T$

$AQ = Q\Lambda \qquad A[q_1 \; q_2 \; \cdots \; q_n] = [q_1 \; q_2 \; \cdots \; q_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{bmatrix}$

$= [\lambda_1 q_1 \; \lambda_2 q_2 \; \cdots \; \lambda_n q_n]$

در نتیجه ستون های Q بردارهای ویژه A هستند و چون $Q^{-1} = Q^T$ پس Q، full rank است و n بردار ویژه

مستقل خطی دارد. حال از آنجا که $Q^TQ = I$ در نتیجه

$q_i^T q_i = 1 \; , \; q_i^T q_j = 0 \quad i \neq j$

یعنی ستون های Q دو به دو بر هم عمودند.

ب) اول ثابت می‌کنیم:

$$\lambda_k = \max_{\substack{S \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim(S)=k}} \min_{\substack{x \in S \\ x \neq 0}} \frac{x^T A x}{x^T x}$$

ابتدا باید ثابت کنیم λ_k را می‌توان به دست آورد: از آنجایی که A متقارن است طبق تجزیه طیفی می‌توان آن را به صورت $A = Q \Lambda Q^T$ نوشت که Q ماتریس unitary و Λ ماتریس قطری با مقادیر ویژه روی قطرها است. (ستون های Q یک مجموعه basis برای فضای $\mathbb{R}^n$ هستند. یک فضای $S_k = \text{span}\{q_1, \dots, q_k\}$ در نظر می‌گیریم:

$$\forall x \in S_k \rightarrow x = \sum_{i=1}^{k} (q_i^T x) q_i \rightsquigarrow$$

$$\frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{x^T A x}{x^T Q Q^T x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (q_i^T x)^2}{\sum_{i=1}^{k} (q_i^T x)^2} \geq \frac{\lambda_{min} \sum_{i=1}^{k} (q_i^T x)^2}{\sum_{i=1}^{k} (q_i^T x)^2} = \lambda_k$$

ستون i ام Q

پس یقینا به ازای یک فضای S_k داریم

$$\min_{\substack{x \in S_k \\ x \neq 0}} \frac{x^T A x}{x^T x} = \lambda_k$$

حال باید بگوییم مقدار λ_k بزرگترین مقدار ممکن است. از آنجایی که هر فضای S_k را می‌توان با k بردار q_i (ستون های Q) ساخت در نتیجه هر کدام از این فضاها حداقل شامل یکی از بردارهای $q_k, \dots, q_n$ می‌شود. (در غیر این صورت S_k حداکثر با $k-1$ بردار پایه ساخته می‌شود و $\dim(S_k) < k$ می‌شود) به عبارت دیگر

$$S'_k = \text{span}\{q_k, \dots, q_n\} \qquad \forall S \mid \dim(S) = k : S \cap S'_k \neq \emptyset$$

$$x \in S_k \cap S'_k \rightarrow x = \sum_{i=k}^{n} (q_i^T x) q_i$$

$$\frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{\sum_{i=k}^{n} \lambda_i (q_i^T x)^2}{\sum_{i=k}^{n} (q_i^T x)^2} \leq \frac{\lambda_{max} \sum_{i=k}^{n} (q_i^T x)^2}{\sum_{i=k}^{n} (q_i^T x)^2} = \lambda_k$$

حال می‌دانیم:

$$\min_{\substack{x \in S \\ x \neq 0}} \frac{x^T A x}{x^T x} \leq \min_{\substack{x \in S \cap S'_k \\ x \neq 0}} \frac{x^T A x}{x^T x} \leq \lambda_k$$

در نتیجه λ_k حداقل دسترس است و ماکسیمم مقدار ممکن $\min\limits_{\substack{x \in S \\ x \neq 0}} \frac{x^T A x}{x^T x}$ به صورت $\dim(S) = k$ است در نتیجه:

$$\lambda_k = \max_{\substack{S \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim(S)=k}} \min_{\substack{x \in S \\ x \neq 0}} \frac{x^T A x}{x^T x}$$

برای طرف دوم هم باید به طریق مشابه ثابت کنیم:

$$\lambda_k = \min_{\substack{C \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim(C)=n-k+1}} \max_{\substack{x \in C \\ x \neq 0}} \frac{x^T A x}{x^T x}$$

به درستی می‌آید

$$S_k = \mathrm{span}\{q_k, q_{k+1}, \dots, q_n\} \qquad \frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{\sum_{i=k}^{n} \lambda_i (q_i^T x)^2}{\sum_{i=k}^{n} (q_i^T x)^2} \leq \frac{\lambda_{max} \sum_{i=k}^{n} (q_i^T x)^2}{\sum_{i=k}^{n} (q_i^T x)^2} = \lambda_k$$

$$S'_k = \mathrm{span}\{q_1, \dots, q_k\} \implies \forall S \mid \dim(S) = n-k+1 : S \cap S'_k \neq 0$$

$$x \in S \cap S'_k \longrightarrow \frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (q_i^T x)^2}{\sum_{i=k}^{n} (q_i^T x)^2} \geq \frac{\lambda_{min} \sum_{i=1}^{k} (q_i^T x)^2}{\sum_{i=1}^{k} (q_i^T x)^2} = \lambda_k$$

$$\lambda_k \leq \max_{\substack{x \in S \cap S'_k \\ x \neq 0}} \frac{x^T A x}{x^T x} \leq \max_{\substack{x \in S \\ x \neq 0}} \frac{x^T A x}{x^T x}$$

پس λ_k قابل دسترس است و بین مقادیر ممکن برای $\max_{\substack{x \in S \\ x \neq 0}} \frac{x^T A x}{x^T x}$ کمترین مقدار را دارد. در نتیجه

$$\lambda_k = \min_{\substack{C \subseteq \mathbb{R}^n \\ \dim(C)=n-k+1}} \max_{\substack{x \in C \\ x \neq 0}} \frac{x^T A x}{x^T x}$$

ج) در این سوال باید فرض غیر صفر بودن مقدار ویژه های B را داشته باشیم. از آنجایی که B مقدار ویژه صفر ندارد وارون پذیر است و $B^{-\frac{1}{2}} = Q \Lambda^{-\frac{1}{2}} Q^T$ برای آن تعریف می‌شود (منظور از آنجایی که B وارون دارد

پس full rank است).

$$x = B^{-\frac{1}{2}} y \qquad y = B^{\frac{1}{2}} x$$

یک به یک

$$\max_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T B x} = \max_{y \neq 0} \frac{y^T B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}} y}{y^T y} = \lambda_{max}\left(B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}} v = \lambda_{max} v \qquad B^{-1} A v' = \lambda_{max} v' \implies \lambda_{max}\left(B^{-\frac{1}{2}} A B^{\frac{1}{2}}\right) = \lambda_{max}(B^{-1} A)$$

$$\min\ x^T A x \mid x^T B x = 1$$

(می‌توانستیم از روش ضرایب لاگرانژ هم استفاده کنیم و به همین جواب برسیم)

$$A x = \lambda B x \longrightarrow \lambda_{max}(B^{-1} A)$$

۶) ب) ابتدا این بخش را ثابت می‌کنیم:

$\operatorname{rank}(X_{m\times n}) = r \qquad X = U\Sigma V^T$

$N(X) \subset R^n \qquad \dim N(B) = n-K$

حال ماتریس V_{k+1} را به صورت روبه‌رو درنظر می‌گیریم، $C(V_{k+1}) \subset R^n$ $\qquad V_{k+1} = [v_1 \;\; v_2 \;\; \ldots \;\; v_{k+1}]$

درنتیجه رنک آن برابر $k+1$ است و بردارهای v_1 تا v_{k+1}، $k+1$ ستون اول ماتریس unitary V هستند.

از آنجایی که $\dim N(X) + \dim C(V_{k+1}) = n+1$

درنتیجه اشتراک این دو فضا مخالف $\emptyset$ است. حال $\exists\, w \in \underset{Xw=0}{N(X)} \cap C(V_{k+1})$ و $\|w\|_2 = 1$

$$\sigma_1(A-X) = \|A-X\|_2 \, \|w\|_2 \geq \|(A-X)w\| = \|Aw - \cancel{Xw}\| = \|Aw\|_2 = w^T V \Sigma^2 V^T w = \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i^2 w_i^2$$

کوشی شوارتز

$$\geq \sigma_{min} \underbrace{\sum_{i=1}^{k+1} w_i^2}_{1} = \sigma_{k+1} \overset{*}{=} \|A - A_k\|_2 \longrightarrow$$ بخش ب ثابت شد

اثبات *، $\|A-A_k\|_2 = \sigma_{max}(A-A_k) = \sigma_{max}(U(\Sigma - \Sigma_k)V^T) = \sigma_{max}\left(U \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{k+1,n} \end{bmatrix} V^T\right)$

اثبات با SVD
(حالت جنرال سوال یک)

$= \sigma_{k+1}$

الف) طبق SVD می‌دانیم $\|A\|_F^2 = tr(V\Sigma^2V^T) = tr(\underbrace{V^TV}_{I}\Sigma^2) = tr(\Sigma^2) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$

درنتیجه باید ثابت کنیم: $\|A-X\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(A-X)} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(A-A_k)} = \sqrt{\sum_{i=k+1}^n \sigma_i^2(A)} = \|A-A_k\|_F$

A را به صورت روبه‌رو می‌نویسیم: $A = (A-X) + X$

$$\sigma_i(X) + \sigma_j(A-X) = \sigma_1(X - X_{i-1}) + \sigma_1(A - X - (A-X)_{j-1}) = \|X - X_{i-1}\|_2 + \|A - X - (A-X)_{j-1}\|_2$$

نامساوی مثلثی $\longrightarrow \geq \|X - X_{i-1} + A - X - (A-X)_{j-1}\|_2 = \sigma_1(A - X_{i-1} - (A-X)_{j-1})$

حال داریم: $\operatorname{rank}(X_{i-1}) \leq i-1 \qquad \operatorname{rank}((A-X)_{j-1}) \leq j-1$

$$\operatorname{rank}(X_{i-1} + (A-X)_{j-1}) \leq \operatorname{rank}(X_{i-1}) + \operatorname{rank}((A-X)_{j-1}) = i+j-2 = \operatorname{rank}(A_{i+j-2})$$

حال طبق اثبات قسمت ب داریم $\sigma_1(A-(X_i+(A-X)_j)) \geqslant \sigma_1(A-A_{i+j-2}) = \sigma_{i+j-1}(A)$

حال در $i=k+1$ قرار دهید: $\cancel{\sigma_{k+1}(X)}+\sigma_j(A-X) \geqslant \sigma_{k+j}(A) \Rightarrow \sigma_j^2(A-X) \geqslant \sigma_{k+j}^2(A)$

$\mathrm{rank}(X)=k \Rightarrow 0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(A-X) \geqslant \sum_{i=k+1}^{n} \sigma_i^2(A) \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(A-X)} \geqslant \sqrt{\sum_{i=k+1}^{n} \sigma_i^2(A)}$$

(7) الف) طبق تعریف داریم $\|A\|_2 = \sup(\|Ax\|_2 \mid \|x\| \leqslant 1) \qquad A = U\Sigma V^T$

$$\|Ax\|_2 = x^T A^T A x = x^T V \Sigma U^T U \Sigma V^T x = x^T V \Sigma^2 V^T x \xrightarrow{y=V^T x} = y^T \Sigma^2 y$$

از آنجایی که V، full rank است، $y=V^T x$ تمام بردارها را می‌سازد پس:

$$\|A\|_2 = \sup(\|\Sigma y\|_2 \mid y \leqslant 1) \qquad \|\Sigma y\|_2 = y^T \Sigma y = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i y_i^2 \leqslant \sigma_{max} \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

$$\leqslant \sigma_{max}(A)$$

ب) اثبات * : $\|A\|_2 = \sigma_{max}(A) \qquad \|A^{-1}\| = \sigma_{max}(A^{-1}) \overset{*}{=} \dfrac{1}{\sigma_{min}(A)} \qquad K_A = \dfrac{\sigma_{max}(A)}{\sigma_{min}(A)} \geqslant 1$

$$A^{-1} = U\Sigma^{-1}V^T \rightarrow \|A^{-1}x\|_2 = x^T V \Sigma^{-2} V^T x \qquad V^T x = y$$

$$\|A\|_2 = \sup(\|\Sigma^{-1} y\|_2 \mid y \leqslant 1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i(A)} y_i \leqslant \frac{1}{\sigma_{min}(A)} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant \frac{1}{\sigma_{min}(A)}$$

ج) $Ax=b \qquad A(x-\overset{\neq 0}{L}) = b-\overset{\neq 0}{e} \longrightarrow \cancel{Ax}-AL=\cancel{b}-e \qquad AL=e \qquad L=A^{-1}e$

$$x = A^{-1}B \qquad \frac{\|L\|}{\|x\|} = \frac{\|A^{-1}e\|}{\|A^{-1}b\|} \rightsquigarrow 0 < \frac{1}{\sigma_{max}(A)} \leqslant \frac{\|A^{-1}e\|}{\|e\|} \leqslant \frac{1}{\sigma_{min}(A)} \; *$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\sigma_{min}(A)}} \leqslant \frac{\|b\|}{\|A^{-1}b\|} \leqslant \frac{1}{\frac{1}{\sigma_{max}(A)}} \rightarrow 0 < \sigma_{min}(A) \leqslant \frac{\|b\|}{\|A^{-1}B\|} \leqslant \sigma_{max}(A) \; **$$

$$* , ** \longrightarrow \frac{\sigma_{min}(A)}{\sigma_{max}(A)} \leqslant \frac{\|A^{-1}e\|}{\|e\|} \times \frac{\|b\|}{\|A^{-1}b\|} \leqslant \frac{\sigma_{max}(A)}{\sigma_{min}(A)} \longrightarrow \frac{1}{K_A}\frac{\|e\|}{\|b\|} \leqslant \frac{\|L\|}{\|x\|} \leqslant K_A \frac{\|e\|}{\|b\|}$$

د)

$$(A-E)(x-L) = b-e \longrightarrow \cancel{Ax} - AL - Ex + EL = \cancel{b} - e$$

ویژگی سازگاری و نامساوی مثلثی

$$AL = e - E(x-L) \qquad L = A^{-1}(e - E(x-L)) \Rightarrow \|L\| \leqslant \|A^{-1}\|(\|e\| + \|E\|\,\|x-L\|)$$

نامساوی مثلثی

$$\leqslant \|A^{-1}\|(\|e\| + \|E\|(\|x\| + \|L\|)) \longrightarrow (1 - \|A^{-1}\|\|E\|)\|L\| \leqslant \|A^{-1}\|(\|e\| + \|E\|\|x\|)$$

$$\rightarrow (1 - \|A^{-1}\|\|E\|)\frac{\|L\|}{\|x\|} \leqslant \|A^{-1}\|\left(\frac{\|e\|}{\|x\|} + \|E\|\right) \qquad \|b\| \leqslant \|A\|\|x\|$$

$$\rightarrow (1 - \|A^{-1}\|\|E\|)\frac{\|L\|}{\|x\|} \leqslant \|A^{-1}\|\left(\frac{\|e\|}{\frac{\|b\|}{\|A\|}} + \|E\|\right)$$

$$\left(1 - \kappa_A\frac{\|E\|}{\|A\|}\right)\frac{\|L\|}{\|x\|} \leqslant \kappa_A\left(\frac{\|e\|}{\|b\|} + \frac{\|E\|}{\|A\|}\right)$$

$$\text{if } \kappa_A\frac{\|E\|}{\|A\|} < 1 \longrightarrow \frac{\|L\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\kappa_A}{1 - \kappa_A\frac{\|E\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|e\|}{\|b\|} + \frac{\|E\|}{\|A\|}\right)$$

۶ الف) ابتدا ثابت می‌کنیم بردار های ویژه این ماتریس مستقل خطی اند

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \xrightarrow{\times A} \alpha_1 A v_1 + \alpha_2 A v_2 = \lambda_1 \alpha_1 v_1 + \lambda_2 \alpha_2 v_2 = 0$$

$$\xrightarrow{\times \lambda_1} \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_1 v_2 = 0 \quad {**} \longrightarrow * , ** \rightarrow \alpha_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} \underbrace{v_2}_{\neq 0} = 0 \qquad \alpha_2 = 0$$

و به طریق مشابه به دست می‌آید $\alpha_1 = 0$ پس v_1 و v_2 مستقل خطی اند. با استقرا ثابت می‌شود این برای n بردار نیز

صحیح است.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_n \alpha_i p_i = 0 \;,\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A p_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i p_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_n \alpha_i - \lambda_i \alpha_i) p_i = 0 \quad \therefore \longrightarrow$$

پس مستقل خطی اند

$$AP = P\Lambda \xrightarrow{P \text{ وارون پذیر}} \underline{A = P\Lambda P^{-1}}$$

$$B = A^{-1}BA = ABA^{-1} \longrightarrow \cancel{P}\Lambda^{-1}\underbrace{P^{-1}BP}_{X}\Lambda\cancel{P^{-1}} = \cancel{P}\Lambda\underbrace{P^{-1}BP}_{X}\Lambda^{-1}\cancel{P^{-1}}$$

$$\Lambda^{-1} X \Lambda = \Lambda X \Lambda^{-1} \qquad X = \Lambda^2 X \Lambda^{-2} \qquad X = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n^2} \end{bmatrix}$$

$$x_{ii} = x_{ii} \qquad \underset{i \neq j}{x_{ij}} = \frac{\lambda_i^2}{\lambda_j^2} x_{ij} \qquad \lambda_i^2 \neq \lambda_j^2 \Rightarrow x_{ij} = 0 \Rightarrow$$

X قطری است

$B = PXP^{-1}$ $\quad AB = P\Lambda P^{-1}PXP^{-1} = P\underbrace{\Lambda X}_{\text{قطری}}P^{-1} \longrightarrow$ قطری‌پذیر است

ب) $A = PD_1P^{-1} \quad B = PD_2P^{-1} \quad AB = P\Lambda P^{-1}PXP^{-1} = P\Lambda XP^{-1}$

$BA = PXP^{-1}P\Lambda P^{-1} = PX\Lambda P^{-1} \quad X\Lambda = \Lambda X \longrightarrow \begin{bmatrix} x_{11}\lambda_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_{nn}\lambda_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow AB = BA$

ج) اگر A متقارن و مثبت معین باشد $A^{-\frac{1}{2}}$ به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود: $A = Q\Lambda Q^T \to A^{-\frac{1}{2}} = Q\Lambda^{-\frac{1}{2}}Q^T$

$A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} = (A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^T \longrightarrow A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$ متقارن است $\Rightarrow$ قطری‌پذیر

$A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} = Q'DQ'^T \qquad D = Q'^TA^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}Q'$

Schur decomposition

$P = A^{-\frac{1}{2}}Q' \qquad P^TBP = I \qquad P^TAP = Q'^TQ' = I$