4.11 [1] (b

$$\min \quad 1^T s$$

$$\text{s.t.} \quad -s \le Ax - b \le s$$

$$s \ge 0$$

از آنجایی که برای minimize کردن 1^Ts نیاز داریم تا همه s ها به سمت مقدار خود برسند، شرط $-s \le Ax-b \le s$ باعث می‌شود تا sها برابر $|Ax-b|$ شوند. در نتیجه 1^Ts برابر $\|Ax-b\|_1$ می‌شود.

(e

$$\text{minimize} \quad 1^T s + t$$

$$\text{s.t} \quad -s \le Ax - b \le s$$

$$-t1 \le x \le t1$$ بردار 1

$$s \ge 0 \ , \ t \ge 0$$

شرط $-t1 \le x \le t1$ به ما می‌دهد $\|Ax-b\|_\infty \le t$ و مینیمایز کردن objective به ما شرط برابری را می‌دهد. 1^Ts هم مانند بالا است.

4.12 [2]

$$\text{minimize} \quad \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}$$ $\rightsquigarrow$ lower bound and upperbound constraints

$$b_i + \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_{ji} \qquad i = 0, 1, \dots, n$$ $\rightsquigarrow$ flow conservation constraints

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \max_{i=1,\dots,n} \dfrac{\sum_{k\neq i} G_{ik}P_k + \sigma_i}{G_{ii}P_i} \\ \text{s.t.} & 0 \leq P_i \leq P_{max\,i} \quad i=1,\dots,n \\ & \sum_{k\in K_\ell} P_k \leq P_\ell^{gp} \\ & \sum_{k=1}^{n} G_{ik}P_k \leq P_i^{rc} \quad i=1,\dots,n \end{array}$$

4.20

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{s.t.} & \frac{1}{2}x^T P_i x + q^T x + r \leq t \quad i=1,\dots,K \\ & Ax - b \leq b \end{array}$$

(a 4.28

$\rightsquigarrow$ QCQP

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \frac{1}{2}x^T P x + q^T x + r \\ \text{s.t.} & -\gamma I \leq P - P_0 \leq \gamma I \\ & Ax - b \leq b \end{array} \Bigg\} \quad \frac{1}{2}x^T(P_0 + \gamma I)x + q^T x + c$$

(b

$\rightsquigarrow$ QP

$$\sup_{P\in\mathcal{E}} x^T P x = x^T P_0 x + \sup\Big\{\sum_{i=1}^{K} x^T P_i x u_i \;\Big|\; \|u\|_2 \leq 1\Big\} = x^T P_0 x + \|y\|_2$$

(c

$$y_i = x^T P_i x$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \frac{1}{2}x^T P_0 x + q^T x + r + t \\ \text{s.t.} & \|y\| \leq 2t \\ & Ax \leq b \end{array}$$

$\Rightarrow$ minimize $\quad q^T x + r + t + u$

$$\left\| \begin{bmatrix} P_0^{\frac{1}{2}} x \\ u - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\|_2 \leq u + \frac{1}{2}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} P_i^{\frac{1}{2}} x \\ y_i - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\|_2 \leq y_i + \frac{1}{2}$$

$$\|y\|_2 \leq t \qquad \rightsquigarrow \text{SOCP}$$

$$Ax \leq b$$

$t \geq 0 \quad , \quad t - (Ax+b)^T (P_0 + x_1 P_1 + \cdots + x_n P_n)^{-1} (Ax+b) \geq 0 \iff$ 4.8 (a)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} t & (Ax+b)^T \\ Ax+b & P_0 + x_1 P_1 + \cdots + P_n x_n \end{bmatrix}}_{F(x,t)} \geq 0$$

$\lambda_1(A(x)) \leq t \iff A(x) - tI \preceq 0 \Rightarrow$ minimize $\quad t$ (a 4.43 (5)

s.t. $\quad A(x) - tI \preceq 0$

minimize $\quad t - u \quad \rightsquigarrow \quad -\lambda_m(A(x)) \leq -u \iff A(x) - uI \succeq 0$ (b

$$uI \preceq A(x) \preceq tI$$

minimize $\quad \dfrac{\lambda}{\gamma}$ (c

s.t. $\quad 0 \prec \gamma I \preceq A(x) \preceq \lambda I$

$\Rightarrow$ minimize t

$$\text{s.t.} \quad I \preceq sA_0 + y_1A_1 + \dots + y_nA_n \preceq tI$$

$$s \succeq 0$$

این دو مسأله باهم معادلند زیرا هر جواب در مسأله بالا با تغییر متغیرهای گفته شده می‌تواند به فرم پایین در بیاید یعنی جواب بهینه پایین کوچکتر مساوی جواب معادله بالا است. همچنین اگر در جواب مسأله پایین $S \neq 0$ شد با معکوس تغییر متغیرهای داده شده می‌توانیم آن را به فرم مسأله بالا بنویسیم. اگر $S=0$ شد:

$$I \preceq y_1A_1 + \dots + y_nA_n \preceq tI$$

$$\lambda_1(A(\alpha y)) \preceq \lambda_1(A_0) + t\alpha \qquad \lambda_m(A(\alpha y)) \succeq \lambda_m(A_0) + \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_m} \preceq \frac{\lambda_1(A_0)+t\alpha}{\lambda_m(A_0)+\alpha} \qquad \text{if } \alpha \to \infty : \frac{\lambda_1}{\lambda_m} = t \Rightarrow$$ می‌تواند جواب بالا باشد

یعنی جواب معادله پایین کوچکتر مساوی جواب مسأله بالا می‌شود $\Leftarrow$ این دو مسأله معادلند

(d

$$A = U\Sigma V^T \qquad \Sigma = \Sigma^+ - \Sigma^- : \quad \Sigma^+, \Sigma^- \succeq 0$$

$$\Rightarrow A^+ = U\Sigma^+V^T \qquad A^- = U\Sigma^-V^T \qquad A = A^+ + A^-$$

$$\text{minimize} \quad tr(\Sigma^+) + tr(\Sigma^-)$$

$$\text{s.t.} \quad \Sigma = \Sigma^+ - \Sigma^- \qquad \Sigma = U^TAV$$

$$\Sigma^+, \Sigma^- \succeq 0$$

جواب بهینه زمانی مینیمایز می‌شود که Σ^+ شامل λهای مثبت و Σ^- شامل منفی λهای منفی شود که عبارت برابر می‌شود:

$$tr(\Sigma^+) + tr(\Sigma^-) = \Sigma|\lambda_i|$$

4.44 [6 a]

a) f_i ها کانوکس هستند پس $f_i(x)\le 0$ قیدهای کانوکس هستند. $Ax=b$ هم شرط برابری و به صورت ترکیب افاین است پس این قید هم کانوکس است. objective هم جمع یک تابع کانوکس و یک تابع افاین است و کانوکس است. $\Leftarrow$ مسئله کانوکس است.

b) $$g(x) \text{ concave} \Rightarrow g(z)+\nabla g^T(z)(x-z)\ge g(x)$$

$$f(x_{k+1})+g(x_{k+1}) \le f(x_{k+1})+g(x_k)+\nabla g^T(x_k)(x_{k+1}-x_k) \overset{*}{\le} f(x_k)+g(x_k)$$

اثبات $*$: $f(x_{k+1})+\nabla g^T(x_k)(x_{k+1}-x_k)$ جواب مسئله بهینه‌سازی داده شده در مرحله $K+1$ ام است در نتیجه از مقدار هر جایگذاری دیگری برای x_{k+1} کوچکتر مساوی است. در معادله قرار می‌دهیم $x=x_k$ و داریم:

$$f(x_{k+1})+\nabla g^T(x_k)(x_{k+1}-x_k) \le f(x)+\nabla g^T(x_k)(x_k-x_k) = f(x) \checkmark$$

4.6 [7 a]

a) 1) این تابع convex نیست. می‌توان برای آن مثال نقض زد: $f(x)=\frac{|0.9-x|}{1-|x|}$

اما quasiconvex است زیرا $\frac{\|Ax-b\|_1}{1-\|x\|_\infty}\le t \xRightarrow[t\le 0\;\;\emptyset]{t>0} \underbrace{\|Ax-b\|_1+t\|x\|_\infty}_{\text{convex}}\le t$ که sublevel set یک تابع کانوکس است.

2) تابع کانوکس است زیرا تابع $\frac{u^2}{1-t}$ یک تابع کانوکس غیر نزولی روی تک تک عناصر است اگر با توابع $\|Ax-b\|_1^2$ و $\|x\|_\infty$ که دو تابع کانوکس هستند ترکیب شود همچنان کانوکس می‌ماند. (به شرط $0\le t\le 1$ که در اینجا برقرار است)

b) 1) می‌توانیم مسئله را به صورت روبه‌رو تبدیل کنیم:

$$\text{minimize} \quad \frac{\|Ax-b\|_1}{t} \rightsquigarrow \left\|A\frac{x}{t}-\frac{b}{t}\right\|_1$$

$$\text{s.t.} \quad t\le 1-\|x\|_\infty$$
$$t>0$$

حال می‌توانیم آن را به صورت روبه‌رو تبدیل کنیم:

$\alpha = \frac{1}{t} \quad y = \frac{x}{t}$

$$\text{minimize} \quad \|Ay - b\alpha\|$$
$$\text{s.t.} \quad \|y\|_\infty \leq \alpha - 1$$
$$\alpha > 0$$

مشابه سوال اول می‌توانیم آن را به LP تبدیل کنیم:

$$\text{minimize} \quad 1^T s$$
$$\text{s.t.} \quad -s \leq Ay - b\alpha \leq s$$
$$-(\alpha-1)\mathbb{1} \leq y \leq (\alpha-1)\mathbb{1}$$

2) می‌توانیم آن را به صورت SOCP بنویسیم

$$\text{minimize} \quad t$$
$$\text{s.t.} \quad -s \leq Ax - b \leq s$$
$$-\alpha\mathbb{1} \leq x \leq \alpha\mathbb{1}$$
$$\left\| \begin{matrix} 1^T s \\ \frac{1}{2}(1-\alpha-t) \end{matrix} \right\|_2 \leq \frac{1}{2}(1-\alpha+t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{(1^T s)^2}{1-s} \leq t$$
$$t \geq 0, \quad \alpha \leq 1$$

8) a) اگر داشته باشیم: $n_1 A + n_2 B \succ 0$: $P = (n_1 A + n_2 B)^{-\frac{1}{2}} Q'$ * $\rightsquigarrow$ $n_1 A + n_2 B = Q^T D Q$

* طبق تمرین سری اول

$(n_1 A + n_2 B)^{-\frac{1}{2}} = Q^T D^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow P = Q^T D^{-\frac{1}{2}} Q'$

که نتیجه می‌دهد

$P^T B P = D' \quad , \quad P^T (n_1 A + n_2 B) P = I$

داریم: $P^T A P = \frac{I}{n_1} - \frac{n_2}{n_1} D' \Rightarrow$ قطری

$n_1 P^T A P + n_2 P^T B P = n_1 P^T A P + n_2 D' = I$

$\Rightarrow A = P^{-T} \underbrace{\left(\frac{I}{n_1} - \frac{n_2}{n_1} D'\right)}_{D''} \underbrace{P^{-1}}_{P'}$ $\quad B = P^{-T} D' P^{-1}$ $\rightsquigarrow$ همزمان قطری‌پذیر

$$\text{minimize} \quad x^T A x - 2b^T x \qquad = \qquad \text{minimize} \quad x^T P'^T \tilde{D} P' x - 2b^T x$$

$$\text{s.t.} \quad x^T B x = 0 \qquad\qquad \text{s.t.} \quad x^T P'^T D' P' x = 0$$

(6

$$P'x \odot P'x = y \qquad x^T P'^T \Lambda_A P' x = \sum \lambda_i \times (P'x)_i^2 = \sum \lambda_i y_i = \lambda^T y$$

$$b^T x = b^T P'^{-1} P' x = c^T P' x = \sum c_i (P'x)_i \rightsquigarrow \max b^T x = \max |C| \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \text{minimize} \quad \lambda^T y - 2|C|\sqrt{y}$$

$$\text{s.t.} \quad y \geqslant 0$$

$$\beta^T y = 0$$