تمرین دوم

40010 4964

آیلین پرسته

2.9 a)

$V = \{x \in R^n \mid \|x - x_0\|_2 \leqslant \|x - x_i\|_2 \quad 1 \leqslant i \leqslant K\}$

توان دو $\rightsquigarrow (x^T - x_0^T)(x - x_0) = x^T x - 2x_0^T x + x_0^T x_0 \leqslant (x^T - x_i^T)(x - x_i) = x^T x - 2x_i^T x + x_i^T x_i$

$\Rightarrow 2(x_i^T - x_0^T)x \leqslant \|x_i\|^2 - \|x_0\|^2 \quad \Longrightarrow \quad A = 2\begin{bmatrix} (x_1 - x_0)^T \\ \vdots \\ (x_K - x_0)^T \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \|x_1\|_2^2 - \|x_0\|_2^2 \\ \vdots \\ \|x_K\|_2^2 - \|x_0\|_2^2 \end{bmatrix}$

$\rightsquigarrow \{x \mid Ax \leqslant b\}$

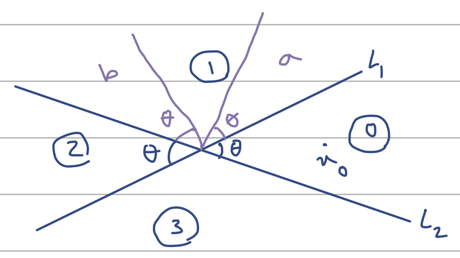
b)

$\text{if} \quad A = \lambda^T \times 2\begin{bmatrix} (x_1 - x_0)^T \\ \vdots \\ (x_K - x_0)^T \end{bmatrix} \qquad b = \lambda^T \times \begin{bmatrix} \|x_1\|_2^2 - \|x_0\|_2^2 \\ \vdots \\ \|x_K\|_2^2 - \|x_0\|_2^2 \end{bmatrix} \qquad \lambda > 0$

$b_i = \lambda_i (\|x_i\|_2^2 - \|x_0\|_2^2) \qquad A_i = 2\lambda_i (x_i^T - x_0^T)$

$\|x_i\|_2^2 = \frac{b_i}{\lambda_i} + \|x_0\|_2^2 = \left\|\frac{A_i^T}{2\lambda_i} + x_0\right\|_2^2 = \left(\frac{A_i}{2\lambda_i} + x_0^T\right)\left(\frac{A_i^T}{2\lambda_i} + x_0\right) = \frac{\|A_i^T\|_2^2}{4\lambda_i^2} + \frac{A_i x_0}{\lambda_i} + \|x_0\|_2^2$

$4\lambda_i b_i = \|A_i^T\|_2^2 + 4\lambda_i A_i x_0 \qquad \lambda_i = \frac{\|A_i^T\|_2^2}{4(b_i - A_i x_0)} \qquad x_i = \frac{A_i^T}{2\lambda_i} + x_0$



c) نادرست. ما هر نقطه دلخواه x_0 در ناحیه 0 در نظر بگیریم $(\theta < 60)$

آینه این نقاط نسبت به l_1 در ناحیه a می‌افتد و هر نقطه دلخواه x_2 در ناحیه 2

را در نظر بگیریم آینه آن نسبت به l_2 در ناحیه b می‌افتد پس هیچ نقطه اشتراکی برای x در ناحیه 1 پیدا نخواهیم کرد.

2.12 a)

$\text{half space} \rightarrow \{x \mid a^T x \leqslant b\}$ یا $\{x \mid a^T x \geqslant b\}$

می‌دانیم half space یک مجموعه محدب است و تابع اشتراک محدب‌ها محدب‌بودن را حفظ می‌کند.

$\text{slab} = \{x \mid a^T x \leqslant \beta\} \cap \{x \mid a^T x \geqslant \alpha\} \rightsquigarrow \text{Convex}$

b) در بالا اثبات کردیم $\{x \mid \alpha \le a^T x \le \beta\}$ یک مجموعه کانوکس است. اگر a ها را برابر e_i در نظر بگیریم

داریم که $\{x \mid \alpha_i \le x_i \le \beta_i ,\ i=1,\dots,n\}$ اشتراک تعدادی slab است که اشتراک کانوکسیتی را حفظ می‌کند

در نتیجه کانوکس است.

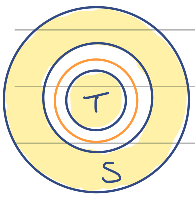
c) مانند بالا اشتراک دو نیم صفحه است در نتیجه کانوکس است.

d) در سوال 2.9 ثابت کردیم ناحیه voronoy را می‌توان به صورت polyhedron نوشت و می‌دانیم polyhedron

یک مجموعه کانوکس است. صورت سوال به صورت اشتراک چندین ناحیه voronoy با $K=1$ است در نتیجه

کانوکس است.

e) در صورتی که مجموعه های S و T اشتراک داشته باشند مجموعه لزوما کانوکس نمی‌شود. یا در صورتی که مجموعه



T بین اعضای مجموعه S باشد. نقاط خواسته شده خارج خط نارنجی هستند که قطعا کانوکس نیست.

f) کانوکس است. می‌توانیم مجموعه را به صورت اشتراک چند مجموعه کانوکس دیگر بنویسیم.

$$\{x \mid x + S_2 \subseteq S_1\} = \bigcap_{s\in S_2} \{x \mid x+s \in S_1\} = \bigcap_{s \in S_2} \{x \mid x \in S_1 - s\} = \bigcap_{s\in S_2} (S_1 - s)$$

که از آنجایی که S_1 یک مجموعه محدب است $S_1 - s$ هم محدب است.

g) کانوکس است: $\{x \mid \|x-a\|_2 \le \theta \|x-b\|_2\}$

$$(x^T - a^T)(x-a) = x^Tx - 2x^Ta + a^Ta \le \theta^2 (x^T - b^T)(x-b) = \theta^2 x^T x - 2\theta^2 x^T b + \theta^2 b^T b$$

$$\xrightarrow{\theta\neq 1} x^Tx - 2x^T \frac{(a-\theta^2 b)}{1-\theta^2} \le \frac{a^Ta - \theta^2 b^T b}{1-\theta^2} \rightarrow \left\| x - \frac{a-\theta^2 b}{1-\theta^2}\right\|_2^2 \le \frac{\|a\|_2^2 - \theta^2 \|b\|_2^2}{1-\theta^2} + \left\|\frac{a-\theta^2 b}{1-\theta^2}\right\|_2^2$$

$\rightarrow$ if $\theta=1$: $\{x \mid 2(a-b)^T x \leq \|b\|_2^2 - \|a\|_2^2\}$ $\rightsquigarrow$ half space $\rightarrow$ convex

if $0 \leq \theta < 1$: $\{x \mid \|x - \frac{a-\theta^2 b}{1-\theta^2}\|_2^2 \leq \frac{\|a\|_2^2 - \theta^2\|b\|_2^2}{1-\theta^2} + \|\frac{a-\theta^2 b}{1-\theta^2}\|_2^2\}$ $\rightsquigarrow$ norm ball $\rightarrow$ convex

$C = \{y \mid g^T y \leq h, g \neq 0\}$ $\quad f^{-1}(C) = \{x \mid \frac{Ax+b}{c^Tx+d} \in C, c^Tx+d>0\}$ (a 2.17)

$f^{-1}(C) = \{x \mid g^T(\frac{Ax+b}{c^Tx+d}) \leq h, c^Tx+d>0\} = \{x \mid g^TAx + g^Tb \leq (c^Tx+d)h, c^Tx+d>0\}$

$= \{x \mid (g^TA - hc^T)x \leq hd - g^Tb, c^Tx+d>0\}$ $\rightarrow$ convex

$C = \{y \mid Gy \leq h\}$ $\quad f^{-1}(C) = \{x \mid \frac{Ax+b}{c^Tx+d} \in C, c^Tx+d>0\}$ (b

$f^{-1}(x) = \{x \mid \frac{GAx - Gb}{c^Tx+d} \leq h, c^Tx+d>0\} = \{x \mid GAx - \underbrace{c^Tx\, h}_{hc^Tx} \leq dh + Gb, c^Tx+d>0\}$

$\rightsquigarrow$ convex

$C = \{y \mid y^T P^{-1} y \leq 1, P \in S^n_{++}\}$ $\quad f^{-1}(C) = \{x \mid (\frac{Ax+b}{c^Tx+d})^T P^{-1} (\frac{Ax+b}{c^Tx+d}) \leq 1, c^Tx+d>0\}$ (c

$f^{-1}(C) = \{x \mid (x^TA^T + b^T)(P^{-1}Ax + P^{-1}b) \leq (c^Tx+d)^2, c^Tx+d>0\}$

$f^{-1}(C) = \{x \mid x^T A^TP^{-1}Ax + x^TA^TP^{-1}b + b^TP^{-1}Ax + b^TP^{-1}b \leq x^Tcc^Tx + d^2 + 2dc^Tx, c^Tx+d>0\}$

$f^{-1}(C) = \{x \mid x^T(A^TP^{-1}A - cc^T)x + 2x^T(A^TP^{-1}b - dc) \leq d^2 - b^TP^{-1}b, c^Tx+d>0\}$

$f^{-1}(C) = \{x \mid \frac{Ax+b}{c^Tx+d} \in C, c^Tx+d>0\} = \{x \mid \frac{Ax+b}{c^Tx+d}[A_1 \dots A_n] \leq B, c^Tx+d>0\}$ (d

$\frac{Ax+b}{c^Tx+d}[A_1 \dots A_n] \leq B \rightarrow Ax[A_1 \dots A_n] \leq (c^Tx+d)B - b[A_1 \dots A_n]$ $\rightsquigarrow$

$Ax[A_1 \dots A_n] - c^TxB = ([A_1 \dots A_n]A - Bc^T)x \leq Bd - b[A_1 \dots A_n]$

$f^{-1}(C) = \{x \mid (\underbrace{[A_1 \dots A_n]A}_{} - \underbrace{Bc^T}_{})x \leq Bd - b[A_1 \dots A_n], c^Tx+d>0\}$

$[[A_1 \dots A_n]a_1 \dots [A_1 \dots A_n]a_n]$ $\quad [Bc_1 \dots Bc_n]$

ستون ام A

2.20 اثبات راهنمایی: $S=\{x \mid Ax=b\}$ $\quad \forall x\in S: \; c^T x = d \iff c = A^T\lambda ,\; d = b^T\lambda$

اثبات طرف اول: $\forall x\in S: c=A^T\lambda ,\; d=b^T\lambda \implies c^T x = d$

$c^T x - d = \lambda^T A x - \lambda^T b = \lambda^T(Ax-b) \rightsquigarrow \forall x\in S: \; Ax-b=0 \implies \lambda^T(Ax-b)=0 \implies c^T x = d$ ✓

اثبات طرف دوم: $\forall x\in S: c^T x = d \implies c = A^T\lambda ,\; d = b^T\lambda$

طبق تمرین سری اول داریم: $\forall x\in S: \; x = x_c + x_n \quad x_c \in \text{rowspace}(A)$ and $x_n \in \text{nullity}(A)$

$\hookrightarrow Ax_c = b$

$\forall x_n \in S - x_c = N(A): c^T x_c + c^T x_n = d + c^T x_n = d \qquad c^T x_n = 0 \implies c \perp N(A)$

$\implies c \in \text{rowspace } A \implies c = A^T\lambda \qquad c^T x_c = \lambda^T A x_c = \lambda^T b = d \implies d = \lambda^T b = b^T\lambda$ ✓

حال می‌دانیم جواب های معادله $Ax=b$ یک افاین ست در نتیجه یک محدب است را تشکیل می‌دهند و مجموعه

$C=\{x \mid Ax=b\}$ $\qquad D=\{x \mid x>0\}$ $\qquad \{x \mid x>0\}$ نیز یک مجموعه محدب باز است.

می‌دانیم در صورتی معادله ما جواب ندارد که این دو مجموعه با هم اشتراک نداشته باشند. از انجایی که دو مجموعه محدب

داریم که یکی از آنها باز است، (طبق صفحه 50 کتاب) داریم این دو مجموعه اشتراک ندارند اگر و تنها اگر یک hyperplane

وجود داشته باشد که این دو را از هم جدا کند. بنابراین

$\forall x\in C: \quad v^T x - w \leq 0 \qquad , \qquad \forall y\in D: \quad v^T y - w \geq 0$

$\forall y>0: \; v^T y \geq w \implies v \geq 0 ,\; v \neq 0$ and $w \leq 0$

$C \rightarrow$ affine $\qquad \forall x\in C: \; v^T x - w \rightarrow$ affine

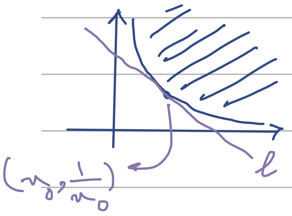
$\implies \forall x\in C: v^T x - w \leq 0 \rightarrow \forall x' \in \overset{\nearrow \text{affine set}}{F}: \; x' \leq 0 \implies F = \{a \text{ non positive constant vector}\}$

$\implies \forall x\in C: \; Ax=b ,\; v^T x = w + w'$ زیرا در غیر این صورت F شامل اعضای مثبت هم می‌شود.

طبق راهنمایی: $\implies v = A^T\lambda \quad w+w' = b^T\lambda \qquad w, w' \leq 0 \rightarrow w+w' \leq 0 \rightsquigarrow b^T\lambda \leq 0 ,\; A^T\lambda \geq 0 ,\; A^T\lambda \neq 0$

بنابراین اگر λای پیدا شود که در شرایط بالا صدق کند این دو با هم اشتراکی ندارند و در غیر این صورت اشتراک دارند و معادله جواب دارد.

2.24 a) از آنجایی که مجموعه محدب است می‌دانیم در هر نقطه از boundary آن وجود دارد hyperplane ای که $a^T x \le a^T x_0$. حال اگر بخواهیم $\{x \mid x_1 x_2 = 1\}$ را به صورت اشتراک این half space ها بیان کنیم داریم:



$$\ell \to y = \frac{-1}{x_0^2} x + \frac{2}{x_0} \rightsquigarrow x + x_0^2 y = 2x_0 \qquad a = \begin{bmatrix} 1 \\ x_0^2 \end{bmatrix}$$

$$ax \ge ax_0$$

$\Leftarrow$ مجموعه به صورت روبه‌رو می‌شود: $\bigcap_{x_0 \in bd(S)} \{x \mid x_1 + x_0^2 x_2 = 2x_0\}$

b) $S = \{x \in R^n \mid \|x\|_\infty \le 1\} \xrightarrow{boundary} \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = 1 \qquad |x_i| = 1,\ \forall j \ne i: |x_j| \le 1$

از آنجایی که norm ball ها محدب است پس در هر نقطه y در boundary آن وجود دارد aای که: $a^T x \le a^T y$

$$\forall x \in S: a^T x \le a^T y \qquad |y_i| = 1,\ \forall j \ne i: |y_j| \le 1$$

$$S = \bigcap_{y \in bd(S)} \{x \in R^n \mid a^T x \le a^T y\} \qquad a_i = \begin{cases} -1 & y_i = -1 \text{ یا } a_i < 0 \\ 1 & y_i = 1 \text{ یا } a_i > 0 \\ 0 & -1 < y_i < 1 \end{cases}$$

2.33 a) proper cone، ۴ ویژگی دارد. آنها را اثبات می‌کنیم:

1) convex: $\quad x, y \in K_{m+} \qquad \underset{0 \le \theta \le 1}{\theta x + (1 - \theta y)} = \theta(x_1, \dots, x_n) + (1-\theta)(y_1, \dots, y_n)$

$= (\theta x_1 + (1-\theta) y_1, \dots, \theta x_n + (1-\theta) y_n) \qquad$ if $y_i \ge y_j \qquad (1-\theta) y_i \ge (1-\theta) y_j$

if $x_i \ge x_j \qquad \theta x_i \ge \theta x_j \Rightarrow \theta x_i + (1-\theta) y_i \ge \theta x_j + (1-\theta) y_j \Rightarrow \theta x + (1-\theta) y \in K_{m+}$

پس محدب است.

← همچنین حد هر سری از آن داخل K_m^+ می‌باشد

② closed: $\overline{K}_{m^+} = \{x \mid x_1 < x_2 \cdots < x_n\} \cup \{x \mid \exists i : x_i < 0\}$. مکمل آن باز است پس خودش بسته است.

③ solid: $\mathrm{int}\, K_{m^+} = \{x \mid x_1 > x_2 - - - > x_n > 0\} \neq \emptyset$ نقاط داخلی دارد

④ pointed (if $x \in K_{m^+}$, $-x \in K_{m^+} \Rightarrow x = 0$): $x \in K_{m^+} \Rightarrow x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$

$-x \in K_{m^+} \Rightarrow -x_1 \geq -x_2 \geq - - \geq -x_n \geq 0 \rightsquigarrow x_1 \leq x_2 \cdots \leq x_n \Rightarrow x_i - x_i \geq 0 \Rightarrow x_i = 0$

درنتیجه خطی در آن وجود ندارد.

$\Leftarrow$ K_{m^+} یک proper cone است.

(b

$K^*_{m^+} = \{y \mid x^T y \geq 0 \text{ for all } x \in K_{m^+}\}$

با استفاده از راهنمایی:

$x^T y = (x_1 - x_2) y_1 + (x_2 - x_3)(y_1 + y_2) + \cdots + x_n (y_1 + \cdots + y_n) \geq 0$

$\forall x \in K^+_m: x_i - x_{i+1} \geq 0$ $\qquad x^T y = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} - x_n \\ x_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_1 + \cdots + y_n \end{bmatrix} = x'^T y'$

از آنجایی که به ازای هر x' داریم $x' \geq 0$ درنتیجه $y' \geq 0$ است.

$y_1 \geq 0 \quad y_1 + y_2 \geq 0 \quad - - - \quad y_1 + y_2 + \cdots + y_n \geq 0 \Rightarrow K^*_{m^+} = \{y \mid y_1 \geq 0, y_1 + y_2 \geq 0, \ldots, y_1 + y_2 + \cdots + y_n \geq 0\}$

Convex Cone: $\forall x_1, x_2 \in C,\ \theta_1, \theta_2 \geq 0 \rightarrow \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C$ (a 2.5

اثبات convex cone بودن $C \cap D$:

$\forall \theta_1, \theta_2 \geq 0$

if $x_1, x_2 \in C \cap D \Rightarrow \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C,\ \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in D$

$\Rightarrow \forall \theta_1, \theta_2 \geq 0 \quad \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C \cap D \Rightarrow$ $C \cap D$ is a convex cone

اثبات convex cone بودن $C^* + D^*$:

$C^*: \{y \mid x^T y \geq 0 \text{ for every } x \in C\} \Rightarrow$ convex cone

if $x_1, x_2 \in C^* + D^* \Rightarrow x_1 = c_1 + d_1,\ x_2 = c_2 + d_2 \mid c_1, c_2 \in C^*, d_1, d_2 \in D^* \longrightarrow \forall \theta_1, \theta_2 \geq 0$

$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 = \theta_1 c_1 + \theta_1 d_1 + \theta_2 c_2 + \theta_2 d_2 \xrightarrow[\text{convex cone}]{C^* \text{ and } d^*} \theta_1 c_1 + \theta_2 c_2 \in C^*,\ \theta_1 d_1 + \theta_2 d_2 \in D^*$

$\Rightarrow \theta_1 x_1+\theta_2 x_2 \in C^*+D^* \mid \theta_1,\theta_2 \geq 0 \Rightarrow C^*+D^*$ is a convex cone

$\forall x\in C^*+D^* \quad x=c+d \mid c\in C^*,\ d\in D^*$ (b

$c\in C^*: \forall \hat{x}\in C: \hat{x}^T c\geq 0 \qquad d\in D^*: \forall \hat{x}\in D: \hat{x}^T d\geq 0$

$x=c+d \rightsquigarrow \forall \hat{x}\in C\cap D: \hat{x}^T x\geq 0 \Rightarrow x\in (C\cap D)^* \Rightarrow C^*+D^*\subseteq (C\cap D)^*$

(c طبق a می‌دانیم $C\cap D$, C^*+D^* درصورت convex cone بسته هستند پس $(C^*+D^*)^{**}=C^*+D^*$

و $(C\cap D)^{**}=C\cap D$. در ابتدا ثابت می‌کنیم $A\subseteq B \Rightarrow B^*\subseteq A^* \xrightarrow{S^{**}=S} A\subseteq B \Leftrightarrow B^*\subseteq A^*$

$A\subseteq B: \quad x\in B^*: y^T x\geq 0$ for every $y\in B \xrightarrow{A\subseteq B} y^T x\geq 0$ for every $y\in A \Rightarrow x\in A^*$

$\Rightarrow B^*\subseteq A^*$

در نتیجه داریم: $(C\cap D)^*\subseteq C^*+D^* \Leftrightarrow (C^*+D^*)^*\subseteq C\cap D$

$x\in (C^*+D^*)^* : x^T y\geq 0$ for every $y\in C^*+D^* \qquad y=c+d \mid c\in C^*,\ d\in D^*$

$x^T c+x^T d\geq 0 \mid \forall c\in C^*, d\in D^* \xrightarrow[0\in C^*,\ D^*]{C^*,\ D^* \to \text{convex cones}} x^T d\geq 0$ for every $d\in D^* \Rightarrow$

$x\in D^{**}=D \quad , \quad x^T c\geq 0$ for every $c\in C^* \Rightarrow x\in C^{**}=C \Rightarrow x\in C\cap D$

$\Rightarrow (C^*+D^*)^*\subseteq C\cap D \Rightarrow (C\cap D)^*\subseteq C^*+D^*$

طبق b, c داریم: $C^*+D^*\subseteq (C\cap D)^* \ , \ (C\cap D)^*\subseteq C^*+D^* \Rightarrow (C\cap D)^*=C^*+D^*$

$A^T=[a_1,\dots,a_n]$

(d $V=\{x \mid Ax\geq 0\}=\bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{\{x \mid a_i^T x\geq 0\}}_{V_i} \qquad a_i \longrightarrow$ ستون ام A^T

طبق بالا داریم: $\left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right)^*=\sum_{i=1}^{n} V_i^* \qquad V_i^*=\{y \mid x^T y\geq 0,$ for every $x \mid a_i^T x\geq 0\}$

$V_i^*=\{v_i a_i \mid v_i\geq 0\} \qquad \sum_{i=1}^{n} V_i^* = \sum_{i=1}^{n} \{v_i a_i \mid v_i\geq 0\}=\{A^T v \mid v\geq 0\}$

(a 2.6

$C^\circ = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid y^T x \leq 1 \text{ for all } x \in C \}$

$c_1 \in C^0 , c_2 \in C^0 \Rightarrow c_1^T x \leq 1 , c_2^T x \leq 1 \text{ for all } x \in C$

$\forall x \in C : (\theta c_1 + (1-\theta) c_2)^T x = \theta c_1^T x + (1-\theta) c_2^T x \leq \theta + 1 - \theta = 1 \Rightarrow \theta c_1 + (1-\theta) c_2 \in C^\circ$ ($0 \leqslant \theta \leqslant 1$)

$\Rightarrow C^\circ \rightsquigarrow$ convex

(b

$K^\circ = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid y^T x \leqslant 1 \text{ for all } x \in K \}$ $\quad$ K is a cone $\to$ if $x \in K : \theta x \in K \mid \theta \geqslant 0$

$K^\circ = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \theta y^T x \leqslant 1 : \forall \theta \geqslant 0 , x \in K \} \Rightarrow K^\circ = \{ y \mid y^T x \overset{*}{\leqslant} 0 \text{ for all } x \in K \} = -K^*$

اثبات *: اگر x ای وجود داشته باشد که $y^T x \geqslant 0$ باشد $\theta y^T x \geqslant 0$ می‌شود که θ می‌تواند تا بی‌نهایت بزرگ شود و شرط $\theta y^T x \leqslant 1$ برای برخی x های عضو K برقرار نمی‌شود.

(c

$C^\circ = \{ y \mid x^T y \leqslant 1 \text{ for all } \|x\| \leqslant 1 \} \Rightarrow C^\circ = \{ y \mid \|y\|_* \leqslant 1 \} \rightsquigarrow$ unit ball of dual norm

(d

$C = \{ x \mid 1^T x = 1 , x \succeq 0 \}$ $\quad$ $C^\circ = \{ y \mid x^T y \leqslant 1 \text{ for all } x \in C \}$

$x^T y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1 , \sum x_i = 1 \Rightarrow \max (y_i) = 1$

$C^\circ = \{ y \mid 1 - y \succeq 0 \}$ $\longrightarrow$ positive semidefinite cone and affine function

(e

C is closed and convex with $0 \in C$ $\quad$ $C^\circ = \{ y \mid x^T y \leqslant 1 \text{ for all } x \in C \}$

$(C^\circ)^\circ = \{ z \mid y^T z \leqslant 1 \text{ for all } y \in C^\circ \}$

if $x \in C : \forall y \in C^\circ : x^T y \leqslant 1 \Rightarrow x \in (C^\circ)^\circ \Rightarrow C \subseteq (C^\circ)^\circ$

if $x \in (C^\circ)^\circ$ and $x \notin C$: $\exists a \neq 0, b \mid \forall c \in C : a^T c < b , a^T x > b$

convex $\quad$ $\hookrightarrow$ page 49

$0 \in C \Rightarrow b > 0 \Rightarrow \forall c \in C : \frac{a^T}{b} c < 1 \Rightarrow \frac{a^T}{b} \in C^\circ \quad , \quad \frac{a^T}{b} x > 1^{*}$

$x \in (C^\circ)^\circ \Rightarrow \forall c \in C^\circ : c^T x \leq 1 \qquad c^T = \frac{a^T}{b} \qquad \frac{a^T}{b} x \leq 1^{**}$

$*, ** \rightsquigarrow \lightning \Rightarrow \forall x \in (C^\circ)^\circ : x \in C \Rightarrow (C^\circ)^\circ \subseteq C$

$C \subseteq (C^\circ)^\circ , (C^\circ)^\circ \subseteq C \Rightarrow C = (C^\circ)^\circ$