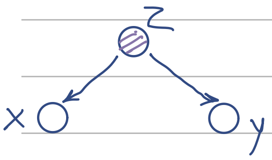
تمرین اول

400104964 آیلین رستمی

$$H(X;Y) = \sum_y p(y) \sum_x p(x|y) \log p(x|y)$$

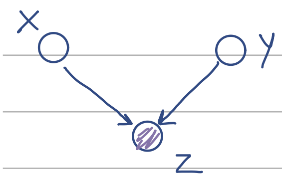


۱) الف) ۱) این مسئله را می‌توان با بیزینت مدل کرد.

X و Y می‌توانند به هم وابسته باشند اما با دانستن Z وابستگی آنها رفع شود.

مثلا X و Y هردو تابعی از Z باشند. X را برابر 2Z و Y را برابر $\frac{1}{2}Z$ قرار می‌دهیم. اگر Z را بدانیم I برابر صفر

و در غیر این صورت برابر $H(X)$ می‌شود. در این حالت $I(X;Y|Z) < I(X;Y)$



۲) اگر بخواهیم مسئله را با بیزینت مدل کنیم داریم:

در این حالت X و Y بدون دانستن Z می‌توانند از هم مستقل باشند اما با دانستن Z

بین آنها وابستگی ایجاد شود. برای مثال $Z = X \otimes Y$. در اینجا اگر Z را ندانیم X و Y به طور مستقل می‌توانند با

$H(X) = H(X|Y) \Rightarrow I(X;Y) = 0$

باشند اما اگر Z را داشته باشیم با دانستن X، Y هم به دست می‌آید و I برابر $H(X)$ می‌شود. در نتیجه:

ب) ۱) از chain rule استفاده می‌کنیم:

$$H(X,Y,Z) = H(Z|Y,X) + \underbrace{H(X|Y) + H(Y)}_{H(X,Y)} \quad *$$

$$\Rightarrow H(X,Y,Z) - H(X,Y) = H(Z|Y,X)$$

$$H(X,Z) = H(Z|X) + H(X) \quad *$$

$$\Rightarrow H(X,Z) - H(X) = H(Z|X)$$

حال طبق conditioning reduces entropy داریم:

$$H(Z|X,Y) \leq H(Z|X) \quad **$$

$$\rightsquigarrow H(X,Y,Z) - H(X,Y) \leq H(X,Z) - H(X)$$

اثبات * :

$$\overset{X=(X_1,\dots,X_n)}{H(X)} = E[-\log p(X)] = E[-\log p(X_1)p(X_2|X_1)\cdots p(X_n|X_1,\dots,X_{n-1})]$$

$$= E[-\log p(X_1)] + E[-\log p(X_2|X_1)] + \cdots + E[-\log p(X_n|X_1,\dots,X_{n-1})]$$

$$= H(X_1) + H(X_2|X_1) + \cdots + H(X_n|X_1,\dots,X_{n-1})$$

اثبات ** :

$$H(X|Y) = -\sum_y p(y) \sum_x p(x|y) \log p(x|y) \longrightarrow -\sum_i p_i f(x_i)$$

$$H(X) = -\sum_x p(x) \log p(x) = \sum_x \Big(\sum_y p(y)p(x|y)\Big) \log \Big(\sum_y p(y)p(x|y)\Big) \longrightarrow f\Big(\sum p_i x_i\Big)$$

از آنجایی که تابع $x \log x$ کانوکس است داریم:

$$-H(X|Y) \geq -H(X) \rightsquigarrow H(X|Y) \leq H(X)$$

در اینجا اگر Y از $Z|X$ مستقل باشد $H(Z|X)$ با $H(Z|X,Y)$ برابر می‌شود و تساوی رخ می‌دهد.

ج) ابتدا از عبارات زیر به روابط استفاده می‌کنیم:

$$1)\ I(X;Y) = \sum_{x,y} p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \implies p(X;Y) = p(Y;X)$$

$$2)\ I(X;Y|Z) = \sum_{x,y} p(x,y|Z) \log \frac{p(x,y|Z)}{p(x|Z)p(y|Z)} \implies p(X;Y|Z) = p(Y;X|Z)$$

حال با استفاده از روابط بالا به سراغ مسئله اصلی می‌رویم:

$$I(X;Z|Y) = H(Z|Y) - H(Z|X,Y)$$

$$I(Z;Y|X) = H(Z|X) - H(Z|X,Y)$$

$$\cancel{H(Z|Y)} - H(Z|X,Y) + H(Z) - \cancel{H(Z|Y)} = H(Z) - H(Z|X) + H(Z|X) - H(Z|X,Y) =$$

$$H(Z;X) + H(Z;Y|X) = H(X;Z) + H(Z;Y|X)$$

در نتیجه تساوی همیشه برقرار است.

ج) 1)

$$I(Z;Y) = H(Z) - H(Z|Y) = -\sum p(z) \log p(z) + \sum p(y) \sum p(z|y) \log p(z|y)$$

$$p(Z) = \sum_{y \in D(y)} \frac{1}{1+e^{-0.5(y-5)}}\, p(y)$$

در اینجا فرض می‌کنیم توزیع y به این صورت است که به احتمال $\frac{1}{3}$، 4 یا 5 یا 6 ریوارد دریافت می‌کنیم.

$$\Rightarrow p(Z=A) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+e^{0.5}} + \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+e^{-0.5}}\right) = \frac{2+1+e^{0.5}+2e^{0.5}}{2+2e^{0.5}} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = 0.5$$

$$p(Z=B) = \sum_y \frac{1-p(Z=A|y=y)}{2}\, p(y) = \frac{1}{2}\left(\sum p(y) - \sum p(Z=A|y=y)p(y)\right) = \frac{1}{2}(1-p(Z=A)) = \frac{1}{4}$$

$$p(Z=C) = \frac{1}{6}\left(\sum p(y) - \sum p(Z=A|y=y)p(y)\right) = \frac{1}{6}(1-0.5) = \frac{1}{12}$$

$$p(Z=D) = \frac{1}{3}\left(\sum p(y) - \sum p(Z=A|y=y)p(y)\right) = \frac{1}{3}(1-0.5) = \frac{1}{6}$$

$$H(Z) = -\frac{1}{6}\log\frac{1}{6} + -\frac{1}{12}\log\frac{1}{12} + -\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} + -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = 1.73$$

$$-H(Z|Y) = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{1+e^{0.5}}\log\frac{1}{1+e^{0.5}} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{e^{0.5}}{1+e^{+0.5}}\log\frac{e^{0.5}}{1+e^{+0.5}}\right) + \frac{1}{3}\times\left(\frac{e^{0.5}}{2+2e^{0.5}}\log\frac{e^{0.5}}{2+2e^{0.5}} + \frac{1}{4}\log\frac{1}{4}\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{2+2e^{0.5}}\log\frac{1}{2+2e^{0.5}}\right) + \frac{1}{3}\times\left(\frac{e^{0.5}}{6+6e^{0.5}}\log\frac{e^{0.5}}{6+6e^{0.5}} + \frac{1}{12}\log\frac{1}{12} + \frac{1}{6+6e^{0.5}}\log\frac{1}{6+6e^{0.5}}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{e^{0.5}}{3+3e^{0.5}}\log\frac{e^{0.5}}{3+3e^{0.5}}\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{6}\log\frac{1}{6} + \frac{1}{3+3e^{0.5}}\log\frac{1}{3+3e^{0.5}}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1+e^{0.5}}\log\frac{1}{1+e^{0.5}} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{e^{0.5}}{1+e^{0.5}}\log\frac{e^{0.5}}{1+e^{0.5}}\right)$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\times\log\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\log\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\log\frac{1}{3}\right)\left(\overset{1}{\cancel{\frac{e^{0.5}}{1+e^{0.5}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1+e^{0.5}}}}\right) = -0.97 - 0.49 = -1.46$$

$$I(Z;y) = 0.27$$

ب) $I(y;Z)$ به ما می‌گوید که اگر Z را بدانیم چه میزان اطلاعات در مورد y دریافت می‌کنیم. اگر y و Z مستقل باشند این مقدار صفر و هرچقدر به هم وابسته‌تر باشند I هم بیشتر می‌شود. در اینجا وابستگی action و ریوارد دریافتی را برای ما مشخص می‌کند.

ج)

$$D_{KL}(p(x,y,Z)\,\|\,p(x)p(y)p(Z)) = \sum_{x,y,Z} p(x,y,Z)\log\frac{p(x,y,Z)}{p(x)p(y)p(Z)}$$

$$= \sum_{x,y,Z} p(x,y,Z)\log p(x,y,Z) - \sum_{x,y,Z} p(x,y,Z)\log p(x) - \sum_{x,y,Z} p(x,y,Z)\log p(y) - \sum_{x,y,Z} p(x,y,Z)\log p(Z)$$

$$= -H(x,y,Z) - \sum_x p(x)\log p(x) - \sum_y p(y)\log p(y) - \sum_z p(z)\log p(z) =$$

$$-H(x,y,Z) + H(x) + H(y) + H(Z)$$

ه)

$I(X_1;X_3)+I(X_2;X_4)-I(X_1;X_4)-I(X_2;X_3)=$

$\cancel{H(X_1)}-H(X_1|X_3)+\cancel{H(X_2)}-H(X_2|X_4)-\cancel{H(X_1)}+H(X_1|X_4)-\cancel{H(X_2)}+H(X_2|X_3)$

$=H(X_1|X_4)-H(X_1|X_3)+H(X_2|X_3)-H(X_2|X_4)$ *

طبق chain rule داریم:

$H(X_2|X_4)=H(X_1,X_2|X_4)-\underbrace{H(X_1|X_2,X_4)}_{H(X_1|X_2)}$

$H(X_2|X_3)=H(X_1,X_2|X_3)-\underbrace{H(X_1|X_2,X_3)}_{H(X_1|X_2)}$

$H(X_1|X_3)=H(X_1,X_2|X_3)-H(X_2|X_1,X_3)$

$H(X_1|X_4)=H(X_1,X_2|X_4)-H(X_2|X_1,X_4)$

* $\cancel{H(X_1,X_2|X_4)}-H(X_2|X_1,X_4)-\cancel{H(X_1,X_2|X_3)}+H(X_2|X_1,X_3)+\cancel{H(X_1,X_2|X_3)}-\cancel{H(X_1|X_2)}$

$-\cancel{H(X_1,X_2|X_4)}+\cancel{H(X_1|X_2)}=H(X_2|X_1,X_3)^{*}-H(X_2|X_1,X_4)\overset{\text{markov property}}{=}H(X_2|X_1,X_3,X_4)^{*}-H(X_2|X_1,X_4)$

طبق Condition reduces entropy داریم:

$H(X_2|X_1,X_3,X_4)\leq H(X_2|X_1,X_4)$

در نتیجه:

$I(X_1;X_3)+I(X_2;X_4)-(I(X_1;X_4)+I(X_2;X_3))\leq 0$

2 الف)

$\nabla f(x^*)=0$ and f is convex $\Rightarrow$ $f(\alpha y+(1-\alpha)x)\leq \alpha f(y)+(1-\alpha)f(x)$

برای تابع محدب طبق first order condition داریم:

$f(y)\geq f(x)+(y-x)\nabla f(x)$ *

اثبات *:

$f(\alpha y+(1-\alpha)x)\leq \alpha f(y)+(1-\alpha)f(x) \rightarrow f(x)+\dfrac{f(x+\alpha(y-x))-f(x)}{\alpha}\leq f(y)$

$\Rightarrow f(x)+(y-x)\dfrac{f(x+\alpha(y-x))-f(x)}{\alpha(y-x)}=f(x)+(y-x)\nabla f(x)\leq f(y)$ ✓

حال از آنجایی که $\nabla f(x)$ در نقطه بحرانی صفر است در نتیجه:

$\forall y:\ f(y)\geq f(x^*)+(y-x)\times 0=f(x^*)$

پس مقدار تابع در x^* کوچکتر مساوی مقدار تابع در سایر نقاط دامنه است در نتیجه نقطه کمینه است.

ب) تابع $f(x,y,z)$ مانوس است، domain آن محدود نیست پس upper bound آن بی‌نهایت است.

$$z = x+y+1 \qquad z^2 = x^2+y^2+1+2xy+2x+2y = x^2+y^2 \rightsquigarrow y = \frac{-1-2x}{2x+2} \quad , z = \frac{2x^2+2x-1-2x+2x+2}{2x+2}$$

$$z = \frac{2x^2+2x+1}{2x+2} = x + \frac{1}{2x+2}$$

$$g(x) = f(x,y,z) = x^2 + x^2 + \frac{1}{4x^2+8x+4} + \frac{2x}{2x+2} + \frac{4x^2+4x+1}{4x^2+8x+4} = 2x^2 + \frac{8x^2+8x+2}{4x^2+8x+4} = 2x^2 + \frac{(2x+1)^2}{2(x+1)^2}$$

$$g'(x) = 4x + \frac{8(2x+1)(x+1)^2 - 4(x+1)(2x+1)^2}{4(x+1)^4} = 4x + \frac{\cancel{4x^2}+6x+2-\cancel{4x^2}-4x-1}{(x+1)^3} = 4x + \frac{2x+1}{(x+1)^3} = 0 \quad , x \neq -1$$

$$-2x-1 = (x^3+3x^2+3x+1)4x = 4x^4+12x^3+12x^2+4x \rightsquigarrow 4x^4+12x^3+12x^2+6x+1 =$$

$$(2x^2+2x+1)(2x^2+4x+1) = 0 \qquad x = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = -1+\frac{\sqrt{2}}{2} \rightsquigarrow f(x,y,z) = g(x) = 2\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{(-2+\sqrt{2}+1)^2}{2\times\frac{1}{2}} = 6-4\sqrt{2} \rightsquigarrow \text{min}$$

$$x = -1-\frac{\sqrt{2}}{2} \rightsquigarrow f(x,y,z) = g(x) = 2\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{(-2-\sqrt{2}+1)^2}{2\times\frac{1}{2}} = 6+4\sqrt{2}$$

ج)

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(x) && \\ &\text{s.t.} && g_i(x) \leqslant 0 && i=1,\dots,n \\ & && h_i(x) = 0 && i=1,\dots,m \end{aligned} \qquad L(x,\mu,\lambda) = \inf_x \{ f(x) + \mu^T g(x) + \lambda^T h(x) \quad \mu \geqslant 0$$

فرض می‌کنیم $\tilde{x}$ یک نقطه feasible باشد یعنی در آن نقطه $g(x) \leqslant 0$, $h(x) = 0$ است.

$$L(\tilde{x},\mu,\lambda) = f(\tilde{x}) + \underbrace{\cancel{\mu^T g(\tilde{x})}}_{\leqslant 0} + \lambda^T \overset{0}{\cancel{h(\tilde{x})}} \leqslant f(\tilde{x})$$

درنتیجه داریم:

$$g(\mu,\lambda) = \inf_{x \in D} L(x,\mu,\lambda) \leqslant L(\tilde{x},\mu,\lambda) \leqslant f(\tilde{x})$$

از آنجایی که این نامعادله برای هر نقطه feasible برقرار است داریم:

$$g(\mu,\lambda) \leqslant \min_{x \in \text{feasible set}} f(x) = p^*$$

مثالی که برابر نمی‌شوند:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(x) = x^3 \\ &\text{s.t.} && x \geqslant 2 \end{aligned} \qquad \rightsquigarrow p^* = 8$$

$$L(x,\lambda) = x^3 + \lambda(2-x) \qquad g(\lambda) = \inf_x (x^3 - \lambda x + 2) \qquad 3x^2 = \lambda \qquad x = \frac{1}{3}\sqrt{\lambda} \qquad \max g(\lambda) = 2$$

$$2 \neq 8$$

د)

$$\text{minimize} \quad -\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha_i + x_i)$$

$$\text{s.t.} \qquad x \succeq 0 \quad , \quad 1^T x = 1$$

$$L(x,\lambda,v) = -\sum_{i=1}^{n} \log(\alpha_i + x_i) - \lambda^T x + v(1^T x - 1)$$

$$g(\lambda, v) = \inf_x L(x,\lambda,v) \qquad \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{-1}{\alpha_i + x_i} - \lambda_i + v = 0 \qquad v = \frac{1}{\alpha_i + x_i} + \lambda_i$$

طبق شرایط KKT، $\lambda^T x$ باید برابر صفر باشد. در نتیجه:

$$\forall i : \lambda_i x_i = 0$$

$$x_i = 0 \rightsquigarrow v = \frac{1}{\alpha_i} + \lambda_i$$

$$\Rightarrow x_i = \max\{0, \frac{1}{v} - \alpha_i\}$$

$$\lambda_i = 0 \rightsquigarrow v = \frac{1}{\alpha_i + x_i}$$

طبق شرط $1^T x = 1$ می‌توانیم v^* را به دست بیاوریم:

$$\sum_{i=1}^{n} \max\{0, \frac{1}{v} - \alpha_i\} = 1$$

ه)

$$f(x) = \int p(x) \log(x)\, dx \qquad h_1(x) = \int p(x)\,dx = 1 \qquad h_2(x) = \int p(x)(x-\mu)^2 dx = \sigma^2$$

$$L(p,\lambda_0,\lambda_1) = \int p(x)\log p(x)\,dx + \lambda_0\left(\int p(x)\,dx - 1\right) + \lambda_1\left(\int p(x)(x-\mu)^2 dx - \sigma^2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p(x)} = 1 + \log p(x) + \lambda_0 + \lambda_1 (x-\mu)^2 = 0 \qquad \log p(x) = -\lambda_0 - \lambda_1 (x-\mu)^2 - 1$$

$$p(x) = e^{-\lambda_0 - \lambda_1 (x-\mu)^2 - 1} \qquad \int p(x)\,dx = \int e^{-\lambda_0 - \lambda_1 (x-\mu)^2 - 1} dx = e^{-\lambda_0 - 1}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1}} = 1 \;*$$

$$\int p(x)(x-\mu)^2 dx = \int e^{-\lambda_0 - 1 - \lambda_1 (x-\mu)^2} (x-\mu)^2 dx = e^{-\lambda_0 - 1} \int e^{-\lambda y^2} y^2 dy\, dy$$

$$= e^{-\lambda_0 - 1} \times \frac{d}{d\lambda_1}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1^3}} \times \underbrace{e^{-\lambda_0 - 1 *}}_{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\pi}}} = \sigma^2 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2\sigma^2} \qquad e^{-\lambda_0 - 1} = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \rightsquigarrow$$ توزیع نرمال

3) الف) طبق تعریف توزیع ایستا

$$Tv = v \qquad T \rightsquigarrow \text{transition function}$$

$$v_i = v_i \times \left(1 - \frac{|N(i)|}{m}\right) + \sum_{j \in N(i)} v_j \times \frac{1}{m} \Rightarrow v_i \times \frac{|N(i)|}{m} = \frac{1}{m}\sum_{j \in N(i)} v_j \Rightarrow$$

برای هر i داریم: $v_i = \frac{1}{N(i)} \sum_{j\in N(i)} v_j$

از استیت با کوچکترین v_i شروع می‌کنیم: $\forall j \neq i : v_i \leq v_j$

از طرفی از آنجایی که v_i میانگین v_j همسایه‌هایش است پس یا باید همه v_j ها باهم برابر و مساوی v_i باشند و یا یکی از v_j ها از v_i کمتر باید باشد که با فرض اینکه v_i کوچکترین است در تناقض است پس: $\forall j\in N(i) : v_i = v_j$ بقیه

به همین صورت جلو می‌رویم و از آنجایی که این زنجیره مارکوف غیرقابل کاهش است از استیت شروع می‌توان به همه استیت‌ها رسید پس همه v_i ها باهم برابرند. از آنجایی که جمع v_i ها باید مساوی یک شود: $v = \frac{1}{n}$ $\quad \sum v_i = nv = 1$

پس احتمال همه استیت‌ها در توزیع مانا برابر $\frac{1}{n}$ است که توزیع مانا یکنواخت است.

ب) تخمین‌گر unbiased است:

استفاده از توزیع باینومیال

$$E\left(\frac{|P|\times 2^n}{N}\right) = 2^n \times \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} i\times p(i) = \frac{2^n}{N}\times\frac{n^*}{2^n}\times N = n^*$$

اما واریانس آن زیاد است:

$$Var\left(\frac{|P|\times 2^n}{N}\right) = E\left(\frac{|P|^2\times 2^{2n}}{N^2}\right) - E\left(\frac{|P|\times 2^n}{N}\right)^2$$

$$E\left(\frac{|P|^2\times 2^{2n}}{N^2}\right) = \frac{2^{2n}}{N^2}\times\sum_{i=1}^{N} i^2 p(i) = \frac{2^{2n}}{N^2}\times\sum_{i=1}^{N} i^2\times\left(\frac{n^*}{2^n}\right)^i\times\left(1-\frac{n^*}{2^n}\right)^{N-i}\binom{N}{i}$$

$$= \frac{\cancel{2^{2n}}}{N^{\cancel{2}}}\times\frac{n^*}{\cancel{4^n}}\times\cancel{N}\left(n^*(N-1)+2^n\right) = n^{*2} - \frac{n^{*2}}{N} + \frac{2^n n^*}{N}$$

$$Var\left(\frac{|P|\times 2^n}{N}\right) = 2^n\times\frac{n^*}{N} - \frac{n^{*2}}{N} = \frac{n^*}{N}\left(2^n - n^*\right)$$

از آنجایی که معمولاً $2^n \gg n^*$ پس واریانس خیلی زیاد است و باید به تعداد زیاد نمونه برداری کنیم تا واریانس به حد نرمالی برسد.

مانند first visit monte Carlo که تعدادی از sample ها را در نظر می‌گیرد.

ج) ۱) در اینجا در هر استیت به احتمال $\frac{1}{N(n)}$ به هر کدام از همسایه‌ها و به احتمال 0 به خودش برمی‌گردد. زنجیره غیرقابل کاهش و بدون تناوب است در نتیجه به فرم مسأله الف تبدیل می‌شود پس توزیع مانای آن یکنواخت است.

* در اینجا چون هیچ وقت شرط کوله پشتی نقض نمی‌شود هر استیت n همسایه دارد و با جایگذاری در قسمت الف: $N = N(n) = n$

2) این قسمت هم می‌توانیم با قسمت الف مدل کنیم. در اینجا استیت‌ها فقط استیت‌هایی هستند که شرط لوله پشتی را نقض می‌کنند. در هر استیتی که باشیم به احتمال $\frac{1}{n}$ به هر یک از همسایه‌هایش می‌رویم و به احتمال $1-\frac{N(n)}{n}$ در همان استیت باقی می‌مانیم. از طرفی در هر استیتی هم که باشیم به تمام استیت‌های دیگر می‌توانیم برویم. در نتیجه یک توزیع مانای یکنواخت برای تمام استیت‌ها داریم و حالت مطلوبی نداریم که در بی‌نهایت به آن نتوانیم برسیم. پس اگر این عملیات را نزدیک به بی‌نهایت بار تکرار کنیم با شمردن تعداد استیت‌ها در آن موقع، می‌توانیم به تخمینی از تعداد حالت‌های مطلوب مسئله لوله پشتی برسیم.

4) الف)

$$p(S|same) = \alpha_{ss} e^{\lambda_s S} \longrightarrow \int p(S|same)\,dS = 1 \rightsquigarrow \alpha_{ss} = \frac{1}{\int_0^1 e^{\lambda_s S} dS} = \frac{\lambda_s}{e^{\lambda_s}-1}$$

$\lambda_s > 0 \Rightarrow$ هر مقدار S بیشتر باشد احتمال آن هم بیشتر است. چون عکس‌هایی هستند باید احتمال امتیاز بیشتر بیشتر باشد که اینجا رخ می‌دهد ← منطقی است.

$$p(S|differ) = \alpha_{ds} e^{-\lambda_d S} \longrightarrow \int p(S|differ) = 1 \rightsquigarrow \alpha_{ds} = \frac{1}{\int_0^1 e^{-\lambda_d S} ds} = \frac{\lambda_d}{1-e^{-\lambda_d}}$$

$\lambda_d > 0 \Rightarrow$ هر مقدار S کمتر باشد احتمال بیشتری دارد. چون عکس‌ها متفاوت‌اند همین رفتاری منطقی است.

ب) احتمال مورد نظر برابر است با:

$$p(j\,same|S_1 \ldots S_n) = \frac{p(S_1,\ldots,S_n|j\,same)\,p(j\,same)}{p(S_1,\ldots,S_n)}$$

$$= \frac{p(S_1,\ldots,S_n|j\,same)\,p(j\,same)}{\sum_{i=1}^{n} p(S_1,\ldots,S_n|i\,same)\,p(i\,same)} \quad *$$

$$p(S_1 \ldots S_n|j\,same) = p(S_j|same) \times \prod_{i\neq j} p(S_i|different) = \alpha_{ss} e^{\lambda_s S_j} \times \alpha_{ds}^{n-1} e^{-\lambda_d\left(\sum_{j\neq i} S_i\right)}$$

$$= \alpha_{ss}\,\alpha_{ds}^{n-1}\, e^{S_j(\lambda_s+\lambda_d)}\, e^{-\lambda_d\left(\sum_{i=1}^{n} S_i\right)}$$

$$* = \frac{e^{S_j(\lambda_s+\lambda_d)}}{\sum_{i=1}^{n} e^{S_i(\lambda_s+\lambda_d)}}$$

قسمت ج در انتها

5 الف)

$$P(X|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\log P(X|\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{-(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{n}{2}\log 2\pi\sigma^2$$

$$\frac{d}{d\mu} P(X|\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(X_i-\mu)}{2\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right) = 0$$ مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \qquad E(\hat{\mu}) = \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{1}{n} \times n\mu = \mu \Rightarrow \text{unbiased}$$

$$\frac{d}{d\sigma^2} = P(X|\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\hat{\mu})^2}{2\sigma^4} - \frac{n}{2} \times \frac{2\pi}{2\pi\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu})^2 - \frac{n}{2\sigma^2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu})^2 = n\sigma^2 \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu})^2$$

$$E[\hat{\sigma}^2] = \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu})^2\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu+\mu-\hat{\mu})^2\right] =$$

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\mu}-\mu)(X_i-\mu) + \frac{1}{n}\times n(\mu-\hat{\mu})^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[(X_i-\mu)^2] - 2E[(\hat{\mu}-\mu)^2]$$

$$+E[(\hat{\mu}-\mu)^2] = \frac{1}{n}\times n(E[(X_i-\mu)^2]) - E[(\hat{\mu}-\mu)^2] = \sigma^2 - E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right)^2\right] =$$

$$\sigma^2 - \frac{1}{n^2}\operatorname{var}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i}_{\text{IID}}\Big) = \sigma^2 - \frac{1}{n^2}\times n\sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \rightsquigarrow \text{bias} = \frac{1}{n}\sigma^2$$

تخمین ما برای μ نااریب و برای σ^2 بایاس است.

ب)

$$\theta_{MLE} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}}\, L(\theta; x) \qquad T(\theta)_{MLE} = \underset{T(\theta)}{\operatorname{argmax}}\, L^*(\eta; x)$$

طبق تعریف induced likelihood function داریم:

$$L^*(\eta; x) = \sup_{\{\theta : T(\theta)=\eta\}} L(\theta; x)$$

$$L^*(\hat{\eta}; x) = \sup_{\eta} L^*(\eta; x) = \sup_{\eta}\sup_{\{\theta : T(\theta)=\eta\}} L(\theta; x) = \sup_{\theta} L(\theta; x) = L(\hat{\theta}; x) = \sup_{\{\theta : T(\theta)=T(\hat{\theta})\}} L(\theta; x) = L^*(T(\hat{\theta}); x)$$

در نتیجه $\hat{\eta}$ یا همان تخمین بیشینه درست‌نمایی $T(\theta)$ برابر است با $T(\hat{\theta})$ که $\hat{\theta}$ تخمین بیشینه درست‌نمایی θ است.

طبق این اثبات برای تخمین بیشینه درست‌نمایی $\frac{1}{\mu^2+1}$ پس داریم:

$$\frac{1}{\hat{\mu}^2+1} = \frac{1}{\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 + 1}$$

$$\sqrt{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\hat{\mu})^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}$$

ج) 1) $E_q[\hat{\mu}_{IS}] = E_q[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{p(x_i)}{q(x_i)}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_q[f(x_i)\frac{p(x_i)}{q(x_i)}]$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_D f(x_i)\times\frac{p(x_i)}{q(x_i)}\times q(x_i)\,dx_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_p[f(x)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu \rightsquigarrow$ unbiased

2) $var(\hat{\mu}_{IS}) = var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{p(x_i)}{q(x_i)}) \overset{iid}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(f(x_i)\frac{p(x_i)}{q(x_i)}) = \frac{1}{n} var(f(x_i)\frac{p(x_i)}{q(x_i)})$

$= \frac{1}{n}(E[(f(x_i)\frac{p(x_i)}{q(x_i)})^2] - \mu^2] = \frac{1}{n}\int \frac{f(x)p(x) - q(x)\mu}{q(x)}\,dx$

اگر تمام مقادیر $f(x)$ مثبت یا همگی منفی باشند $q(x) = \frac{|f(x)|p(x)}{E[|f(x)|]}$ به ما واریانس صفر را می‌دهد. در غیر این صورت ثابت

می‌شود این تابع به ما یک lower bound از σ^2 می‌دهد:

$\mu^2 + \sigma^2_{q^*} = \int_D \frac{f(x)^2 p(x)^2}{|f(x)|p(x)} \times E[|f(x)|]\,dx = E[|f(x)|]^2 \overset{\text{ینسن*}}{=} E[\frac{|f(x)|p(x)}{q(x)}]^2 \underset{\text{cauchy schwarts}}{\leq} E[\frac{f(x)^2 p(x)^2}{q(x)^2}]$

$= \mu^2 + \sigma^2_q$

حال اگر $q^*(x)$ بسیار نزدیک صفر شود و $p(x)$ به آن اندازه نزدیک نباشد، $\sigma^2_{q^*}$ می‌تواند به بی‌نهایت میل کند

3) $E[\hat{\mu}_{N-IS}] = E[\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} w_i}] = E[\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i}]$

$\mu = E[\hat{\mu}_{IS}] = E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)]$ $\qquad E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i] = E[w] = \int_D \frac{p(x)}{q(x)} q(x)\,dx = 1$

$\Rightarrow \mu = \frac{E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)]}{E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i]} \neq E[\hat{\mu}_{N-IS}] \rightsquigarrow$ biased

$\lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_{N-IS} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i} \overset{LLN}{=} \frac{E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)]}{E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i]} = \mu$ ← در بی‌نهایت نااریب است

4) داریم: $\frac{m\sum_{i=1}^{n} w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = m \leq \hat{\mu}_{N-IS} \leq \frac{M\sum_{i=1}^{n} w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = M$ $\qquad var(\hat{\mu}_{N-IS}) = E[(\hat{\mu}_{N-IS} - E[\hat{\mu}_{N-IS}])^2]$

حال تابع روبه‌رو را تعریف می‌کنیم و فرض می‌کنیم $m \leq X \leq M$: $\qquad \underbrace{g(y) = E[(X-y)^2]}_{MSE}$

داریم:

$Var(X)=g(E(X))$

می‌خواهیم نشان دهیم $E(X)$ یک کمینه برای تابع $g(y)$ است.

$$g(y)=E[(X-y)^2]$$

$$=E[X^2]+y^2-2yE[X] \rightsquigarrow \text{convex function}$$

$$\frac{d}{dy}g(y)=2y-2E[X]=0 \Rightarrow y=E[X] \Rightarrow \forall y:\ g(E[X])=Var(X)\leq g(y)$$

حال اگر وسط بازه یعنی $y=\frac{m+M}{2}$ باشد داریم:

$$g\left(\frac{m+M}{2}\right)=E\left[\left(X-\left(\frac{m+M}{2}\right)\right)^2\right]$$

$$=\int_m^M \left(x-\frac{m+M}{2}\right)^2 p(x)dx$$

چون $\left(x-\frac{m+M}{2}\right)^2$ یک تابع convex است پس ماکسیمم آن در نقاط ابتدایی یا انتهایی آن است:

$$g\left(\frac{m+M}{2}\right)\leq \max_{x=m,M}\left(x-\frac{m+M}{2}\right)^2 \cancel{\int_m^M p(x_i)dx_i} = \frac{(M-m)^2}{4}$$

$$\Rightarrow Var(X)\leq g\left(\frac{m+M}{2}\right)\leq \frac{(M-m)^2}{2} \rightsquigarrow Var(X)\leq \frac{(M-m)^2}{2}$$

حال می‌دانیم که μ_{N-IS} یک متغیر تصادفی با کمینه m و بیشینه M است پس در نامساوی بالا صدق می‌کند. در نتیجه:

$$Var(\mu_{N-IS})\leq \frac{(M-m)^2}{4} \Rightarrow \text{popoviciu's inequality}$$

5) الف)

$$\mathcal{H}=\int_2^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{w(x)}\times w(x)dx \qquad w(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad 2\leq x_i<\infty:\ \frac{f(x_i)}{w(x_i)}=\frac{e^{-\frac{x_i^2}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_i^2}{2}}}=\sqrt{2\pi}$$

$$\bar{\mathcal{H}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\frac{f(x_i)}{w(x_i)}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\frac{0}{w(x_i)}=0$$

⇜ تخمین ما چون هیچ‌کدام از نمونه‌ها در بازه داده شده نیستند

ب) به نمونه‌های داده شده 3 اضافه می‌کنیم داریم:

$$S=\{3.26, 2.73, 1.44, 3.41, 3.4, 2.98, 3.1, 1.31, 2.72, 0.47\}$$

$$w(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2}} \qquad 2\leq x_i<\infty:\ \frac{f(x_i)}{w(x_i)}=\frac{e^{-\frac{x_i^2}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i^2)-(6x_i)}{2}}}=\sqrt{2\pi}\,e^{4.5-3x}$$

$$\bar{\mathcal{H}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\frac{f(x_i)}{w(x_i)}=\frac{1}{10}e^{4.5}\left(e^{-3(3.26+2.73+3.41+3.4+2.98+3.1+2.72)}\right)=0.0215$$

با توجه به مقدار واقعی انتگرال (0.057) به تخمین بهتری رسیدیم زیرا داده‌ها از توزیع بهتری برای تخمین تابع برای مقادیر بزرگتر از دو می‌آیند و این توزیع وزن بیشتری به مقادیر x درون بازه مطلوب به ما می‌دهد.

۶) الف)

$$D_{KL}(p\|q) = E\left(\log\frac{p(x)}{q(x)}\right) = E\left[-\log\frac{q(x)}{p(x)}\right]$$

برای توابع convex داریم: $E(f(X)) \geq f(E[X])$

و می‌دانیم تابع $-\log x$ یک تابع کانوکس است (مشتق دوم آن برابر $\frac{1}{x^2}$ است). در نتیجه:

$$D_{KL}(p\|q) = E\left[-\log\frac{q(x)}{p(x)}\right] \geq -\log E\left[\frac{q(X)}{p(X)}\right] = -\log\int\frac{q(x)}{\cancel{p(x)}}\cancel{p(x)}\,dx = -\log 1 = 0$$

در نتیجه D_{KL} همیشه از صفر بزرگتر است. زمانی که $p(X)=q(X)$ باشد

$$\frac{q(x)}{p(x)} = 1 \rightsquigarrow \log\frac{p(x)}{q(x)} = 0$$

$\Rightarrow -E[0] = 0 \rightsquigarrow$ به مقدار بیشینه می‌رسیم

ب)

$$D_{KL}(q(Z)\|p(Z|X)) = E_q\left(\log\frac{q(Z)}{p(Z|X)}\right) = E_q[\log q(Z)] - E_q\left[\log\frac{p(X,Z)}{p(X)}\right]$$

$$= E_q[\log q(Z)] - E_q[\log p(X,Z)] + \underbrace{E_q[\log p(X)]}_{\text{که وابسته به q نیست}} = p(X) - (E_q[\log p(X,Z)] - E_q[\log q(Z)])$$

ج) مسئله بهینه‌سازی مورد نظر به صورت روبه‌رو است:

maximize $L(q)$

s.t. $\int_{z_i} q(z_i)\,dz_i = 1 \quad 1 \leq i \leq n$

که در آن

$$L(q) = E_q[\log p(X,Z)] - E_q[\log q(Z)], \quad q(Z) = \prod_{i=1}^{n} q_i(z_i)$$

$$L(q) = E_q[\log p(X,Z) - \log q(Z)] = \int_Z (\log p(X,Z) - \log q(Z))\,q(Z)\,dZ$$

$$= \int_Z \left(\log p(X,Z) - \sum_{i=1}^{n}\log q_i(z_i)\right)\prod_{i=1}^{n} q_i(z_i)\,dZ = \int_{z_i} q_i(z_i)\left[\int_{z_{j\neq i}}\left(\log p(X,Z) - \sum_{j=1}^{n} q_j(z_j)\right)\prod_{j\neq i} q_j(z_j)\,dz_j\right]dz_i$$

$$= \int_{z_i} q_i(z_i)\int_{z_{-i}}(\log p(X,Z) - \log q_i(z_i))\prod_{j\neq i} q_j(z_j)\,dz_{-i}\,dz_i - \cancel{\int_{z_i} q_i(z_i)\,dz_i}\,\underbrace{\int_{z_{-i}}\sum_{j\neq i}\log q_j(z_j)\prod_{j\neq i} q_j(z_j)\,dz_{-i}}_{c_i \,\leftarrow\, \text{ثابت نسبت به } q_i} \,*$$

* انتگرال ها جدا شوند چون عبارت درونی از بیرونی مستقل بود.

$$= \int_{z_i} q_i(z_i)\int_{z_{-i}}\log p(X,Z)\prod_{i\neq j} q_j(z_j)\,dz_{-i}\,dz_i - \int_{z_i} q_i(z_i)\log q_i(z_i)\cancel{\int_{z_{-i}}\prod_{i\neq j} q_j(z_j)\,dz_{-i}}\,dz_i - c_i$$

$$= \int_{z_i} q_i(z_i)\,E_{i\neq j}[p(X,Z)]\,dz_i - \int_{z_i} q_i(z_i)\log q_i(z_i)\,dz_i + c_i$$

حال مسئله بهینه سازی را حل می کنیم:

$$g(\lambda)=\inf L(q)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\int_{z_i} q_i(z_i)dz_i-1\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i(z_i)}\left\{L(q)+\lambda\left(\int_z q(z)dz-1\right)\right\}=0 \longrightarrow E_{q_{i\neq j}}[p(X,Z)]-\log q_i(z_i)-1+\lambda_i=0$$

$$\Rightarrow \log q_i(z_i)=E_{q_{i\neq j}}[p(X,Z)]+\text{constant}$$

د) از کتاب بیشاپ کمک گرفتیم. داریم:

$$p(X,Z,\mu,\Lambda,\pi)=p(\pi)p(Z|\pi)p(\mu,\Lambda)p(X|Z,\mu,\Lambda)$$

$$L(q)=E_q\left[\log\frac{p(X,Z,\mu,\Lambda,\pi)}{q(Z,\mu,\Lambda,\pi)}\right]=E_q[\log p(\pi)]+E_q[\log p(Z|\pi)]+E_q[\log p(\mu,\Lambda)]+E_q[\log p(X|Z,\mu,\Lambda)]$$

طبق رابطه 24

$$-E_q[\log q(Z)]-E_q[\log q(\pi,\Lambda,\mu)]$$

حال طبق قسمت قبل داریم:

$$\log q^*(Z)=E_{\pi,\mu,\Lambda}[\log p(X,Z,\mu,\Lambda,\pi)]+\text{constant}$$

$$=E_{\pi,\mu,\Lambda}[\log p(\pi)]^*+E_{\pi,\mu,\Lambda}[\log p(Z|\pi)]+E_{\pi,\mu,\Lambda}[\log p(\mu,\Lambda)]^*+E_{\pi,\mu,\Lambda}[\log p(X|Z,\mu,\Lambda)+c$$

* ← نسبت به Z ثابت اند

$$=E_\pi[\log p(Z|\pi)]+E_{\mu,\Lambda}[\log p(X|Z,\mu,\Lambda)]+\text{constant}$$

$$E_\pi[\log p(Z|\pi)]=E_\pi\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{K}z_{ij}\log\pi_j\right]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{K}z_{ij}E[\log\pi_j]$$

$$E_{\mu,\Lambda}[\log p(X|Z,\mu,\Lambda)]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{K}z_{ij}E_{\mu,\Lambda}\left[\log\left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^D|\Lambda_j^{-1}|}}e^{-\frac{1}{2}(x_i-\mu_j)^T\Lambda_j(x_i-\mu_j)}\right)\right]$$

بعد X

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{K}z_{ij}\left(\frac{1}{2}E[\log|\Lambda_K|]-\frac{D}{2}\log(2\pi)-\frac{1}{2}E[(x_i-\mu_j)^T\Lambda_j(x_i-\mu_j)]\right)$$

$$\Rightarrow\log q^*(Z)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{K}z_{ij}\underbrace{\left(\frac{1}{2}E[\log|\Lambda_K|]-\frac{D}{2}\log(2\pi)-\frac{1}{2}E[(x_i-\mu_j)^T\Lambda_j(x_i-\mu_j)]+E[\log\pi_j]\right)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{K}z_{ij}\alpha_{ij}\Rightarrow q^*(Z)=\underset{\text{normalizer}}{c}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{K}e^{z_{ij}\alpha_{ij}}=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{K}\Big(\underbrace{\frac{e^{\alpha_{ij}}}{\sum_{m=1}^{K}e^{\alpha_{im}}}}_{E[z_{ij}]=r_{ij}}\Big)^{z_{ij}}$$

← prior مشابه شکل α_{ij} دارد

حال به طریق مشابه داریم:

$$\log q^*(\pi,\mu,\Lambda)=E_Z[\log p(X|Z,\mu,\Lambda)]+E_Z[\log p(Z|\pi)]+$$

$$E_Z[\log p(\pi)]+E_Z[\log p(\mu,\Lambda)]+\text{Const}=\log p(\pi)+E_Z[\log p(Z|\pi)]+\sum_{j=1}^{K}\log p(\mu_j,\Lambda_j)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{K}E[z_{ij}]\log N(x_i|\mu_j,\Lambda_j^{-1})+\text{Const}\Rightarrow q^*(\pi,\mu,\Lambda)=q^*(\pi)\prod_{j=1}^{K}q^*(\mu_j,\Lambda_j)+\text{Const}$$

قسمت وابسته به π و (μ,Λ) را جدا می کنیم

$$\log q^*(\pi) = \log p(\pi) + E_Z[\log p(Z|\pi)] \overset{+Const}{=} (\alpha_0-1)\sum_{j=1}^{K}\log \pi_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{K}\underbrace{E_Z[Z_{ij}]}_{r_{ij}}\log \pi_K + Const$$

$$\log q^*(\mu_j,\Lambda_j) = \log p(\mu_j,\Lambda_j) + N_j \log N(x_i|\mu_j,\Lambda_j^{-1}) + Const =$$

$$\log N(\mu_K|m_0,(\beta_0\Lambda_j)^{-1}) + \log W(\Lambda_j|W_0,\nu_0) + N_j\log N(x_i|\mu_j,\Lambda_j^{-1}) + Const$$

$$\beta_j = \beta_0 + N_j \qquad m_j = \frac{1}{\beta_j}\Big(\beta_0 m_0 + N_j \times \underbrace{\frac{1}{N_j}\sum_{i=1}^{n}E[Z_{ij}]X_i}_{\bar X_j}\Big)$$

$$W_j^{-1} = W_0^{-1} + N_j \times \underbrace{\frac{1}{N_j}\sum_{i=1}^{n}E[Z_{ij}](X_i-\bar X_j)(X_i-\bar X_j)^T}_{S_j} + \frac{\beta_0 N_j}{\beta_0+N_j}(\bar X_j - m_0)(\bar X_j - m_0)^T$$ که

$$\nu_j = \nu_0 + N_j \qquad N_j = \sum_{i=1}^{n}E[Z_{ij}] \ , \ \alpha_j = \alpha_0 + N_j$$

ضمن این ساده‌سازی از کتاب بیشاپ داریم: $q^*(\mu_j,\Lambda_j) = N(\mu_j|m_j,(\beta_j\Lambda_j)^{-1})\,W(\Lambda_j|W_j,\nu_j)$

EM برای این مسئله به صورت زیر درمی‌آید:

۱) مرحله E: $\underbrace{E[Z_{ij}]}_{r_{ij}}$ را با مقادیر حال حاضر به دست می‌آوریم.

۲) مرحله M: از این مقدار جدید برای آپدیت پارامترها استفاده می‌کنیم.

سوال ۴ قسمت ج

هدف محاسبه این است که علی با بیشترین امتیاز مطابقت داشته باشد به شرط اینکه S_{max} را داشته باشیم یعنی $p(same\ max|S_{max})$

$$p(same_{max}|S_{max}) = \frac{p(S_{max}|same_{max})\,p(same_{max})}{p(S_{max}|same_{max})\,p(same_{max}) + p(S_{max}|differ_{max})\,p(differ_{max})}$$

$$p(same_{max}) = \frac{1}{n} \qquad p(differ_{max}) = 1-\frac{1}{n}$$

$$p(S_{max}|same_{max}) = \int_0^{S_{max}}\cdots\int_0^{S_{max}} p(S_{max},S_1,\dots,S_{n-1}|same_{max})\,dS_1\dots dS_{n-1}$$

$$= \int_0^{S_{max}}\cdots\int_0^{S_{max}} \alpha_{ss}\alpha_{ds}^{n-1}e^{\lambda_s S_{max}}\prod_{i=1}^{n-1}e^{-\lambda_d S_i}\,dS_1\dots dS_{n-1} = \alpha_{ss}\alpha_{ds}^{n-1}e^{\lambda_s S_{max}}\left(\frac{1-e^{-\lambda_d S_{max}}}{\lambda_d}\right)$$

و به همین صورت $$p(S_{max}|differ_{max}) = \frac{1}{1-\frac{1}{n}}\times\frac{1}{n}\alpha_{ss}\alpha_{ds}^{n-1}e^{-\lambda_d S_{max}}\left(\frac{e^{\lambda_s S_{max}}-1}{\lambda_s} + \frac{n-2}{\lambda_d}(1-e^{-\lambda_d S_{max}})^{n-1}\right)$$

حال می‌توانیم مقدار مورد نظر را با جایگذاری بیابیم.