RAPPORT : Modélisation+Résolution de PL/PLNE avec le solveur GLPK

YASSIN MOUKAN AIT ALLA Yahia AYMAN BAHOU

1)Assemblage

L'usine souhaite optimiser la production de vélos cargos et standards pour maximiser la marge totale, tout en respectant diverses contraintes telles que le temps de travail, l'espace de stationnement, et les limitations de ressources.

Dans une usine, une équipe d'ouvriers assemble des vélos cargos et des vélos standards :
- les vélos cargos (C), à raison de 100 modèles en 6 heures.
- les vélos standards (S), à raison de 100 modèles en 5 heures.

-Chaque semaine, l'équipe fournit au maximum 60 heures de travail.
-Tous les véhicules sont ensuite garés sur un parking qui est vidé chaque week-end, et dont la surface fait 1500m2. Un vélo cargo C occupe 2.5m2, tandis qu'un vélo standard S occupe 1m2.

-Deplus, il ne faut pas assembler plus de 700 vélos cargos C par semaine, car les ressources nécessaires aux batteries sont limitées. En revanche, les vélos standards S, ne sont pas limités par l'approvisionnement en ressources.

-Enfin, la marge (différence entre le prix de vente et le coût de production) vaut 700e pour un vélo cargo et 300e pour un vélo standard S.

Le modèle de Programmation Linéaire (PL) est formulée comme suit :
Maximiser la marge totale : Maximiser 700XC + 300XS

Sous **les contraintes :**

Sous la contrainte des heures de travail : $6XC + 5XS \leq 60$
Sous la contrainte de l'espace de stationnement : $25XC + 10XS \leq 15000$
Sous la contrainte de la limite de batteries : $XC \leq 700$ Avec $XC \geq 0$, $XS \geq 0$

2) Affectation avec prise en compte des préférences

Modélissation du problème:

Soit les ensembles suivants:
• N: Ensemble des personnes (membres de l'équipe).
• T: Ensemble des tâches.
• cij : Score de préférence de la personne i pour la tache j. Les variables de d´ecision peuvent etre definies comme suit:
• xij ∈ {0, 1}: Variable binaire, où xij = 1 si la personne i est assignée à la tâche j, et xij = 0 sinon.

La fonction objectif est de maximiser la satisfaction globale de l'équipe:

$$\text{Maximiser } \sum_{i \in N} \sum_{j \in T} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

Sous **les contraintes** suivantes:

-Chaque personne est assignée à exactement une tâche: $\sum_{j \in T} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N$

-Chaque tâche est effectuée par exactement une personne: $\sum_{i \in N} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in T$

Le problème d'affectation repose sur une matrice de préférences c(i,j), où i représente les individus et j les tâches. GMPL gère naturellement les indexations, simplifiant l'écriture des contraintes :

- Chaque tâche doit être affectée une seule fois.
- Chaque individu doit réaliser exactement une tâche.

La notation en GMPL permet de capturer ces règles efficacement avec des **ensembles** et des **sommations**.

2-1)Applications en optimisation pour l'e-commerce

Soit les ensembles suivants:

- M: Ensemble des magasins.
- C: Ensemble des commandes.
- F: Ensemble des fluides.

Cas particulier 1.1

Modélisation du problème:

Soient les paramètres et les variables suivants :

D_{cf} : Demande en fluide de la commande i pour le fluide j

S_{mf} : Stock initial du fluide k dans le magasin m.

C_{mf} : Coût unitaire pour livrer le fluide j du magasin m.

Q_{cmf} : la quantité de fluide f livrée par le magasin m au commande c

L'objectif est de minimiser le coût total d'affectation des commandes aux magasins :

Minimiser $Z = \sum_{d \in D} \sum_{m \in M} \sum_{f \in F} Q_{cmf} \cdot C_{mf}$

Sous les contraintes suivantes:

-Chaque commande doit être affectée exactement à un magasin :

$$\sum_{m \in M} Q_{cmf} = D_{cf}, \quad \forall d \in D \quad \forall c \in C$$

-Les stocks ne doivent pas etre dépassées après l'affectation des commandes:

$$\sum_{d \in D} Q_{cmf} \leq S_{mk}, \quad \forall m \in M \quad \forall c \in C$$

Cas particulier 1.2

Soient les paramètres et les variables suivants :

D_{cf} : Demande en fluide de la commande i pour le fluide j

S_{mf} : Stock initial du fluide k dans le magasin m.

CU_{mf} : Coût unitaire pour livrer le fluide j du magasin m.

CV_{mf} : Coûts variable d'expédition d'un colis entre chaque paire : point de demande d, magasin m

CF_{mf} : Coûts fixes d'expédition d'un colis entre chaque paire : point de demande d, magasin m

Q_{cmf} : la quantité de fluide f livrée par le magasin m au commande c

E_{dm} : Variable binaire, prend la valeur 1 si le magasin m livre le colis au client d, 0 sinon

L'objectif est de minimiser le coût total d'expédition:

Minimiser $Z = \sum_{d \in D} \sum_{m \in M} \sum_{f \in F} Q_{cmf} \cdot C_{mf} + \sum_{d \in D} \sum_{m \in M} (CF_{mf} + CV_{mf}) \cdot E_{dm}$

Sous les contraintes suivantes:

Chaque commande doit être affectée exactement à un magasin

$$\sum_{m \in M} Q_{cmf} = D_{cf}, \quad \forall d \in D \quad \forall c \in C$$

Les stocks ne doivent pas être dépassés après l'affectation des commandes:

$$\sum_{d \in D} Q_{cmf} \leq S_{mk}, \quad \forall m \in M \quad \forall c \in C$$

Chaque client est livré par exactement un magasin:

$$\sum_{m \in M} x_{md} = 1, \quad \forall d \in D$$

Cas particulier 2

Pour modéliser ce problème en tant que Programme Linéaire en Nombres Entiers (PLNE), nous avons introduit des variables binaires xij , qui indiquent si le livreur se déplace du client i au client j. Une variable auxiliaire ui a également été ajoutée pour prévenir l'apparition de sous-tournées, en utilisant les *contraintes de sous-tournée* ou les *contraintes de Miller-Tucker-Zemlin*. Cette méthode permet d'assurer l'absence de cycles dans la solution. Les ensembles des clients et des magasins sont respectivement notés C et M. La fonction objectif consiste à minimiser la somme pondérée des distances parcourues.

L'objectif est de :

Minimiser $Z = \sum_i \sum_j d_{ij} \cdot x_{ij}$

Où:
d_{ij} : est la distance entre le client i et le client j (représenté par la matrice des distances).
x_{ij} : est une variable binaire qui prend la valeur 1 si le livreur va du client i au client j, et 0 sinon.

Les contraintes du modèle sont les suivantes :

Chaque client est visité exactement une fois : $\sum_{j \in C} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in C$

Le livreur quitte chaque client exactement une fois : $\sum_{i \in C} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in C$

Respecter le départ du livreur : $\sum_{i \in C} x_{ii} = 0$

Eliminer les sous-tournées : $u_i - u_j + n \cdot x_{ij} \leq n - 1 \quad \forall i, j \in C, \quad n = card(C \cup M)$

Respecter le point du départ : $u_{alpha} = 1$

Respecter le nombre du tours : $1 \leq u_i \leq card(C \cup M) \quad \forall i \in C$

Minimisation des émissions polluantes

Modélisation du problème:

L'objectif est de minimiser le total des émissions polluantes.

Minimiser $$\sum_{m \in M} \sum_{d \in D} \sum_{p \in P} EP\left(quant_{mdp}, r_{dm}\right)$$

Les variables sont :

- r_{ij} : est la distance entre le client i et le client j (représenté par la matrice des distances), livraison ij est une variable binaire qui prend la valeur 1 si le magasin i livre le commande j et 0 sinon.

- $expe_i$: est une variale binaire qui prend 1 si le magasin i expedie une commande. $quant_{mdp}$ est la quantité du produit p livrée par le magasin m au demande d.

Les contraintes du modèle sont les suivantes :

- Chaque commande doit être satisfaite en totalité. $$\sum_{m \in M} quant_{mdp} \leq q_{dp} \quad \forall p \in P \quad \forall d \in D$$

- Aucun magasin ne peut faire livrer plus de produits qu'il n'en possède en stock.

$$quant_{mdp} \leq s_{mp} \quad \forall p \in P \quad \forall d \in D \quad \forall m \in M$$

- Pour chaque magasin qui expédie au moins 1 produit, son livreur/camion d´ebute sa tournée au magasin, visite une seule fois chacun des clients qu'il doit servir, et retourne au magasin en fin de tournée.

$$\sum_{d \in D} livraison_{md} = expe_m \quad \forall m \in M$$

- Chaque magasin dispose de son propre livreur/camion qui sera en charge de livrer en une seule tournée tous les produits qui proviennent de son magasin

$$\sum_{d \in D} quant_{mdp} = \sum_{d \in D} livraison_{md} \cdot q_{pd} p \in P \quad \forall m \in M$$

- Chaque commande peut etre satisfaite par un unique magasin qui livre tous les produits qui la composent, ou alors par plusieurs magasins, qui fournissent chacun une partie des produits

$$quant_{mdp} \leq livraison_{md} \cdot q_{pd} \quad \forall p \in P \quad \forall d \in D \quad \forall m \in M$$

- Pour chaque magasin qui expédie au moins 1 produit, sa variable $expe_m$ est activée.

$$expe_m \leq sum_{d \in D} livraison_{md} \quad \forall m \in M$$