ENSAH	**Travaux Dirigés - Corrigés**
Recherche Opérationnelle Génie Civil 1	

Partie I : MODELISATION

Exercice 1 :

Une entreprise fabrique 2 produits X et Y. Pour sa conception, chaque produit ni nécessite 3 produits intermédiaires A, B et C. Pour fabriquer un produit X, on a besoin de 2 produits A, de 2 produits B et de 1 produit C. De même, pour fabriquer un produit Y, on a besoin de 3 produits A, de 1 produit B et de 3 produits C. En outre, l'entreprise dispose d'une quantité limitée de produits A, B et C. Elle a 180 produits A, 120 produits B et 150 produits C.

Sachant que le bénéfice pour une unité de X est 3 dirhams et que celui pour une unité de Y est de 4 dirhams, combien de produits X et Y faut-il fabriquer pour maximiser le profit ?

Formuler le problème en programmation linéaire ?

Corrigé :

Soient x et y les quantités de produits X et Y fabriqués. La quantité totale de produits A utilisée est :

$2x + 3y \leq 180$

De même pour les produits *B* et *C* on obtient :

$2x + y \leq 120$

$x + 3y \leq 150$

Bien entendu, les quantité x et y sont positives : $x; y \geq 0$.

Enfin, on tente de maximiser le profit qui est le total des bénéfices sur la vente des produits de types *X* et *Y*. On obtient le programme linéaire suivant :

$$Max\ Z = 3x + 3y$$

s.c :

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 180 \\ 2x + y \leq 120 \\ x + 3y \leq 150 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 2 :

Pour fabriquer deux produits P1 et P2 on doit effectuer des opérations sur trois machines M1, M2 et M3, successivement mais dans un ordre quelconque. Les temps unitaires d'exécution sont donnés par le tableau suivant :

	M1	**M2**	**M3**
P1	11 mn	7 mn	6 mn
P2	9 mn	12 mn	16 mn

On supposera que les machines n'ont pas de temps d'inactivité.
La disponibilité pour chaque machine est :

- 165 heures (9900 minutes) pour la machine M1 ;
- 140 heures (8400 minutes) pour la machine M2 ;
- 160 heures (9600 minutes) pour la machine M3.

Le produit P1 donne un profit unitaire de 900 Dhs et le produit P2 un profit unitaire de 1000 Dhs.

Formuler le problème en programmation linéaire ?

Correction :

Formulation en un PL :

Les variables de décisions sont :

- x_1 : le nombre d'unités du produit P1 à fabriquer
- x_2 : le nombre d'unités du produit P2 à fabriquer

Les contraintes outre les contraintes de non-négativité sont :

- $11x_1 + 9x_2 \leq 9900$ pour la machine M1
- $7x_1 + 12x_2 \leq 8400$ pour la machine M2
- $6x_1 + 16x_2 \leq 9600$ pour la machine M3

Le profit à maximiser est : $z = 900x_1 + 1000\,x_2$

Le programme linéaire résultant est :

$$\begin{array}{ll} Max & 900x_1 + 1000x_2 \\ s.c. & 11x_1 + 9x_2 \leq 9900 \\ & 7x_1 + 12x_2 \leq 8400 \\ & 6x_1 + 16x_2 \leq 9600 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Exercice 3 :

Un agriculteur veut allouer 150 hectares de surface irrigable entre culture de tomates et celles de piments. Il dispose de 480 heures de main d'œuvre et de 440 m3 d'eau. Un hectare de tomates demande 1 heure de main d'œuvre, 4m^3 d'eau et donne un bénéfice net de 100 dirhams. Un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre, 2 m^3 d'eau et donne un bénéfice net de 200 dirhams.
Le bureau du périmètre irrigué veut protéger le prix des tomates et ne lui permet pas de cultiver plus de 90 hectares de tomates. Quelle est la meilleure allocation de ses ressources ?

Formuler le problème en programmation linéaire ?

Correction

Les variables de decision

- x_1 la surface réserver au tomates
- x_2 la surface réserver au piments

Le profit à maximiser est : (fonction objectif)

$Max\ Z = 100x_1 + 200x_2$

Expression des contraintes

- Terrain $x_1 + x_2 \leq 150$
- Eau $4x_1 + 2x_2 \leq 400$
- Main d'œuvre 1 $x_1 + 4x_2 \leq 480$
- Les limitations du bureau du périmètre irrigué : $x_1 \leq 90$
- Les variables doit être positives : $x_1, x_2 \geq 0$

Exercice 4 :

Un spécialiste en médecine a fabriqué un médicament (des pilules) pour guérir les sujets atteints d'un rhume. Ces pilules sont fabriquées selon deux formats :

- Petite taille : elle contient 2 grains d'aspirine, 5 grains de bicarbonate et 1 grain de codéine.
- Grande taille : elle contient 1 grain d'aspirine, 8 grains de bicarbonate et 6 grains de codéine.

Pour guérir la maladie, le sujet a besoin de 12 grains d'aspirine, 74 grains de bicarbonate et 24 grains de codéine. Déterminer le nombre de pilules minimales à prescrire au sujet pour qu'il soit guérit.

Formuler le problème en programmation linéaire ?

Correction

Les variables de decision

- x_1 : le nombre de pilules de petite taille à prescrire.
- x_2 : le nombre de pilules de grande taille à prescrire.

Les contraintes

La prescription doit contenir des pilules avec au moins 12 grains d'aspirine. Sachant qu'une petite pilule contient 2 grains d'aspirine et qu'une grande pilule contient un seul grain d'aspirine, on obtient la contrainte suivante :

$$2x_1 + x_2 \geq 12$$

- De la même façon que pour l'aspirine, la prescription du spécialiste en médecine doit contenir au moins 74 grains de bicarbonate. Ainsi la contrainte suivante doit être satisfaite

$$5x_1 + 8x_2 \geq 74$$

- Finalement la contrainte imposée par le fait que la prescription doit contenir au moins 24 grains de codéine est :

$$x_1 + 6x_2 \geq 24$$

Identification de la fonction objectif :

Identification de la fonction objectif. On remarque qu'il y a plusieurs couples de solutions (x_1, x_2) qui peuvent satisfaire les contraintes.
La prescription doit contenir le minimum possible de pilules. Donc le critère de sélection de la quantité de pilules à prescrire est celle qui minimise le nombre total des pilules :

$$Min\ Z = x_1 + x_2$$

Partie II : RESOLUTION GRAPHIQUE & SIMPLEXE

Exercice 5 :

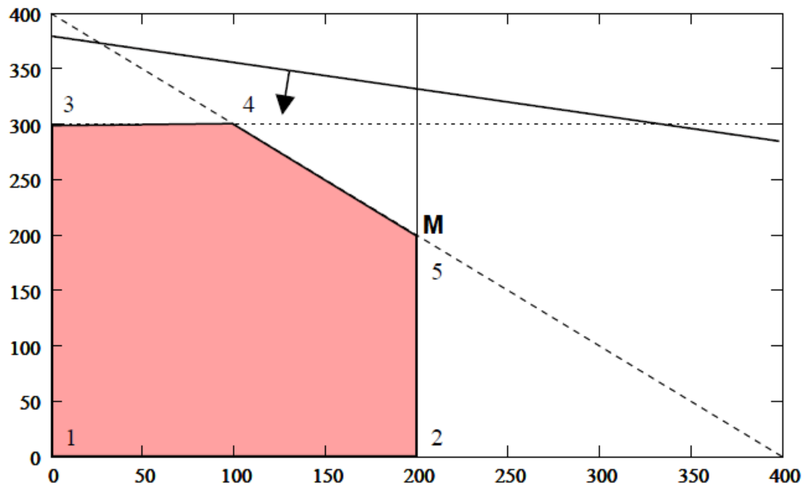
On suppose qu'une entreprise fabrique deux produits et décide d'augmenter le niveau de production pour maximiser le bénéfice. Soient x1 la quantité de produit de type 1 fabriquée en un mois et x2 la quantité de produit de type 2 fabriquée en un mois. Chaque unité du produit 1 rapporte µa l'entreprise un bénéfice de 120, alors que chaque unité du produit 2 rapporte µa l'entreprise un bénéfice de 500. A ce stade on dirait qu'il suffit de ne produire que du produit de type 2. Cependant il existe des contraintes sur la production de x1 et x2.
A cause de considérations bassement matérielles, on ne peut pas produire plus de 200 x1 et plus de 300 x2. De plus, on ne peut pas produire plus de 400 produits (quels que soient leurs types) en tout, µa cause de la force de travail limitée.
Donner un PL qui maximise le bénéfice, ainsi que sa représentation graphique de la solution en 2D. En déduire la solution optimale.

Correction

On obtient le programme linéaire suivant :

$$
\begin{array}{llrcrcr}
\text{Maximiser} & z = & 120x_1 & + & 500x_2 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & x_1 & & & \leq & 200 \\
 & & & & x_2 & \leq & 300 \\
 & & x_1 & + & x_2 & \leq & 400 \\
 & & x_1 & & & \leq & 0 \\
 & & & & x_2 & \leq & 0
\end{array}
$$

Représentation graphique du problème des produits X et Y :



La solution optimale représentée par de point M(x,y):

$x = 200$

$y = 200$

$Z = 124000$

Exercice 6 :

$Max\ Z = 40\,x_1 + 50\,x_2$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} 10\,x_1 + 10\,x_2 \leq 50 \\ 10\,x_1 + 20\,x_2 \leq 80 \\ 20\,x_1 + 10\,x_2 \leq 80 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$Max\ F = 10\,x_1 + 30\,x_2$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} x_1 + 3\,x_2 \leq 18 \\ x_1 + \ \ x_2 \leq 8 \\ 2\,x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Résoudre ces problèmes par la méthode graphique de la P.L. ?

Correction

a.

$Max\ Z = 4x_1 + 5x_2$

s.c
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Système équivalente $\Longleftrightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} 4x_1 + 5x_2 = 0 \\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \end{array}}$$

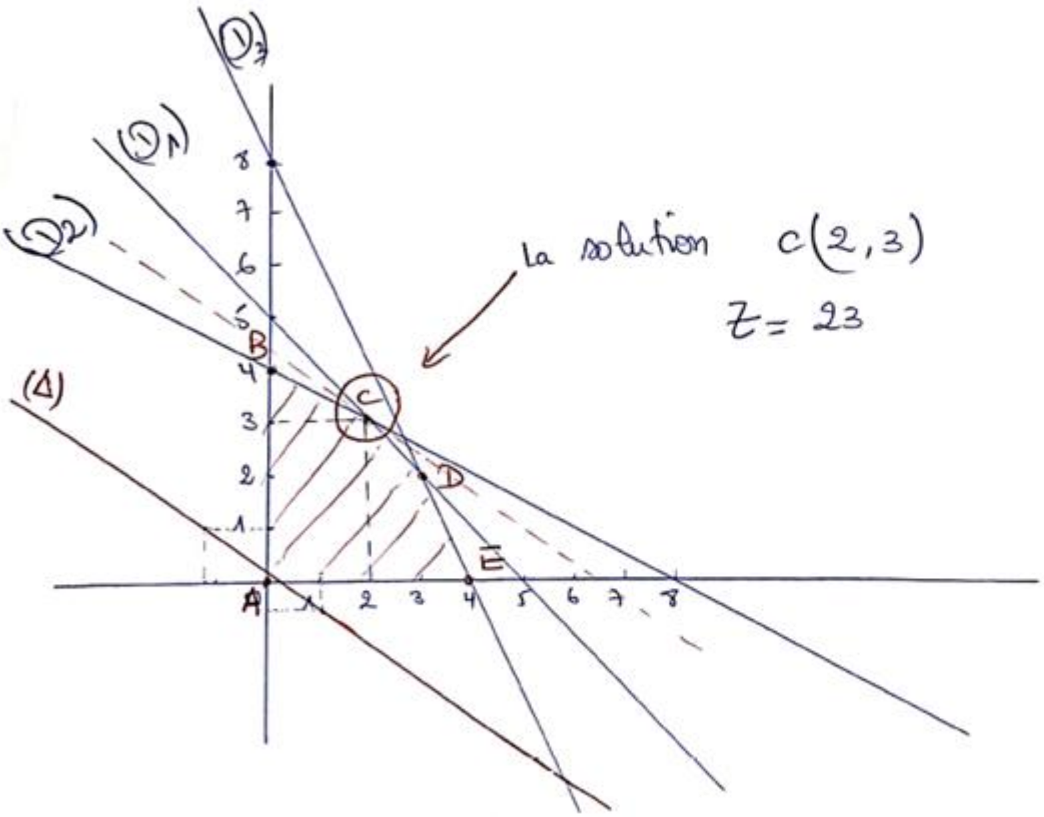
-1,25   -1,25

$(\Delta) \Longleftrightarrow (x_1 = 1 \quad x_2 = -4/5) \quad (x_1 = -5/4 \quad x_2 = 1)$

$(D_1) \Longleftrightarrow (x_1 = 0 \quad x_2 = 5) \quad (x_1 = 5 \quad x_2 = 0)$

$(D_2) \Longleftrightarrow (x_1 = 0 \quad x_2 = 4) \quad (x_1 = 8 \quad x_2 = 0)$

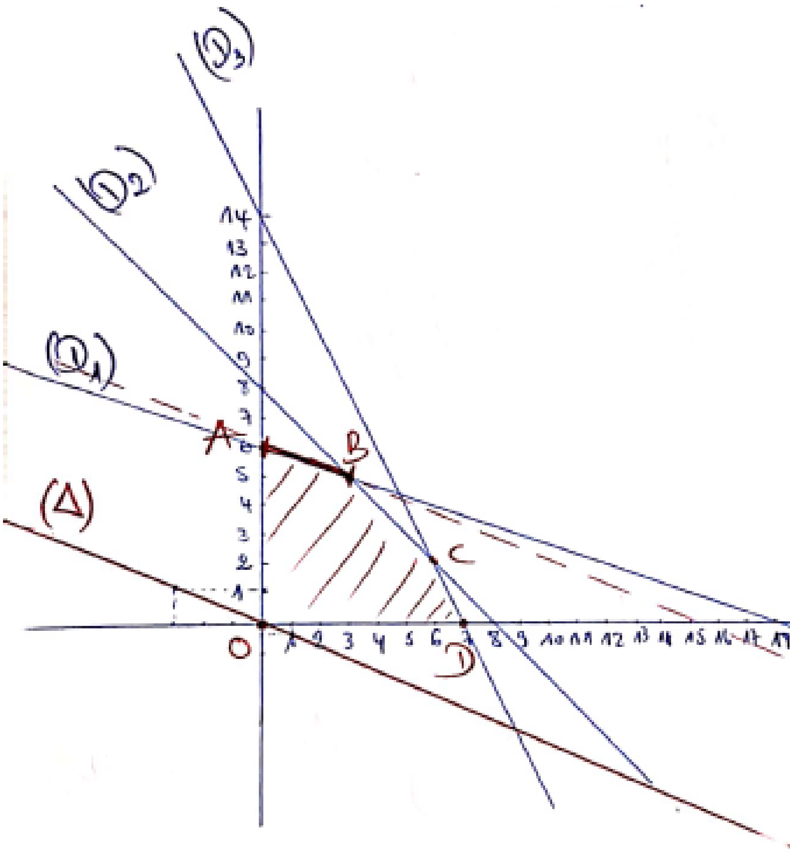
$(D_3) \Longleftrightarrow (x_1 = 0 \quad x_2 = 8) \quad (x_1 = 4 \quad x_2 = 0)$



b.

$$\text{Max } F = 10x_1 + 30x_2$$

$$\text{S.C} \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} (\Delta)\ 10x_1 + 30x_2 = 0 \\ (D_1)\ x_1 + 3x_2 = 18 \\ (D_2)\ x_1 + x_2 = 8 \\ (D_3)\ 2x_1 + x_2 = 14 \end{array}}$$



$A(0,6) \Leftrightarrow Z = 180$

$B(3,5) \Leftrightarrow Z = 180$

L'intersection entre la droite de la fct objectif et la région réalisable dans l'extrême est une segment $[A,B]$.

Donc, Le problème à une infinité de solutions.

Exercice 7 :

$$Max\ Z = 40\, x_1 + 60\, x_2$$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} 2\, x_1 + x_2 \leq 70 \\ x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 + 3\, x_2 \leq 90 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Écrire ce problème sous forme matricielle ?
2. Résoudre ce problème par tableaux de simplexe ?

Correction

Q1. : La forme matricielle :

$$c = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ b_j = \begin{pmatrix} 70 \\ 40 \\ 90 \end{pmatrix}$$

Q. 3. :

On commence de tracer le tableau de début du Simplexe :

1ère itération :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b_j	K
e_1	2	1	1	0	0	70	70
e_2	1	1	0	1	0	40	40
e_3	1	3	0	0	1	90	30 ← Min
Δj	40	60	0	0	0	0	

pivot

	x_1	e_3	e_1	e_2	e_3	b_j	K
e_1	5/3	0	1	0	-1/3	40	24
e_2	2/3	0	0	1	-1/3	10	15
x_2	1/3	1	0	0	1/3	30	90
Δj	20	0	0	0	-20	-180	

2ème itération :

	x_1	e_3	e_1	e_2	e_3	b_j	K
e_1	5/3	0	1	0	-1/3	40	24
e_2	2/3	0	0	1	-1/3	10	15 ← Min
x_2	1/3	1	0	0	1/3	30	90
Δj	20	0	0	0	-20	-180	

Pivot

	x_1	e_3	e_1	e_2	e_3	b_j	K
e_1	0	0	1	-5/2	1/2	15	
e_2	1	0	0	3/2	-1/2	15	
x_2	0	1	0	-1/2	1/2	25	
Δj	0	0	0	-30	-10	-2100	

La ligne de Δj est négative ou nulle. Donc, il n'y a plus d'amélioration possible de la fonction objectif. La solution donnée par $x_1 = 15$; $x_2 = 25$, on obtient la solution Z=2100.

Exercice 8 :

$$Max\ Z = 5\,x_1 + 4\,x_2$$

Sous les contraintes

$$\begin{cases} 6\,x_1 + 4\,x_2 \leq 7 \\ x_1 + 2\,x_2 \leq 4 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Résoudre ce problème par tableaux de simplexe ?

Correction

On commence de tracer le tableau de début du Simplexe :

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	b_j	K
e_1	6	4	1	0	0	0	7	1,17
e_2	1	2	0	1	0	0	4	4
e_3	0	1	0	0	1	0	2	-
e_4	1	-1	0	0	0	1	1	1
Δj	5	4	0	0	0	0	0	

pivot

1ère itération :

	e_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	b_j	K
e_1	0	10	1	0	0	-6	1	0,1
e_2	0	3	0	1	0	-1	3	1
e_3	0	1	0	0	1	0	2	2
x_1	1	-1	0	0	0	1	1	-
Δj	0	9	0	0	0	-5	-5	

pivot

2ème itération :

	e_4	e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	b_j	K
x_2	0	1	0,1	0	0	-0,6	0,1	-
e_2	0	0	-0,3	1	0	0,8	2,7	3,38
e_3	0	0	-0,1	0	1	0,6	1,9	3,17
x_1	1	0	0,1	0	0	0,4	1,1	2,75
Δj	0	0	-0,9	0	0	0,4	-5,9	

pivot

La solution :

	e_1	e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	b_j
x_2	1,5	1	0,25	0	0	0	1,75
e_2	-2	0	-0,5	1	0	0	0,5
e_3	-1,5	0	-0,25	0	1	0	0,25
x_1	2,5	0	0,25	0	0	1	2,75
Δj	-1	0	-1	0	0	0	-7

La ligne de Δj est négative ou nulle. Donc, il n'y a plus d'amélioration possible de la fonction objectif. La solution optimale donnée par : $x_1 = 0$, $x_2 = 1.75$, on obtient la solution Z=7.