CHAPITRE II: Méthodes énergétiques

II-1 TRAVAIL D'UNE FORCE LORS D'UN DÉPLACEMENT FINI

Le travail de F, associé à un déplacement infinitésimale dr est:

$$dw = \vec{F}.d\vec{r}$$

Au cours d'un déplacement entre l'état 1 et l'état 2:

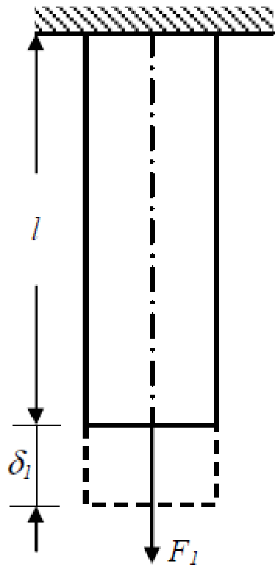
$$w_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F}.d\vec{r} = \int_1^2 F.\cos(\alpha).dr$$

Le travail fourni par un moment couple M dans une rotation infinitésimale est:

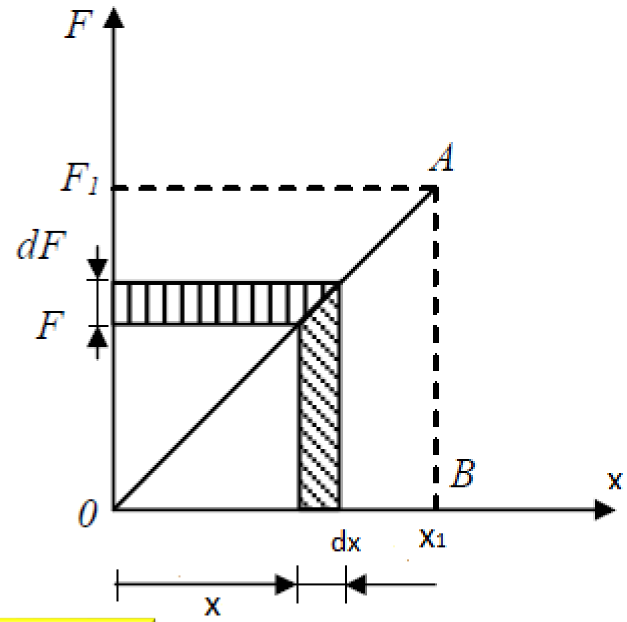
$$dw = M.d\theta$$

Pour une rotation finie

$$w_{1\to 2} = \int_1^2 M.d\theta = M.(\theta_2 - \theta_1)$$



$$dw_{ext} = F.dx$$

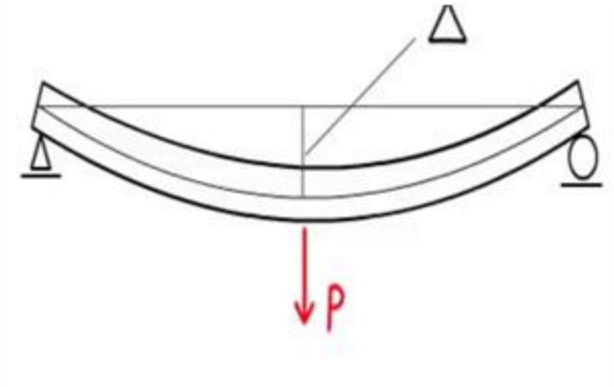


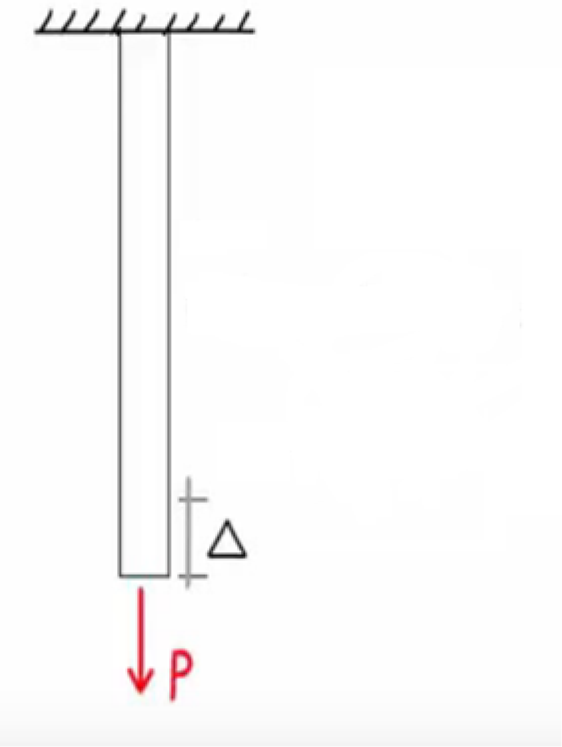
$$w_{ext} = \int_0^{x_1} F.dx = \int_0^{x_1} k.x.dx = \frac{k}{2}.x_1^2 = \frac{1}{2}F.x_1$$

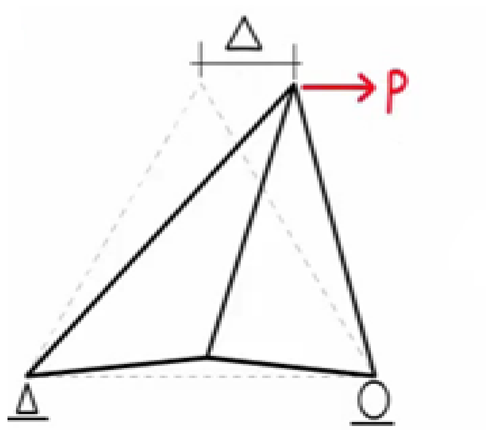
$$w_{ext} = \frac{1}{2}\times(force)\times(\text{déplacement})$$

$$w_{ext} = \frac{1}{2}\times M\times\theta$$

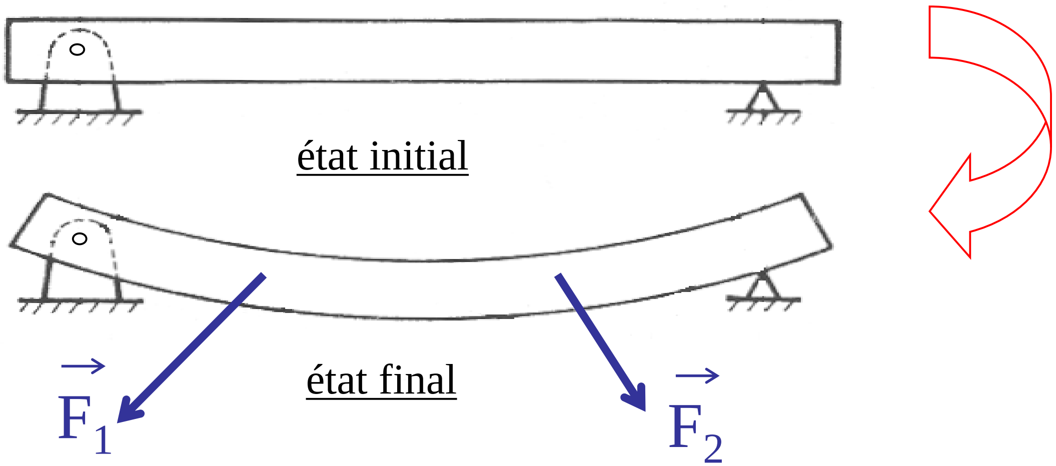
II-1 Exemples







II-3-1. Définition



déformation élastique de la poutre

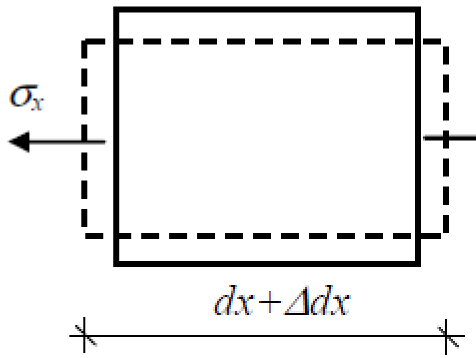
Théorème de l'énergie cinétique $\Rightarrow$ $\left(\text{travail des forces extérieures } W_{ext}\right) + \left(\text{travail des forces intérieures } W_{int}\right) = 0$

Énergie de déformation : $U_d = - W_{int} = W_{ext}$

Lorsque le solide se déforme sous l'application d'une action mécaniques extérieurs. Le travail fourni est emmagasiné sous forme d'une énergie, prête à être restituée.

II-3-2. Traction – Compression

On considère un tronçon de poutre de longueur dx
Allongement du tronçon : du(x)



Travail développé par la force extérieure

$$dW_{ext} = dU_d = \frac{1}{2}.N.du$$

$$N = E.S.\frac{du}{dx}$$

$$dU = \frac{1}{2}\frac{N^2}{E.S}.dx$$

Energie de déformation élastique:

$$U_d = \int_0^L \frac{N^2}{2E.S}.dx$$

II-3-3. Moment de flexion

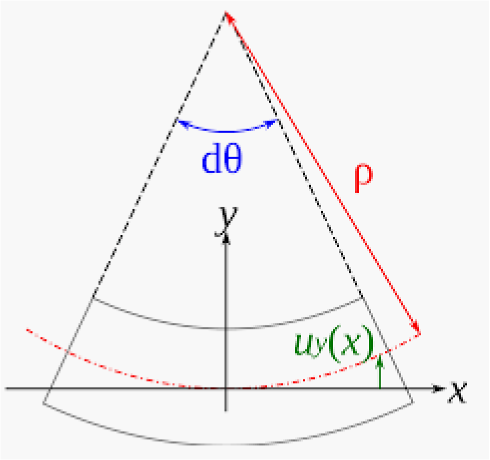
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{E.I}$$

$$v'' = \frac{1}{\rho}$$

$$dW = \frac{1}{2} M.d\theta$$

De même pour un tronçon dx

$$dU_d = \frac{1}{2}\frac{M^2}{E.I}.dx$$



Et pour la poutre entière

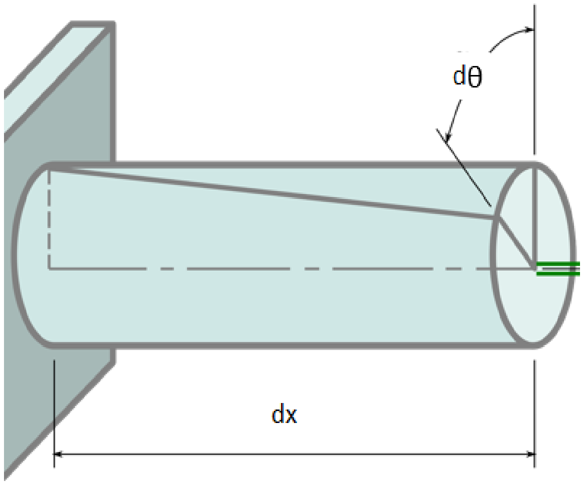
$$U_d = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{E.I}.dx$$

Remarque: Dans le cas en flexion simple on néglige en générale les déformations dues à T

II-3-4. Torsion

Travail développé par le couple

$$dW = \frac{1}{2} M_t . d\theta$$



Relation de comportement en torsion

$$d\theta = \frac{M_t . dx}{I_0 . G}$$

$$dU_d = \frac{1}{2} \frac{M_t^{\,2}}{G.I_0} .dx$$

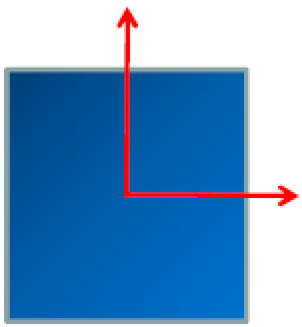
Pour la poutre entière:

$$U_d = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_t^{\,2}}{G.I_0} .dx$$

Constante de torsion

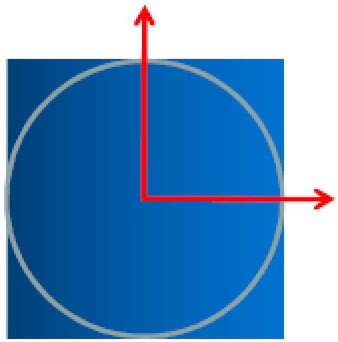
II-3-5. EFFORT TRANCHANT

$$U_d = \int_0^L \left(\frac{T_y^{\,2}}{2.G.S_{ry}} + \frac{T_z^{\,2}}{2.G.S_{rz}} \right) dx$$



$$S_{ry} = S_{rz} = \frac{5}{6} S$$

Surface réduite S_r section transversale rectangulaire



$$S_{ry} = S_{rz} = \frac{9}{10} S$$

Surface réduite S_r section transversale circulaire

II-3 ENERGIE DE DEFORMATION

RECAPITULATIF

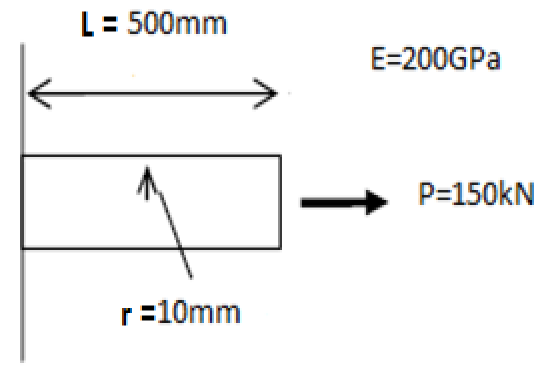
$$U_d = \frac{1}{2E}\int \frac{N^2}{S}\,dx + \frac{1}{2G}\int \frac{T_y^{\,2}}{S_r}\,dx + \frac{1}{2E}\int \frac{M_z^{\,2}}{I_z}\,dx + \frac{1}{2G}\int \frac{M_x^{\,2}}{I_0}\,dx$$

effort normal + effort tranchant + moment fléchissant + moment de torsion

II-4 EXERCICES AVEC RÉPONSES

Exercice 1

Déterminer l'énergie potentielle élastique stockée dans la déformation provoquée par la force P dans la poutre représentée sur la Figure suivante:



L'énergie élastique stockée dans la poutre est

$$\boxed{W_d = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{P^2}{ES}dx = \frac{P^2.L}{2.ES}}$$

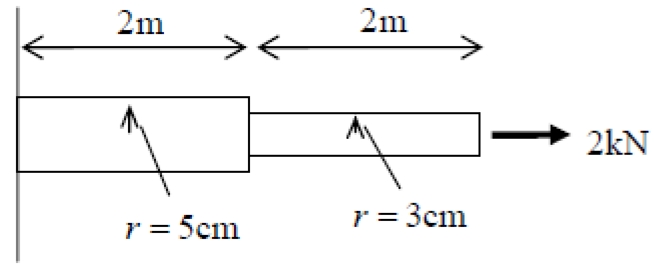
$$\boxed{U_d = \frac{(150kN)^2 \times 0,5m}{2.(\pi \times 10^2 mm^2) \times 200kN/mm^2}}$$

$$\boxed{U_d = 89,5J}$$

Exercice 2:

Déterminer l'énergie de déformation dans une barre composée de deux tronçons, sachant que E= 200GPa, sous l'action d'une force axial de tension de 2 kN:

L'énergie élastique stockée est:



$$U_d = \frac{1}{2}\int_{struct}\frac{N^2}{ES}dx$$

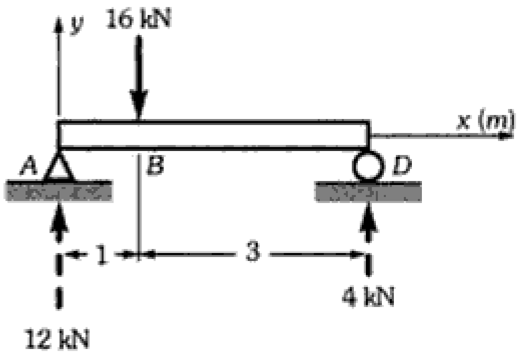
$$U_d = U_{d,1} + U_{d,2}$$

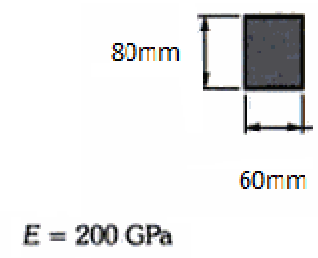
$$U_d = \frac{1}{2}\int_0^{L_1}\frac{(P)^2}{E.S_1}dx + \int_0^{L_2}\frac{(P)^2}{E.S_2}dx = \frac{P^2.L}{2.\pi A.E}\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right)$$

$$U_d = 47J$$

Exercice 3

Déterminer l'énergie potentielle élastique stockée dans la déformation provoquée par la force P=16kN dans la poutre représentée sur la Figure suivante:





Avec:

$$I = 2,6 \times 10^{-6} m^4$$

et

$$E = 200 \times 10^6 kN / m^2$$

Exercice 3

Dans le présent exercice la flèche due à l'effort tranchant est négligeable devant le moment fléchissant:

$$M_f = 12.x \quad si \quad 0 \le x \le 1m$$
$$M_f = -4(x-4) \; si \; 1 \le x \le 4m$$

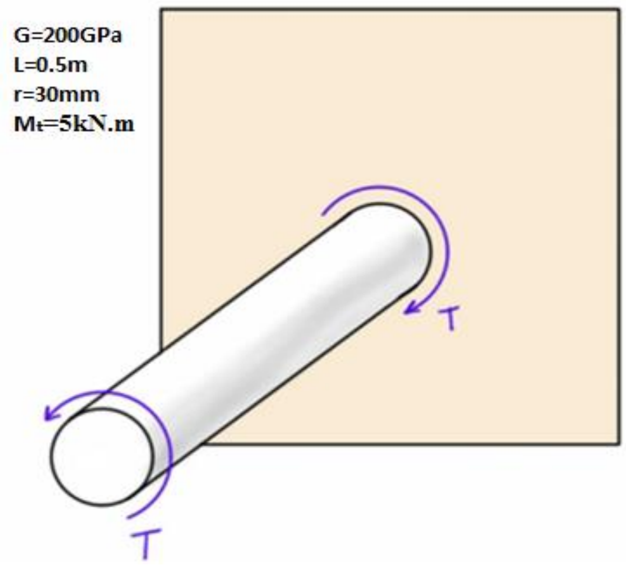
L'énergie élastique est:

$$U_d = \int_0^1 \frac{(12.x)^2}{2.E.I_z} dx + \int_0^3 \frac{[-4(x-4)]^2}{2.E.I_z} dx$$

$$U_d = 47 J$$

Exercice 4:

Déterminer l'énergie potentielle élastique stockée dans une barre cylindrique encastrée à son extrémité et soumet à l'autre extrémiste d'un couple M_t=5kN.m. La barre est de longueur L=0,5m , de rayon r=30mm et du module de rigidité G=200GPa.



L'énergie élastique est:

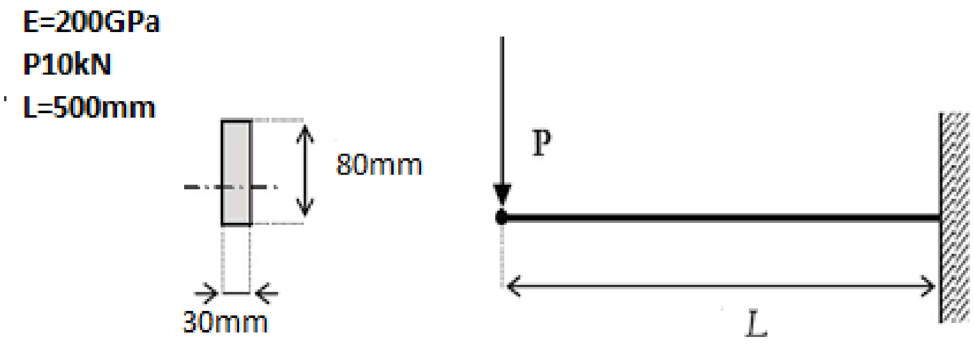
$$U_d = \frac{1}{2}\int_{struct} \frac{M_x^{\,2}}{G.I_0}dx = \frac{M^2.L}{2.G.I_0}$$

$$I_0 = \frac{\pi}{2}r^4 = \frac{\pi}{2}(0.03)^4 = 1.272\times 10^{-6}m^4$$

$$U_d = \frac{(5\times 10^3 N.m)^2 \times (0.5m)}{2\times(200\times 10^9 N/m^4)\times(1.272\times 10^{-6}m^4)} = 24,56J$$

Exercice 5 (Energie de déformation)

Déterminer l'énergie potentielle élastique stockée dans la poutre provoquée par la force P=10kN :



Le moment fléchissant dans la poutre est:

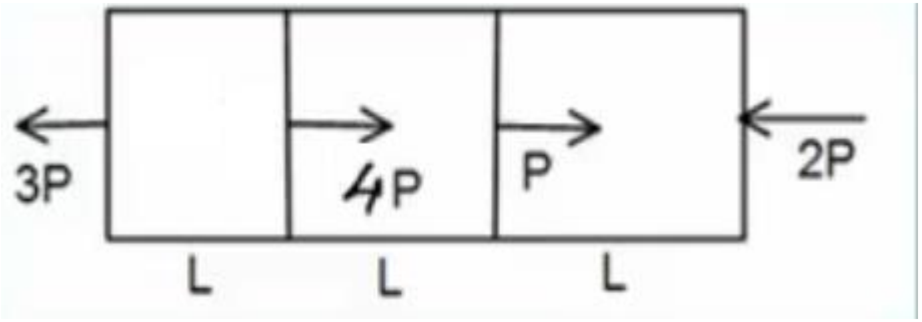
$$M_f = -P.x$$

L'énergie élastique est:

$$U_d = \frac{1}{2}\int_{struct} \frac{{M_z}^2}{EI_z}dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{(P.x)^2}{EI_z}dx = \frac{P^2L^3}{6.E.I}$$

Exercice 6 (Energie de déformation)

Déterminer l'énergie potentielle élastique stockée dans une poutre soumise à une série de forces :

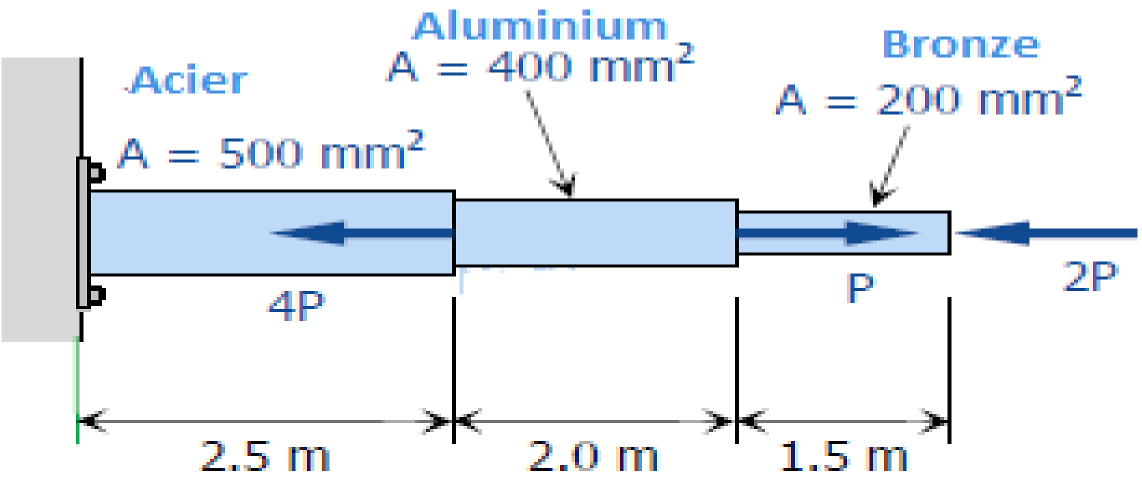


L'énergie élastique est:

$$U_d = \sum_{i=1}^{3} U_d^i$$

$$U_d = \frac{1}{2}\int_{struct} \frac{N^2}{ES}dx = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{(3P)^2}{E.S}dx + \frac{1}{2}\int_L^{2L} \frac{(-P)^2}{E.S}dx + \frac{1}{2}\int_{2L}^{3L} \frac{(-2P)^2}{E.S}dx = \frac{7.P^2.L}{A.E}$$

Exercice 7 (Energie de déformation)



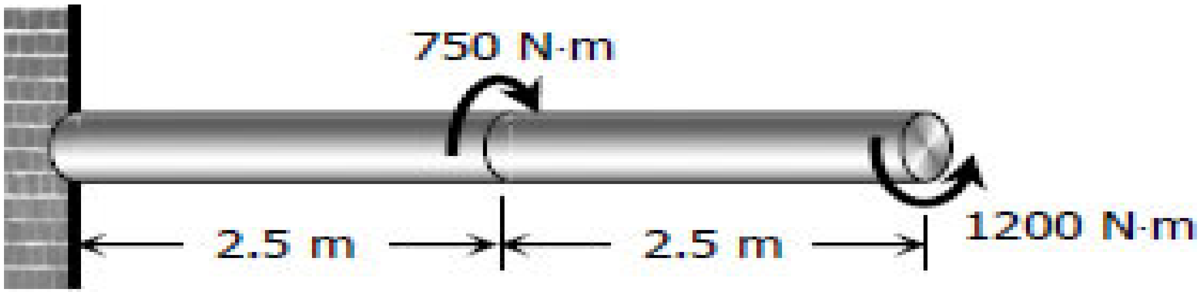
$$U_d = \sum_{i=1}^{3} U_d^i$$

$$U_d = \frac{1}{2}\int_{struct} \frac{N^2}{ES}dx = \frac{1}{2}\int_0^{L_1} \frac{(-2P)^2}{E_1.S_1}dx + \frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2} \frac{(-P)^2}{E_2.S_2}dx + \frac{1}{2}\int_{L_2}^{L_3} \frac{(-5P)^2}{E_3.S_3}dx$$

$$= \frac{2P^2.L_1}{E_1.S_1} + \frac{P^2.(L_2-L_1)}{2E_2.S_2} + \frac{25P^2.(L_3-L_2)}{2E_3.S_3}$$

Exercice 8 (Energie de déformation)

Déterminer l'énergie potentielle élastique stockée dans la déformation provoquée par deux couples: C_1=1200N.m et C_2=-450N.m

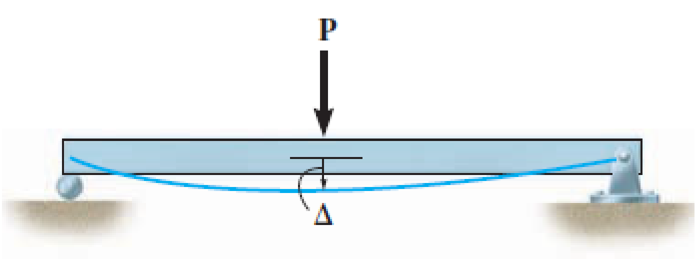


$$U_d = \frac{1}{2}\int_{struct} \frac{M_x^{\,2}}{G.I_0}dx = \int_0^{2.5} \frac{(1200)^2}{2.G.I_0}dx + \int_{2.5}^{5} \frac{(450)^2}{2.G.I_0}dx$$

II-5.1 Théorème de Clapeyron

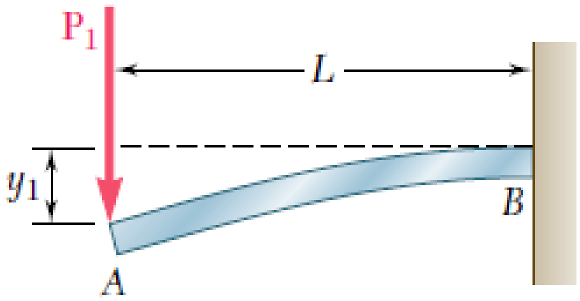
C'est une méthode analytique permettant de calculer, dans des systèmes isostatiques soumis à une seule charge, le déplacement associé (qui fait travailler) la charge.

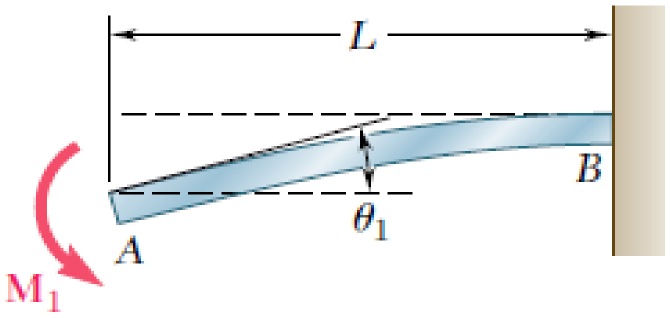
La variation de l'énergie de déformation U d'un solide soumis à des chargements extérieurs données (force ou couple) entraînant des déplacements de leur point d'application s'exprime par:

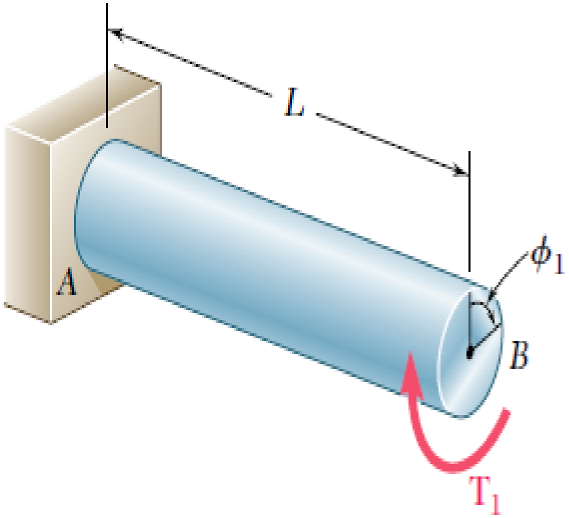


$$U\left(\overrightarrow{F_i}\right) = \frac{1}{2}.F_i.\Delta P_i$$

II-5.1 Théorème de Clapeyron

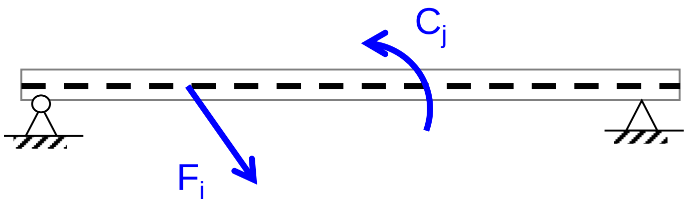






II-5 Théorèmes énergétiques

II-5.1 Théorème de Clapeyron



$$\begin{pmatrix} F_i \\ C_j \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \text{Déplacements } U_i \\ \text{Rotations } \theta_j \end{pmatrix}$$

Travail des
forces extérieures

$$\boxed{U_d = \begin{cases} \dfrac{1}{2} F.u & \text{Une force} \\ \dfrac{1}{2} C.\theta & \text{Un couple} \end{cases}}$$

II-5 Théorèmes énergétiques

II-5.1 Limitation de la méthode de Clapeyron

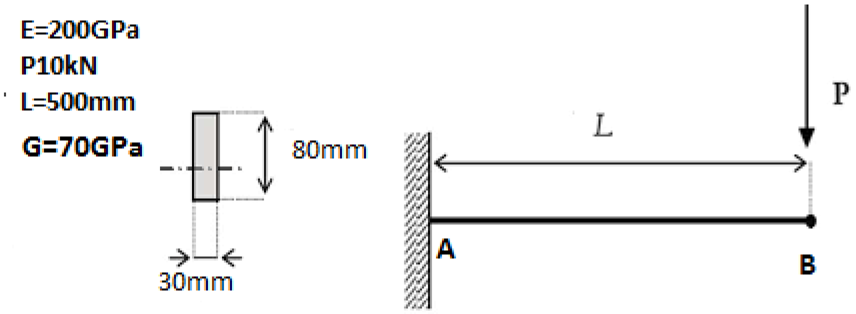
On détermine que la flèche dans le sens de l'effort appliqué.
La flèche en un autre point n'est pas accessible directement, ni même la rotation de la section droite. De même, on ne sait pas traiter le cas d'une charge répartie (Poids propre de la poutre).

Ce qui justifie le besoin d'une autre méthode plus générale qui est basée sur les notions d'énergie et du travail. Pour éviter cette situation, on présente une technique puissante «Castigliano» basée sur l'énergie de déformation pour faire le calcul du déplacement (ou rotation, ou déplacement angulaire) en divers points d'une structure supportant plus d'un chargement (ex. tension, torsion et flexion superposées).

II-5 Théorèmes énergétiques

II-5.1 Exercice 1 (Théorème de Clapeyron)

Poutre encastrée de longueur L et de section S. On applique une force P à son extrémité. On demande de calculer la flèche au point B.



L'énergie élastique est:

$$U_d = \frac{1}{2}\int_{struct} \frac{M_z^{\,2}}{EI_z}dx = \frac{F^2}{2EI_z}\int_0^L (L-x)^2\,dx = \frac{F^2L^3}{6EI}$$

D'après le principe de Clapeyron

$$U_d = W_{ext} = \frac{1}{2}.F.y_B$$

Or

$$M_f = -P.(L-x)$$

Donc

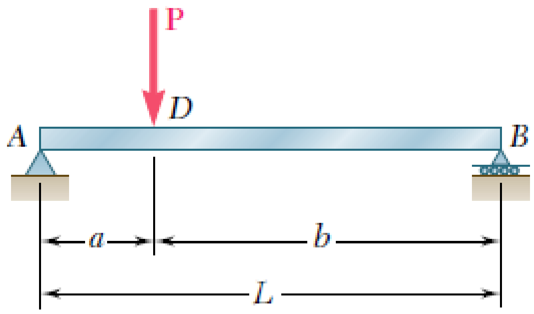
$$y_B = \frac{FL^3}{3E.I}$$

Le déplacement est positif car il est mesuré suivant la direction de P

II-5.1 Exercice 2 (Théorème de Clapeyron)

On applique une force P au point D sur une poutre de longueur L et de section S. On donne:

$$I = 80.10^6 \text{ mm}^4$$
$$G = 200GPa$$



1. Trouver les réactions aux appuis

2. Déterminer les moments fléchissant de la poutre

3. Déterminer l'énergie de déformation stockée dans la poutre

4. On demande aussi de déterminer le déplacement du point D au point d’application de la charge P.

II-5.1 Suite Exercice 2 (Théorème de Clapeyron)

1. Les réactions aux appuis

$$R_A = \frac{P.b}{L} \qquad R_B = \frac{P.a}{L}$$

2. Les moments fléchissant de la poutre

$$M_f = R_B.x = \frac{P.a.x}{L}$$

$$U_{AD} = \int_0^b \frac{M^2}{2.E.I}dx = \frac{P^2.a^2}{2E.I.L^2}\int_0^b x^2dx = \frac{P^2.a^2.b^3}{6E.I.L^2}$$

$$M_f = R_A.x = \frac{P.b.x}{L}$$

$$U_{AD} = \int_0^a \frac{M^2}{2.E.I}dx = \frac{P^2.b^2.x}{2E.I.L^2}\int_0^a x^2dx = \frac{P^2.b^2.a^3}{6E.I.L^2}$$

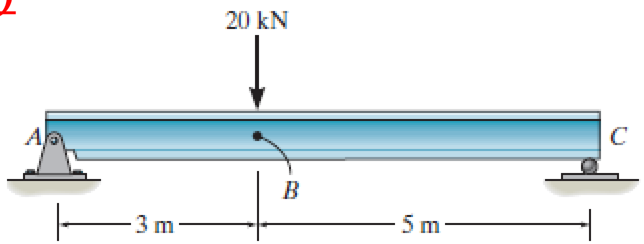
3. L'énergie de déformation stockée dans la poutre
4. le déplacement du point D

$$U_{Total} = U_{AD} + U_{DB} = \frac{P^2.a^2.b^2(a+b)}{6E.I.L^2}$$

$$U = \frac{1}{2}P.\Delta_D \qquad \Delta_D = \frac{P^2.a^2.b^2}{3E.I.L}$$

II-5.1 Exercice 3 (Théorème de Clapeyron)

Application: Mêmes questions pour la poutre suivante



1. Les réactions aux appuis

$$R_A = 12.5kN$$
$$R_B = 7.5kN$$

2. Les moments fléchissant

$$M_{f,AB} = R_A.x_1$$
$$M_{f,AB} = R_B.x_2$$

3. L'énergie de déformation stockée dans la poutre

$$\mathrm{U_d} = \int_0^L \frac{M^2}{2.E.I}dx = \frac{1}{2EI}\left[\int_0^3 (R_A.x_1)^2 dx_1 + \int_0^5 (R_B.x_2)^2 dx_2\right]$$

$$= \frac{1.875.10^9}{E.I}$$

II-5.1 Suite exercice 3 (Théorème de Clapeyron)

4. Déplacement au point B

Travail des forces extérieurs:

$$W_{ext} = \frac{1}{2} P.\Delta_B$$

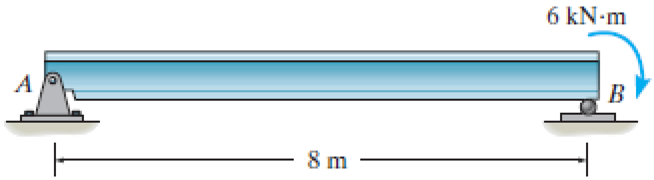
Conservation d'énergie

$$U_d = W_{ext}$$

$$\Delta_B = \frac{187500}{200(10^9)(80)(10^{-6})} = 11.7mm$$

II-5.1 Exercice 4 (Théorème de Clapeyron)

Calculer la rotation due à l'application du couple au point B de la poutre suivante:



$$R_A = 750N$$
$$M_f = -R_A x$$

Conservation d'énergie

$$U_d = W_{ext}$$
$$\frac{1}{2} M.\theta_B = \int_0^L \frac{M^2}{2.E.I} dx$$

$$\frac{1}{2}(6.10^3)\theta_B = \int_0^L \frac{(-750x)^2}{2.E.I} dx$$
$$\theta_B = \frac{16000}{200(10^9)(80)(10^{-6})} = 10^{-3} rad$$