
Optimisation de formes pour des ondes électromagnétiques

CERVERA ROMAIN
MERJANI AYMANE
VERRET CLARA

2022 - 2023

Résumé

On se positionne sur les enjeux industriels qui imposent les contraintes économiques et les contraintes technologiques nécessaires pour améliorer les produits existants du marché, ceci afin d'absorber les ondes électromagnétiques. Comme domaines d'applications, on vise la conception/optimisation des chambres anéchoïques électromagnétiques. Il s'agit d'absorber les ondes électromagnétiques d'une façon le plus optimale. Dans l'optimalité il y a également les enjeux industriels qui imposent les contraintes économiques et les contraintes technologiques nécessaires pour améliorer les produits existants du marché. La question d'optimisation de formes a été étudié précédemment dans le contexte des ondes acoustiques, on vise dans ce projet à développer la théorie pour le cas électromagnétique. Il s'agit d'utiliser des méthodes mathématiques pour étudier le problème du contrôle optimal.

Table des matières

Introduction	3
1 Équation d'Helmoltz avec condition d'ordre 2	4
1.1 Modélisation du problème	4
1.2 Nouvelle formulation variationnelle	5
1.2.1 Opérateur A	6
1.2.2 Opérateur \hat{A}	6
1.2.3 Opérateur \hat{B}	6
1.2.4 Opérateur S	6
1.2.5 Formulation variationnelle	6
1.2.6 Opérateur T	7
1.3 Existence et unicité de la solution	7
1.4 Conclusion	8
1.5 Retour sur les modélisations numériques	8
2 Outils mathématiques pour les équations de Maxwell	9
2.1 Introduction	9
2.2 Cadre d'étude	9
2.3 Premières propriétés des bords fractals	10
2.4 Nouveaux opérateurs de trace	11
2.4.1 Opérateur de trace normale	11
2.4.2 Opérateur de trace tangentielle	15
Conclusion et ouverture	19
Références bibliographiques	19

Introduction

Ce projet s'inscrit dans la suite de ce qui a été déjà fait en première année. Le sujet porte sur la propagation d'ondes dans des chambres anéchoïques. Les chambres anéchoïques sont des salles d'expérimentation permettant d'absorber des ondes sonores ou électromagnétiques. On place alors une antenne au centre de la chambre pour effectuer les mesures, ainsi qu'un émetteur. L'idée de notre projet est de s'intéresser aux parois absorbantes de ces chambres.

Pour rappel, le travail de première année nous a menés à étudier diverses références bibliographiques afin de mieux appréhender le contexte physique de la propagation des ondes ainsi que les problèmes mathématiques sous-jacents. À travers ce dernier, nous avons pu développer des conditions d'existence et d'unicité des solutions à l'équation de Helmholtz dans le cas acoustique, calculer numériquement des coefficients d'absorption de la condition au bord, et également étudier le problème électromagnétique (existence et unicité des solutions, énergie).

Pour le projet de ce semestre, nous avons principalement deux objectifs :

- Poursuivre l'étude menée en première année sur la condition d'ordre 2
- Étudier la théorie mathématique des fractales dans le cadre des équations de Maxwell

1 Équation d'Helmoltz avec condition d'ordre 2

1.1 Modélisation du problème

On se place dans le cadre de la propagation d'une onde électromagnétique dans un domaine lipschitzien Ω . Dans une chambre anéchoïque électromagnétique, le bord est issu d'un matériau qui absorbe les ondes électromagnétiques ("ferromagnetic foams").

Voici une figure qui représente la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu avec des bords réguliers.

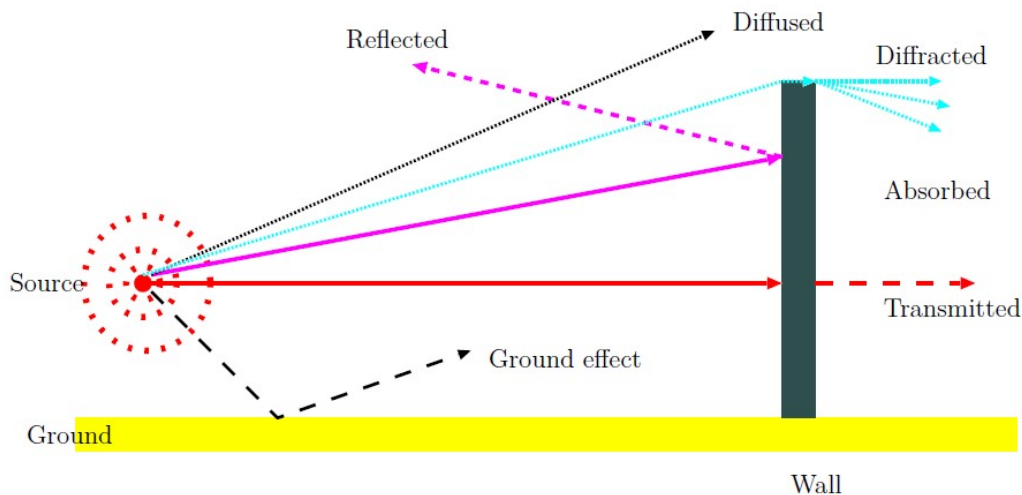


FIGURE 2 – Complexité de la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu

Les phénomènes observés (réflexion, absorption...) sont modélisés par les conditions aux limites. La condition de Dirichlet modélise la source de l'onde, la condition de Neumann modélise la réflexion sur la surface et la condition de Robin traduit le phénomène réflexion/absorption qui dépend des paramètres α et β qu'on va introduire après. Cette dernière condition dans la modélisation ci-dessous est la condition sur le bord Γ .

Une modélisation du problème de la propagation d'une onde peut se représenter comme dans la figure suivante :

On a l'équation différentielle et les conditions aux limites vérifiées par la fonction d'onde :

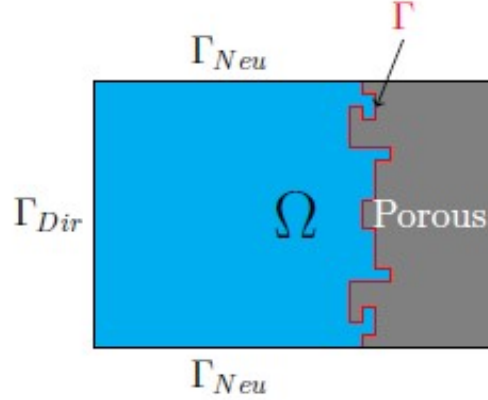


FIGURE 3 – Modélisation de la figure 1

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_{Dir} \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \Gamma_{Neu} \\ \partial_n u = -\beta \partial_\tau^2 u - \alpha u & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

On pose l'ensemble des fonctions tests $H(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid \text{Tr}(u) = 0 \text{ sur } \Gamma_{Dir}, \partial_\tau u \in L^2(\Gamma)\}$

Soit v une fonction test, en multipliant l'équation différentielle par \bar{v} , et en intégrant par parties on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, dx - k^2 \int_{\Omega} u \bar{v} \, dx + \int_{\Gamma} \alpha \text{Tr } u \text{Tr } \bar{v} d\mu - \int_{\Gamma} \beta \partial_\tau \text{Tr } u \partial_\tau \text{Tr } \bar{v} d\mu = - \int_{\Omega} f \bar{v} \, dx$$

$$\text{Posons } (u, v)_H = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, dx + \Re(\alpha) \int_{\Gamma} \text{Tr } u \text{Tr } \bar{v} d\mu - \Re(\beta) \int_{\Gamma} \partial_\tau \text{Tr } u \partial_\tau \text{Tr } \bar{v} d\mu$$

Pour que cette application soit un produit scalaire, il faut que $(u, u)_{H(\Omega)} \geq 0$ et que $(u, u)_{H(\Omega)} = 0$ implique que $u = 0$ dans Ω , ce qui se traduit par la condition suffisante suivante :

$$\Re(\alpha) \geq 0 \text{ et } \Re(\beta) \leq 0$$

1.2 Nouvelle formulation variationnelle

La formule variationnelle s'écrit sous cette forme :

$$(u, v)_{H(\Omega)} - k^2 (u, v)_{L^2(\Omega)} + i \text{Im } \alpha (\text{Tr } u, \text{Tr } v)_{L^2(\Gamma, \mu)} - i \text{Im } \beta (\partial_\tau \text{Tr } u, \partial_\tau \text{Tr } v)_{L^2(\Gamma, \mu)} = -(f, v)_{L^2(\Omega)}.$$

1.2.1 Opérateur A

D'après le théorème de Riesz : on a l'existence de l'opérateur A tel que :
 $A : L^2(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ vérifiant $\forall v \in H(\Omega), \quad (f, v)_{L^2(\Omega)} = (Af, v)_{H(\Omega)}$.

1.2.2 Opérateur \hat{A}

On réapplique le théorème de Riesz pour montrer l'existence de l'opérateur \hat{A} tel que $L^2(\Gamma, \mu) \rightarrow H(\Omega)$ vérifiant : $\forall u, v \in H(\Omega) \quad (\text{Tr } u, \text{Tr } v)_{L^2(\Gamma, \mu)} = (\hat{A}(\text{Tr } u), v)_{H(\Omega)}$.

On sait que pour $u \in H(\Omega)$ fixé, l'application $v \mapsto (\text{Tr } u, \text{Tr } v)_{L^2(\Gamma, \mu)}$ est une application linéaire continue sur $H(\Omega)$ vu que la trace est une application linéaire continue de $H(\Omega)$ à $L^2(\Omega)$. :

$$|(\text{Tr } u, \text{Tr } v)_{L^2(\Gamma, \mu)}| \leq \|\text{Tr } u\|_{L^2(\Gamma, \mu)} \|\text{Tr } v\|_{L^2(\Gamma, \mu)} \leq C\|v\|_{H(\Omega)}$$

1.2.3 Opérateur \hat{B}

On réapplique le théorème de Riesz pour montrer l'existence de l'opérateur \hat{B} tel que $L^2(\Gamma, \mu) \rightarrow H(\Omega)$ vérifiant : $\forall u, v \in H(\Omega) \quad (\partial_\tau \text{Tr } u, \partial_\tau \text{Tr } v)_{L^2(\Gamma, \mu)} = (\hat{B}(\text{Tr } u), v)_{H(\Omega)}$.

On a pour $u \in H(\Omega)$ fixé, l'application $v \mapsto (\partial_\tau \text{Tr } u, \partial_\tau \text{Tr } v)_{L^2(\Gamma, \mu)}$ est une application linéaire continue sur $H(\Omega)$ vu que la dérivée tangentielle de la trace est une application linéaire continue de $H(\Omega)$ à $L^2(\Omega)$. (La définition 3.1 de la référence [6] montre la continuité de l'opérateur dérivé tangentielle d'une fonction, et par composition avec l'opérateur trace, on trouve le résultat) :

$$|(\partial_\tau \text{Tr } u, \partial_\tau \text{Tr } v)_{L^2(\Gamma, \mu)}| \leq \|\partial_\tau \text{Tr } u\|_{L^2(\Gamma, \mu)} \|\partial_\tau \text{Tr } v\|_{L^2(\Gamma, \mu)} \leq C\|v\|_{H(\Omega)}$$

1.2.4 Opérateur S

On définit l'opérateur de l'inclusion S de $H(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, cet opérateur est linéaire et compact.

1.2.5 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle suivante : pour tout $v \in H(\Omega)$:

$(u, v)_{H(\Omega)} - k^2 (u, v)_{L^2(\Omega)} + i \text{Im } \alpha (\text{Tr } u, \text{Tr } v)_{L^2(\Gamma, \mu)} - i \text{Im } \beta (\partial_\tau \text{Tr } u, \partial_\tau \text{Tr } v)_{L^2(\Gamma, \mu)} = -(f, v)_{L^2(\Omega)}$.
 peut s'écrire sous la forme :

$$((Id - k^2 T)u, v)_{H(\Omega)} = (-Af, v)_{H(\Omega)}$$

avec

$$T = A \circ S - i \frac{\text{Im } \alpha}{k^2} \hat{A} \circ \text{Tr} + i \frac{\text{Im } \beta}{k^2} \hat{B} \circ \text{Tr}$$

1.2.6 Opérateur T

Puisque les opérateurs S et Tr sont des opérateurs linéaires et compacts, par composition d'opérateurs linéaires continus à des opérateurs linéaires compacts, on obtient que T est un opérateur linéaire compact.

1.3 Existence et unicité de la solution

On admet le résultat suivant :

Si $f = 0$, la seule solution qui existe est $u = 0$. Ce qui implique que :

$\text{Ker}(Id - k^2 T) = \{0\}$ et $\text{Ker}(Id - k^2 T^*) = \{0\}$, avec T^* l'opérateur adjoint de T qui vérifie la relation suivante :

$$\forall v, w \in H(\Omega) \quad (Tu, v)_{H(\Omega)} = (u, T^*v)_{H(\Omega)}.$$

En calculant l'opérateur T^* , on obtient : $T^* = A \circ S + i \frac{\text{Im} \alpha}{k^2} \hat{A} \circ \text{Tr} - i \frac{\text{Im} \beta}{k^2} \hat{B} \circ \text{Tr}$
Montrons maintenant que $\text{Im}(Id - k^2 T) = H(\Omega)$:

$H(\Omega)$ est un espace de Hilbert. On note l'opérateur $Id - k^2 T$ par A , Cet opérateur est linéaire et continue et vérifie $A^* \neq A$.

Le but de cette partie est de montrer que $\text{Im}(Id - k^2 T) = H(\Omega)$.

On a :

$$\text{Ker } A^* = (\text{Im}(A))^\perp = \{x \in H \mid \forall y \in \text{Im}(A) \quad (x, y)_H = 0\}$$

Fixons $x \in \text{Ker } A^*$. Par définition du noyau d'un opérateur,

$$x \in \text{Ker } A^* \iff A^*x = 0.$$

Ce qui implique l'équivalence suivante :

$$A^*x = 0 \iff \forall y \in H \quad (A^*x, y)_{H(\Omega)} = 0,$$

Par définition de A^* , on a :

$$\forall y \in H \quad (A^*x, y) = (x, Ay),$$

donc

$$x \in \text{Ker } A^* \iff \forall y \in H \quad (x, Ay) = 0 \iff x \perp \text{Im}(A).$$

Alors, on peut conclure :

$$x \in \text{Ker } A^* \iff x \in (\text{Im}(A))^\perp.$$

Comme on peut choisir n'importe quel x dans l'ensemble $\text{Ker } A^*$, on a $\text{Ker } A^* = (\text{Im}(A))^\perp$.

Et puisque $\text{Ker } A^*$ est un ensemble fermé dans H , on a :

$$H = \text{Ker } A^* \oplus ((\text{Im}(A))^\perp)^\perp,$$

et sachant que $((\text{Im}(A))^\perp)^\perp = \overline{\text{Im}(A)}$, qui est un ensemble fermé, cela revient à la nature compacte de l'opérateur T , d'où on conclut que : $\overline{\text{Im}(A)} = \text{Im}(A)$. Ce qui implique en remplaçant l'opérateur A par son expression initial en fonction de k le vecteur d'onde et l'opérateur T :

$$H(\Omega) = \text{Ker } (Id - k^2 T^*) \oplus \text{Im } (Id - k^2 T) = \{0\} \oplus \text{Im } (Id - k^2 T),$$

D'où : $\text{Im } (Id - k^2 T) = H(\Omega)$.

Récapitulons ce qu'on vient de trouver :

$\text{Im } (Id - k^2 T) = H(\Omega)$ et $\text{Ker } (Id - k^2 T) = \{0\}$

On conclut donc la bijectivité de l'opérateur $Id - k^2 T$ ce qui implique l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle avec les conditions aux bords définies.

1.4 Conclusion

Une condition suffisante qui garantit l'existence et l'unicité de la solution du problème défini est :

$$\Re(\alpha) \geq 0 \quad \text{et} \quad \Re(\beta) \leq 0$$

1.5 Retour sur les modélisations numériques

Cette section n'est qu'un à propos permettant de rectifier certaines formules données dans le rapport en première année et qui était fausses, notamment à cause d'une confusion quant aux calculs des dérivées normales et tangentielles. Concernant la modélisation d'ordre 2 avec l'ajout du coefficient β , on donne ci-après les deux formules correctes pour χ et γ :

$$\begin{cases} \chi = g_k \left[\frac{\eta_0 \lambda_0 - \eta_1 \lambda_1}{(\eta_0 \lambda_0 - \eta_1 \lambda_1)e^{-\lambda_0 L} + (\eta_0 \lambda_0 + \eta_1 \lambda_1)e^{\lambda_0 L}} - \frac{\eta_0 \lambda_0 - \alpha + \beta k^2}{(\eta_0 \lambda_0 - \alpha + \beta k^2)e^{-\lambda_0 L} + (\eta_0 \lambda_0 + \alpha - \beta k^2)e^{\lambda_0 L}} \right] \\ \gamma = g_k \left[\frac{\eta_0 \lambda_0 + \eta_1 \lambda_1}{(\eta_0 \lambda_0 - \eta_1 \lambda_1)e^{-\lambda_0 L} + (\eta_0 \lambda_0 + \eta_1 \lambda_1)e^{\lambda_0 L}} - \frac{\eta_0 \lambda_0 + \alpha - \beta k^2}{(\eta_0 \lambda_0 - \alpha + \beta k^2)e^{-\lambda_0 L} + (\eta_0 \lambda_0 + \alpha - \beta k^2)e^{\lambda_0 L}} \right] \end{cases}$$

Par la suite, nous avons tenté de nouvelles simulations avec cette correction, mais ces dernières n'ont pas été fructueuses. En effet, les coefficients α et β restaient constants à leur valeur initiale, et ce malgré les divers tests effectués. Notre projet ayant pris une tournure davantage théorique, nous ne nous sommes pas plus avancés dans cette voie.

2 Outils mathématiques pour les équations de Maxwell

2.1 Introduction

Dans cette partie, on cherche à développer des outils mathématiques théoriques pour l'étude des équations de Maxwell. Notre étude s'inspire de la référence [1], qui détaille ces divers outils dans le cas de domaines à bords lipschitziens.

Nous allons étendre cela aux domaines à bords fractals afin de s'inscrire dans le cadre de l'étude des ondes électromagnétiques dans une chambre anéchoïque optimale. En effet, les parois des chambres anéchoïques sont multi-échelles, ce qui est une approximation des fractales. Cela implique de nombreux changements dans les concepts qui n'existent plus ou qu'il faut redéfinir : la trace, le vecteur normal, la régularité des solutions...

Par la suite, notre objectif sera d'utiliser ces outils mathématiques et ce cadre plus formel afin de s'intéresser à l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation d'Helmoltz pour des bords fractals.

2.2 Cadre d'étude

Nous devons d'abord définir le cadre dans lequel nous allons nous placer pour notre étude. Jusqu'à présent, les cas "simples" étaient ceux d'un domaine régulier, du type "lipschitzien" (voir référence [2] pour une définition plus détaillée). On va désormais se placer dans le cadre des "pires" frontières possibles, que l'on définit ci-après.

Définition 2.1. Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n . On suppose que la frontière $\partial\Omega$ est compacte et qu'il existe une mesure de Borel positive μ sur \mathbb{R}^n telle que $\partial\Omega = \text{supp } \mu$. On suppose de plus qu'il existe un $d \in]n-2, n[$ fixé et une constante $c_d > 0$ telle que :

$$\forall x \in \partial\Omega, \mu(B_r(x)) \leq c_d r^d, 0 < r \leq 1$$

Ces domaines sont appelés domaines "Sobolev admissibles". On se place dans ce cadre pour toute la suite de notre étude.

La figure ci-dessous présente à gauche un bord lipschitzien (régulier) et à droite un bord préfractal (flocon de Von Koch).

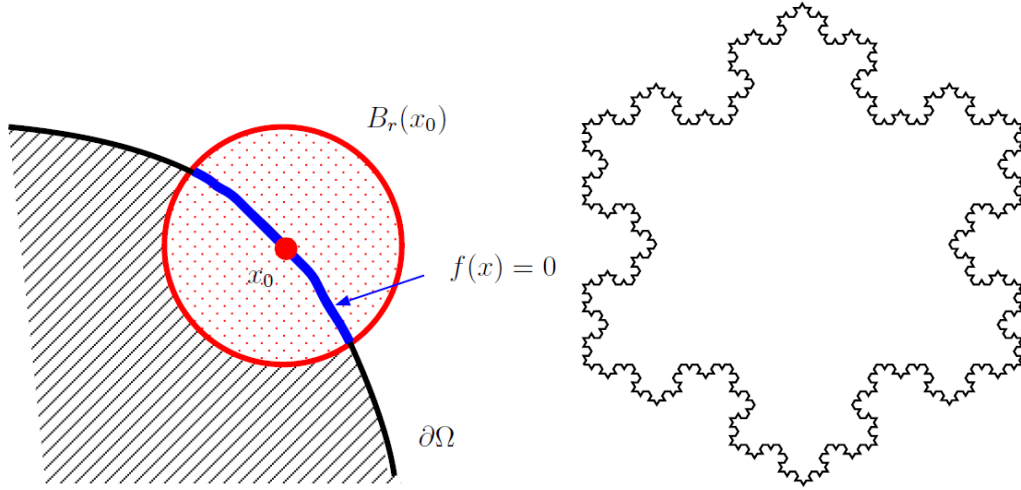


FIGURE 4 – Exemples d'un bord lipschitzien et d'un bord préfractal

En vertu de la nouvelle mesure μ utilisée précédemment et des opérateurs présents dans les équations de Maxwell, on va avoir besoin des nouveaux ensembles suivants.

Définition 2.2. On définit :

- $L^2(\partial\Omega, \mu) = \{f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ } \mu\text{-mesurables telles que } \int_{\partial\Omega} f^2 d\mu < \infty\}$
- $H(\text{div}, \Omega) = \{w \in (L^2(\Omega))^n \mid \text{div}(w) \in L^2(\Omega)\}$
- $H_0(\text{div}, \Omega)$ est la fermeture de $(D(\Omega))^n$ dans $H(\text{div}, \Omega)$
- $H(\text{rot}, \Omega) = \{w \in (L^2(\Omega))^3 \mid \text{rot}(w) \in (L^2(\Omega))^3\}$
- $H_0(\text{rot}, \Omega)$ est la fermeture de $(D(\Omega))^3$ dans $H(\text{rot}, \Omega)$

On associe à $H(\text{div}, \Omega)$ et $H(\text{rot}, \Omega)$ les normes suivantes :

$$\forall w \in (L^2(\Omega))^n, \|w\|_{H(\text{div}, \Omega)} = \left(\|w\|_{(L^2(\Omega))^n}^2 + \|\text{div}(w)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\forall w \in (L^2(\Omega))^3, \|w\|_{H(\text{rot}, \Omega)} = \left(\|w\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \|\text{rot}(w)\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

2.3 Premières propriétés des bords fractals

Le premier outil indispensable dont nous aurons besoin est la trace. Il s'agit donc de la redéfinir pour des domaines non plus lipschitziens mais fractals.

Définition 2.3 (Opérateur de trace). On définit μ -presque partout l'opérateur de trace $\text{Tr} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega, \mu)$ par :

$$\text{Tr}u(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu^n(\Omega \cap B_r(x))} \int_{\Omega \cap B_r(x)} u(y) dy, x \in \partial\Omega$$

On note $B(\partial\Omega, \mu) := \text{Tr}(H^1(\Omega))$.

On rappelle ci-après deux propriétés importantes de l'opérateur de trace, donnée dans la référence [2].

Proposition 2.1. On a les propriétés suivantes :

1. L'opérateur trace $\text{Tr} : H^1(\Omega) \rightarrow B(\partial\Omega, \mu)$ est linéaire continu et en particulier, il existe une constante $C > 0$ (qui ne dépend que de n et d) telle que pour tout $u \in H^1(\Omega)$:

$$\|\text{Tr}u\|_{L^2(\partial\Omega, \mu)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

2. Il existe un opérateur, appelé opérateur d'extension, continu et linéaire, noté $E : B(\partial\Omega, \mu) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^n)$ tel que $\text{Tr}(Ef) = f$, $f \in B(\partial\Omega, \mu)$ (inverse à droite de l'opérateur trace).

Enfin, on donne la définition de la dérivée normale au sens des bords fractals, en s'inspirant de la formule de l'intégration par parties usuelle.

Définition 2.4 (Dérivée normale). Pour tout $u \in H^1(\Omega)$ avec $\Delta u \in L^2(\Omega)$, on peut définir une fonctionnelle linéaire bornée $\frac{\partial u}{\partial n} \in B'(\partial\Omega, \mu)$ par :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, \text{Tr}_{\Omega, \partial\Omega} v \right\rangle_{(B'(\partial\Omega, \mu), B(\partial\Omega, \mu))} := \int_{\Omega} (\Delta u) v dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

2.4 Nouveaux opérateurs de trace

2.4.1 Opérateur de trace normale

On va commencer par démontrer la formule de Green "généralisée", qui nous permet d'étendre la définition de $(\nabla u) \cdot n$ au cas des fractales. Elle nous sera utile dans les démonstrations à venir.

Théorème 1 (Formule de Green généralisée). Soit Ω un domaine Sobolev-admissible de \mathbb{R}^n . Alors, pour tout $u \in H^1(\Omega)$ avec $\Delta u \in L^2(\Omega)$, on peut définir une fonctionnelle linéaire bornée $(\nabla u) \cdot n \in (B(\partial\Omega, \mu))'$ par :

$$\forall w \in H^1(\Omega), \langle (\nabla u) \cdot n, w \rangle_{((B(\partial\Omega, \mu))', B(\partial\Omega, \mu))} := \int_{\Omega} (\Delta u) w dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w dx.$$

Cette formule peut également se réécrire comme suit pour l'adapter à des éléments $u \in H(\text{div}, \Omega)$:

$$\forall w \in H^1(\Omega), \langle u \cdot n, w \rangle_{((B(\partial\Omega, \mu))', B(\partial\Omega, \mu))} := \int_{\Omega} \text{div}(u) w dx + \int_{\Omega} u \cdot \nabla w dx.$$

Preuve 1. On rappelle que l'opérateur $\text{Tr} : H^1(\Omega) \rightarrow B(\partial\Omega, \mu)$ est continu et surjectif. Comme $w \in B(\partial\Omega, \mu)$, par surjectivité on considère $v \in H^1(\Omega)$ tel que $w = \text{Tr}(v)$. Pour tout $u \in H^1(\Omega)$ avec $\Delta u \in L^2(\Omega)$, on définit la fonctionnelle linéaire :

$$L : w \in B(\partial\Omega, \mu) \mapsto L(w) = \int_{\Omega} Ew \Delta u dx + \int_{\Omega} \nabla(Ew) \cdot \nabla u dx,$$

où $E : B(\partial\Omega, \mu) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^n)$ est l'opérateur d'extension linéaire borné tel que $\text{Tr}(Ew) = w$ μ p.p (et son existence est assurée par le théorème 1.3.2 de [2]). On note $v = \mathbb{1}_{\Omega} Ew \in H^1(\Omega)$ si bien que $\text{Tr}(v)$ existe et vérifie bien $\text{Tr}(v) = w$. Alors, par continuité de l'opérateur d'extension, on a la continuité de L :

$$\begin{aligned} |L(w)| &\leq \left| \int_{\Omega} v \Delta u dx \right| + \left| \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx \right| \\ &\leq (\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}) \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C (\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}) \|w\|_{B(\partial\Omega, \mu)} \end{aligned}$$

Ainsi, comme $\text{Tr}(v) = w$, avec les notations $L(w) = \langle (\nabla u) \cdot n, w \rangle_{(B(\partial\Omega, \mu))', B(\partial\Omega, \mu)}$, on obtient exactement la formule de Green généralisée (grâce au théorème de représentation de Riesz).

On a un premier résultat de densités des fonctions régulières.

Proposition 2.2. $(C_c^\infty(\overline{\Omega}))^n$ est dense dans $H(\text{div}, \Omega)$:

$$\forall w \in H(\text{div}, \Omega), \exists (w_k)_k \in (C_c^\infty(\overline{\Omega}))^n, \lim_{k \rightarrow +\infty} \|w - w_k\|_{H(\text{div}, \Omega)} = 0 \quad (2)$$

Preuve 2. On s'inspire de la démonstration du théorème 2.4 de la référence [4] qui prouve le résultat dans le cas des bords lipchitziens.

On va utiliser la propriété suivante des espaces de Banach pour montrer que $(C_c^\infty(\overline{\Omega}))^n$ est dense dans $H(\text{div}, \Omega)$:

Un sous-espace \mathcal{V} d'un espace de Banach M est dense dans M si et seulement si chaque élément de M' qui s'annule sur \mathcal{V} s'annule aussi sur M .

Soit l dans $H(\text{div}, \Omega)'$. Comme $H(\text{div}, \Omega)'$ est un espace de Hilbert, on peut associer à l une fonction u de $H(\text{div}, \Omega)$ telle que :

$$\forall u \in H(\text{div}, \Omega), \langle l, u \rangle = (l, u) + (\text{div}(l), \text{div}(u)) = \sum_{i=1}^n (l_i, u_i) + (l_{n+1}, \text{div}(u)).$$

En effet, cela provient de la définition de la norme dans $H(\text{div}, \Omega)$: $\|w\|_{H(\text{div}, \Omega)} = (\|v\|_{(L^2(\Omega))^n}^2 + \|\text{div}(v)\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}$.

On suppose maintenant que l s'annule sur $(C_c^\infty(\overline{\Omega}))^n$ et posons \tilde{l}_i , l'extension de l_i qui est nulle en dehors de Ω . La formule précédente s'écrit donc :

$$\forall \phi \in D(\mathbb{R}^n)^n, \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \tilde{l}_i \cdot \phi_i + \tilde{l}_{n+1} \cdot \operatorname{div}(\phi) dx = 0$$

Puis en utilisant la formule de Green généralisée, on a :

$$\forall \phi \in (D(\mathbb{R}^n))^n, \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(\tilde{l}) \operatorname{div}(\phi) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\tilde{l})) \phi dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{grad}(\tilde{l}_{n+1}) \phi dx$$

On obtient donc :

$$\forall \phi \in (D(\mathbb{R}^n))^n, (\tilde{l}, \phi) = \sum_{i=1}^n (\tilde{l}_i, \phi_i) = (\operatorname{grad}(\tilde{l}_{n+1}), \phi)$$

Cette égalité implique qu'au sens des distributions, on a $\tilde{l} = \operatorname{grad}(\tilde{l}_{n+1})$, avec $\tilde{l} \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n$. De plus, $l_{n+1} \in H_0^1(\Omega)$ d'après le théorème 1.2.2 de la référence [4]. Comme $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on considère $(w_n)_n$ une suite de $D(\Omega)$ qui tend vers l_{n+1} dans $H^1(\Omega)$. On a alors :

$$\forall u \in H(\operatorname{div}, \Omega) \langle l, u \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{grad} w_n \cdot u dx + \int_{\mathbb{R}^n} w_n \cdot \operatorname{div} u dx = 0$$

Ainsi, en appliquant le résultat initial, on a bien $(C_c^\infty(\overline{\Omega}))^n$ dense dans $H(\operatorname{div}, \Omega)$.

A partir de là, on peut étudier la trace normale. Pour tout $v \in (C_c^\infty(\overline{\Omega}))^n$, on peut définir sa trace normale sur $\partial\Omega : (v \cdot n)|_{\partial\Omega}$. Lorsqu'on prolonge par continuité aux éléments de $H(\operatorname{div}, \Omega)$, on aboutit cette fois à une application trace normale à valeurs dans le dual de $B(\partial\Omega, \mu)$, noté $(B(\partial\Omega, \mu))^*$. On notera l'action d'un élément de $(B(\partial\Omega, \mu))^*$ sur un élément de $B(\partial\Omega, \mu)$ à l'aide de crochets de dualité.

Définition 2.5 (Trace normale). On peut définir l'application trace normale γ_n comme suit :

$$\begin{aligned} \gamma_n : (C_c^\infty(\overline{\Omega}))^n &\rightarrow (B(\partial\Omega, \mu))^* \\ v &\mapsto \gamma_n v = (v \cdot n)|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

On démontre ensuite ce premier résultat sur l'opérateur de trace normale :

Théorème 2. *L'application trace normale se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée γ_n , de $H(\operatorname{div}, \Omega)$ dans $(B(\partial\Omega, \mu))^*$.*

Preuve 3. On s'inspire de la démonstration du théorème 2.5 de la référence [4] qui prouve le résultat dans le cas des bords lipchitziens.

Soient $\phi \in H^1(\Omega)$ et $v \in D(\overline{\Omega})^n$. D'après la formule de Green généralisée, on a :

$$\langle v \cdot n, \phi \rangle_{((B(\partial\Omega, \mu))', B(\partial\Omega, \mu))} = \int_{\Omega} (\nabla \phi) v dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}(v) \cdot \phi dx.$$

Il existe donc une constante C telle que :

$$|\langle v \cdot n, \phi \rangle_{((B(\partial\Omega, \mu))', B(\partial\Omega, \mu))}| \leq C \|v\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)}$$

Soit w un élément de $B(\partial\Omega, \mu)$. Il existe un élément ϕ de $H^1(\Omega)$ tel que $w = \phi$ sur $\partial\Omega$ μ -p.p. Ainsi l'inégalité précédente implique que :

$$|\langle v \cdot n, w \rangle_{((B(\partial\Omega, \mu))', B(\partial\Omega, \mu))}| \leq C \|v\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} \|w\|_{B(\partial\Omega, \mu)}$$

On conclut que $\|\gamma_n v\|_{(B(\partial\Omega, \mu))^*} \leq C \|v\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}$

Proposition 2.3. L'application trace normale $\gamma_n : H(\operatorname{div}, \Omega) \rightarrow (B(\partial\Omega, \mu))^*$ est surjective.

Preuve 4. Soit $\mu \in (B(\partial\Omega, \mu))^*$. On veut trouver $v \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ tel que :

$$(v \cdot n)|_{\partial\Omega} = \mu \tag{3}$$

On considère donc le problème suivant :

Trouver $\phi \in H^1(\Omega)$ tel que :

$$-\Delta \phi + \phi = 0 \text{ dans } \partial\Omega$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \mu \text{ sur } \partial\Omega$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, on peut aisément démontrer que ce problème admet exactement une solution $\phi \in H^1(\Omega)$. On pose alors $v = \nabla \phi$.

Ainsi, $v \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ et $v \cdot n = \mu$ sur $\partial\Omega$.

On a de plus le résultat suivant :

Théorème 3. Soit Ω un domaine Sobolev-admissible de \mathbb{R}^n . Alors, on a :

$$H_0(\operatorname{div}, \Omega) = \{w \in H(\operatorname{div}, \Omega) | \gamma_n w = 0\}$$

Preuve 5. On va utiliser la propriété suivante des espaces de Banach pour montrer que $D(\Omega)^n$ est dense dans $\operatorname{Ker}(\gamma_n)$:

Un sous-espace \mathcal{V} d'un espace de Banach M est dense dans M si et seulement si chaque élément de M' qui s'annule sur \mathcal{V} s'annule aussi sur M .

Soit $l \in Ker(\gamma_n)'$. Comme $Ker(\gamma_n)'$ est un Hilbert, on peut associer à l une fonction u de $Ker(\gamma_n)$ telle que :

$$\forall u \in Ker(\gamma_n), \langle l, u \rangle = (l, u) + (div(l), div(u)) = \sum_{i=1}^n (l_i, u_i) + (l_{n+1}, div(u)).$$

En effet, cela provient de la définition de la norme dans $H(\text{div}, \Omega)$: $\|w\|_{H(\text{div}, \Omega)} = (\|v\|_{(L^2(\Omega))^n}^2 + \|\text{div}(v)\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}$.

On suppose maintenant que l s'annule sur $D(\Omega)^n$. On obtient donc :

$$\forall \phi \in (D(\Omega))^n, (l, \phi) + (div(l), div(\phi)) = 0$$

Or, la formule d'intégration par parties donne :

$$\forall \phi \in (D(\Omega))^n, \int_{\Omega} div(l) div(\phi) dx = - \int_{\Omega} grad(div(l)) \phi dx = - \int_{\Omega} grad(l_{n+1}) \phi dx$$

On a donc :

$$\forall \phi \in (D(\Omega))^n, (l, \phi) = (grad(l_{n+1}), \phi)$$

Cette égalité implique qu'au sens des distributions, on a $l = grad(l_{n+1})$, avec $l \in (L^2(\Omega))^n$. Ainsi, $l_{n+1} \in H^1(\Omega)$. Or, la formule de Green donne :

$$\forall u \in H(\text{div}, \Omega), \forall \phi \in H^1(\Omega), (u, grad(\phi)) + (div(u), \phi) = \langle u.n, \phi \rangle_{\Gamma}$$

Donc en l'appliquant à $\phi = l_{n+1}$ et comme $Ker(\gamma_n) \subset H(\text{div}, \Omega)$:

$$\forall u \in Ker(\gamma_n), \langle l, u \rangle = \langle u.n, l_{n+1} \rangle_{\Gamma} = \langle \gamma_n u, l_{n+1} \rangle_{\Gamma} = 0$$

Ainsi, en appliquant le résultat initial, on a bien $D(\Omega)^n$ dense dans $Ker(\gamma_n)$. Donc l'adhérence de $D(\Omega)^n$ est égale à $Ker(\gamma_n)$. Or, par définition, $H_0(\text{div}, \Omega)$ est l'adhérence de $D(\Omega)^n$ pour la norme de $H(\text{div}, \Omega)$.

Ainsi, on a bien $Ker(\gamma_n) = H_0(\text{div}, \Omega)$

2.4.2 Opérateur de trace tangentielle

On va désormais démontrer la formule de Stokes "généralisée", qui nous permet d'étendre la définition de $u \times n$ au cas des fractales. Elle nous sera utile dans les démonstrations à venir.

Théorème 4 (Formule de Stokes généralisée). *Soit Ω un domaine Sobolev-admissible de \mathbb{R}^n . Alors, pour tout $u \in H(\text{rot}, \Omega)$, on peut définir une fonctionnelle linéaire bornée $u \times n \in ((B(\partial\Omega, \mu))^3)'$ par :*

$$\forall w \in H(\text{rot}, \Omega), \langle u \times n, w \rangle_{((B(\partial\Omega, \mu))^3)', (B(\partial\Omega, \mu))^3)} := \int_{\Omega} u \text{rot}(w) dx - \int_{\Omega} w \text{rot}(u) dx.$$

Preuve 6. Comme pour la démonstration de la formule de Green généralisée, on considère $v \in H^1(\Omega)$ tel que $w = \text{Tr}(v)$.

Pour tout $u \in H(\text{rot}, \Omega)$, on définit la fonctionnelle linéaire :

$$L : w \in (B(\partial\Omega, \mu))^3 \mapsto L(w) = \int_{\Omega} u \text{rot}(Ew) dx - \int_{\Omega} Ew \text{rot}(u) dx.$$

où $E : (B(\partial\Omega, \mu))^3 \rightarrow H^1(\mathbb{R}^n)$ est l'opérateur d'extension. On note $v = \mathbf{1}_{\Omega} Ew \in H^1(\Omega)$ si bien que $\text{Tr}(v)$ existe et vérifie bien $\text{Tr}(v) = w$. Alors, par continuité de l'opérateur d'extension, et par l'inégalité $\|u\|_{H(\text{rot}, \Omega)}^2 \leq 2\|u\|_{H^1(\Omega)}^2$ donnée dans la référence [1], on a la continuité de L :

$$\begin{aligned} |L(w)| &\leq \left| \int_{\Omega} u \text{rot}(v) dx \right| + \left| \int_{\Omega} v \text{rot}(u) dx \right| \\ &\leq (\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\text{rot}(u)\|_{L^2(\Omega)}) \|v\|_{H(\text{rot}, \Omega)} \\ &\leq C (\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\text{rot}(u)\|_{L^2(\Omega)}) \|w\|_{(B(\partial\Omega, \mu))^3} \end{aligned}$$

Ainsi, comme $\text{Tr}(v) = w$, avec les notations $L(w) = \langle u \times n, w \rangle_{((B(\partial\Omega, \mu))^3)', (B(\partial\Omega, \mu))^3)}$, on obtient exactement la formule de Stokes généralisée (grâce au théorème de représentation de Riesz).

On a un second résultat de densité des fonctions régulières.

Proposition 2.4. $(C_c^\infty(\overline{\Omega}))^n$ est dense dans $H(\text{rot}, \Omega)$:

$$\forall w \in H(\text{div}, \Omega), \exists (w_k)_k \in (C_c^\infty(\overline{\Omega}))^n, \lim_{k \rightarrow +\infty} \|w - w_k\|_{H(\text{rot}, \Omega)} = 0 \quad (4)$$

Preuve 7. La preuve est semblable à celle de la proposition 2.2. On utilise en effet la même propriété des espaces de Banach pour montrer que $(C_c^\infty(\overline{\Omega}))^n$ est dense dans $H(\text{rot}, \Omega)$. On la rappelle ici :

Un sous-espace \mathcal{V} d'un espace de Banach M est dense dans M si et seulement si chaque élément de M' qui s'annule sur \mathcal{V} s'annule aussi sur M .

Soit l dans $H(\text{rot}, \Omega)'$. Comme $H(\text{rot}, \Omega)'$ est un espace de Hilbert, on peut associer à l une fonction u de $H(\text{rot}, \Omega)$ telle que :

$$\forall u \in H(\text{rot}, \Omega), \langle l, u \rangle = (l, u) + (\text{rot}(l), \text{rot}(u)) = \sum_{i=1}^n (l_i, u_i) + (l_{n+1}, \text{rot}(u)).$$

En effet, cela provient de la définition de la norme dans $H(\text{rot}, \Omega)$: $\|w\|_{H(\text{rot}, \Omega)} = (\|v\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \|\text{rot}(v)\|_{L^2(\Omega)^3}^2)^{1/2}$.

On suppose maintenant que l s'annule sur $(C_c^\infty(\overline{\Omega}))^n$ et posons \tilde{l}_i , l'extension de l_i qui est nulle en dehors de Ω . La formule précédente s'écrit donc :

$$\forall \phi \in D(\mathbb{R}^n)^n, \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \tilde{l}_i \cdot \phi_i + \tilde{l}_{n+1} \cdot \text{rot}(\phi) dx = 0$$

Puis en utilisant la formule de Stokes généralisée, on obtient :

$$\forall \phi \in (D(\mathbb{R}^n))^n, \int_{\mathbb{R}^n} \text{rot}(\tilde{l}) \text{rot}(\phi) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \text{rot}(\text{rot}(\tilde{l})) \phi dx = \int_{\mathbb{R}^n} \text{rot}(\tilde{l}_{n+1}) \phi dx$$

On a donc :

$$\forall \phi \in (D(\Omega))^n, (\tilde{l}, \phi) = \sum_{i=1}^n (\tilde{l}_i, u_i) = -(\text{rot}(\tilde{l}_{n+1}), \phi)$$

Cette égalité implique qu'au sens des distributions, on a $\tilde{l} = -\text{rot}(\tilde{l}_{n+1})$, avec $\tilde{l} \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n$. De plus, $\text{rot}(l_{n+1}) \in H_0^1(\Omega)$ d'après le théorème 1.2.2 de la référence [4]. Comme $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on considère $(w_n)_n$ une suite de $D(\Omega)$ qui tend vers l_{n+1} dans $H^1(\Omega)$. On a alors :

$$\forall u \in H(\text{rot}, \Omega) \langle l, u \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} -\text{rot}(w_n) \cdot u dx + \int_{\mathbb{R}^n} w_n \cdot \text{rot}(u) dx = 0$$

Ainsi, en appliquant le résultat initial, on a bien $(C_c^\infty(\overline{\Omega}))^n$ dense dans $H(\text{rot}, \Omega)$.

Définition 2.6 (Trace tangentielle). Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n . On peut définir l'application trace tangentielle γ_T comme suit :

$$\begin{aligned} \gamma_T : (C_c^\infty(\overline{\Omega}))^3 &\rightarrow ((B_T(\partial\Omega, \mu))^3)^* \\ v &\mapsto \gamma_T v = (v \times n)|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

Théorème 5. *L'application trace tangentielle se prolonge par continuité en une application linéaire continue et non surjective, encore notée γ_T , de $H(\text{rot}, \Omega)$ dans $(B(\partial\Omega, \mu))^*$. Et, pour tout $v \in H(\text{rot}, \Omega)$, on a $\|\gamma_T v\|_{(B(\partial\Omega, \mu))^*} \leq \sqrt{2} \|v\|_{H(\text{rot}, \Omega)}$.*

Preuve 8. On s'inspire de la démonstration du théorème 2.13 de la référence [1] qui prouve le résultat dans le cas des bords lipschitziens. En effet, l'inégalité $\|u\|_{H(\text{rot}, \Omega)}^2 \leq 2\|u\|_{H^1(\Omega)}^2$ donnée dans cette référence prouve que γ_T est continue pour la norme $\|\cdot\|_{H(\text{rot}, \Omega)}$. On peut donc la prolonger par continuité à $H(\text{rot}, \Omega)$, à l'aide du résultat de densité de la proposition 2.4.

Théorème 6. Soit Ω un domaine Sobolev-admissible de \mathbb{R}^n . Alors, on a :

$$H_0(\text{rot}, \Omega) = \{w \in H(\text{rot}, \Omega) | \gamma_T w = 0\}$$

Preuve 9. La démonstration est semblable à celle du théorème 3. On utilise en effet la même propriété des espaces de Banach pour montrer que $D(\Omega)^n$ est dense dans $\text{Ker}(\gamma_t)$. On la rappelle ici :

Un sous-espace \mathcal{V} d'un espace de Banach M est dense dans M si et seulement si chaque élément de M' qui s'annule sur \mathcal{V} s'annule aussi sur M .

Soit $l \in \text{Ker}(\gamma_t)'$. Comme c'est un Hilbert, on peut associer à l une fonction u de $\text{Ker}(\gamma_t)$ telle que :

$$\forall u \in \text{Ker}(\gamma_t), \langle l, u \rangle = (l, u) + (\text{rot}(l), \text{rot}(u)) = \sum_{i=1}^n (l_i, u_i) + (l_{n+1}, \text{rot}(u)).$$

En effet, cela provient de la définition de la norme dans $H(\text{rot}, \Omega)$: $\|w\|_{H(\text{rot}, \Omega)} = (\|w\|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \|\text{rot}(w)\|_{(L^2(\Omega))^3}^2)^{1/2}$.

On suppose maintenant que l s'annule sur $D(\Omega)^n$. On obtient donc :

$$\forall \phi \in (D(\Omega))^n, (l, \phi) + (\text{rot}(l), \text{rot}(\phi)) = 0$$

Or, la formule de Stokes généralisée donne :

$$\forall \phi \in (D(\Omega))^n, \int_{\Omega} \text{rot}(l) \text{rot}(\phi) dx = \int_{\Omega} \text{rot}(\text{rot}(l)) \phi dx = \int_{\Omega} \text{rot}(l_{n+1}) \phi dx$$

On a donc :

$$\forall \phi \in (D(\Omega))^n, (l, \phi) = -(\text{rot}(l_{n+1}), \phi)$$

Cette égalité implique qu'au sens des distributions, on a $l = -\text{rot}(l_{n+1})$, avec $l \in (L^2(\Omega))^n$. Ainsi, $l_{n+1} \in H(\text{rot}, \Omega)$. Or, la formule de Stokes généralisée donne :

$$\forall u \in H(\text{rot}, \Omega), \forall \phi \in H(\text{rot}, \Omega), (u, \text{rot}(\phi)) - (\text{rot}(u), \phi) = \langle u \times n, \phi \rangle_{\Gamma}$$

Donc en l'appliquant à $\phi = -l_{n+1}$ et comme $\text{Ker}(\gamma_t) \subset H(\text{rot}, \Omega)$:

$$\forall u \in \text{Ker}(\gamma_t), \langle l, u \rangle = \langle u \times n, l_{n+1} \rangle_{\Gamma} = \langle \gamma_t u, l_{n+1} \rangle_{\Gamma} = 0$$

Ainsi, en appliquant le résultat initial, on a bien $D(\Omega)^n$ dense dans $\text{Ker}(\gamma_t)$. Donc l'adhérence de $D(\Omega)^n$ est égale à $\text{Ker}(\gamma_t)$. Or, par définition, $H_0(\text{rot}, \Omega)$ est l'adhérence de $D(\Omega)^n$ pour la norme de $H(\text{rot}, \Omega)$.

Ainsi, on a bien $\text{Ker}(\gamma_t) = H_0(\text{rot}, \Omega)$.

Conclusion et ouverture

Durant ce projet de recherche, nous avons pu développer nos connaissances dans le domaine des mathématiques appliquées de façon plus approfondie qu'en première année. En effet, après avoir bien appréhendé les diverses notions des références bibliographiques que nous avons vues à ce moment-là, nous avons pu cette année nous attaquer à l'aspect davantage exploratoire du projet, en essayant nous-mêmes de produire de nouvelles propriétés ainsi que leurs démonstrations. Nous nous sommes alors rendu compte, en étudiant des références très récentes, que le domaine du contrôle des ondes électromagnétiques était un domaine hautement étudié et à la pointe de la modernité.

En outre, ce projet nous a permis de mieux comprendre le sens de la recherche. Une partie importante de notre investissement a été consacrée à la recherche, à la lecture et à la compréhension de bibliographie, afin de bien s'imprégner des concepts que nous allons manipuler. Le présent rapport étant un produit fini détaillant essentiellement ce que nous sommes parvenus à comprendre et démontrer, il élude donc toute la partie exploratoire de notre travail.

Enfin, dans la suite de notre projet, notre objectif principal sera de mobiliser les outils mathématiques mis en place ce semestre, et éventuellement d'en développer d'autres, dans le but d'étudier l'existence et l'unicité de solutions à l'équation d'Helmoltz pour des bords fractals.

Références bibliographiques

- [1] Patrick Ciarlet, *Notes de cours sur les équations de Maxwell et leur approximation*, Partie 2 : Outils mathématiques, Preprint HAL, hal-03153780 (2022)
- [2] A. Rozanova Pierrat, *Polycopié du cours de la 2ème année, ST5-57, MDS*, Partie 1 : Introduction to Partial Differential Equations (PDE), Note de cours, CentraleSupélec (2021)
- [3] Simone Creo, Maria Rosaria Lancia, Paola Vernole, *Magnetostatic problems in fractal domains*, Article, arXiv :1805.08262v1 [math-ph] (2018)
- [4] V. Girault, P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for the Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Chapter 1 : Mathematical Foundation of the Stokes Problem, Partie 3 : A Decomposition of Vector Fields , Springer, New York (1986)
- [5] Dongwoo Sheen, *A generalized Green's theorem*, Article, Applied Mathematics Letters (1992)
- [6] A. Buffa, M. Costabel et D. Sheen, *On traces for $H(\text{curl}, \Omega)$ in Lipschitz domains*, Article, Academic Press (2001)
- [7] W. Arendt, G Metafune, D. Pallara et S. Romanelli, *The Laplacian with Wentzell-Robin boundary Conditions on Spaces of continuous functions*, Article, Springer (2003)
- [8] Virginie BONNAILLIE-NOËL, Marc Dambrine, Frédéric Héreau, Grégory Vial, *On generalized Ventcel's type boundary conditions for Laplace operator in a bounded domain*, Article,

Preprint HAL (2009)

[9] A.Rozanova-Pierrat *Exercices des TDs, voie "Analyse théorique*, Note de TDs, CentraleSupélec (2022)