Université Mohammed V
Faculté des Sciences de Rabat
Département de Mathématiques

2022–2023
Filière SMI (S3)
*Statistique Descriptive et Probabilités*

# ***Théorie des Probabilités et variables aléatoires***

# 1 Théorie des Probabilités

## 1.1 Introduction

Les origines de la théorie des Probabilités remontent au 17$^{\text{ème}}$ siècle en manipulant la notion du *hasard* en mathématique. L'élaboration axiomatique de la théorie des Probabilités a été établie par Kolmogorov (1933). La théorie des probabilités fournit des modèles mathématiques permettant l'étude d'expériences dont le résultat ne peut être prévu avec une totale certitude.

## 1.2 Expérience et événement aléatoires

**Définition 1.1.** *Une* **expérience** *est dite* **aléatoire** *lorsque ses résultats dépendent du* **hasard**.

Même si l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est connu, il est impossible de prédire avec certitude une issue.

**Exemple 1.1.** – *On sait d'avance, qu'en lançant un dé à six faces numérotées de* 1 *à* 6, *on ne peut pas* **prédire** *avec certitude le résultat.*

– *Si on lance une pièce de monnaie, on ne sait pas avec certitude que le résultat est pile.*

**Définition 1.2.** *L'ensemble des résultats possible d'une* ***expérience aléatoire*** *est noté* $\Omega$ *et est appelé* ***ensemble***[1] ***fondamental*** *ou* ***univers des possibles****.*

**Exemple 1.2.** – *Jet d'une pièce de monnaie :* $\Omega = \{P, F\}$
– *Lancer d'un dè :* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

On cite 3 types d'ensembles fondamentaux :

1. Ensemble fondamental ***fini*** : Lancer d'un dè : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. Ensemble fondamental ***infini dénombrable*** : Imaginons de manière abstraite un lancer d'une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention de pile $P$.

$$\Omega = \{P, FP, FFP, FFFP, ...\}$$

3. Ensemble fondamental ***infini non dénombrable*** : Durée de vie d'une ampoule.

$$\Omega = [0, +\infty[$$

1. aussi appelé **espace**

**Remarque 1.1.** *On peut scinder les espaces fondamentaux en deux type :*

1. *Discret : fini, infini dénombrable.*
2. *Continu : infini et non dénombrable.*

**Définition 1.3** (Événement, événement élémentaire)**.** 1. *On appelle* ***événement*** *tout sous-ensemble de* $\Omega$.

2. *On appelle* ***éventualité*** *ou* ***événement élémentaire*** *tout singleton de* $\Omega$ *et on le note par* $\omega$.

**Exemple 1.3.** *Jet d'un dè,* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

1. $\forall i, \{\omega_i\}$ *est un événement élémentaire.*
2. $A = \{1, 2\}$ *est un événement, formulé par la phrase :* ***"Obtenir*** 1 ***ou*** 2*".*

**Remarque 1.2.** 1. *l'ensemble* $\Omega$ *est un événement lui même et est appelé* ***événement certain****.*

2. *l'ensemble vide* $\emptyset$ *est un événement et est appelé* ***événement impossible****.*

**Exemple 1.4.** — *Une expérience aléatoire consiste à lancer un dé équilibré à six faces et noter le résultat obtenu. L'ensemble fondamental est* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*. Il s'agit d'un ensemble fini à six éléments.*

*Le nombre total des élément de* $\Omega$ *(ou de n'importe quel ensemble) est appelé* ***cardinal****, on note*

$$Card(\Omega) = \mid \Omega \mid = \#(\Omega) = 6$$

$A =$*"Obtenir un nombre pair" est un événement et* $A = \{2, 4, 6\}$ *On a bien* $A \subset \Omega$ *et* $Card(A) = 3$.

— *Une expérience aléatoire consiste à lancer une pièce de monnaie non truquée autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir* $F$*. L'ensemble fondamental est :*

$$\Omega = \{F, PF, PPF, PPPF, PPPPF, \dots, PP\dots PF, \dots\}$$

$A =$*"Le nombres de lancés est compris entre* $4$ *et* $6$*" est un événement et on a :*

$$A = \{PPPF, PPPPF, PPPPPF\}$$

## Opérations sur les événements

Soient $A$ et $B$ deux événements (i.e. deux sous-ensembles de $\Omega$), on a les opérations suivantes :

1. Le complémentaire de l'événement $A$ dans $\Omega$, noté $\bar{A}$, c'est l'**événement contraire** de $A$.
2. La réunion de $A$ et $B$ (noté $A \cup B$) est un événement. Il se réalise si, et seulement si, au moins l'un des événements $A$ et $B$ se réalise.
3. L'intersection de $A$ et $B$ (noté $A \cap B$) est un événement. Il se réalise si, et seulement si, les deux événements $A$ et $B$ se réalisent.
4. Lorsque $A \subset B$, si $A$ est réalisé alors $A$ est réalisé.
5. $B \setminus A = B \cap \overline{A}$.

**Exemple 1.5.** *On jette un dé cubique et on note la face obtenue. Alors* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *On a alors les exemples d'événements suivants :*

— $A =$*"Obtenir un nombre pair". Alors,* $A = \{2, 4, 6\}$.

— $B =$*"Obtenir un nombre* $\geq 4$*". Alors,* $B = \{4, 5, 6\}$.

— $A \cap B$ *"Obtenir un nombre pair,* ***et*** $\geq 4$*". Alors* $A \cap B = \{4, 6\}$.

— $A \cup B$ *"Obtenir un nombre pair,* ***ou*** $\geq 4$*". Alors,* $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

— $C =$*"Obtenir un nombre* $\geq 10$*". ALors,* $C = \emptyset$. *C'est un* ***événement impossible****.*

— $D =$*"Obtenir un nombre* $\leq 8$*". Alors* $D = \Omega$. *C'est un* ***événement certain****.*

— $E =$*"Obtenir un nombre impaire". Alors,* $E = \{1, 3, 5\} = \overline{A}$.

— $F =$*"Obtenir un nombre* $> 4$*". Alors,* $F = \{5, 6\}$. *Tous les éléments de* $F$ *sont dans* $B$. *On écrit* $F \subset B$.

— $A \cap E = \emptyset$. *Les événements* $A$ *et* $E$ *sont dits* ***incompatibles****.*

— $B \setminus E = B \cap \overline{E} = B \cap A = \{4, 6\}$

**Définition 1.4.** *Lorsque* $A \cap B = \emptyset$, *on dit que les événement* $A$ *et* $B$ *sont* ***incompatibles*** *ou* ***disjoints****.*

**Exemple 1.6.** *Jet d'un dè,* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Les événements* $A = \{1, 2\}$ *et* $B = \{4, 5, 6\}$ *sont* ***"disjoints"****.*

## 1.3 Bases axiomatiques des probabilités

Dans de nombreuses situations les événements d'intérêt ne constituent qu'un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$. Ce sous-ensemble doit posséder certaines propriétés qui garantissent les opérations sur les événements.

#### 1.3.1 Tribu et espace probabilisable

**Définition 1.5** (Tribu)**.** *Soient $\Omega$ un ensemble non vide et $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$. On dit que $\mathcal{F}$ est une* ***tribu*** *(ou $\sigma-$algère) de $\Omega$ si*

1. *$\Omega \in \mathcal{F}$,*
2. *$\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire : $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$,*
3. *$\mathcal{F}$ est stable pour une réunion dénombrable : $\forall (A_n)_n \subset \mathcal{F}, \quad \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$.*

On remarque que si $\mathcal{F}$ est une **tribu**, alors elle est stable pour une intersection dénombrable : $\bigcap_n A_n \in \mathcal{F}$.

**Exemple 1.7.** – $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ *est une tribu.*

– $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ *est appelée tribu* ***triviale***.

– $\mathcal{F} = \left\{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\right\}$ *est appelée tribu de* ***Bernoulli*** *(ou tribu engendrée par $A$).*

– *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{I}(\Omega) = \{I : I \subset \Omega$ est un intervalle$\}$, alors la tribu engendrée par $\mathcal{I}(\Omega)$, notée $\mathcal{B}_\Omega$, est appelée* ***tribu borelienne*** de $\Omega$.

**Définition 1.6** (Espace probabilisable)**.** *Soient $\Omega$ un ensemble non vide et $\mathcal{F}$ une tribu de $\Omega$. Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est appelé* ***espace probabilisable*** *(ou mesurable).*

#### 1.3.2 Espace probabilisé

**Définition 1.7** (Probabilité)**.** *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un* ***espace probabilisable***. *On dit qu'une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ est une* ***probabilité*** *si elle vérifie les axiomes suivantes :*

1. *(normalisation)* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *;*
2. *($\sigma-$additivité)* $\forall (A_n)_n \subset \mathcal{F}$ *et* $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$, *on a* $\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mathbb{P}\left(A_n\right)$.

**Exemple 1.8.** *Soit* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ *un espace fondamental à* $n$ *éléments (*$card(\Omega) = n$*). Prenons* $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$*, alors l'application*

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathcal{F} &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto \mathbb{P}(A) := \frac{card(A)}{n} \end{aligned}$$

*est une probabilité et est appelée* ***probabilité uniforme****.*

**Définition 1.8** (Espace probabilisé)**.** *Soient* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un* ***espace probabilisable*** *et* $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ *une* ***probabilité****, alors le triplet* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est appelé* ***espace probabilisé*** *(ou mesuré).*

**Propriétés 1.1.** *Pour tout* $A, B \in \mathcal{F}$ *:*

1. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$,
2. $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$,
3. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
4. *si* $B \subset A$*, on note* $A \setminus B = A \cap \bar{B}$*, On a*

$$\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A) \qquad et \qquad \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B),$$

5. $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante (resp. décroissante) dans* $\mathcal{F}$, *alors :* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$ *(resp.* $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$*).*

**Remarque 1.3.** – $\mathbb{P}(A) = 0 \not\Rightarrow A = \emptyset$ ;

– $\mathbb{P}(A) = 1 \not\Rightarrow A = \Omega$.

### 1.3.3 Événements équiprobables

Pour certaines expérience, l'ensemble fondamental est fini ($\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$) et les événements élémentaires ont la même probabilité : $\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = ... = \mathbb{P}(\omega_n) = p = 1/n$ (on dira aussi que les $\omega_i$ sont ***équiprobable***).

Soit $A$ un événement de $\Omega$, alors on peut écrire : $A = \{\omega_1, \ldots \omega_d\}$, avec $d \leq n$, donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{d}\{\omega_i\}) = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \mathbb{P}(\{\omega_2\}) + \ldots \mathbb{P}(\{\omega_d\}) = \sum_{i=1}^{d} \mathbb{P}(\{\omega_i\})$$

Par conséquent, **il suffit de connaître le cardinal** d'un événement pour calculer sa probabilité. Pour se faire, on utilise généralement le **Dénombrement** (Arrangements, Permutations, Combinaisons, ..., (voir chapitre 2)).

Dans le cas d'équiprobabilité on aura $\mathbb{P}(A) = \frac{d}{n}$.

**Remarque 1.4.** *Ce cas particulier de l'équiprobabilité est appelé loi discrète uniforme (voir Chapitre 4).*

**Exemple 1.9.** *Considérons le lancé de deux dés équilibrés, alors*

$$\Omega = \{\omega_1 = (1,1), \omega_2 = (1,2), \ldots \omega_{36} = (6,6)\}$$

*et* $Card(\Omega) = 36$

*Puisque les dés sont équilibrés ; alors* $\mathbb{P}(\omega_1) = \ldots = \mathbb{P}(\omega_{36}) = \dfrac{1}{36}$.

*Considérons l'événement A "obtenir au moins un nombre pair."*

$Card(A) = Card(\Omega) - Card($*"les deux nombres sont impaires"*$) = 36 - 6 = 27$

*Par la suite*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

**Exemple 1.10** (**Contre exemple d'événements non-équiprobables**). *On tire successivement et sans remise* 2 *boules d'une urne contenant* 2 *boules vertes (V) et* 3 *boules rouges (R). On s'intéresse à la couleur des boules tirées.*

*Soit l'événement A"les deus boules tirées ont la même couleur", alors*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(VV) + \mathbb{P}(RR)\\ &= \frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\\ &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

*alors que si on résonne comme dans le cas d'équiprobabilité on obtient*

$$\Omega = \{\omega_1 = VV, \omega_2 = RV, \omega_3 = VR, \omega_4 = RR\} \ et\ Card(\Omega) = 4$$

*et*

$$\frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \mathbb{P}(A)$$

Ainsi dans le cas de non équiprobabilité, si $A = \{\omega_1, \dots \omega_d\}$ alors la connaissance du cardinal de $A$ **ne suffit pas** de calculer sa probabilité $\mathbb{P}(A)$. La seule façon qui permet d'obtenir $\mathbb{P}(A)$ est la formule

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \mathbb{P}(\{\omega_2\}) + \dots \mathbb{P}(\{\omega_d\})$$

et ceci **éxige la donnée de** $\mathbb{P}(\{\omega_i\})$ pour tout $i$. C'est ce qu'on appellera **loi de probabilité** (voir Chapitre 4)

**Remarque 1.5.** *A partir de n'importe quel* ***vecteur*** $(\omega_1, \ldots, \omega_n)'$, *on peut construire une probabilité à une constante multiplicative près.*

*En effet, si on pose* $p_i = \dfrac{\omega_i}{\sum_{j=1}^{n} \omega_j}$ *alors* $\sum_{j=1}^{n} \omega'_j = 1$.

*Par exemple, à partir du vecteur* $(3, 2, 4, 1)'$, *le vecteur* $\left(\dfrac{3}{10}, \dfrac{2}{10}, \dfrac{4}{10}, \dfrac{1}{10}\right)'$ *définit une probabilité sur* $\Omega$.

**Remarque 1.6** ($\Omega$ **infini dénombrable**)**.** *Dans ce cas* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ *et* $Card(\Omega$ $+\infty$, *on n'a pas d'équiprobabilité* $(\sum_{i=1}^{+\infty} p = p \times (+\infty) \neq 1, \forall p \in [0,1])$

*Il existe une* ***suite*** $(p_1, p_2 \ldots)$ *à partir de laquelle on ne peut pas définir une probabilité sur* $\Omega$ *à une constante multiplicative près. Par exemple,* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. *On dit que la* ***série diverge****.*

*Cependant,* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, *Dans ce cas, la* ***série converge*** *et le vecteur* $\left(\frac{6}{\pi^2} \times \frac{1}{1^2}, \frac{6}{\pi^2} \times \frac{1}{2^2}, \ldots\right)'$ *définit une probabilité sur* $\Omega$.

*Il existe plusieurs lois de probabilité prédéfinies, on parle de lois usuelles, par exemple loi géométrique, loi de Poisson, ... (voir Chapitre 4).*

**Remarque 1.7** ($\Omega$ **infini non dénombrable**)**.** *Dans ce cas* $\Omega$ *est un intervalle de* $\mathbb{R}$. *Les écritures* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ *et* $A = \{\omega_1, \ldots \omega_d\}$ *ne* *sont pas correctes, et la formule* $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \mathbb{P}(\{\omega_2\}) + \ldots \mathbb{P}(\{\omega_d\})$ *n'a pas de sens.*

*Si* $A = [a, b]$*, alors* $\mathbb{P}(A) = \int_a^b f(x)dx$*, on calculera la probabilité à l'aide de fonction continue* $f$ *appelée densité de probabilité (voir chapitre 5).*

## 1.4 Probabilité conditionnelle

Dans cette section, on va étudier le calculs des probabilités avec disposition d'information supplémentaire concernant le résultat de l'expérience. On parle alors de **probabilités conditionnelles**.

On Considère maintenant un événement $A$, il est intuitif que l'utilisation de l'information *'B est réalisée'* (c'est à dire $\mathbb{P}(B) > 0$) peut changer le calcul de la probabilité de $A$.

**Définition 1.9.** ***La probabilité de A, sachant B,*** *notée $\mathbb{P}(A/B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$ est appelée* ***probabilité conditionnelle****, elle est définie :*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B : \mathcal{F} &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto \mathbb{P}_B(A) := \tfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \end{aligned}$$

**Remarque 1.8.** *L'application $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $\mathcal{F}$ et vérifie toutes les propriétés d'une probabilité.*

**Théorème 1.1** (Théorème des probabilités composées ou règle de la multiplication)**.**

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A/B)\mathbb{P}(B).$$

En voici une généralisation

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m) = \mathbb{P}(A_m/A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{m-1}) \times \mathbb{P}(A_{m-1}/A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m$$
$$\times ... \times \mathbb{P}(A_2/A_1)\mathbb{P}(A_1).$$

**Exemple 1.11.** *Un parc contient* 100 *voitures réparties selon le confort et la vitesse de la manière suivante :*

| | *Rapide* | *Non rapide* | *Total* |
|---|---|---|---|
| *Confortable* | *40* | *10* | *50* |
| *Non confortable* | *20* | *30* | *50* |
| *Total* | *60* | *40* | *100* |

***Quelle est la probabilité de choisir une voiture confortable sachant qu'elle est rapide ?***

*Il s'agit du calcul des probabilités avec disposition d'information supplémentaire concernant le résultat de l'expérience.*

*Soient les événements* $A =$*"voiture rapide" et* $B =$*"voiture confortable".*

*La probabilité cherchée est* $\mathbb{P}(B/A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

*On a* $\mathbb{P}(A) = \dfrac{60}{100}$ *et* $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{40}{100}$.

*Donc* $\mathbb{P}(B/A) = \dfrac{40}{60} = \dfrac{2}{3}$

**Définition 1.10** (Système complet/Partition)**.** *On dit que les événements* $A_1, \ldots, A_k$ *forment une partition de* $\Omega$*, si*

(*i*) $\bigcup_i^k A_i = \Omega$,

(*ii*) $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$.

**Théorème 1.2** (Formule de probabilité totale)**.** *Soit* $A_1, \ldots, A_k$ *un système complet d'évènements. Alors*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B/A_j).$$

**Théorème 1.3** (Formule de Bayes)**.** *Soit* $A_1, \ldots, A_k$ *un système complet d'évènements. Soit* $E$ *un évènement de probabilité non nulle. Alors*

$$\mathbb{P}(A_j/E) = \frac{\mathbb{P}(A_j \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(E/A_j)}{\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(E/A_i)}.$$

**Proposition 1.1.** *Soient* $A$ *et* $B$ *deux événements tels que* $P(B) > 0$*, alors*

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B/A)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B/A) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B/\bar{A})}.$$

**Exemple 1.12.** *Une urne contient* $5$ *boules noires et* $3$ *boules blanches* $(U[5N, 3B])$. *Quelle est la probabilité d'extraire* $2$ *boules blanches en* $2$ *tirages (Tirage sans remise) ?*

*On note par* $B_1$, *l'événement : "obtenir une boule blanche au premier tirage" et* $B_2$ *l'événement : "obtenir une boule blanche au deuxième tirage".*

*La probabilité cherchée est* $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)$ *et vaut* $\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2/B_1)$.

*Or* $\mathbb{P}(B_1) = 3/8$ *et* $\mathbb{P}(B_2/B_1) = 2/7$ *car lorsqu'une boule blanche est sortie au premier tirage, il ne reste plus que* $7$ *boules au total, dont* $2$ *seulement sont blanches. On conclut que* $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$.

**Exemple 1.13.** *Dans un match de Football le score est de* $1$ *à* $1$ *entre les deux équipes* $A$ *et* $B$. *Avant* $10$ *secondes du sifflet final, l'équipe* $A$ *obtient un penalty. On sait que l'un des trois joueurs* $J1$, $J2$ *ou* $J3$ *peut tirer ce penalty avec les probabilités* $0.7$ *pour* $J1$ *et* $0.2$ *pour* $J2$. *On sait aussi que* $J1$ *a une probabilité de succès de* $0.95$ *et que cette probabilité est de* $0.8$ *pour* $J2$ *et de* $0.7$ *pour* $J3$.

*a) Quelle est la probabilité que le match finisse sur le score de* $2$ *à* $1$ *en faveur de l'équipe* $A$ *?*

*b) Le match est terminé sur le score de* $2$ *à* $1$ *en faveur de l'équipe* $A$.

*Quelle la probabilité que le penalty ait été tiré par $J1$ ?*

*c) Le match est terminé sur le score de $1$ à $1$. Quelle la probabilité que le penalty ait été tiré par $J3$ ?*

$\Omega = \{J1, J2, J3\}$. *On note $VA$ l'événement "l'équipe $A$ gagne $2$ à $1$".*

*a) On cherche à calculer $\mathbb{P}(VA)$.*

*D'après la formule des probabilités totales :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(VA) &= \mathbb{P}(VA/J1)\mathbb{P}(J1) + \mathbb{P}(VA/J2)\mathbb{P}(J2) + \mathbb{P}(VA/J3)\mathbb{P}(J3) \\
&= 0.7 \times 0,95 + 0.2 \times 0.8 + 0.1 \times 0.7 \\
&= 0.665 + 0.16 + 0.07 \\
&= 0.895
\end{aligned}$$

*b) On cherche à calculer $\mathbb{P}(J1/VA)$.*

*D'après le Théorème de Bayes :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(J1/VA) &= \frac{\mathbb{P}(VA/J1)\mathbb{P}(J1)}{\mathbb{P}(VA)}\\ &= \frac{0.95 \times 0.7}{0.895}\\ &= \frac{0.665}{0.895}\\ &= 0.743\end{aligned}$$

*c) On cherche à calculer* $\mathbb{P}(J3/\overline{VA})$.
*D'après le Théorème de Bayes :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(J3/\overline{VA}) &= \frac{\mathbb{P}(\overline{VA}/J3)\mathbb{P}(J3)}{\mathbb{P}(\overline{VA})}\\ &= \frac{0.3 \times 0.1}{0.105}\\ &= \frac{0.035}{0.105}\\ &= 0.2\end{aligned}$$

**Exemple 1.14.** *Considérons deux urnes* $U_1[10N, 2B]$ *et* $U_2[5N, 3B]$ *; Quelle* *est la probabilité d'extraire* 1 *boule blanche ? sachant que la probabilité de tirer une boule de l'urne* $U_1$ *est égale à celle de l'urne* $U_2$ *et vaut* $1/2$.

*On note par* $B$ *l'événement : "obtenir une boule blanche" ,* $U_1$ *: "le tirage est effectué de l'urne 1" et* $U_2$ *: "le tirage est effectué de l'urne 2".*

## 1.5 Événements indépendants

Intuitivement, deux événement $A$ et $B$ sont indépendants si la réalisation de l'un n'a aucun effet sur la réalisation de l'autre

**Définition 1.11.** *On dit que l'événement* $A$ *est indépendant de l'événement* $B$ *si*

$$\mathbb{P}\left(A/B\right) = \mathbb{P}(A).$$

Comme conséquence de la définition, l'événement $A$ est indépendant de l'événement $B$ si, et seulement si, $\mathbb{P}\left(A \cap B\right) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

On a aussi : $\mathbb{P}\left(B/A\right) = \mathbb{P}(B)$.

**Définition 1.12.** *Une famille* $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ *de* $n$ *événements d'un même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est dite indépendante si pour toute partie* $I$ *de* $\{1, 2, ..., n\}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$

**Exemple 1.15.** *Reprenons l'exemple 1.12 en considérant que le tirage est avec remise.*

**Exemple 1.16.** *Jetons un dé équilibré et considérons les événements :*

- *$A$ : "Le résultat est impair",*
- *$B$ : "Le résultat est au moins égal à 5".*

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
$A = \{1, 3, 5\}$, $\mathbb{P}(A) = 1/2$
$B = \{5, 6\}$, $\mathbb{P}(B) = 1/3$
$A \cap B = \{5\}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/6$
*alors,* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ *et donc $A$ et $B$ sont indépendants.*

**Exemple 1.17** (L'indépendance n'est pas transitive)**.** *Soit* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, *telle que :*

$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = 1/10$ *et* $\mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \mathbb{P}(\{\omega_4\}) = 4/10$.
*Considérons les événements :*

- $A = \{\omega_1, \omega_2\}$,

- $B = \{\omega_2, \omega_3\}$ *et*
- $C = \{\omega_3, \omega_4\}$.

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\omega_2) = 1/10 = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ *et donc* $A$ *et* $B$ *sont indépendants.*

$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\omega_3) = 4/10 = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$ *et donc* $B$ *et* $C$ *sont indépendants.*

$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C)$ *et donc* $A$ *et* $C$ *ne sont pas indépendants.*

**Proposition 1.2.** *Si* $A$ *et* $B$ *sont indépendants alors,*

*(a)* $A$ *et* $\overline{B}$ *sont indépendants.*

*(b)* $\overline{A}$ *et* $B$ *sont indépendants.*

*(c)* $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$ *sont indépendants.*

*Preuve.*

(a) D'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$.
Donc $\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$
C'est à dire $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$
Ou encore $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$

Donc $\mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$
Finalement $\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$
Ce qui est la définition de l'indépendance entre $\overline{A}$ et $B$.

(b) La même preuve.

(c) La même preuve.

# 2 Variables Aléatoires

## 2.1 Introduction

Dans une expérience aléatoire, on s'intéresse à une *donnée numérique* résultat de cette expérience. Par exemple, lors de lancé de deux dés, on s'intéresse à la somme des résultats trouvés (et non pas au détail du déroulement du lancement). Donc une ***variable aléatoire (va)*** est une application qui à tout résultat du hasard associe une certaine quantité numérique.

La notion des variables aléatoires est très utile en calcul des probabilités et en statistique. Elle permet de travailler sur $\mathbb{R}$. Les variables aléatoires sont des objets centraux en théorie des probabilités. Elles jouent le même rôle que les *fonctions* en *analyse*.

## 2.2 Définition

**Définition 2.1.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable. On appelle variable aléatoire réelle sur* $\Omega$ *tout application*

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

*telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \{\omega \in \Omega \;\; X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}.$$

On note $\{\omega \in \Omega \;\; X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\}$.
$\{X \in I\}$ et$\{X \leq x\}$ sont des événements.

**Remarque 2.1.** *L'ensemble $\Omega$ étant fini, pour toute fonction $X$ définie sur $\Omega$, l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par $X$ est lui aussi fini, de cardinal inférieur ou égal à celui de $\Omega$.*

**Exemple 2.1.** *On jette une pièce de monnaie deux fois, $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$. Soit la variable aléatoire désignant "le nombre de pile obtenu".*
$X \in \{0, 1, 2\}$ *(*$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$*) et*
$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(FF) = 1/4$.
$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(FP, PF) = 2/4$.
$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(PP) = 1/4$.

**Exemple 2.2.** *On lance deux dés équilibrés. Montrer que la variable $X$ définie par $X$ : "Somme des points obtenus" est une variable aléatoire.*

*C'est à dire, il faut montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}$, *l'ensemble* $\{\omega \in \Omega \;\; X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

$X \in \{2, 3, ..., 12\}$

– *Si* $x < 2$ *alors* $\{X \leq x\} = \emptyset \in \mathcal{F}$.

– *Si* $x > 12$ *alors* $\{X \leq x\} = \Omega \in \mathcal{F}$.

– *Si* $2 \leq x \leq 12$ *alors* $\{X \leq x\} = \cup_{i \leq x}(X = i) \in \mathcal{F}$.

**Proposition 2.1.** *Soient* $X$ *et* $Y$ *deux variables aléatoires,* $k \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *Alors*

1. $X + Y$ *est une variable aléatoire ;*
2. $X - Y$ *est une variable aléatoire ;*
3. $XY$ *est une variable aléatoire ;*
4. $kX$ *est une variable aléatoire ;*
5. $X^n$ *est une variable aléatoire ;*
6. *de plus, si* $X$ *ne s'annule jamais,* $1/X$ *est une variable aléatoire.*

**Exemple 2.3.** *Soit* $A$ *une partie de* $\mathcal{F}$, *la fonction indicatrice* $\mathbb{1}_A$ *est une variable aléatoire.*

**Remarque 2.2.** *On peut scinder les variables aléatoires en deux types :*

- ▷ ***variables aléatoires discrètes ;***
- ▷ ***variables aléatoires continues.***

## 2.3 Fonction de répartition

**Définition 2.2.** *Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. L'application*

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & F(x) := \mathbb{P}(X \leq x) \end{array}$$

*s'appelle* ***la fonction de répartition de la variable aléatoire*** *$X$.*
*On pose*

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

**Proposition 2.2.** *La fonction de répartition $F$ est une fonction croissante et continue à droite et on a : $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.*

**Exemple 2.4.** *Jet d'une pièce de monnaie équilibrée. $\Omega = \{P, F\}$ et $\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(F) = 1/2$*

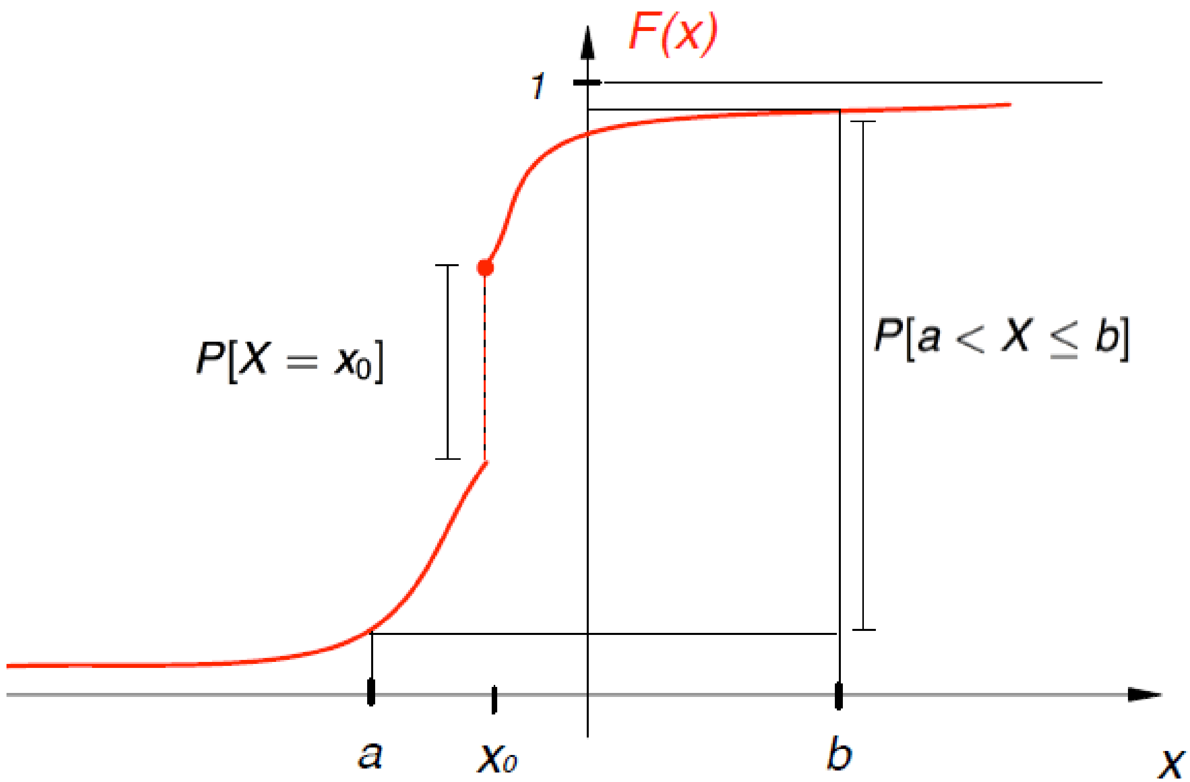


Figure 1 – Fonction de répartition d'une v.a. $X$ et lecture des probabilités.

*Soit* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec :*

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & si \quad \omega = P \\ 0 & si \quad \omega = F \end{cases},$$

*alors,*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1/2 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases},$$

**Théorème 2.1.** $\forall a < b \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

*En prenant la limite pour b à l'infini, on obtient*

$$\mathbb{P}(X > a) = 1 - F(a).$$

*Démonstration.* On a $]-\infty, b] = ]-\infty, a] \cup ]a, b]$, donc $\mathbb{P}(X \in ]-\infty, b]) = \mathbb{P}(X \in ]-\infty, a]) + \mathbb{P}(X \in ]a, b])$

□

La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire.

**Exemple 2.5.** *On lance une pièce de monnaie. Si on obtient pile on gagne $50DH$, si face on perd $10DH$.*

*Considérons la variable aléatoire : " Gain réalisé après une partie"*

$X \in \{-10, 50\}$.

$$\left\{\begin{array}{lll} si & x < -10: & F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 0 \\ si & -10 \leq x < 50: & F_X(x) = 1/2 \\ si & x \geq 50 & F_X(x) = 1 \end{array}\right. ,$$

*Tracer la fonction de répartition de cet exemple.*

**Exemple 2.6.** *Une urne contient* $2$ *boules blanches et* $10$ *boules noires. Un certain jeu permet de gagner* $50DH$ *si on en tire une boule blanche et de perdre* $20Dh$ *si on en tire une boule noire. On tire successivement deux boules de l'urne, on considère la variable aléatoire :"Gain réalisé après deux tirages".*

*Tracer la fonction de répartition de cet exemple.*

**Définition 2.3** (Indépendance)**.** *Deux variables aléatoires* $X$ *et* $Y$ *défnie sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *sont indépendantes si et seulement si pour tous réels* $t$ *et* $t'$

$$\mathbb{P}([X \leq t] \cap [Y \leq t']) = \mathbb{P}(X \leq t) \times \mathbb{P}(Y \leq t').$$

La fonction de répartition permet de définir le quantile d'ordre $\alpha$.

**Définition 2.4.** *Soit* $\alpha \in [0, 1]$ *fixé. Le quantile d'ordre* $\alpha$ *de la distribution de* $X$ *est le nombre*

$$x_\alpha = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\}.$$

S'il existe un unique nombre $c$ tel que $F(c) = \alpha$, alors $x_\alpha = c$. Mais la définition ci-dessus permet de définir $x_\alpha$ même dans les cas où il n'y a pas de tel $c$.

***Terminologie***

▷ $x_{1/2}$ est la médiane,

▷ $x_{1/4}$ et $x_{3/4}$ sont les $1^{\text{er}}$ et $3^{\text{ème}}$ quartiles,

▷ $x_{i/10}$, $i = 1, 2, ..., 9$, sont les déciles,

▷ $x_{i/100}$, $i = 1, 2, ..., 99$, sont les percentiles.

# 3 Exercices corrigés

***Exercice***

Soit $X$ une variable aléatoire prenant les valeurs 2, 4, 6, ou 8 telle que :

$$\mathbb{P}(X < 6) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(X > 6) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 4).$$

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de $X$.
3. S'agit-il de l'équiprobabilité ? Pourquoi ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 5)$, $\mathbb{P}(X + 4 \leq 7)$ et $\mathbb{P}(X \neq 2)$.
5. Déterminer et tracer la fonction de répartition de $X$.

***Corrigé***

1. $X(\Omega) = \{2; 4; 6; 8\}$.
2. On pose $a = \mathbb{P}(X = 2)$; $b = \mathbb{P}(X = 4)$; $c = \mathbb{P}(X = 6)$; $d = \mathbb{P}(X = 8)$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X<6)=\frac{1}{3} \Rightarrow a+b=\frac{1}{3} \\ \mathbb{P}(X>6)=\frac{1}{2} \Rightarrow d=\frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(X=4) \Rightarrow a=b \\ \mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=4)+\mathbb{P}(X=6)+\mathbb{P}(X=8)=1 \Rightarrow a+b+c+d=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=\frac{1}{3} \\ d=\frac{1}{2} \\ a=b \\ a+b+c+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=\frac{1}{3} \\ d=\frac{1}{2} \\ a=b \\ c=1-a-b-d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{6} \\ b=\frac{1}{6} \\ d=\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{6} \end{cases}$$

3. Non il ne s'agit pas d'équiprobabilité car $\mathbb{P}(X=2) \neq \mathbb{P}(X=8)$
4. $P(X \geq 5) = P(X=6)+P(X=8) = c+d = \frac{2}{3}$,
   $\mathbb{P}(X+4 \leq 7) = \mathbb{P}(X \leq 3) = \mathbb{P}(X=2) = a = \frac{1}{6}$,
   $\mathbb{P}(X \neq 2) = \mathbb{P}(X=4)+\mathbb{P}(X=6)+\mathbb{P}(X=8) = b+c+d = \frac{5}{6}$
5. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   Si $x<2$ alors $F(x)=0$
   Si $2 \leq x < 4$ alors $F(x) = \mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{6}$
   Si $4 \leq x < 6$ alors $F(x) = \mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=4) = \frac{2}{6}$
   Si $6 \leq x < 8$ alors $F(x) = \mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=4)+\mathbb{P}(X=6) = \frac{3}{6}$

Si $x \geq 8$ alors $F(x) = \mathbb{P}(X = 2)+\mathbb{P}(X = 4)+\mathbb{P}((X = 6)+\mathbb{P}(X = 8) = 1$

***Exercice***

On lance deux dés équilibrés et on considère le jeu suivant :

- Si la somme les deux chiffres obtenus est supérieure ou égale à 10 alors on gagne $6dh$,
- Si la différence entre les deux chiffres obtenus est nulle alors on gagne $4dh$,
- Si la somme les deux chiffres obtenus est inférieure à ou égale à 4 alors on perd $2dh$,
- Sinon, on perd $4dh$,

Soit $X$ la variable aléatoire représentant le gain (ou la perte) obtenu.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de $X$.
3. Quelle est la probabilité de gagner plus de $5dh$.
4. Quelle est la probabilité de perdre plus de $3dh$.
5. Quelle est la probabilité de gagner.

6. Quelle est la probabilité de perdre.
7. Déterminer et tracer la fonction de répartition de $X$.

***Corrigé***

1. $X(\Omega) = \{-4, -2, 4, 6\}$ avec $\Omega = \{(1,1);(1,2);....;(6,5);(6,6)\}$ et $Card(\Omega) = 36$.

2. ("somme $\geq$ 10" =)$\{(4,6);(6,4);(5,5);(5,6);(6,5);(6,6)\}$
donc $\mathbb{P}(X = 6) = \dfrac{Card\{"somme \geq 10\}}{Card(\Omega)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

("difference est nulle")= $\{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)\}$
donc $\mathbb{P}(X = 4) = \dfrac{Card\{somme\ nulle\}}{Card(\Omega)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

("somme $\leq$ 4" =)$\{(1,1);(1,2);(1,3);(2,1);(2,2);(3,1)\}$
donc $\mathbb{P}(X = -2) = \dfrac{Card\{"somme \leq 4\}}{Card(\Omega)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$\mathbb{P}(X = -4) = 1 - [\mathbb{P}(X = -2) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 6)] = 1 - (\dfrac{1}{6} +$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6}) = \frac{1}{2}$$

| $X$ | -4 | -2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

3. $\mathbb{P}(X \geq 5) = P(X = 6) = \frac{1}{6}$

4. $\mathbb{P}(X \leq -3) = P(X = -4) = \frac{1}{2}$

5. $\mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

6. $\mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}(X = -4) + \mathbb{P}(X = -2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

7. $F(x) = 0 \quad ; \quad x < -4$

$F(x) = \frac{1}{2} \quad ; \quad -4 \leq x < -2$

$F(x) = \frac{4}{6} \quad ; \quad -2 \leq x < 4$

$$F(x) = \frac{5}{6} \qquad ; \qquad 4 \leq x < 6$$
$$F(x) = 1 \qquad ; \qquad x \geq 6$$