Université Mohammed V
Faculté des Sciences de Rabat
Département de Mathématiques

2022–2023
Filière SMI (S3)
*Statistique Descriptive et Probabilités*

# *Variables aléatoires continues*

# 1 Définition d'une variable aléatoire continue

**Définition 1.1.** *Une variable aléatoire est dite* continue *si elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle fini ou infini.*

**Exemple 1.1.** *La variable aléatoire $X$ représentant la durée de vie d'une ampoule est continue.*

# 2 Loi d'une variable aléatoire continue

**Définition 2.1** (Densité)**.** *Une variable aléatoire est dite continue ou à densité si il existe une fonction $f$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant*

- *$f$ est positive sur $\mathbb{R}$,*
- *$f$ est continue sauf peut-être en un nombre fini de points où elle admet une limite à gauche et une limite à droite,*
- *$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.*

*On dit que $f$ est une* ***densité*** *de $X$.*

**Définition 2.2.** *Pour tous réels $a \leq b$ avec éventuellement $a = -\infty$ et*

$b = +\infty$

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

**Remarque 2.1.** *Réciproquement pour toute fonction $f$ vérifiant les propriétés ci dessus, il existe une variable aléatoire $X$ définie sur un espace probabilisé convenable et admettant $f$ comme densité.*

**Exemple 2.1.** *Soit $X$ une variable aléatoire réelle continue, de densité $f$ définie par :*

$$f(t) = \begin{cases} at^2 & si \ -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

*Déterminons la constante $a$, pour que $f$ soit une densité de probabilité :*
*La fonction $f$ est continue positive si $a \geq 0$*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1 \Longleftrightarrow \int_{-1}^{1} at^2 dt = 1 \Longleftrightarrow \left[\frac{a}{3}t^3\right]_{-1}^{1} = 1 \Longleftrightarrow \frac{2a}{3} = 1 \Longleftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

*D'où*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t^2 & si \ -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

**Définition 2.3** (**Fonction de répartition**). *Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$. La fonction de répartition de $f$ notée $F_X$ est définie pour tout réel $x$ par :*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

La fonction $F_X$ est continue dérivable et on a :

$$F'_X(x) = f(x).$$

**Exemple 2.2.** *Reprenons l'exemple 2.1, soit $X$ la variable aléatoire réelle continue, de densité $f$ définie par :*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t^2 & si \ -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

*Déterminons la fonction de répartition de $X$, On a les cas suivants :*

- *si $x \leq -1$ alors :*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0 \ dt = 0.$$

- *si $-1 \leq x \leq 1$ alors :*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} 0\ dt + \int_{-1}^{x} \frac{3}{2}t^2 dt = \left[\frac{1}{2}t^3\right]_{-1}^{x} = \frac{1}{2}(x^3+1).$$

- *si* $x \geq 1$ *alors :*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} 0\ dt + \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}t^2 dt + \int_{1}^{x} 0\ dt = 1.$$

*Donc*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq -1 \\ \frac{1}{2}(x^3+1) & si\ -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & sinon \end{cases}.$$

**Proposition 2.1.** *Soit* $X$ *une variable aléatoire de densité* $f$*, pour tout réel* $x$

$$P(X = x) = 0.$$

*Pour tous réels* $a \leq b$ *:*

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) =$$

**Exemple 2.3.** *Reprenons l'exemple 2.1, calculons les probabilités suivantes :* $\mathbb{P}(X \leq 0.25)$, $\mathbb{P}(-0.5 < X \leq 0.75)$.

- $\mathbb{P}(X \leq 0.25) = F_X(0.25) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^3 + 1\right) \simeq 0.5078.$
- $\mathbb{P}(-0.5 < X \leq 0.75) = F_X(0.75) - F_X(-0.5) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3 + 1\right) - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{-1}{2}\right)^3 + 1\right) \simeq 0.2734.$

# 3 Fonction d'une variable aléatoire continue

Soit $X$ une variable aléatoire continue de densité $f$ et de fonction de répartition $F$. Soit $\phi$ une fonction continue définie sur $X(\Omega)$, alors

$$Y = \phi(X)$$

est une variable aléatoire.

**Exemple 3.1.** *Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$, calculer la densité de*

*1.* $Y = aX + b$*,*
*2.* $Z = X^2$*,*
*3.* $T = e^X$*. [Exercice TD]*

# 4 Moments d'une variable aléatoires continue

## 4.1 Espérance

**Définition 4.1.** *Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge. On appelle espérance ou moyenne de $X$ le réel défini par*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt.$$

*Si $\mathbb{E}(X) = 0$, la variable $X$ est dite centrée.*

**Exemple 4.1.** *Reprenons l'exemple 2.1, calculons l'espérance de $X$*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{-1}^{+1} t \times \frac{3}{2}t^2 dt = \int_{-1}^{+1} \frac{3}{2}t^3 dt = \left[\frac{3}{8}t^4\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{4}.$$

**Proposition 4.1.** *Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires continues d'espérances supposées connues, alors*

- $\mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$, *pour tout réel* $\lambda$.
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

◦ $X \leq Y \Longrightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$

**Théorème 4.1** (Théorème de transfert). *Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$ et $\phi$ une fonction continue sur un intervalle contenant $X(\Omega)$ alors $\mathbb{E}(\phi(X))$ existe et*

$$E(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) f(t) dt$$

*si et seulement si l'inégrale est absolument convergente.*

## 4.2 Variance

**Définition 4.2.** *Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$, si la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admet une espérance on a*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t) dt.$$

*L'écart-type est la racine carrée de la variance.*
*Si la variance vaut 1, on dit que la variable $X$ est réduite.*

**Proposition 4.2.** *On a*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

**Exemple 4.2.** *Reprenons l'exemple 2.1, calculons la variance de* $X$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{-1}^{+1} t^2 \times \frac{3}{2}t^2 dt = \int_{-1}^{+1} \frac{3}{2}t^4 dt = \left[\frac{3}{10}t^5\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{5}.$$

*On a*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0.0375.$$

**Proposition 4.3.** *Soit* $X$ *une variable aléatoire de densité* $f$*, alors*

- $\mathbb{V}(X) \geq 0$ *(égale à zéro si la variable est constante),*
- $\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$*, pour tout réel* $a$*,*
- $\mathbb{V}(X + b) = \mathbb{V}(X)$*, pour tout réel* $b$*,*

**Proposition 4.4.** *Soit* $X$ *une variable aléatoire d'espérance* $\mu$ *et d'écart-type* $\sigma > 0$*, alors la variable aléatoire* $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ *est centrée réduite. (i.e.* $\mathbb{E}(Y) = 0$ *et* $\mathbb{V}(Y) = 1$*).*

**Proposition 4.5.** *Si* $X$ *et* $Y$ *deux variables aléatoires indépendantes qui admettent une variance, alors*

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

De manière générale, on a, pour toutes variables aléatoires $X$, $Y$ et tous réels $a, b$,

$$\mathbb{V}(aX + bY) = a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y) + 2abCov(X, Y),$$

avec

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

## 4.3 Moment d'ordre $r$ et moment centré d'ordre $r$

**Définition 4.3.** *Soit $X$ une variable aléatoire d'espérance $\mathbb{E}(X) = \mu$ et de densité $f$. Soit $r$ un entier naturel $\geq 1$.*

*On appelle moment d'ordre $r$*

$$\mathbb{E}(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)dt.$$

*On appelle moment centré d'ordre $r$*

$$\mathbb{E}((X-\mu)^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-\mu)^r f(t)dt.$$

# 5 Lois continues usuelles

## 5.1 Loi uniforme

**Définition 5.1.** *On dit qu'une variable aléatoire continue $X$ suit une loi* ***uniforme*** *sur $[a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ si sa densité de probabilité est :*

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x).$$

*On note $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$.*

**Proposition 5.1.** *Si $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$, alors sa fonction de répartition est :*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & si\ x \in [a, b] \\ 1 & sinon \end{cases}$$

**Proposition 5.2.** *Si $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$, alors*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

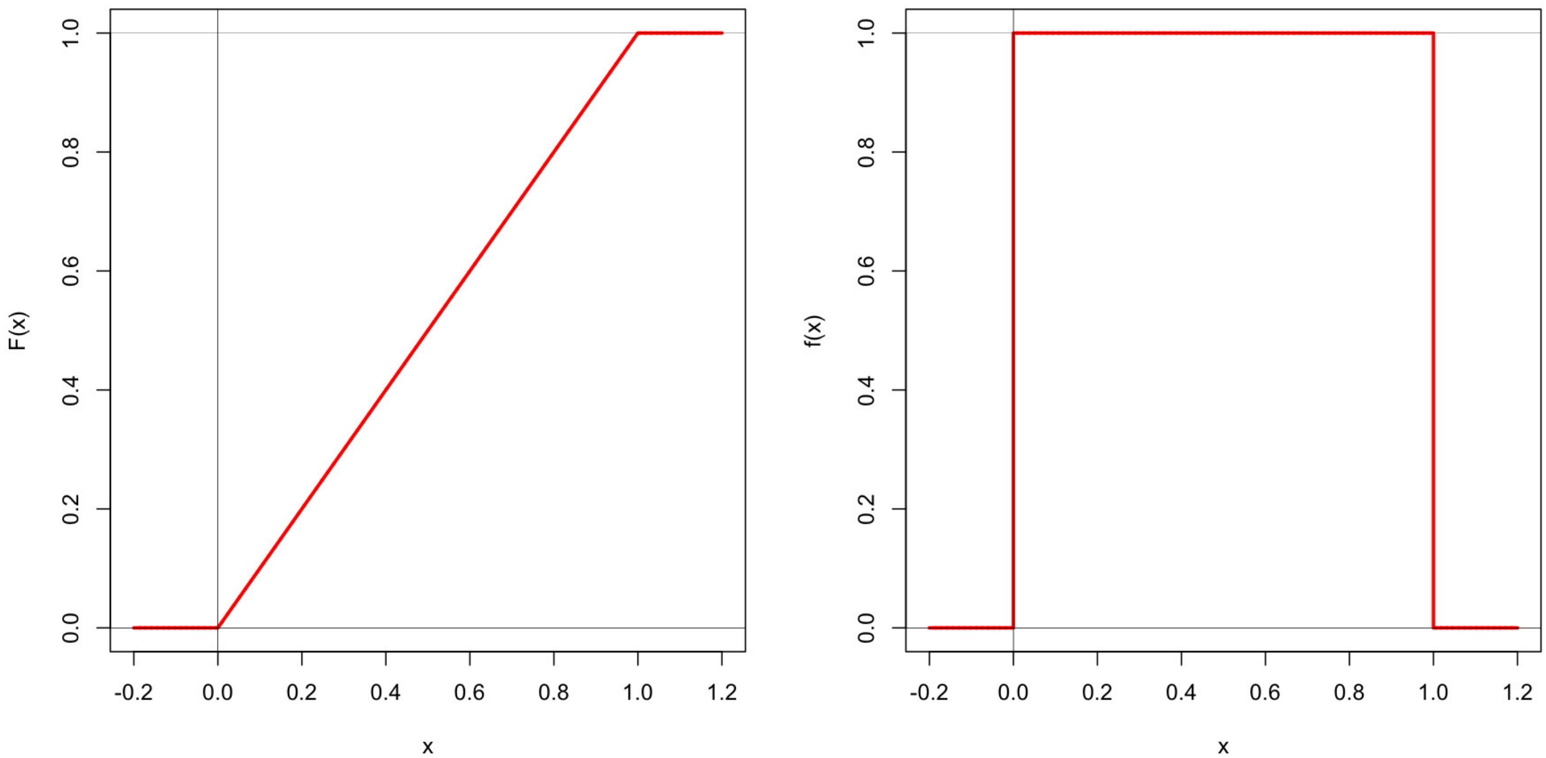



FIGURE 1 – Fonction de répartition ($F$) et fonction de densité ($f$) de $X \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$.

## 5.2 Loi Exponentielle

**Définition 5.2.** *La loi exponentielle de paramètre $\lambda$ décrit la distribution d'une variable continue $X$ qui ne prend que des valeurs positives selon* *la fonction de densité*

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

*On la note* $\mathcal{E}(\lambda)$.

**Proposition 5.3.** *Si* $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$*, alors*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

**Proposition 5.4.** *Si* $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$*, alors*

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

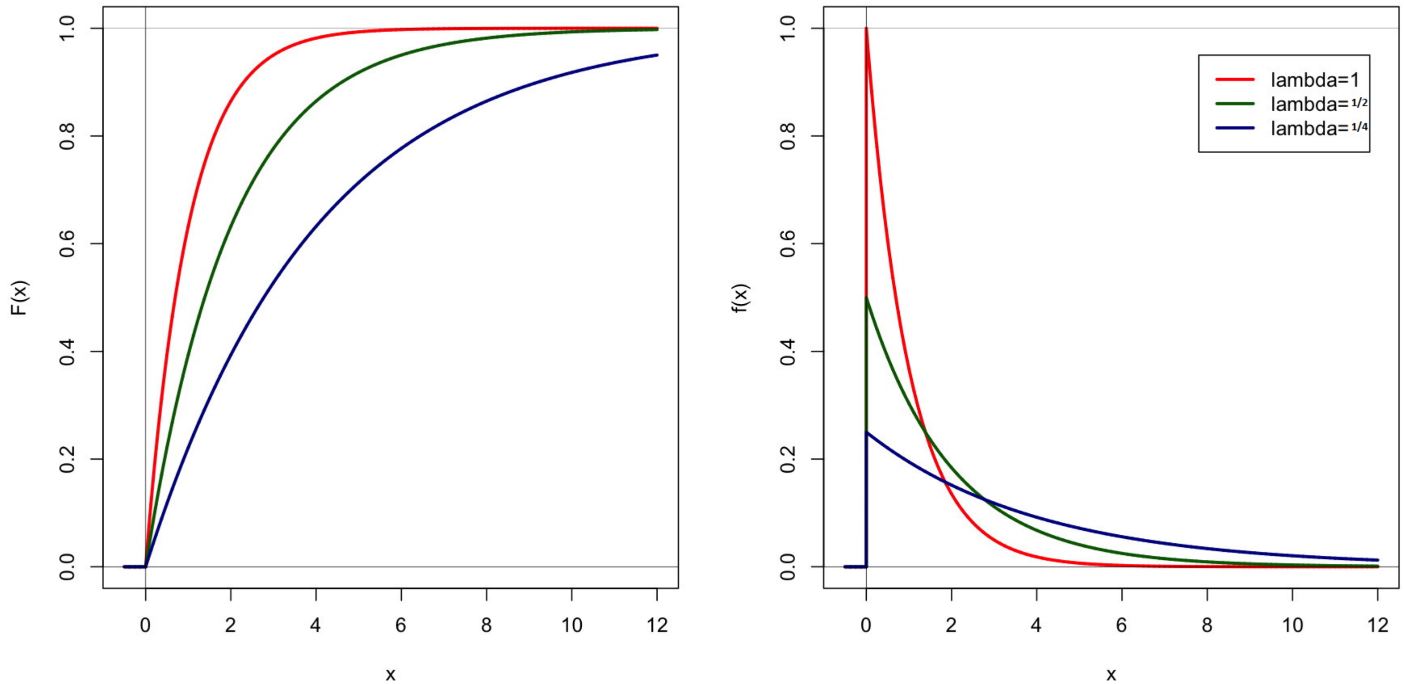



FIGURE 2 – Fonction de répartition ($F$) et fonction de densité ($f$) de $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda = 1, 1/2$ et $1/4$.

Cette distribution est souvent utilisée pour modéliser la durée de vie de certains composants.

La distribution exponentielle est ***"sans mémoire"***, dans le sens où, pour $h > 0$, on a

$$P(X > t + h | X > t) = P(X > h).$$

En effet si $X$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, alors

$$P(X > t) = e^{-\lambda t},$$

donc

$$P(X > t+h | X > t) = \frac{P(X > t+h, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+h)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} =$$

La probabilité que le composant survive $h$ unités de temps supplémentaires ne dépend donc pas de l'âge du composant (le composant "ne vieillit pas").

## 5.3 Loi de Cauchy

**Définition 5.3.** *Une variable aléatoire $X$ suit une loi de Cauchy si elle admet une densité $f$ dépendant des deux paramètres $x_0$ et $a$ $(a > 0)$ et définie par*

$$f(x) = \frac{1}{\pi a \left[1 + \left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{a}{(x - x_0)^2 + a^2}\right]$$

*$x_0$ est un paramètre de position et $a$ est un paramètre d'échelle, c'est-à-dire d'étalement.*

*On note $X \sim \mathcal{C}(x_0, a)$.*

**Remarque 5.1.** ◦ *$x_0$ est le mode et la médiane.*

- ◦ *L'espérance et la variance de cette loi* ***n'existent pas****.*
- ◦ *On peut en déduire une expression centrée et réduite (par la médiane et par l'étalement)*

$$f(x) = \frac{1}{\pi (1 + x^2)}$$

*et on note* $X \sim \mathcal{C}(1)$

**Proposition 5.5.** *Si* $X \sim \mathcal{C}(x_0, a)$*, alors sa fonction de répartition est de la forme*

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x - x_0}{a}\right) + \frac{1}{2}.$$

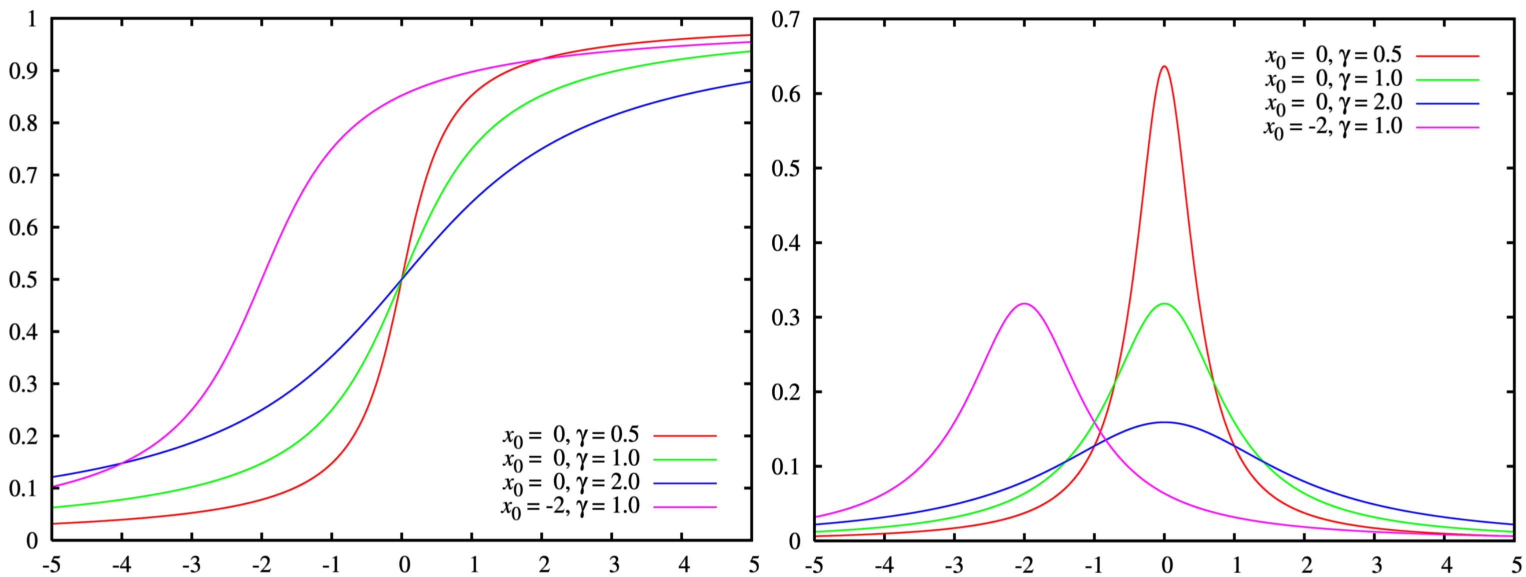



Figure 3 – Fonction de répartition et densité de $X \sim \mathcal{C}(x_0, \gamma)$

## 5.4 Loi Normale (un cas spécial)

On rencontre souvent des phénomènes complexes qui sont le résultat de causes nombreuses, d'effet faible, et plus ou moins indépendantes.

Un exemple typique est celui de l'*erreur* commise sur la mesure d'une grandeur physique. Cette erreur résulte d'un grand nombre de facteurs tels que : variations incontrôlables de la température ou de la pression, turbulence atmosphérique, vibrations de l'appareil de mesure, etc. Chacun des facteurs a un effet faible, mais l'*erreur* résultante peut ne pas être négligeable. Deux mesures faites dans des conditions que l'expérimentateur considère comme identiques pourront alors donner des résultats différents.

Donc dès que nous seront dans une situation où la distribution dépend de causes

- ◦ en grand nombre et indépendantes,
- ◦ dont les effets s'additionnent,
- ◦ dont aucune n'est prépondérante,

alors nous serons en présence de la distribution ***normale***.

C'est le cas, par exemple en

- ◦ ***Métrologie***, pour la distribution des erreurs d'observation ou pour la distribution de phénomènes aléatoires tels que la température et la pression.

- ◦ ***Biologie***, pour la distribution de caractères biométriques comme la taille ou le poids d'individus appartenant à une population homogène.
- ◦ ***Technologie***, pour la distribution des cotes des pièces usinées.
- ◦ ***Economie***, pour les fluctuations accidentelles d'une grandeur économique (production, ventes) autour de sa tendance.

**Définition 5.4.** *On dit qu'une variable aléatoire continue suit une loi normale*[1] *si l'expression de sa fonction de densité de probabilités est de la forme :*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

*La loi dépend des deux réels $\mu$ et $\sigma$ appelés paramètres de la loi normale. On la note $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.*

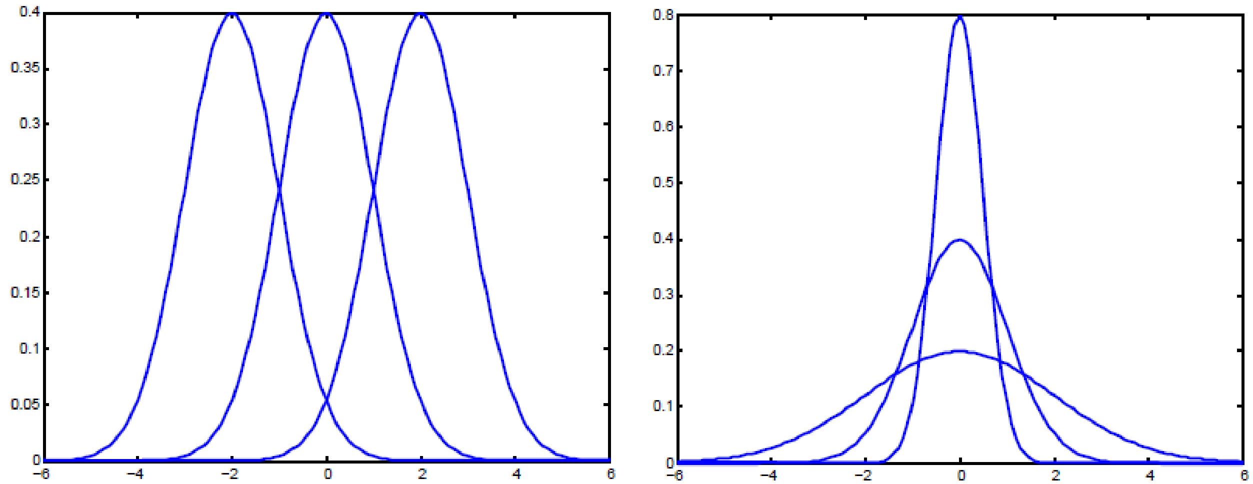
**Proposition 5.6.** *Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors*

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma.$$

**Propriétés 5.1.** *La densité de probabilités de la loi normale a la forme*

1. Les lois normales sont aussi appelées lois de Gauss ou lois gaussiennes, ou encore lois de Laplace-Gauss (de Moivre-Laplace-Gauss)

*d'une"courbe en cloche". Elle est symétrique par rapport à la droite verticale d'abscisse $x = \mu$. Son allure dépend de $\sigma$ (figure 4).*




Ecarts types identiques, espérances $-2$, 0, 2 Espérances identiques, écarts types 0.5, 1, 2

FIGURE 4 – Densités de la loi normale pour différentes valeurs d'espérances et pour différentes valeurs d'écart-types

**Remarque 5.2.** *L'axe des abscisses est une asymptote et l'aire sous la courbe à l'extérieur de l'intervalle $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ est* négligeable. *On a*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) &= 0.6826 \\
\mathbb{P}(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) &= 0.9544 \\
\mathbb{P}(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) &= 0.9974.
\end{aligned}$$

*(cas particulier $\mu = 0, \sigma = 1$, voir figure 5)*

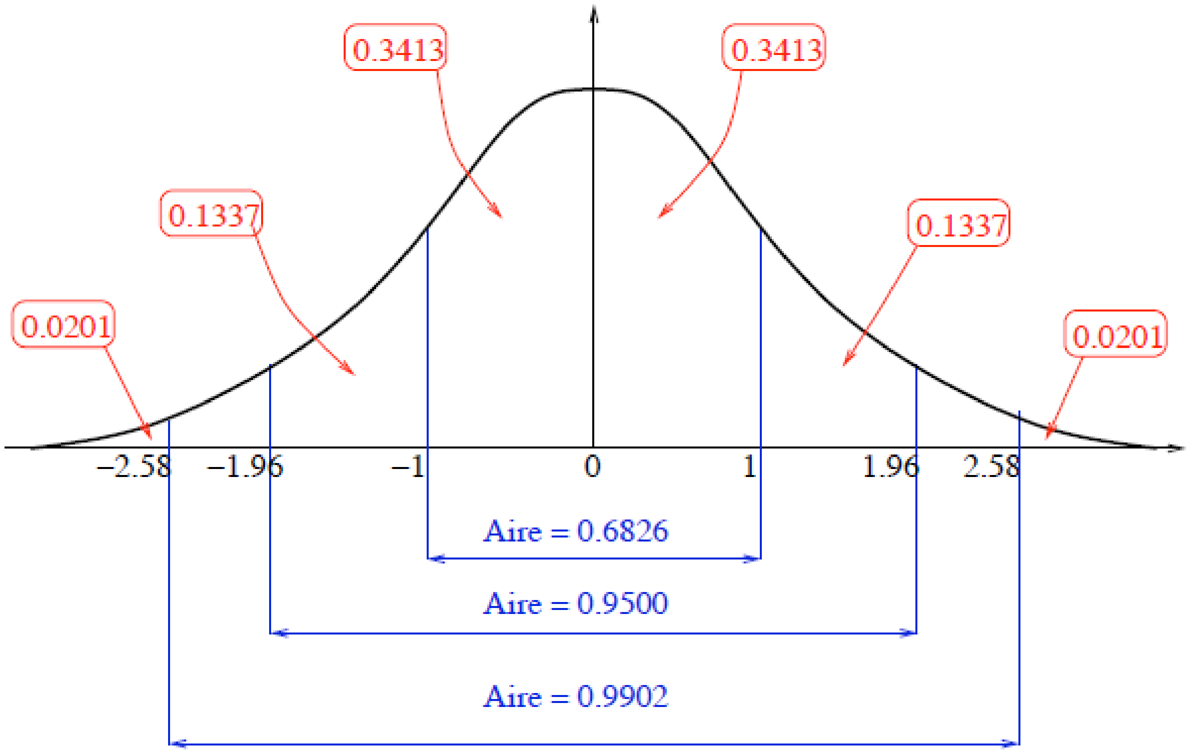



FIGURE 5 – Densité de $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

**Proposition 5.7.** *Soient $X_1$ et $X_2$ deux variables indépendantes. Si $X_1$ suit $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2$ suit $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, alors $X_1 + X_2$ suit $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.*

**Proposition 5.8** (Loi normale centrée réduite)**.** *Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors*

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

On utilise le résultat de la proposition 5.8 pour calculer les probabilités. En effet la loi normale centrée et réduite ($\mathcal{N}(0,1)$) est tabulée à l'aide de sa fonction de répartition. Elle donne les valeurs de

$$\Phi(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Voir la table de la loi normale centrée réduite.

## 5.5 Lois dérivées de la loi normale

#### 5.5.1 La loi du $\chi^2$ de Pearson

**Définition 5.5** (loi du $\chi^2$). *Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont $n$ variables aléatoires indépendantes qui suivent toute la loi normale centrée réduite, alors la quantité $X = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ est une variable aléatoire distribuée selon la loi du $\chi^2$ à $n$ degrés de liberté. On note $X \sim \chi^2(n)$. $n$ est appelé nombre de degrés de liberté*

**Proposition 5.9.** *Si $X \sim \chi^2(n)$, alors*

$$\mathbb{E}(X) = n, \qquad \mathbb{V}(X) = 2n.$$

**Proposition 5.10** (Somme de deux variables qui suivent une loi du $\chi^2$). *Si $X_1 \sim \chi^2(n_1)$ et $X_2 \sim \chi^2(n_2)$ sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.*

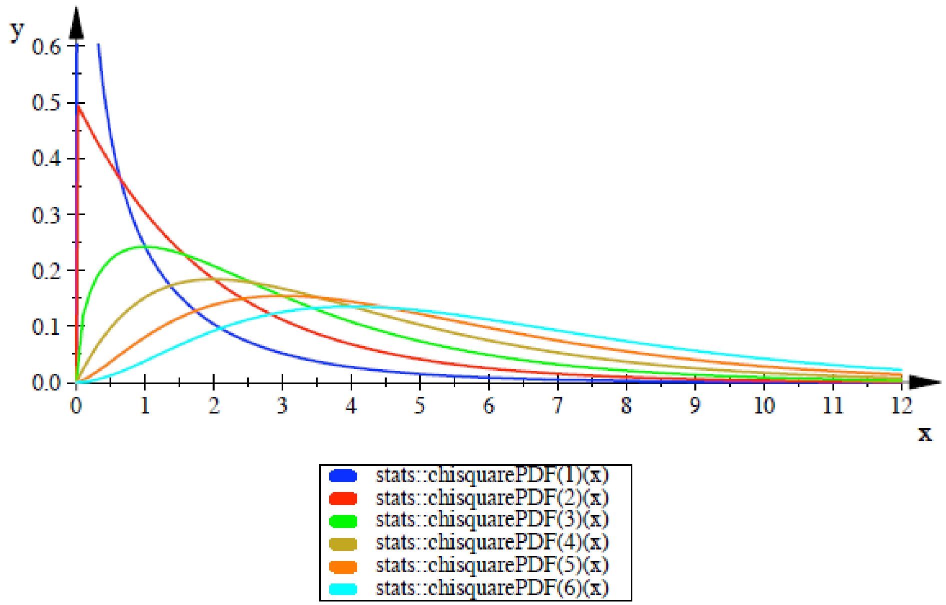



FIGURE 6 – densité de $X \sim \chi^2(n)$ pour $n = 1, 2, ..., 6$.

#### 5.5.2 La loi de Fisher-Snedecor

**Définition 5.6** (Loi de Fisher)**.** *Si $X_1$ et $X_2$ sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux une loi de khi-deux de degrés de liberté respectifs $n_1$ et $n_2$, alors la quantité $F = \frac{X_1/n_1}{X_2/n_2}$ est une variable aléatoire qui suit la loi de Fisher-Snedecor à $n_1$ et $n_2$ degrés de liberté. On note $F \sim F(n_1, n_2)$.*

**Remarque 5.3.** *Cette variable ne prend que des valeurs positives.*

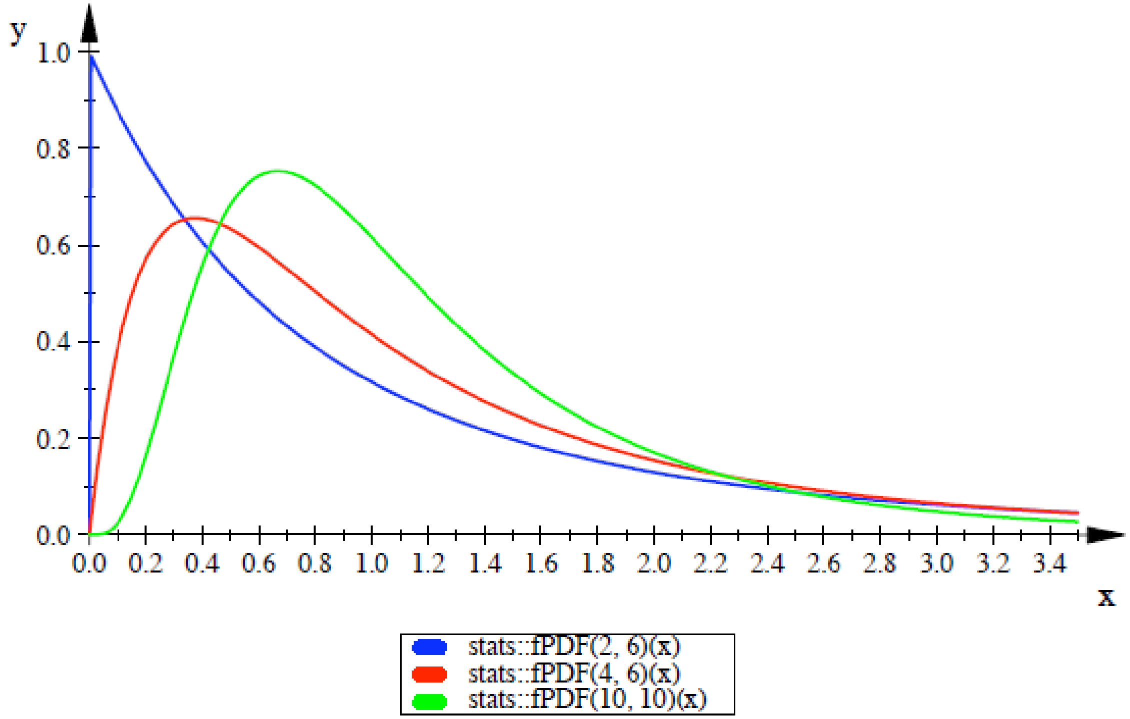



FIGURE 7 – Densité de $F$ pour $(n_1, n_2) = (2, 6), (4, 6), (10, 10)$.

#### 5.5.3 La loi de Student

**Définition 5.7** (Loi de Student)**.** *Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes, la première étant distribuée selon une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ et la deuxième selon une loi de khi-deux à $n$ degrés de liberté.*

*La quantité* $T = \frac{X\sqrt{n}}{\sqrt{Y}}$ *est une variable aléatoire qui suit une* ***loi de Student à*** $n$ ***degrés de liberté***. *On note* $T \sim T(n)$.

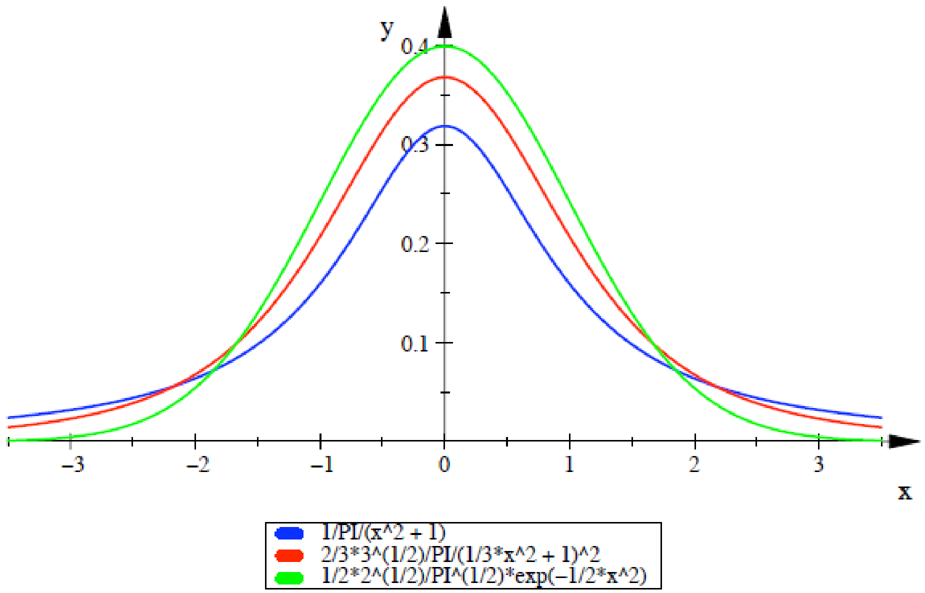



FIGURE 8 – Densité de $T(n)$ pour $n = 1, 3$ et densité de la loi normale standard.

**Proposition 5.11.** *Si* $T \sim T(n)$, *alors*

$$E(T) = 0 \qquad si\ n > 1$$

,

$$Var(T) = \frac{n}{n-2} \qquad si\ n > 2.$$

# 6 Approximation des lois par la loi normale

**Théorème 6.1** (Théorème central limite)**.** *Hypothèses : Soit une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes et identiquement distribuées (**iid**). Leurs espérances mathématiques $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$ et leurs variances $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(X_2) = \ldots = \mathbb{V}(X_n) = \sigma^2$ existent toutes. Alors quand $n$ est assez grand, on a*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(nm, n\sigma^2).$$

*Démonstration.* Admis. □

On admet les approximations suivante :

## 6.1 Approximation de la loi binomiale par la loi normale

**Résultat 6.1.** *On approche la loi $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi $\mathcal{N}(np, npq)$ dès que*

$$\begin{cases} n \geq 30 \\ np \geq 5 \\ npq \geq 5 \end{cases}.$$

## 6.2 Approximation de la loi de Poisson par la loi normale

**Résultat 6.2.** *On approche la loi* $\mathcal{P}(\lambda)$ *par la loi* $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$ *dès que* $\lambda \geq 16$.

## 6.3 Approximation de la loi de Khi-deux par la loi normale

**Résultat 6.3.** *On approche la loi* $\chi^2(n)$ *par la loi* $\mathcal{N}(n, 2n)$ *dès que* $n \geq 30$.

## 6.4 Approximation de la loi de Student par la loi normale

**Résultat 6.4.** *On approche la loi* $T(n)$ *par la loi* $\mathcal{N}(0, 1)$ *dès que* $n \geq 30$.

## 6.5 Correction de continuité

La correction de continuité se fait en passant d'une variable aléatoire discrète vers une variable aléatoire continue. En effet, si on a pas ce passage on pourra pas calculer la valeur de la probabilité en un point précis. Soit $X_D$ une variable aléatoire discrète dont la probabilité en un point $x_0$ n'est pas nulle :

$\mathbb{P}(X_D = x_0) \neq 0$ ; alors si on approxime la loi de $X_D$ vers une loi continue, c'est-à-dire on aura une variable aléatoire continue $X_C$ (cette variable suit d'après le TCL une loi normale), alors $\mathbb{P}(X_C = x_0) = 0$, ce qui contredit les résultats. D'où l'utilisation de la correction de continuité et on calcule cette probabilité par la formule :

$$\mathbb{P}(X_D = x_0) = \mathbb{P}\left(x_0 - \frac{1}{2} \leq X_C \leq x_0 + \frac{1}{2}\right)$$

Si, par exemple, $X$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$, $X$ prend des valeurs entières entre 0 et $n$, On approxime la loi de $X$ vers la loi normale $\mathcal{N}(np, npq)$ (sous certaines conditions).

On peut avoir les situations suivantes :

**Résultat 6.5.** $\mathbb{P}(X_D < k)$ *s'obtient avec* $\mathbb{P}\left(X_C < k - \frac{1}{2}\right)$
$\mathbb{P}(X_D > k)$ *s'obtient avec* $\mathbb{P}\left(X_C > k + \frac{1}{2}\right)$
$\mathbb{P}(X_D \leq k)$ *s'obtient avec* $\mathbb{P}\left(X_C < k + \frac{1}{2}\right)$
$\mathbb{P}(X_D \geq k)$ *s'obtient avec* $\mathbb{P}\left(X_C > k - \frac{1}{2}\right)$
$\mathbb{P}(X_D < k)$ *s'obtient avec* $\mathbb{P}\left(X_C < k - \frac{1}{2}\right)$
$\mathbb{P}(a < X_D \leq b)$ *s'obtient avec* $\mathbb{P}\left(a + \frac{1}{2} < X_C < b + \frac{1}{2}\right)$

**Exemple 6.1.** *Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(50, 0.5)$. Les condition d'approximation de la loi de $X$ par une loi normale sont remplies, et l'on peut considérer que $X$ suit à peu près la loi normale $\mathcal{N}(25, 12.5)$.*

*Évaluons alors de deux façons $\mathbb{P}\left(24 \leq X \leq 26\right)$.*

- ***En valeur exacte*** *avec la loi binomiale :*

$$\mathbb{P}\left(X = 24\right) + \mathbb{P}\left(X = 25\right) + \mathbb{P}\left(X = 26\right) \simeq 0.3282.$$

- ***En valeur approchée*** *avec la loi normale* ***(sans correction par continuité)*** *:*

$$\mathbb{P}\left(24 \leq X \leq 26\right) \simeq 0.2222.$$

- ***En valeur approchée*** *avec la loi normale* ***(avec correction par continuité)*** *:*

$$\mathbb{P}\left(23,5 \leq X \leq 26,5\right) \simeq 0.3286.$$

*Le résultat est bien meilleur en tenant compte de la correction par continuité.*

# 7 Exercices corrigés

***Exercice***

Soit $X$ une variable aléatoire continue qui suit une loi de probabilité ayant une fonction de densité définie par :

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x} & si \quad x \geq 1 \\ 0 & si \quad x < 1 \end{cases}$$

où $c$ est une constante réelle.

1. Déterminer la constante $c$.
2. Chercher la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y$ définie par $Y = X - 1$.
3. Donner l'espérance et la variance de $Y$.
4. En déduire l'espérance et la variance de $X$.
5. Déterminer la fonction de répartition de $X$.
6. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X < 5)$, $\mathbb{P}(X \geq 3)$, $\mathbb{P}(X \geq 8)$ et $\mathbb{P}(2 \leq X < 5)$.
7. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X \geq 8/X \geq 3)$. Conclure.

***Corrigé***

1. On doit avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow c\int_{1}^{+\infty} e^{-x}dx = 1 \Leftrightarrow c\left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 \Leftrightarrow ce^{-1} = 1$. On obtient $c = e$. D'où $f(x) = e^{-(x-1)}1(x)_{[1,+\infty[}$, avec
$$1(x)_{[1,+\infty[} \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1,+\infty[ \\ 0 & sinon \end{cases}$$

2. La loi de probabilité de $Y = X - 1$
$\forall x \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P\left(Y \leq x\right) \\ &= P\left(X \leq x+1\right). \\ &= F_X(x+1) \end{aligned}$$
En dérivant, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_Y(x) = f_X(x+1) = e^{-(x+1-1)}1_{[1,+\infty[}(x+1) = e^{-x}1_{[0,+\infty[}(x)$ car on $1 \leq x+1 \leq +\infty$, donc $0 \leq x \leq +\infty$
... la densité de la loi $Exp(1)$, ... $Y \sim Exp(1)$.

3. Puisque $Y \sim Exp(1)$, $E\left(Y\right) = 1 = V\left(Y\right)$,

4. par conséquent
$$E\left(X\right) = E\left(Y+1\right) = E\left(Y\right) + 1 = 2$$
$$V\left(X\right) = V\left(Y+1\right) = V\left(Y\right) = 1$$

5. On a :
$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$
- si $x \leq 1$ :
$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$
- si $x > 1$ :
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{1} 0dt + \int_{1}^{x} e^{-(t-1)}dt = \left[-e^{-(t-1)}\right]_1^x = 1 - e^{-(x-1)}$$

Donc,
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - e^{-(x-1)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

6. Calculons les probabilités :

$\mathbb{P}(X < 5) = F_X(5)$

$\mathbb{P}(X \geq 3) = F_X(3)$

$\mathbb{P}(X \geq 8) = 1 - F_X(8)$
$\mathbb{P}(2 \leq X < 5) = F_X(5) - F_X(2)$

7. Calculons :
$\mathbb{P}(X \geq 8/X \geq 3) = \frac{\mathbb{P}(X\geq 8, X\geq 3)}{\mathbb{P}(/X\geq 3)} = \frac{\mathbb{P}(X\geq 8)}{\mathbb{P}(/X\geq 3)} = \frac{1-F_X(8)}{1-F_X(3)} = \frac{e^{-(8-1)}}{e^{-(3-1)}} = e^{-(5-1)} = 1 - F_X(5) = \mathbb{P}(X \geq 5)$
Il s'agit d'une loi **sans mémoire**.

***Exercice***

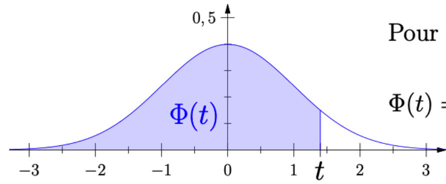
Les notes d'un concours représentées par la variable $X$ suivent une loi normale de moyenne $\mu = 7$ et d'écart-type $\sigma = 6$. On posera

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

et on se servira des tables pour répondre aux questions suivantes :

**(1)** Quelle est la probabilité qu'un candidat obtienne une note supérieure ou égale à 10 ?

**(2)** Comment doit être choisie la note $n$ de la barre de façon à ce que seuls les 10% des notes les plus élevées soient admissibles ?




Pour $Z$ de loi $\mathcal{N}(0,1)$,

$$\Phi(t) = F_Z(t) = P(Z \leq t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

| $t$ | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| 3,1 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |
| 3,5 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |
| 3,6 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,7 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,8 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,9 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

**Exemples :** $\Phi(0{,}25) \simeq 0{,}5987$, $\quad \Phi(-0{,}32) = 1 - \Phi(0{,}32) \simeq 1 - 0{,}6255 = 0{,}3745$

Figure 9 – Fonction de répartition ($\Phi$) de la loi normale centrée réduite

| | 0 | 0.001 | 0.002 | 0.003 | 0.004 | 0.005 | 0.006 | 0.007 | 0.008 | 0.009 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $-\infty$ | -3.090 | -2.878 | -2.748 | -2.652 | -2.576 | -2.512 | -2.457 | -2.409 | -2.366 |
| 0.01 | -2.326 | -2.290 | -2.257 | -2.226 | -2.197 | -2.170 | -2.144 | -2.120 | -2.097 | -2.075 |
| 0.02 | -2.054 | -2.034 | -2.014 | -1.995 | -1.977 | -1.960 | -1.943 | -1.927 | -1.911 | -1.896 |
| 0.03 | -1.881 | -1.866 | -1.852 | -1.838 | -1.825 | -1.812 | -1.799 | -1.787 | -1.774 | -1.762 |
| 0.04 | -1.751 | -1.739 | -1.728 | -1.717 | -1.706 | -1.695 | -1.685 | -1.675 | -1.665 | -1.655 |
| 0.05 | -1.645 | -1.635 | -1.626 | -1.616 | -1.607 | -1.598 | -1.589 | -1.581 | -1.572 | -1.563 |
| 0.06 | -1.555 | -1.546 | -1.538 | -1.530 | -1.522 | -1.514 | -1.506 | -1.498 | -1.491 | -1.483 |
| 0.07 | -1.476 | -1.468 | -1.461 | -1.454 | -1.447 | -1.440 | -1.433 | -1.425 | -1.419 | -1.412 |
| 0.08 | -1.405 | -1.398 | -1.392 | -1.385 | -1.379 | -1.372 | -1.366 | -1.359 | -1.353 | -1.347 |
| 0.09 | -1.341 | -1.335 | -1.329 | -1.323 | -1.316 | -1.311 | -1.305 | -1.299 | -1.293 | -1.287 |
| 0.9 | 1.282 | 1.287 | 1.293 | 1.299 | 1.305 | 1.311 | 1.316 | 1.323 | 1.329 | 1.335 |
| 0.91 | 1.341 | 1.347 | 1.353 | 1.359 | 1.366 | 1.372 | 1.379 | 1.385 | 1.392 | 1.398 |
| 0.92 | 1.405 | 1.412 | 1.419 | 1.425 | 1.433 | 1.440 | 1.447 | 1.454 | 1.461 | 1.468 |
| 0.93 | 1.476 | 1.483 | 1.491 | 1.498 | 1.506 | 1.514 | 1.522 | 1.530 | 1.538 | 1.546 |
| 0.94 | 1.555 | 1.563 | 1.572 | 1.581 | 1.589 | 1.598 | 1.607 | 1.616 | 1.626 | 1.635 |
| 0.95 | 1.645 | 1.655 | 1.665 | 1.675 | 1.685 | 1.695 | 1.706 | 1.717 | 1.728 | 1.739 |
| 0.96 | 1.751 | 1.762 | 1.774 | 1.787 | 1.799 | 1.812 | 1.825 | 1.838 | 1.852 | 1.866 |
| 0.97 | 1.881 | 1.896 | 1.911 | 1.927 | 1.943 | 1.960 | 1.977 | 1.995 | 2.014 | 2.034 |
| 0.98 | 2.054 | 2.075 | 2.097 | 2.120 | 2.144 | 2.170 | 2.197 | 2.226 | 2.257 | 2.290 |
| 0.99 | 2.326 | 2.366 | 2.409 | 2.457 | 2.512 | 2.576 | 2.652 | 2.748 | 2.878 | 3.090 |

FIGURE 10 – Fonction quantile ($\Phi^{-1}$) de la loi normale centrée réduite

| $\alpha$ | 0.01 | 0.05 | 0.10 | 0.90 | 0.95 | 0.99 | $\alpha$ | 0.01 | 0.05 | 0.10 | 0.90 | 0.95 | 0.99 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0002 | 0.0039 | 0.0158 | 2.7055 | 3.8415 | 6.6349 | 16 | 5.8122 | 7.9616 | 9.3122 | 23.5418 | 26.2962 | 31.9999 |
| 2 | 0.0201 | 0.1026 | 0.2107 | 4.6052 | 5.9915 | 9.2103 | 17 | 6.4078 | 8.6718 | 10.0852 | 24.7690 | 27.5871 | 33.4087 |
| 3 | 0.1148 | 0.3518 | 0.5844 | 6.2514 | 7.8147 | 11.3449 | 18 | 7.0149 | 9.3905 | 10.8649 | 25.9894 | 28.8693 | 34.8053 |
| 4 | 0.2971 | 0.7107 | 1.0636 | 7.7794 | 9.4877 | 13.2767 | 19 | 7.6327 | 10.1170 | 11.6509 | 27.2036 | 30.1435 | 36.1909 |
| 5 | 0.5543 | 1.1455 | 1.6103 | 9.2364 | 11.0705 | 15.0863 | 20 | 8.2604 | 10.8508 | 12.4426 | 28.4120 | 31.4104 | 37.5662 |
| 6 | 0.8721 | 1.6354 | 2.2041 | 10.6446 | 12.5916 | 16.8119 | 21 | 8.8972 | 11.5913 | 13.2396 | 29.6151 | 32.6706 | 38.9322 |
| 7 | 1.2390 | 2.1673 | 2.8331 | 12.0170 | 14.0671 | 18.4753 | 22 | 9.5425 | 12.3380 | 14.0415 | 30.8133 | 33.9244 | 40.2894 |
| 8 | 1.6465 | 2.7326 | 3.4895 | 13.3616 | 15.5073 | 20.0902 | 23 | 10.1957 | 13.0905 | 14.8480 | 32.0069 | 35.1725 | 41.6384 |
| 9 | 2.0879 | 3.3251 | 4.1682 | 14.6837 | 16.9190 | 21.6660 | 24 | 10.8564 | 13.8484 | 15.6587 | 33.1962 | 36.4150 | 42.9798 |
| 10 | 2.5582 | 3.9403 | 4.8652 | 15.9872 | 18.3070 | 23.2093 | 25 | 11.5240 | 14.6114 | 16.4734 | 34.3816 | 37.6525 | 44.3141 |
| 11 | 3.0535 | 4.5748 | 5.5778 | 17.2750 | 19.6751 | 24.7250 | 26 | 12.1981 | 15.3792 | 17.2919 | 35.5632 | 38.8851 | 45.6417 |
| 12 | 3.5706 | 5.2260 | 6.3038 | 18.5493 | 21.0261 | 26.2170 | 27 | 12.8785 | 16.1514 | 18.1139 | 36.7412 | 40.1133 | 46.9629 |
| 13 | 4.1069 | 5.8919 | 7.0415 | 19.8119 | 22.3620 | 27.6882 | 28 | 13.5647 | 16.9279 | 18.9392 | 37.9159 | 41.3371 | 48.2782 |
| 14 | 4.6604 | 6.5706 | 7.7895 | 21.0641 | 23.6848 | 29.1412 | 29 | 14.2565 | 17.7084 | 19.7677 | 39.0875 | 42.5570 | 49.5879 |
| 15 | 5.2293 | 7.2609 | 8.5468 | 22.3071 | 24.9958 | 30.5779 | 30 | 14.9535 | 18.4927 | 20.5992 | 40.2560 | 43.7730 | 50.8922 |

FIGURE 11 – Fonction quantile de la loi du Khi deux

| $\alpha$ | 0.900 | 0.950 | 0.975 | 0.990 | 0.995 | $\alpha$ | 0.900 | 0.950 | 0.975 | 0.990 | 0.995 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3.0777 | 6.3138 | 12.7062 | 31.8205 | 63.6567 | 16 | 1.3368 | 1.7459 | 2.1199 | 2.5835 | 2.9208 |
| 2 | 1.8856 | 2.9200 | 4.3027 | 6.9646 | 9.9248 | 17 | 1.3334 | 1.7396 | 2.1098 | 2.5669 | 2.8982 |
| 3 | 1.6377 | 2.3534 | 3.1824 | 4.5407 | 5.8409 | 18 | 1.3304 | 1.7341 | 2.1009 | 2.5524 | 2.8784 |
| 4 | 1.5332 | 2.1318 | 2.7764 | 3.7469 | 4.6041 | 19 | 1.3277 | 1.7291 | 2.0930 | 2.5395 | 2.8609 |
| 5 | 1.4759 | 2.0150 | 2.5706 | 3.3649 | 4.0321 | 20 | 1.3253 | 1.7247 | 2.0860 | 2.5280 | 2.8453 |
| 6 | 1.4398 | 1.9432 | 2.4469 | 3.1427 | 3.7074 | 21 | 1.3232 | 1.7207 | 2.0796 | 2.5176 | 2.8314 |
| 7 | 1.4149 | 1.8946 | 2.3646 | 2.9980 | 3.4995 | 22 | 1.3212 | 1.7171 | 2.0739 | 2.5083 | 2.8188 |
| 8 | 1.3968 | 1.8595 | 2.3060 | 2.8965 | 3.3554 | 23 | 1.3195 | 1.7139 | 2.0687 | 2.4999 | 2.8073 |
| 9 | 1.3830 | 1.8331 | 2.2622 | 2.8214 | 3.2498 | 24 | 1.3178 | 1.7109 | 2.0639 | 2.4922 | 2.7969 |
| 10 | 1.3722 | 1.8125 | 2.2281 | 2.7638 | 3.1693 | 25 | 1.3163 | 1.7081 | 2.0595 | 2.4851 | 2.7874 |
| 11 | 1.3634 | 1.7959 | 2.2010 | 2.7181 | 3.1058 | 26 | 1.3150 | 1.7056 | 2.0555 | 2.4786 | 2.7787 |
| 12 | 1.3562 | 1.7823 | 2.1788 | 2.6810 | 3.0545 | 27 | 1.3137 | 1.7033 | 2.0518 | 2.4727 | 2.7707 |
| 13 | 1.3502 | 1.7709 | 2.1604 | 2.6503 | 3.0123 | 28 | 1.3125 | 1.7011 | 2.0484 | 2.4671 | 2.7633 |
| 14 | 1.3450 | 1.7613 | 2.1448 | 2.6245 | 2.9768 | 29 | 1.3114 | 1.6991 | 2.0452 | 2.4620 | 2.7564 |
| 15 | 1.3406 | 1.7531 | 2.1314 | 2.6025 | 2.9467 | 30 | 1.3104 | 1.6973 | 2.0423 | 2.4573 | 2.7500 |

FIGURE 12 – Fonction quantile de la loi de Student

| $x$ \ $\lambda$ | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,9512 | 0,9048 | 0,8607 | 0,8187 | 0,7788 | 0,7408 | 0,7047 | 0,6703 | 0,6376 |
| 1 | 0,0476 | 0,0905 | 0,1291 | 0,1637 | 0,1947 | 0,2222 | 0,2466 | 0,2681 | 0,2869 |
| 2 | 0,0012 | 0,0045 | 0,0097 | 0,0164 | 0,0243 | 0,0333 | 0,0432 | 0,0536 | 0,0646 |
| 3 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0005 | 0,0011 | 0,0020 | 0,0033 | 0,0050 | 0,0072 | 0,0097 |
| 4 | | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0004 | 0,0007 | 0,0011 |
| 5 | | | | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0001 |

| $x$ \ $\lambda$ | 0,50 | 0,55 | 0,60 | 0,65 | 0,70 | 0,75 | 0,80 | 0,85 | 0,90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,6065 | 0,5769 | 0,5488 | 0,5220 | 0,4966 | 0,4724 | 0,4493 | 0,4274 | 0,4066 |
| 1 | 0,3033 | 0,3173 | 0,3293 | 0,3393 | 0,3476 | 0,3543 | 0,3595 | 0,3633 | 0,3659 |
| 2 | 0,0758 | 0,0873 | 0,0988 | 0,1103 | 0,1217 | 0,1329 | 0,1438 | 0,1544 | 0,1647 |
| 3 | 0,0126 | 0,0160 | 0,0198 | 0,0239 | 0,0284 | 0,0332 | 0,0383 | 0,0437 | 0,0494 |
| 4 | 0,0016 | 0,0022 | 0,0030 | 0,0039 | 0,0050 | 0,0062 | 0,0077 | 0,0093 | 0,0111 |
| 5 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0004 | 0,0005 | 0,0007 | 0,0009 | 0,0012 | 0,0016 | 0,0020 |
| 6 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0003 |

| $x$ \ $\lambda$ | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 | 5,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,3679 | 0,2231 | 0,1353 | 0,0821 | 0,0498 | 0,0302 | 0,0183 | 0,0111 | 0,0067 |
| 1 | 0,3679 | 0,3347 | 0,2707 | 0,2052 | 0,1494 | 0,1057 | 0,0733 | 0,0500 | 0,0337 |
| 2 | 0,1839 | 0,2510 | 0,2707 | 0,2565 | 0,2240 | 0,1850 | 0,1465 | 0,1125 | 0,0842 |
| 3 | 0,0613 | 0,1255 | 0,1804 | 0,2138 | 0,2240 | 0,2158 | 0,1954 | 0,1687 | 0,1404 |
| 4 | 0,0153 | 0,0471 | 0,0902 | 0,1336 | 0,1680 | 0,1888 | 0,1954 | 0,1898 | 0,1755 |
| 5 | 0,0031 | 0,0141 | 0,0361 | 0,0668 | 0,1008 | 0,1322 | 0,1563 | 0,1708 | 0,1755 |
| 6 | 0,0005 | 0,0035 | 0,0120 | 0,0278 | 0,0504 | 0,0771 | 0,1042 | 0,1281 | 0,1462 |
| 7 | 0,0001 | 0,0008 | 0,0034 | 0,0099 | 0,0216 | 0,0385 | 0,0595 | 0,0824 | 0,1044 |
| 8 | | 0,0001 | 0,0009 | 0,0031 | 0,0081 | 0,0169 | 0,0298 | 0,0463 | 0,0653 |
| 9 | | | 0,0002 | 0,0009 | 0,0027 | 0,0066 | 0,0132 | 0,0232 | 0,0363 |
| 10 | | | | 0,0002 | 0,0008 | 0,0023 | 0,0053 | 0,0104 | 0,0181 |
| 11 | | | | | 0,0002 | 0,0007 | 0,0019 | 0,0043 | 0,0082 |
| 12 | | | | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0006 | 0,0016 | 0,0034 |
| 13 | | | | | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0006 | 0,0013 |
| 14 | | | | | | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0005 |
| 15 | | | | | | | | 0,0001 | 0,0002 |
| 16 | | | | | | | | | 0,0001 |



FIGURE 13 – Tables de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ : $\mathbb{P}(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$

| $x$ \ $\lambda$ | 5,5 | 6,0 | 6,5 | 7,0 | 7,5 | 8,0 | 8,5 | 9,0 | 9,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0041 | 0,0025 | 0,0015 | 0,0009 | 0,0006 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0001 |
| 1 | 0,0225 | 0,0149 | 0,0098 | 0,0064 | 0,0041 | 0,0027 | 0,0017 | 0,0011 | 0,0007 |
| 2 | 0,0618 | 0,0446 | 0,0318 | 0,0223 | 0,0156 | 0,0107 | 0,0074 | 0,0050 | 0,0034 |
| 3 | 0,1133 | 0,0892 | 0,0688 | 0,0521 | 0,0389 | 0,0286 | 0,0208 | 0,0150 | 0,0107 |
| 4 | 0,1558 | 0,1339 | 0,1118 | 0,0912 | 0,0729 | 0,0573 | 0,0443 | 0,0337 | 0,0254 |
| 5 | 0,1714 | 0,1606 | 0,1454 | 0,1277 | 0,1094 | 0,0916 | 0,0752 | 0,0607 | 0,0483 |
| 6 | 0,1571 | 0,1606 | 0,1575 | 0,1490 | 0,1367 | 0,1221 | 0,1066 | 0,0911 | 0,0764 |
| 7 | 0,1234 | 0,1377 | 0,1462 | 0,1490 | 0,1465 | 0,1396 | 0,1294 | 0,1171 | 0,1037 |
| 8 | 0,0849 | 0,1033 | 0,1188 | 0,1304 | 0,1373 | 0,1396 | 0,1375 | 0,1318 | 0,1232 |
| 9 | 0,0519 | **0,0688** | 0,0858 | 0,1014 | 0,1144 | 0,1241 | 0,1299 | 0,1318 | 0,1300 |
| 10 | 0,0285 | 0,0413 | 0,0558 | 0,0710 | 0,0858 | 0,0993 | 0,1104 | 0,1186 | 0,1235 |
| 11 | 0,0143 | 0,0225 | 0,0330 | 0,0452 | 0,0585 | 0,0722 | 0,0853 | 0,0970 | 0,1067 |
| 12 | 0,0065 | 0,0113 | 0,0179 | 0,0263 | 0,0366 | 0,0481 | 0,0604 | 0,0728 | 0,0844 |
| 13 | 0,0028 | 0,0052 | 0,0089 | 0,0142 | 0,0211 | 0,0296 | 0,0395 | 0,0504 | 0,0617 |
| 14 | 0,0011 | 0,0022 | 0,0041 | 0,0071 | 0,0113 | 0,0169 | 0,0240 | 0,0324 | 0,0419 |
| 15 | 0,0004 | 0,0009 | 0,0018 | 0,0033 | 0,0057 | 0,0090 | 0,0136 | 0,0194 | 0,0265 |
| 16 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0007 | 0,0014 | 0,0026 | 0,0045 | 0,0072 | 0,0109 | 0,0157 |
| 17 | | 0,0001 | 0,0003 | 0,0006 | 0,0012 | 0,0021 | 0,0036 | 0,0058 | 0,0088 |
| 18 | | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0005 | 0,0009 | 0,0017 | 0,0029 | 0,0046 |
| 19 | | | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0004 | 0,0008 | 0,0014 | 0,0023 |
| 20 | | | | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0006 | 0,0011 |
| 21 | | | | | | 0,0001 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0005 |
| 22 | | | | | | | 0,0001 | 0,0001 | 0,0002 |
| 23 | | | | | | | | | 0,0001 |

FIGURE 14 – Tables de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ : $\mathbb{P}(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$

| x \ λ | 10,0 | 11,0 | 12,0 | 13,0 | 14,0 | 15,0 | 16,0 | 17,0 | 18,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | |
| 1 | 0,0005 | 0,0002 | 0,0001 | | | | | | |
| 2 | 0,0023 | 0,0010 | 0,0004 | 0,0002 | 0,0001 | | | | |
| 3 | 0,0076 | 0,0037 | 0,0018 | 0,0008 | 0,0004 | 0,0002 | 0,0001 | | |
| 4 | 0,0189 | 0,0102 | 0,0053 | 0,0027 | 0,0013 | 0,0006 | 0,0003 | 0,0001 | 0,0001 |
| 5 | 0,0378 | 0,0224 | 0,0127 | 0,0070 | 0,0037 | 0,0019 | 0,0010 | 0,0005 | 0,0002 |
| 6 | 0,0631 | 0,0411 | 0,0255 | 0,0152 | 0,0087 | 0,0048 | 0,0026 | 0,0014 | 0,0007 |
| 7 | 0,0901 | 0,0646 | 0,0437 | 0,0281 | 0,0174 | 0,0104 | 0,0060 | 0,0034 | 0,0019 |
| 8 | 0,1126 | 0,0888 | 0,0655 | 0,0457 | 0,0304 | 0,0194 | 0,0120 | 0,0072 | 0,0042 |
| 9 | 0,1251 | 0,1085 | 0,0874 | 0,0661 | 0,0473 | 0,0324 | 0,0213 | 0,0135 | 0,0083 |
| 10 | 0,1251 | 0,1194 | 0,1048 | 0,0859 | 0,0663 | 0,0486 | 0,0341 | 0,0230 | 0,0150 |
| 11 | 0,1137 | 0,1194 | 0,1144 | 0,1015 | 0,0844 | 0,0663 | 0,0496 | 0,0355 | 0,0245 |
| 12 | 0,0948 | 0,1094 | 0,1144 | 0,1099 | 0,0984 | 0,0829 | 0,0661 | 0,0504 | 0,0368 |
| 13 | 0,0729 | 0,0926 | 0,1056 | 0,1099 | 0,1060 | 0,0956 | 0,0814 | 0,0658 | 0,0509 |
| 14 | 0,0521 | 0,0728 | 0,0905 | 0,1021 | 0,1060 | 0,1024 | 0,0930 | 0,0800 | 0,0655 |
| 15 | 0,0347 | 0,0534 | 0,0724 | 0,0885 | 0,0989 | 0,1024 | 0,0992 | 0,0906 | 0,0786 |
| 16 | 0,0217 | 0,0367 | 0,0543 | 0,0719 | 0,0866 | 0,0960 | 0,0992 | 0,0963 | 0,0884 |
| 17 | 0,0128 | 0,0237 | 0,0383 | 0,0550 | 0,0713 | 0,0847 | 0,0934 | 0,0963 | 0,0936 |
| 18 | 0,0071 | 0,0145 | 0,0255 | 0,0397 | 0,0554 | 0,0706 | 0,0830 | 0,0909 | 0,0936 |
| 19 | 0,0037 | 0,0084 | 0,0161 | 0,0272 | 0,0409 | 0,0557 | 0,0699 | 0,0814 | 0,0887 |
| 20 | 0,0019 | 0,0046 | 0,0097 | 0,0177 | 0,0286 | 0,0418 | 0,0559 | 0,0692 | 0,0798 |
| 21 | 0,0009 | 0,0024 | 0,0055 | 0,0109 | 0,0191 | 0,0299 | 0,0426 | 0,0560 | 0,0684 |
| 22 | 0,0004 | 0,0012 | 0,0030 | 0,0065 | 0,0121 | 0,0204 | 0,0310 | 0,0433 | 0,0560 |
| 23 | 0,0002 | 0,0006 | 0,0016 | 0,0037 | 0,0074 | 0,0133 | 0,0216 | 0,0320 | 0,0438 |
| 24 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0008 | 0,0020 | 0,0043 | 0,0083 | 0,0144 | 0,0226 | 0,0328 |
| 25 | | 0,0001 | 0,0004 | 0,0010 | 0,0024 | 0,0050 | 0,0092 | 0,0154 | 0,0237 |
| 26 | | | 0,0002 | 0,0005 | 0,0013 | 0,0029 | 0,0057 | 0,0101 | 0,0164 |
| 27 | | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0007 | 0,0016 | 0,0034 | 0,0063 | 0,0109 |
| 28 | | | | 0,0001 | 0,0003 | 0,0009 | 0,0019 | 0,0038 | 0,0070 |
| 29 | | | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0004 | 0,0011 | 0,0023 | 0,0044 |
| 30 | | | | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0006 | 0,0013 | 0,0026 |
| 31 | | | | | | 0,0001 | 0,0003 | 0,0007 | 0,0015 |
| 32 | | | | | | 0,0001 | 0,0001 | 0,0004 | 0,0009 |
| 33 | | | | | | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0005 |
| 34 | | | | | | | | 0,0001 | 0,0002 |
| 35 | | | | | | | | | 0,0001 |
| 36 | | | | | | | | | 0,0001 |

FIGURE 15 – Tables de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ : $\mathbb{P}(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$

| $x \backslash \lambda$ | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,9512 | 0,9048 | 0,8607 | 0,8187 | 0,7788 | 0,7408 | 0,7047 | 0,6703 | 0,6376 |
| 1 | 0,9988 | 0,9953 | 0,9898 | 0,9825 | 0,9735 | 0,9631 | 0,9513 | 0,9384 | 0,9246 |
| 2 | 1,0000 | 0,9998 | 0,9995 | 0,9989 | 0,9978 | 0,9964 | 0,9945 | 0,9921 | 0,9891 |
| 3 | | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9995 | 0,9992 | 0,9988 |
| 4 | | | | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9999 |
| 5 | | | | | | | | | 1,0000 |

| $x \backslash \lambda$ | 0,50 | 0,55 | 0,60 | 0,65 | 0,70 | 0,75 | 0,80 | 0,85 | 0,90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,6065 | 0,5769 | 0,5488 | 0,5220 | 0,4966 | 0,4724 | 0,4493 | 0,4274 | 0,4066 |
| 1 | 0,9098 | 0,8943 | 0,8781 | 0,8614 | 0,8442 | 0,8266 | 0,8088 | 0,7907 | 0,7725 |
| 2 | 0,9856 | 0,9815 | 0,9769 | 0,9717 | 0,9659 | 0,9595 | 0,9526 | 0,9451 | 0,9371 |
| 3 | 0,9982 | 0,9975 | 0,9966 | 0,9956 | 0,9942 | 0,9927 | 0,9909 | 0,9889 | 0,9865 |
| 4 | 0,9998 | 0,9997 | 0,9996 | 0,9994 | 0,9992 | 0,9989 | 0,9986 | 0,9982 | 0,9977 |
| 5 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9997 | 0,9997 |
| 6 | | | | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

| $x \backslash \lambda$ | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 | 5,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,3679 | 0,2231 | 0,1353 | 0,0821 | 0,0498 | 0,0302 | 0,0183 | 0,0111 | 0,0067 |
| 1 | 0,7358 | 0,5578 | 0,4060 | 0,2873 | 0,1991 | 0,1359 | 0,0916 | 0,0611 | 0,0404 |
| 2 | 0,9197 | 0,8088 | 0,6767 | 0,5438 | 0,4232 | 0,3208 | 0,2381 | 0,1736 | 0,1247 |
| 3 | 0,9810 | 0,9344 | 0,8571 | 0,7576 | 0,6472 | 0,5366 | 0,4335 | 0,3423 | 0,2650 |
| 4 | 0,9963 | 0,9814 | 0,9473 | 0,8912 | 0,8153 | 0,7254 | 0,6288 | 0,5321 | 0,4405 |
| 5 | 0,9994 | 0,9955 | 0,9834 | 0,9580 | 0,9161 | 0,8576 | 0,7851 | 0,7029 | 0,6160 |
| 6 | 0,9999 | 0,9991 | 0,9955 | 0,9858 | 0,9665 | 0,9347 | 0,8893 | 0,8311 | 0,7622 |
| 7 | 1,0000 | 0,9998 | 0,9989 | 0,9958 | 0,9881 | 0,9733 | 0,9489 | 0,9134 | 0,8666 |
| 8 | | 1,0000 | 0,9998 | 0,9989 | 0,9962 | 0,9901 | 0,9786 | 0,9597 | 0,9319 |
| 9 | | | 1,0000 | 0,9997 | 0,9989 | 0,9967 | 0,9919 | 0,9829 | 0,9682 |
| 10 | | | | 0,9999 | 0,9997 | 0,9990 | 0,9972 | 0,9933 | 0,9863 |
| 11 | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9991 | 0,9976 | 0,9945 |
| 12 | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9992 | 0,9980 |
| 13 | | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9993 |
| 14 | | | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 |
| 15 | | | | | | | | 1,0000 | 0,9999 |
| 16 | | | | | | | | | 1,0000 |



FIGURE 16 – Tables de la fonction de répartition loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ : $\mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{i=1}^{x} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$

| $x$ \ $\lambda$ | 5,5 | 6,0 | 6,5 | 7,0 | 7,5 | 8,0 | 8,5 | 9,0 | 9,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0041 | 0,0025 | 0,0015 | 0,0009 | 0,0006 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0001 |
| 1 | 0,0266 | 0,0174 | 0,0113 | 0,0073 | 0,0047 | 0,0030 | 0,0019 | 0,0012 | 0,0008 |
| 2 | 0,0884 | 0,0620 | 0,0430 | 0,0296 | 0,0203 | 0,0138 | 0,0093 | 0,0062 | 0,0042 |
| 3 | 0,2017 | 0,1512 | 0,1118 | 0,0818 | 0,0591 | 0,0424 | 0,0301 | 0,0212 | 0,0149 |
| 4 | 0,3575 | 0,2851 | 0,2237 | 0,1730 | 0,1321 | 0,0996 | 0,0744 | 0,0550 | 0,0403 |
| 5 | 0,5289 | 0,4457 | 0,3690 | 0,3007 | 0,2414 | 0,1912 | 0,1496 | 0,1157 | 0,0885 |
| 6 | 0,6860 | 0,6063 | 0,5265 | 0,4497 | 0,3782 | 0,3134 | 0,2562 | 0,2068 | 0,1649 |
| 7 | 0,8095 | 0,7440 | 0,6728 | 0,5987 | 0,5246 | 0,4530 | 0,3856 | 0,3239 | 0,2687 |
| 8 | 0,8944 | 0,8472 | 0,7916 | 0,7291 | 0,6620 | 0,5925 | 0,5231 | 0,4557 | 0,3918 |
| 9 | 0,9462 | 0,9161 | 0,8774 | 0,8305 | 0,7764 | 0,7166 | 0,6530 | 0,5874 | 0,5218 |
| 10 | 0,9747 | 0,9574 | 0,9332 | 0,9015 | 0,8622 | 0,8159 | 0,7634 | 0,7060 | 0,6453 |
| 11 | 0,9890 | 0,9799 | 0,9661 | 0,9467 | 0,9208 | 0,8881 | 0,8487 | 0,8030 | 0,7520 |
| 12 | 0,9955 | 0,9912 | 0,9840 | 0,9730 | 0,9573 | 0,9362 | 0,9091 | 0,8758 | 0,8364 |
| 13 | 0,9983 | 0,9964 | 0,9929 | 0,9872 | 0,9784 | 0,9658 | 0,9486 | 0,9261 | 0,8981 |
| 14 | 0,9994 | 0,9986 | 0,9970 | 0,9943 | 0,9897 | 0,9827 | 0,9726 | 0,9585 | 0,9400 |
| 15 | 0,9998 | 0,9995 | 0,9988 | 0,9976 | 0,9954 | 0,9918 | 0,9862 | 0,9780 | 0,9665 |
| 16 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9996 | 0,9990 | 0,9980 | 0,9963 | 0,9934 | 0,9889 | 0,9823 |
| 17 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9996 | 0,9992 | 0,9984 | 0,9970 | 0,9947 | 0,9911 |
| 18 | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9993 | 0,9987 | 0,9976 | 0,9957 |
| 19 | | | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9995 | 0,9989 | 0,9980 |
| 20 | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9996 | 0,9991 |
| 21 | | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9996 |
| 22 | | | | | | | 1,0000 | 0,9999 | 0,9999 |
| 23 | | | | | | | | 1,0000 | 0,9999 |
| 24 | | | | | | | | | 1,0000 |

FIGURE 17 – Tables de la fonction de répartition loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ : $\mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{i=1}^{x} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$

| $x$ \ $\lambda$ | 10,0 | 11,0 | 12,0 | 13,0 | 14,0 | 15,0 | 16,0 | 17,0 | 18,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0005 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 0,0028 | 0,0012 | 0,0005 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 3 | 0,0103 | 0,0049 | 0,0023 | 0,0011 | 0,0005 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 |
| 4 | 0,0293 | 0,0151 | 0,0076 | 0,0037 | 0,0018 | 0,0009 | 0,0004 | 0,0002 | 0,0001 |
| 5 | 0,0671 | 0,0375 | 0,0203 | 0,0107 | 0,0055 | 0,0028 | 0,0014 | 0,0007 | 0,0003 |
| 6 | 0,1301 | 0,0786 | 0,0458 | 0,0259 | 0,0142 | 0,0076 | 0,0040 | 0,0021 | 0,0010 |
| 7 | 0,2202 | 0,1432 | 0,0895 | 0,0540 | 0,0316 | 0,0180 | 0,0100 | 0,0054 | 0,0029 |
| 8 | 0,3328 | 0,2320 | 0,1550 | 0,0998 | 0,0621 | 0,0374 | 0,0220 | 0,0126 | 0,0071 |
| 9 | 0,4579 | 0,3405 | 0,2424 | 0,1658 | 0,1094 | 0,0699 | 0,0433 | 0,0261 | 0,0154 |
| 10 | 0,5830 | 0,4599 | 0,3472 | 0,2517 | 0,1757 | 0,1185 | 0,0774 | 0,0491 | 0,0304 |
| 11 | 0,6968 | 0,5793 | 0,4616 | 0,3532 | 0,2600 | 0,1848 | 0,1270 | 0,0847 | 0,0549 |
| 12 | 0,7916 | 0,6887 | 0,5760 | 0,4631 | 0,3585 | 0,2676 | 0,1931 | 0,1350 | 0,0917 |
| 13 | 0,8645 | 0,7813 | 0,6815 | 0,5730 | 0,4644 | 0,3632 | 0,2745 | 0,2009 | 0,1426 |
| 14 | 0,9165 | 0,8540 | 0,7720 | 0,6751 | 0,5704 | 0,4657 | 0,3675 | 0,2808 | 0,2081 |
| 15 | 0,9513 | 0,9074 | 0,8444 | 0,7636 | 0,6694 | 0,5681 | 0,4667 | 0,3715 | 0,2867 |
| 16 | 0,9730 | 0,9441 | 0,8987 | 0,8355 | 0,7559 | 0,6641 | 0,5660 | 0,4677 | 0,3751 |
| 17 | 0,9857 | 0,9678 | 0,9370 | 0,8905 | 0,8272 | 0,7489 | 0,6593 | 0,5640 | 0,4686 |
| 18 | 0,9928 | 0,9823 | 0,9626 | 0,9302 | 0,8826 | 0,8195 | 0,7423 | 0,6550 | 0,5622 |
| 19 | 0,9965 | 0,9907 | 0,9787 | 0,9573 | 0,9235 | 0,8752 | 0,8122 | 0,7363 | 0,6509 |
| 20 | 0,9984 | 0,9953 | 0,9884 | 0,9750 | 0,9521 | 0,9170 | 0,8682 | 0,8055 | 0,7307 |
| 21 | 0,9993 | 0,9977 | 0,9939 | 0,9859 | 0,9712 | 0,9469 | 0,9108 | 0,8615 | 0,7991 |
| 22 | 0,9997 | 0,9990 | 0,9970 | 0,9924 | 0,9833 | 0,9673 | 0,9418 | 0,9047 | 0,8551 |
| 23 | 0,9999 | 0,9995 | 0,9985 | 0,9960 | 0,9907 | 0,9805 | 0,9633 | 0,9367 | 0,8989 |
| 24 | 1,0000 | 0,9998 | 0,9993 | 0,9980 | 0,9950 | 0,9888 | 0,9777 | 0,9594 | 0,9317 |
| 25 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9990 | 0,9974 | 0,9938 | 0,9869 | 0,9748 | 0,9554 |
| 26 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9995 | 0,9987 | 0,9967 | 0,9925 | 0,9848 | 0,9718 |
| 27 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9994 | 0,9983 | 0,9959 | 0,9912 | 0,9827 |
| 28 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9991 | 0,9978 | 0,9950 | 0,9897 |
| 29 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9996 | 0,9989 | 0,9973 | 0,9941 |
| 30 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9994 | 0,9986 | 0,9967 |
| 31 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9993 | 0,9982 |
| 32 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9996 | 0,9990 |
| 33 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 | 0,9995 |
| 34 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9998 |
| 35 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 |
| 36 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |



Figure 18 – Tables de la fonction de répartition loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ : $\mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{i=1}^{x} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$