UNIVERSITÉ MOHAMMED V
FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

2022–2023
Filière SMI (S3)
Statistique Descriptive et Probabilités

Variables aléatoires discrètes

1 Définition d'une variable aléatoire discrète

Définition 1.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace probabilisable, une variable aléatoire* X *est discrète si l'ensemble des valeurs prises* $X(\Omega)$ *peut être indexé par une partie de* $\mathbb{N}$ *:* $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in I}$ *où* $I \subset \mathbb{N}$ *et pour tout* $i \in I$*, l'ensemble* $\{X = x_i\}$ *est un événement (*$\{X = x_i\} \in \mathcal{F}$*).*

Remarque 1.1.
- *On distingue les variables aléatoires discrètes finies et infinies pour lesquelles* I *est finie ou non.*
- X *est dite discrète si elle prend un nombre fini ou dénombrable de valeurs.*
- *Si* X *est une variable aléatoire discrète à valeur dans* $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *(*$X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$*), alors*

$$\begin{aligned} \{X \leq x\} &= \{X = x_1\} \cup \{X = x_2\} ... \cup \{X = x_j\}, \qquad x_j \leq x \\ &= \cup_{x_i \leq x} \{X = x_i\} \end{aligned} \tag{1}$$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\}) = \mathbb{P}(\cup_{x_i \leq x}\{X = x_i\}) = \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}(\{X = x_i\}) \tag{2}$$

2 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 2.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X *une variable aléatoire discrète, on dit que l'on connaît la loi de* X *si l'on connaît*

- $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ *(ou* $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$*),*
- *pour tout* $x_i \in X(\Omega)$*,* $p_i = P(X = x_i)$*.*

Les probabilités p_i vérifient :

▷ $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, pour $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$,

▷ $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, pour $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$.

Exemple 2.1. *On jette deux dés équilibrés (*$\Omega = \{(1,1), (1,2), ..., (6,6)\}$ *–* $card(\Omega) = 36$*) et on note* S *: " la somme des résultats obtenus ".*

S *est une variable aléatoire discrète et* $S(\Omega) = \{2, 3, ..., 12\}$ *(voir figure 1)*

Distribution de X											
valeurs possibles	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
probabilités	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

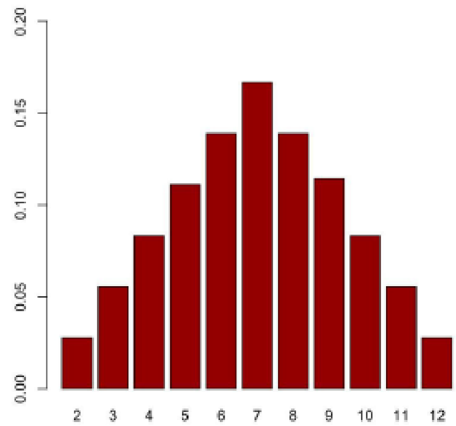

FIGURE 1 – Représentation graphique de la loi de l'exemple 2.1.

Exemple 2.2. *On lance une pièce de monnaie et on note P pour pile et F pour face. Soit $p \in]0;1[$. On considère comme succès l'événement "obtenir face". On note :*

- *X la variable aléatoire indiquant "le nombre de faces obtenus après un lancer",*
- *Y la variable aléatoire indiquant "le nombre de faces obtenus après trois lancers".*

Loi de Probabilité de X

Comme $\Omega = \{P, F\}$ *alors* $X(\Omega) = \{X(P), X(F)\} = \{0, 1\}$. *On a :*

— $\mathbb{P}(\{X = 0\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = 0\}) = \mathbb{P}(P) = 1 - p$,

— $\mathbb{P}(\{X = 1\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = 1\}) = \mathbb{P}(F) = p$,

On obtient alors le tableau suivant :

$X = k$	0	1
$\mathbb{P}(X = k)$	$1 - p$	p

Loi de Probabilité de Y

Ici, $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}$, *donc* $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. *On a :*

— $\mathbb{P}(\{Y = 0\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / Y(\omega) = 0\}) = \mathbb{P}(PPP) = (\mathbb{P}(P))^3 = (1 - p)^3$,

— $\mathbb{P}(\{Y = 1\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / Y(\omega) = 1\}) = \mathbb{P}(PPF, PFP, FPP) = 3(\mathbb{P}(F))(\mathbb{P}(P))^2 = 3p(1 - p)^2$,

— $\mathbb{P}(\{Y = 2\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / Y(\omega) = 2\}) = \mathbb{P}(PFF, FPF, FFP) = 3(\mathbb{P}(P))(\mathbb{P}(F))^2 = 3p^2(1 - p)$,

— $\mathbb{P}(\{Y = 3\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / Y(\omega) = 3\}) = \mathbb{P}(FFF) = (\mathbb{P}(F))^3 = p^3$.

On obtient ainsi, la loi de Y dans le tableau suivant :

$Y=k$	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=k)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

Si par exemple $p = \dfrac{1}{2}$, *alors la loi de* Y *est donnée dans le tableau suivant :*

$Y=k$	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Proposition 2.1. *Soit* X *une variable aléatoire discrète sur* Ω. *Si* g *est une application définie sur* $X(\Omega)$, *alors* $Y = g(X)$ *est une variable aléatoire discrète.*

Exemple 2.3. *Reprenons la variable aléatoire* Y $(p = \frac{1}{2})$ *de l'exemple 2.2.*

On considère la variable aléatoire Z *définie par* $Z = g(Y)$ *avec* $g(x) = (x - \frac{3}{2})^2$ *alors :*

— *si,* $Y = 0$ *ou* 3 *; alors* $Z = \frac{9}{4}$,

— *si,* $Y = 1$ *ou* 2 *; alors* $Z = \frac{1}{4}$.

donc $Z(\Omega) = \left\{\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right\}$ *et*

— $\mathbb{P}(Z = \dfrac{1}{4}) = \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$,

— $\mathbb{P}(Z = \frac{9}{4}) = \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$.

C'est à dire, la loi de Z est :

$Z = k$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
$\mathbb{P}(Z = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

3 Moments d'une variable aléatoire discrète

3.1 Espérance

Définition 3.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète,*

- *si $X(\Omega)$ est fini et $(x_i, p_i)_{1\leq i\leq n}$ la loi de X, alors l'espérance de X est*
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{1\leq i\leq n} x_i p_i.$$
- *si $X(\Omega)$ est infini et $(x_i, p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la loi de X, alors X admet une espérance si la série de terme général $(x_i p_i)$ est absolument convergente.*

Dans ce cas l'espérance de X est

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i p_i.$$

Proposition 3.1. *On a*

- *Si $X = a$, alors $E(X) = a$.*
- $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.
- *(Linéarité)* $\mathbb{E}(X + \lambda Y) = \mathbb{E}(X) + \lambda \mathbb{E}(Y)$ *Si toutes les espérances existent.*
- *(Positivité) Si $X \geq 0$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.*
- *(Croissance) Si $X \geq Y$, alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.*
- $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$.

Proposition 3.2 (Théorème de transfert)**.** *La variable aléatoire $Y = g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $g(x_i)P(X = x_i)$ est absolument convergente. On a alors*

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i) \mathbb{P}(X = x_i).$$

Avec ce théorème il n'est pas nécessaire de connaître la loi de Y.

Définition 3.2. *La variable aléatoire* $Y = X - \mathbb{E}(X)$ *est appelée variable aléatoire centrée. Son espérance est égale à zéro.*

3.2 Moment d'ordre k et moment centré d'ordre k

Définition 3.3. *On appelle moment d'ordre* k *de la variable aléatoire* X*, le nombre*

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{i \in I} x_i^k \times \mathbb{P}(X = x_i).$$

On appelle moment centré d'ordre k *de la variable aléatoire* X*, le nombre*

$$\mathbb{E}\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^k = \sum_{i \in I} \left(x_i - \mathbb{E}(X)\right)^k \times \mathbb{P}(X = x_i).$$

3.3 Variance

Définition 3.4. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* X *une variable aléatoire discrète d'espérance* $\mathbb{E}(X)$*, alors on appelle variance de* X *le* *nombre*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2 = \sum_{i\in I} \left(x_i - \mathbb{E}(X)\right)^2 \times \mathbb{P}(X = x_i).$$

L'écart type est la racine carré de la variance. On écrit $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$

Proposition 3.3 (Koenig)**.** *On a*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Proposition 3.4. *On a*
- *la variance si elle existe est positive,*
- *la variance est quadratique : pour tout réel* λ*,* $\mathbb{V}(\lambda X) = \lambda^2\mathbb{V}(X)$*.*
- $\mathbb{V}(X + \mu) = \mathbb{V}(X)$ *pour tout réel* μ*.*

Exemple 3.1. *Reprenons la variable aléatoire* Y $(p = \frac{1}{3})$ *de l'exemple 2.2 de loi :*

$Y = k$	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= 0 \times P(0) + 1 \times P(1) + 2 \times P(2) + 3 \times P(3) \\
&= 0 \times \frac{8}{27} + 1 \times \frac{12}{27} + 2 \times \frac{6}{27} + 3 \times \frac{1}{27} \\
&= \frac{27}{27} \\
&= 1\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) &= 0^2 \times P(0) + 1^2 \times P(1) + 2^2 \times P(2) + 3^2 \times P(3) \\
&= 0 \times \frac{8}{27} + 1 \times \frac{12}{27} + 4 \times \frac{6}{27} + 9 \times \frac{1}{27} \\
&= \frac{45}{27} \\
&= \frac{5}{3}\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}(Y) &= (0-1)^2 \times P(0) + (1-1)^2 \times P(1) \\
&\quad + (2-1)^1 \times P(2) + (3-1)^2 \times P(3) \\
&= 1 \times \frac{8}{27} + 0 \times \frac{12}{27} + 1 \times \frac{6}{27} + 4 \times \frac{1}{27} \\
&= \frac{18}{27} \\
&= \frac{2}{3}\ .
\end{aligned}
$$

4 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 4.1 (Inégalité de Markov). *Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ et possédant une espérance $m = \mathbb{E}(X)$, alors on a,*

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}.$$

Théorème 4.2 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev). *Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ possédant une espérance $m = \mathbb{E}(X)$ et une variance $\sigma^2 = \mathbb{V}(X)$, alors on a*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - m| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

Preuve. On applique l'inégalité de Markov pour la variable $Y = (X - m)^2$ et $\lambda = \epsilon^2$

Remarque 4.1. *Ce théorème exprime que plus la variance est faible, moins X s'éloigne de m.*

Pour une autre interprétation on pose $\epsilon = k\sigma$ si $\sigma > 0$, on obtient

$$\mathbb{P}(|X - m| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Ceci doit se lire "il y a moins d'une chance sur k^2 que X prenne une valeur au delà de k fois l'écart-type par rapport à l'espérance".

Exemple 4.1. *Un étudiant attend son bus en moyenne* 10 *minutes tous les matins. Donner une majoration de la probabilité que cet étudiant attende son bus plus de* 20 *minutes.*

Corolaire 4.1. *Si* $\mathbb{V}(X) = 0$, *alors* $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$.

5 Lois discrètes usuelles

De nombreuses situations pratiques peuvent être modélisées à l'aide de variables aléatoires qui sont régies par des lois spécifiques. Il importe donc d'étudier ces modèles probabilistes qui pourront nous permettre par la suite d'analyser les fluctuations de certains phénomènes en évaluant, par exemple, les probabilités que tel événement ou tel résultat soit observé.

5.1 Loi uniforme

Définition 5.1. *On dit que X suit une loi* uniforme *sur* $\{1, \cdots, n\}$, *si*

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{n}, \text{ pour tout } i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Cette loi est associée à une expérience dont toutes les issues sont également probables.

Proposition 5.1. *Si* $X \sim \mathcal{U}_{\{1,\cdots,n\}}$, *alors*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Exemple 5.1.

5.2 Loi de Bernoulli

Définition 5.2. *Une variable aléatoire discrète qui ne prend que les valeurs* 1 *et* 0 *avec les probabilités respectives* p *et* $q = 1 - p$ *est appelée variable de Bernoulli. On note* $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Exemple 5.2. *Une urne contient deux boules rouges et trois boules vertes. On tire une boule de l'urne. La variable aléatoire* X *représentant "la boule tirée est rouge" est une variable de* ***Bernoulli****.*

On a : $p(X = 1) = 2/5 = p$, $p(X = 0) = 3/5 = q$.

Proposition 5.2. *Si* $X \sim \mathcal{B}(p)$*, alors*

$$\mathbb{E}(X) = p, \qquad \mathbb{V}(X) = pq.$$

Plus généralement, on utilisera une variable de Bernoulli lorsqu'on effectue une épreuve qui n'a que deux issues : le succès ou l'échec. Une telle expérience est alors appelée épreuve de Bernoulli. On affecte alors 1 à la variable en cas de succès et 0 en cas d'échec.

Exemple 5.3. *A un concours se présentent deux fois plus d'hommes que de femmes. On tire une personne au hasard, soit* X *la variable aléatoire représentant le résultat :* "femme"

1) Quelle loi suit la variable X ? Donner la loi de probabilité.

2) Calculer la moyenne et l'écart-type de X.

Solution

1) Il s'agit d'une expérience de Bernoulli dont le succès est obtenir Femme comme résultat (noté 1— et l'échec sera noté par 0) avec une probabilité $p = 1/3$ (le nombre des hommes est deux fois plus que les femmes). On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

La loi de probabilité de X :

x_i	p_i
0	2/3
1	1/3

2) L'espérance $\mathbb{E}(X) = p = 1/3$, la variance $\mathbb{V}(X) = pq = \frac{2}{9}$ et l'écart-type $\sigma = \sqrt{pq} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ (avec $q = 1 - p$).

5.3 Loi binomiale

a) On effectue une épreuve de Bernoulli. Elle n'a donc que deux issues : le succès avec une probabilité p ou l'échec avec une probabilité q.

b) On répète n fois cette épreuve.

c) Les n épreuves sont indépendantes entre elles, ce qui signifie que la probabilité de réalisation de l'événement "succès" est la même à chaque épreuve et est toujours égale à p.

Dans cette situation, on s'intéresse à la variable $X =$ "nombre de succès au cours des n épreuves".

Appelons X_i les variables de Bernoulli associées à chaque épreuve. Si la i-ème épreuve donne un succès, X_i vaut 1. Dans le cas contraire X_i vaut 0. La somme de ces variables comptabilise donc le nombre de succès au cours des n épreuves. On a donc $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. X peut prendre $n+1$ valeurs : $0, 1, \ldots, n$.

Cherchons la probabilité d'obtenir k succès, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = k)$.

La probabilité d'avoir k succès suivis de $n-k$ échecs est $p^k q^{n-k}$ car ces résultats sont indépendants les uns des autres.

La probabilité d'avoir k succès et $n-k$ échecs dans un autre ordre de réalisation est toujours $p^k q^{n-k}$. Donc tous les événements élémentaires qui composent l'événement $(X = k)$ ont même probabilité.

Combien y en a-t-il ' Autant que de façons d'ordonner les k succès par rapport aux $n - k$ échecs '?. Il suffit de choisir les k places des succès parmi les n possibles et les $n - k$ échecs prendront les places restantes. Or il y a C_n^k manières de choisir k places parmi n.

Finalement, on obtient

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Définition 5.3. *On dit que la variable aléatoire X suit une **loi binomiale de paramètres** n **et** p (On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$) si*

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \forall k = 0, 1, \dots, n.$$

Remarque 5.1. *L'adjectif binomial vient du fait que lorsqu'on somme toutes ces probabilités, on retrouve le développement du binôme de Newton,*

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1.$$

Proposition 5.3. *Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors*

$$\mathbb{E}(X) = np, \qquad \mathbb{V}(X) = npq.$$

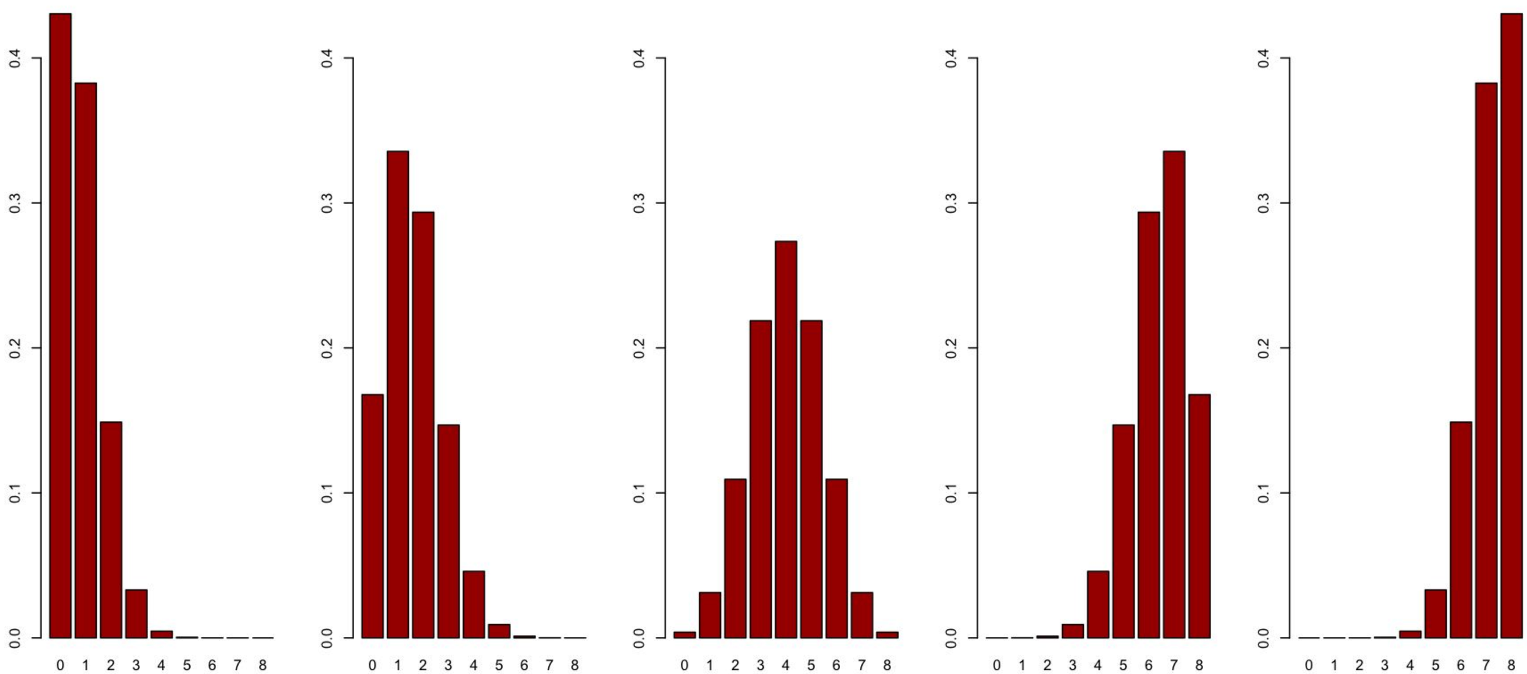

FIGURE 2 – Répartition des probabilités de $\mathcal{B}(n, p)$, pour $n = 8$ et $p = .1, .2, .5, .8, .9$

Proposition 5.4 (Somme de deux variables binomiales)**.** *Si X_1 et X_2 sont des variables* ***indépendantes*** *qui suivent des lois binomiales $B(n_1, p)$ et $B(n_2, p)$ respectivement, alors X_1+X_2 suit une loi binomiale $B(n_1+n_2, p)$.*

Exemple 5.4. *A un concours se présentent* 20 *personnes. Soit* X *la variable aléatoire représentant le résultat :* "Nombre de femmes passant le concours parmi les 20 personnes". *Sachant qu'il y a deux fois plus d'hommes que de femmes,*

1) Quelle loi suit la variable X *? Donner la loi de probabilité.*

2) Calculer la moyenne et l'écart-type de X.

Solution

1) Il s'agit d'une répétition indépendamment de l'expérience de Bernoulli 20 *fois dont le succès est obtenir Femme comme résultat (noté* 1— *et l'échec sera noté par* 0*) avec une probabilité* $p = 1/3$ *(le nombre des hommes est deux fois plus que les femmes). On note* $X_i \sim \mathcal{B}(p)$*, pour tout* $i = 1, 2, ..., 20$*. Alors* $X = \sum_{i=1}^{20} X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$.

La loi de probabilité de X *:*

$\triangleright$ $X(\Omega) = \{0, 1, 2, ..., 20\}$,

$\triangleright$ *pour tout* $k \in X(\Omega)$: $\qquad \mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

2) L'espérance $\mathbb{E}(X) = np = \frac{20}{3}$*, la variance* $\mathbb{V}(X) = npq = \frac{40}{9}$ *et l'écart-type* $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{40}{9}}$.

5.4 Loi géométrique

a) On effectue une épreuve de Bernoulli. Elle n'a donc que deux issues : le succès avec une probabilité p ou l'échec avec une probabilité $q = 1 - p$.
b) On répète l'épreuve ***jusqu'à l'apparition du premier succès***.
c) Toutes les épreuves sont indépendantes entre elles.

Dans cette situation, on s'intéresse à la variable $X =$ "nombre de fois qu'il faut répéter l'épreuve pour obtenir le premier succès".

Remarque 5.2. *On est donc dans les mêmes hypothèses que pour la loi binomiale, mais le nombre d'épreuves n'est pas fixé à l'avance. On s'arrête au premier succès.*

L'ensemble des valeurs prises par X est infini, $X(\Omega) = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}^*$.
On cherche la probabilité d'avoir recours à n épreuves pour obtenir le premier succès.
Ce succès a une probabilité de réalisation de p. Puisque c'est le premier, il a été précédé de $n - 1$ échecs qui ont chacun eu la probabilité q de se produire. Étant donné l'indépendance des épreuves, on peut dire que la probabilité de réalisation de $n - 1$ échecs suivis d'un succès est le produit des probabilités

de réalisation de chacun des résultats,

$$\mathbb{P}(X = n) = q^{n-1}p.$$

Définition 5.4. *On dit que la variable aléatoire X suit une **loi géométrique de paramètre** p. On note $X \sim \mathcal{G}(p)$, si*

$$\mathbb{P}(X = k) = q^{k-1}p, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Proposition 5.5. *Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors*

$$\mathbb{E}(X) = 1/p, \qquad \mathbb{V}(X) = q/p^2.$$

Exemple 5.5. *On lance un dé plusieurs fois et on note X **"le nombre de lancés nécessaire pour obtenir le nombre** 5" pour la première fois. Alors, la loi de X est :*

▷ $X(\Omega) = \{1, 2, 3, \cdots\} = \mathbb{N}^*$,

▷ $\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$ *avec* $k \in \{1, 2, \cdots\}$.

X suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{6}$ et

— *la probabilité d'obtenir le nombre 5 pour la première fois au $3^{ème}$ lancé est*

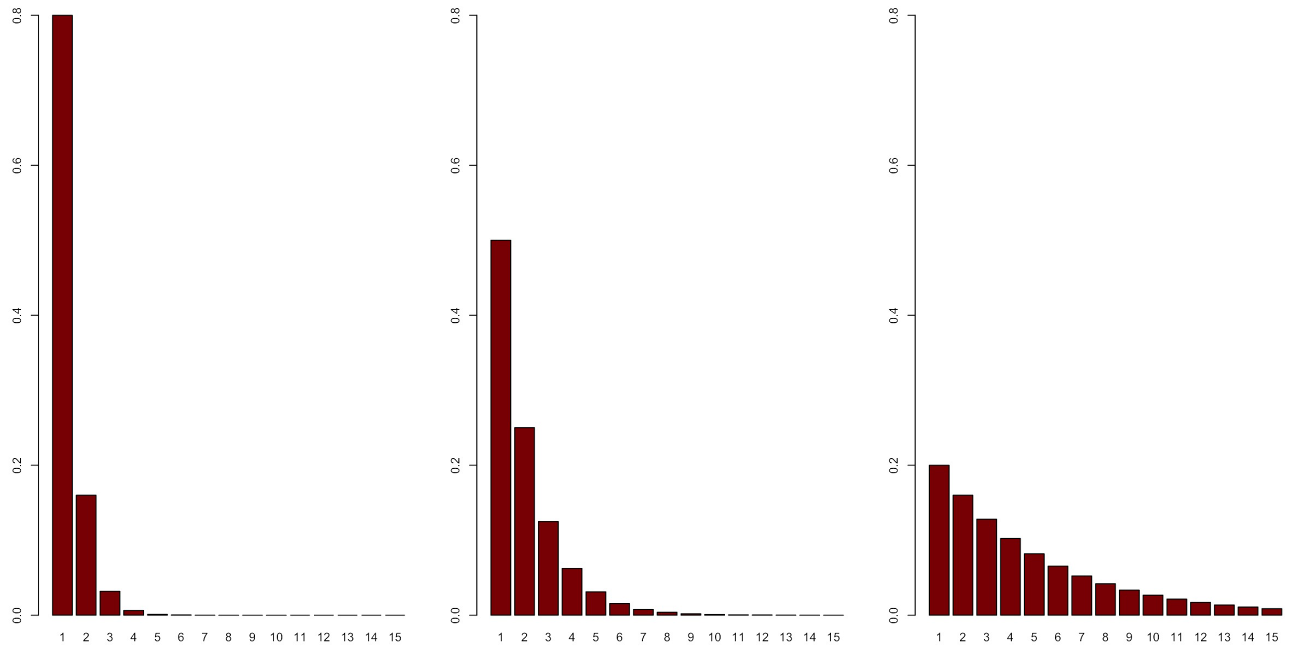

FIGURE 3 – Répartition des probabilités de $\mathcal{G}(p)$, pour $p = .8, .5, .2$.

$$\mathbb{P}(X=3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = 0,1157,$$

— *la probabilité d'obtenir le nombre* 5 *pour la première fois au* $8^{\grave{e}me}$ *lancé est*

$$\mathbb{P}(X=8) = \left(\frac{5}{6}\right)^7 \times \frac{1}{6} = 0,0465,$$

— *la probabilité d'obtenir le nombre* 5 *pour la première fois au* $40^{ème}$ *lancé est*

$$\mathbb{P}(X=40)=\left(\frac{5}{6}\right)^{39}\times\frac{1}{6}=0,0001,$$

$$\mathbb{E}(X)=\frac{1}{\frac{1}{6}}=6 \qquad \textit{et } \mathbb{V}(X)=\frac{\frac{5}{6}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{2}}=30.$$

C'est à dire qu'il faut ***en moyenne*** 6 *lancés pour obtenir le nombre* 5 *pour la première fois.*

5.5 Distribution de Poisson

Beaucoup de situations sont liées à l'étude de la réalisation d'un événement dans un intervalle de temps donné (arrivée de clients qui se présentent à un guichet d'une banque en une heure, apparitions de pannes d'un réseau informatique en une année, arrivée de malades aux urgences d'un hôpital en une nuit,....). Les phénomènes ainsi étudiés sont des phénomènes d'attente.

Pour décrire les réalisations dans le temps d'un événement donné, on peut :

— Soit chercher le **nombre** de réalisations de l'événement dans un intervalle de temps donné qui est distribué suivant une loi de Poisson.

— Soit chercher le **temps** entre deux réalisations successives de l'événement qui est distribué suivant une loi exponentielle *(voir chapitre suivant)*.

Définition 5.5. *La variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ noté $\mathcal{P}(\lambda)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et*

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Proposition 5.6. *Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors*

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

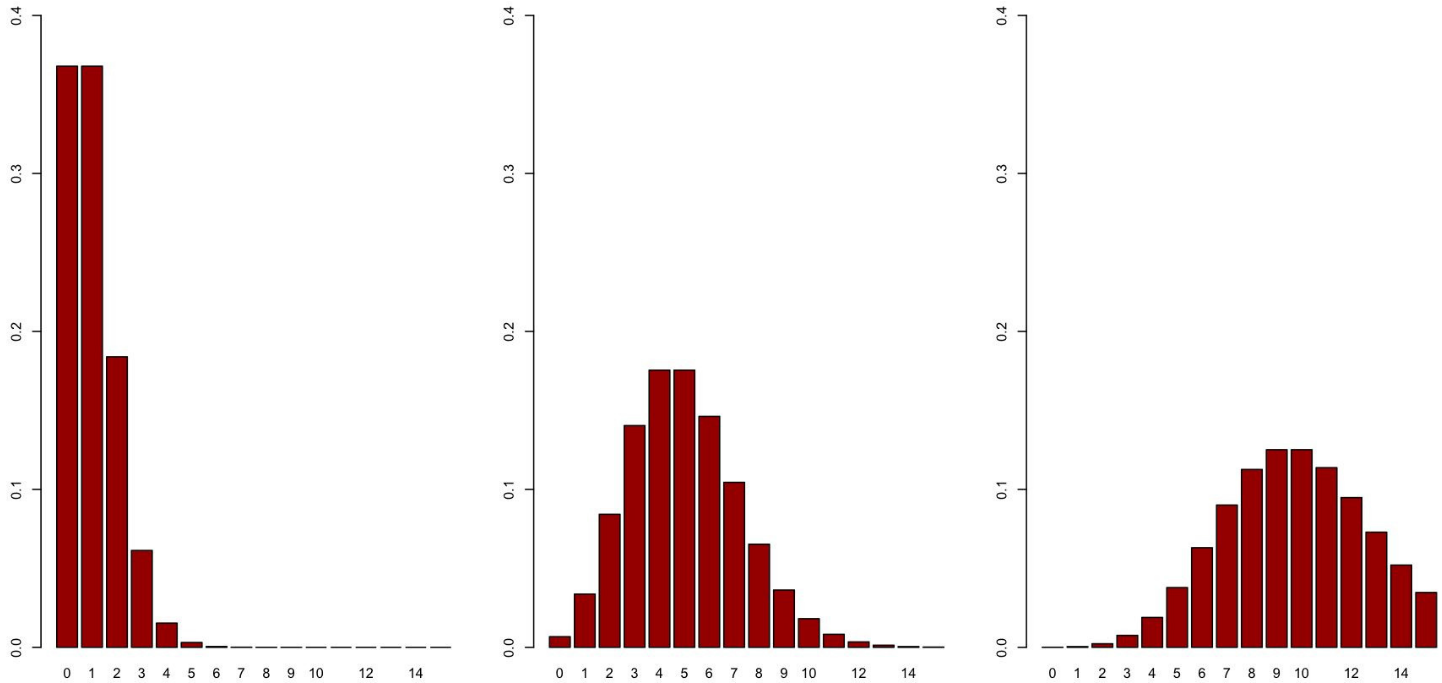

FIGURE 4 – Répartition des probabilités de $\mathcal{P}(\lambda)$, pour $\lambda = 1, 5, 10$.

Proposition 5.7. *Si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires* indépendantes *qui suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2, alors $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.*

La loi de Poisson peut être interprétée comme un cas limite d'une loi binomiale.

Exemple 5.6. *Les clients arrivent à un guichet au taux moyen de* 1.9 *clients par minute. Quelle est la probabilité de l'arrivée de* 5 *clients pendant une minute ?*

On note X *la variable aléatoire représentant* ***"le nombre de clients qui arrivent au guichet pendant une minute"****. Alors* X *suit une loi de Poisson de paramètre* $\lambda = 1.9$ *(*$X \sim \mathcal{P}(1.9)$*) et on a :*

$\triangleright$ $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots\} = \mathbb{N}$

$\triangleright$ $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$*, pour tout* $k \in X(\Omega)$

La probabilité d'avoir 5 *clients pondant une minute est*

$$\mathbb{P}(X = 5) = \frac{(1.9)^5}{5!} e^{-1,9} = \frac{24.76}{120} \times 0.1 = 0.029$$

Et aussi, on a :

— $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = 1.9$,

— *la probabilité d'avoir* 1 *clients pondant une minute est*
$\mathbf{P}(X = 1) = \dfrac{(1.9)^1}{1!} e^{-1.9} = 0.2841,$

— *la probabilité d'avoir* 3 *clients pondant une minute est*
$\mathbf{P}(X = 3) = \dfrac{(1.9)^3}{3!} e^{-1.9} = 0.1709,$

— *la probabilité d'avoir 8 clients pondant une minute est*

$$\mathbf{P}(X = 8) = \frac{(1.9)^8}{8!} e^{-1.9} = 0.0006.$$

5.6 Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

La loi binomiale dépend de **deux paramètres** n **et** p. Bien qu'il existe quelques **tables statistiques**, elle n'est pas simple à utiliser.

La loi de Poisson ne dépend que d'**un seule paramètre** ce qui la rend plus pratique. Il faut donc avoir toujours présent à l'esprit que, lorsque les conditions le permettent, on peut avoir intérêt à remplacer une loi binomiale par une loi de Poisson. Le calcul des probabilités par la loi de Poison peut être retrouvé aussi à travers des **tables statistiques** selon la valeur du paramètre λ.

Lorsque n est grand et p petit, de telle façon que le produit $np = \lambda$ reste petit par rapport à n, la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut être approchée par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Cette approximation s'appliquant lorsque p est petit, la loi de Poisson est appelée la loi des événements rares.

Résultat 5.1. *En pratique, l'approximation est valable si* $n \geq 30$, $p \leq 0.1$ *et* $np \leq 5$.

Dans ce cas, si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, *alors* $X \sim \mathcal{P}(np)$.

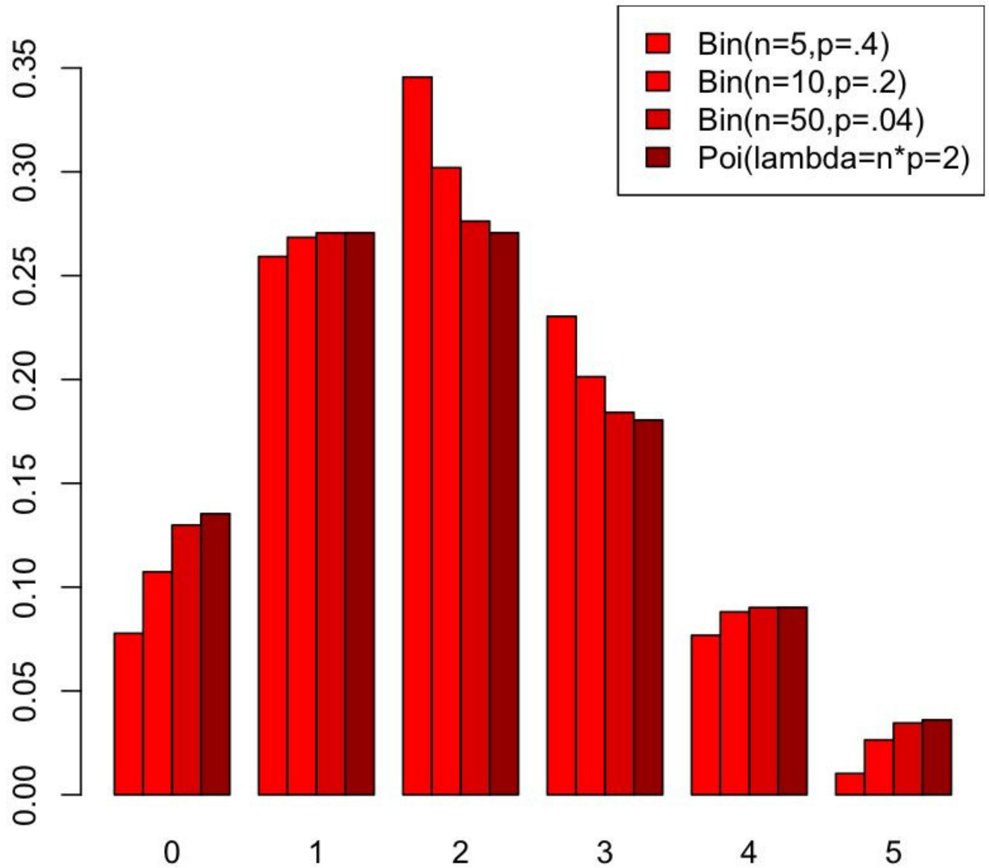

FIGURE 5 – Approximation d'une binomiale par une Poisson.

Exemple 5.7. *Un manufacturier sait que* 2% *des articles qu'il produit sont défectueux. Il choisit, au hasard, un échantillon de* 30 *articles pour inspection.*

Quelle est la probabilité qu'il trouve 2 *articles défectueux ?*

On note X *la variable aléatoire représentant* ***"le nombre d'articles défectueux parmi*** 30***"****. Alors* $X \sim B(30, 0.02)$.

Comme $n = 30 \geq 30$ *et* $p = 0.02 \leq 0,1$*, on peut approximer la loi de* X *par la loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda = n \times p = 0.6)$.

Calculons maintenant la probabilité cherchée par les deux lois :

— ***Calcul direct par*** $B(30, 0.02)$ ***:***

$$\mathbf{P}(X = 2) = C_{30}^{2}(0,02)^2(0,98)^{28} = 0.0988.$$

— ***Calcul approximatif par*** $\mathcal{P}(0.6)$ ***:***

$$\mathbf{P}(X = 2) = \frac{(0.6)^2}{2!}e^{-0.6} = 0.0987.$$