Université Mohammed V
Faculté des Sciences de Rabat
Département de Mathématiques

2022–2023
Filière SMI (S3)
Statistique Descriptive et Probabilités

Analyse Combinatoire

1 Introduction

En théorie des probabilités, on est souvent devant des situations où il est indispensable de dénombrer les probabilités pour qu'un événement donné se réalise. Pour cela, nous allons étudier les plus courantes méthodes de dénombrement.

Avant de parler des permutations et des combinaisons, il est utile d'introduire une technique de comptage assez générale

2 Principe élémentaire de comptage

Considérant une expérience qui se réalise en n étapes et telle que les résultats d'une étape soient indépendants des étapes précédentes. Pour $i = 1, ..., n$, on note m_i le nombre de résultats possible à la $i^{\text{ème}}$ étape.

Résultat 2.1. *Le nombre total des résultats possible à la fin d'une telle expérience est égal à :*

$$m = m_1 \times m_2 \times ... \times m_n. \tag{1}$$

Exemple 2.1. *Dans un restaurant, un menu comprend :*

— *Une entrée : 2 choix : salade, soupe/*
— *Un plat principal : 3 choix : viande, poulet, poisson/*
— *Un dessert : 2 choix : glace, fruit.*

De combien de façon peut-on former un menu ?

3 Permutation

Exemple 3.1. *Les permutations possible des lettres A, B et C sont : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB et CBA. Soient 6 permutations au total.*

Résultat 3.1 (Permutation sans répétition)**.** *Le nombre de permutations de n objets distincts est égal à*

$$n! = n \times (n-1) \times ... \times 3 \times 2 \times 1. \tag{2}$$

Exemple 3.2. *Les permutations possible des lettres A, A, B, B et B sont : AABBB, ABABB, ABBAB, ABBBA, BAABB, BABAB, BABBA, BBAAB, BBBAA. Soient* 10 *permutations au total.*

Résultat 3.2 (Permutation avec répétition)**.** *Soit E un ensemble à n éléments comportant n_1 éléments de type T_1 (indiscernables entre eux), n_2 éléments de type T_2 (indiscernables entre eux), ... et n_r éléments de type T_r (indiscernables entre eux). Alors, le nombre de possibilités pour ranger les élément de E est donné par :*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!} \qquad \text{avec } n = n_1 + n_2 + ... + n_r. \tag{3}$$

4 Arrangements et Combinaisons

Considérons une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. L'expérience consiste à tirer p boules de cette urne. Quel est le nombre de résultats possibles ?

Pour répondre à cette question on distingue les différentes situations suivantes :

1. **Tirage sans remise**
   (a) l'ordre des résultats est pris en considération.
   (b) l'ordre des résultats n'est pas pris en considération.
2. **Tirage avec remise**
   (a) l'ordre des résultats est pris en considération.
   (b) l'ordre des résultats n'est pas pris en considération.

Définition 4.1. *Lorsque l'ordre des résultats* est pris *en compte, on parle d'*arrangements.

Lorsque l'ordre des résultats n'est pas pris *en compte, on parle de* combinaisons.

4.1 Arangements

4.1.1 Arangements sans répétition

Considérons n objets discernables $O_1, O_2, ..., O_n$. Pour former un $p-$uplet $\left(O_{i_1}, O_{i_2}, ..., O_{i_p}\right)$ **-sachant que tous les O_{i_j} sont distincts-**, on passe par p étapes, à la $i^{\text{ème}}$ étape le nombre de réalisations possible est égale à $n-(i-1)$. On a le résultat suivant :

Résultat 4.1. *Le nombre d'arrangement sans répétition de p objets choisis parmi n est noté A_n^p et est donné par*

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)...(n-(p-1)) = \frac{n!}{(n-p)!}. \tag{4}$$

Exemple 4.1. *Considérons 7 personnes qui sont candidats pour occuper 3 postes. De combien de façon différentes peut-on pourvoir ces 3 postes ?*

— *Pour le 1^{er} poste on a 7 possibilités*
— *Pour le $2^{ème}$ poste on a 6 possibilités*
— *Pour le $3^{ème}$ poste on a 5 possibilités*

Au total, il y a $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$ possibilités

Exemple 4.2. *A l'occasion d'une compétition sportive groupant* 18 *athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent et une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles ?*

On aura A_{18}^{3} *possibilités.*

4.1.2 Arrangements avec répétition

Avec n objets discernables $O_1, O_2, ..., O_n$. Pour former un $p-$uplet $\left(O_{i_1}, O_{i_2}, ..., O_{i_p}\right)$ **-où les O_{i_j} ne sont pas forcément distincts-**, on passe par p étapes et à chaque étape le nombre de réalisations possible est égale à n. On a le résultat suivant :

Résultat 4.2. *Le nombre d'arrangement avec répétition de* p *objets choisis parmi* n *est égal à* n^p.

Exemple 4.3. *Combien de mots de* 10 *lettres peut-on former avec les* 26 *lettres de l'alphabet si on peut réutiliser les lettres ?*

Solution *:* 26^{10}

4.2 Combinaisons

4.2.1 Combinaisons sans répétition

Reprenant l'exemple de l'urne du début de la section. On choisit, sans remise, p boules et sans que l'ordre intervient. Quel est alors le nombre de résultats possibles ?

On sait que si l'ordre intervient, on aura A_n^p cas possibles. Dans ce cas chaque groupe de p numéro engendre $p!$ combinaisons ordonnée. Pour obtenir le nombre de combinaisons non ordonnées, il suffit de diviser A_n^p par $p!$. On a donc le résultat suivant :

Résultat 4.3. *Le nombre de possibilités de choisir p objets parmi n distincts est noté C_n^p et est donné par*

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}. \tag{5}$$

Exemple 4.4. *Une "main" est constituée de 13 cartes. quel est le nombre de "mains" distinctes susceptibles d ?être formées à partir d ?un jeu de 52 cartes ?*

C'est une combinaison de 13 parmi 52, donc le nombre de mains est :

$$C_{52}^{13} = \frac{52!}{39!13!} = 635013560000$$

On a les propriétés suivantes :

Propriétés 4.1.

— $C_n^0 = C_n^n = 1$,
— $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$,
— $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Proposition 4.1 (Formule du triangle de Pascal)**.**

Pour $0 \leq k \leq n-1$,

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

Proposition 4.2 (Formule du binôme de Newton)**.**

Soient a et b des nombres complexes et n un entier naturel non nul, alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Exemple 4.5. *En utilisant la fonction* $f(x) = (1+x)^n$*, calculer les sommes suivantes :*

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k, \qquad \sum_{k=1}^{n} k C_n^k.$$

4.2.2 Combinaisons avec répétition

Définition 4.2. *Soient* p *et* n *deux entiers, une suite* $(p_1, p_2, ..., p_n)$ *d'entiers positifs ou nuls satisfaisant la relation*

$$p = p_1 + ... + p_n$$

est appelée décomposition de p *en* $p_1 + p_2 + ... + p_n$*.*

Résultat 4.4. *Le nombre de combinaison avec répétitions est égale au nombre de décomposition de* p *objets pris parmi* n *est noté* K_n^p *et est égal à*

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p. \tag{6}$$

Définition 4.3. *Le nombre de possibilités de répartir* p *objets identiques dans* n *cases est égal à* $K_n^p = C_{n+p-1}^p$*.*

Exemple 4.6. *Soit f une fonction à 2 variables dérivable. Le nombre de dérivées partielles d'ordre 3 de f est égal à* $K_2^3 = C_{2+3-1}^3 = 4$

Exemple 4.7 (Le nombre de pièces dans un jeu de dominos)**.** *Un domino est une 2-combinaison avec répétition de l'ensemble* $E = \{blanc, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Chaque domino est représenté par deux résultats de E. Le nombre de pièce dans un jeu de domino est donc* $K_7^2 = C_{7+2-1}^2 = 28$

Exemple 4.8. *Une université désire répartir 10 enseignants sur 3 facultés. De combien de façons peut-on répartir ces enseignants ?*

5 Bilan

Français	**Dénombrement**
Successivement	Ordonnés
Simultanément	Non ordonnés
Avec remise	Avec répétition
Sans remise	Sans répétition

TABLE 1 – Lexique Français *vs* Mathématique

Tirages	Ordonnés	Non Ordonnés
Avec remise	n^k	$K_n^k = C_{n+k-1}^k$
Sans remise	A_n^k	C_n^k

TABLE 2 – Tirage de k éléments parmi n

Objets	Discernables	Indiscernables
éventuellement plusieurs dans chaque case	n^k	$K_n^k = C_{n+k-1}^k$
un seul dans chaque case	A_n^k	C_n^k

TABLE 3 – Rangement de k éléments dans n cases

5.1 Exemple

On considère trois objets : a, b et c ($n = 3$), on veut sélectionner $p = 2$ objets parmi a, b et c. On a les cas suivants :

1. **Sans répétition et sans ordre**
   (a,b), (a,c) et (b,c)
   $C_3^2 = 3$
2. **Sans répétition et avec ordre**
   (a,b), (a,c), (b,c), (b,a), (b,c) et (c,a)
   $A_3^2 = 6$
3. **Avec répétition et sans ordre**
   (a,b), (a,c), (b,c), (a,a), (b,b) et (c,c)
   $K_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = 6$
4. **Avec répétition et avec ordre**
   (a,b), (a,c), (b,c), (b,a), (b,c) et (c,a) (a,a), (b,b) et (c,c)
   $3^2 = 9$