Université Mohammed V
Faculté des Sciences de Rabat
Département de Mathématiques

Année Universitaire **2022–2023**
Module **Probabilités et Statistique**
Filière – **SMI (S3)**

TD n° 5
Variables Aléatoires Continues
– *Un corrigé*

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire réelle continue, de densité f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} at^2 & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la constante a.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. Calculer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(X \leq 0.25)$, $\mathbb{P}(-0.5 < X \leq 0.75)$.
5. Calculer la médiane de X.

Solution* – *Exemple de cours

5. $F_X(M_e) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}(M_e^3 + 1) = \frac{1}{2} \Rightarrow M_e = 0.$

Exercice 2. Soit X la variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{16} & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1) Chercher $\mathbb{P}(X = 3)$, $\mathbb{P}(X \leq 2)$, $\mathbb{P}(-2 \leq X \leq 3)$ et $\mathbb{P}(X > 3)$.
2) Donner l'expression de f, la densité de probabilité de X.
3) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
4) En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Y = 3X - 1$.

***Solution* –**

1) $\mathbb{P}(X = 3) = 0,$
$\mathbb{P}(X \leq 2) = F(2) = \frac{2^2}{16},$
$\mathbb{P}(-2 \leq X \leq 3) = F(3) - F(-2) = \frac{3^2}{16} - 0$ *et*
$\mathbb{P}(X > 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{3^2}{16}.$

2) Donner l'expression de f, la densité de probabilité de X.

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{2x}{16} & si\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & si\ x > 4 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{8} & si\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & sinon\ . \end{cases}$$

3) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$:

$\mathbb{E}(X) = \int_0^4 x \times \frac{x}{8} dx = \int_0^4 \frac{x^2}{8} dx = \left[\frac{x^3}{3\times 8}\right]_0^4 = \frac{4^3}{3\times 8} =$

$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^4 x^2 \times \frac{x}{8} dx = \int_0^4 \frac{x^3}{8} dx = \left[\frac{x^4}{4\times 8}\right]_0^4 = \frac{4^4}{4\times 8} =$

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

4) En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Y = 3X - 1$.

$\mathbb{E}(Y = 3X - 1)\mathbb{E}(3X - 1) = 3\mathbb{E}(X) - 1$

$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(3X - 1) = 3^2\mathbb{V}(X)$

Exercice 3.

1. On considère une variable aléatoire X de loi uniforme sur $[0, 1]$ et on définit la variable aléatoire Y par $Y = 4X + 3$. Chercher la fonction de densité de probabilité de Y et déterminer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
2. On considère une variable aléatoire X de loi uniforme sur $[0; 1[$ et λ une constante réelle et on définit la variable aléatoire T par $T = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 - X)$. Déterminer la loi de T et donner $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$.

3. On considère une variable aléatoire Z de loi normale centrée-réduite et on définit la variable aléatoire W par $W = |Z|$. Déterminer la densité de probabilité de W.

Solution –

1) Soit la variable aléatoire $Y = 4X + 3$ *où* $X \sim \mathcal{U}([0,1])$

Loi de probabilité de Y *:*

$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X \leq \frac{x-3}{4}) = F_X(\frac{x-3}{4})$. *En dérivant :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \frac{1}{4} f_X(\frac{x-3}{4}) \qquad \text{où } f_X(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$$
$$= \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0,1]}(\frac{x-3}{4})$$

On a $0 \leq \frac{x-3}{4} \leq 1 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 7$ *et donc* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[3,7]}(x)$.

On reconnaît la densité de probabilité de la loi uniforme sur l'intervalle $[3,7]$.

Donc $Y = 4X + 1 \sim \mathcal{U}([3,7])$.

Rappel : *Si* $X \sim \mathcal{U}([a,b])$, $f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$ *alors* $E(X) = \frac{a+b}{2}$ *et* $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Ici : $Y \sim \mathcal{U}([3,7])$, $E(Y) = \frac{3+7}{2} = 5$ *et* $V(Y) = \frac{4^2}{12} = \frac{4}{3}$

2) Soit la variable aléatoire $Y = -\frac{1}{\lambda} log(1-X)$, $\lambda > 0$ *et* $X \sim \mathcal{U}([0,1[)$

Loi de probabilité de Y *:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(-\frac{1}{\lambda} log(1-X) \leq x) = P(log(1-X) \geq -\lambda x)$$
$$= P(1 - X \geq e^{-\lambda x}) = P(X \leq 1 - e^{-\lambda x}) = F_X(1 - e^{-\lambda x}).$$

En dérivant, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_Y(x) = \frac{d}{dx}(1 - e^{-\lambda x}) f_X(1 - e^{-\lambda x}) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,1[}(1 - e^{-\lambda x})$$

On a $0 \leq 1 - e^{-\lambda x} < 1 \Leftrightarrow 0 < e^{-\lambda x} \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

donc $\forall x \in \mathbb{R}, \ f_Y(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}$ *et par conséquent* $Y \sim Exp(\lambda)$.
D'où $E(Y) = \frac{1}{\lambda}$ *et* $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

3) Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, *alors sa fonction de répartition est* $F_Z(z) = \Phi(z) = \mathbb{P}(Z \leq z)$ *et sa densité est égale à*

$$\Phi'(z) = f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Si $x \leq 0$ *:*
$F_W(x) = \mathbb{P}(W \leq x) = \mathbb{P}(|Z| \leq x) = 0$ *(événement impossible)*
Si $x \geq 0$ *:*
$F_W(x) = \mathbb{P}(W \leq x) = \mathbb{P}(|Z| \leq x) = \mathbb{P}(-x \leq Z \leq x) = 2\Phi(x) - 1$.
Donc :

$$f_W(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ \frac{d}{dx}(2\Phi(x) - 1) & si\ x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 2\Phi'(x) & si\ x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Donc la densité de W *est :*

$$f_W(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 2.

(a) Représenter graphiquement la loi de X.

(b) Déterminer la fonction de répartition de X.

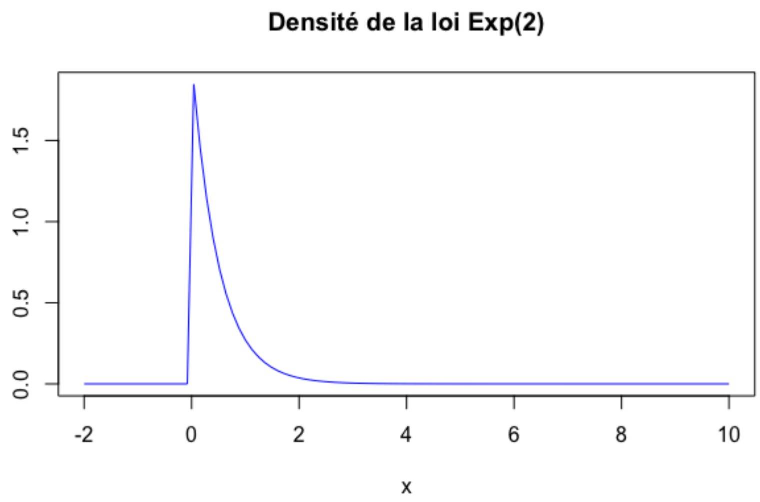
(c) Calculer $\mathbb{P}(X < 9)$.

(d) Utiliser l'inégalité de *Bienaymé-Tchebychev* pour calculer $\mathbb{P}(|X - 1/2| \geq 2)$. Comparer avec la réponse exacte.

Solution –

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 2.

(a) Représenter graphiquement la loi de X.



(b) Déterminons la fonction de répartition de X :

$$f(x) = 2e^{-2x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1 - e^{-2x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

(c) Calculons $\mathbb{P}(X < 9) = F(9) = 1 - e^{-2\times 9} \simeq 0.9999$.

(d) Utilisons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev *pour calculer* $\mathbb{P}(|X - 1/2| \geq 2)$ *:*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - m| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} \textit{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{1}{4}.$$

$$\mathbb{P}(|X - 1/2| \geq 2) \leq \frac{1}{4\times 2} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

Comparaison avec la réponse exacte :

$\mathbb{P}(|X - 1/2| \geq 2) = \mathbb{P}(X - 1/2 \geq 2) + \mathbb{P}(X - 1/2 \leq -2) = \mathbb{P}(X \geq 5/2) + \mathbb{P}(X \leq -3/2)$
$= 1 - F(5/2) = e^{-5} = 0.0067$.

Exercice 5. (*Utilisation de la table*)

(I) Supposons que la variable aléatoire X, désignant le *bénéfice d'une société*, suit une loi *normale* d'espérance $\mu = 75$ et de variance $\sigma^2 = 25$: $X \sim \mathcal{N}(75, 25)$

1) Calculer la probabilité que le bénéfice soit compris entre 60 et 80.

2) Calculer la probabilité que le bénéfice soit supérieur à 82.

3) Calculer $\mathbb{P}(|X - 70| \leq 10)$.

4) Calculer $\mathbb{P}(X \geq 100)$.

5) Déterminer x tel que $\mathbb{P}(X \leq x) = 0.826$.

6) Déterminer y tel que $\mathbb{P}(|X - 75| \leq y) = 0.596$.

(II) Supposons que la variable aléatoire X suit une distribution de χ^2. Calculer a tel que : $\mathbb{P}(X > a) = 0.05$:

(a) pour 18 degrés de libertés,

(b) pour 55 degrés de libertés.

(III) Supposons que la variable aléatoire T suit une distribution de Student t_ν à ν degrés de libertés. Donner le quantile $qt_{\nu;1-\alpha/2}$ d'ordre $1-\alpha/2$ sachant que :

(a) $\nu = 14$ degrés de libertés et $\alpha = 0.10$,

(b) $\nu = 10$ degrés de libertés et $\alpha = 0.05$.

Solution –

(I) *$X \sim \mathcal{N}(75, 5^2)$, c-à-d, $Z = \frac{X-75}{5} \sim \mathcal{N}(0,1)$:*

1) $\mathbb{P}(60 \leq X \leq 80) = \mathbb{P}(60 < X < 80) = \mathbb{P}(\frac{60-75}{5} < Z < \frac{80-75}{5}) = \mathbb{P}(60 < X < 80) = \mathbb{P}(-3 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-3) = \Phi(1) - 1 + \Phi(3) = 0.8413 - 1 + 0.9987 \simeq 0.84$,

2) $\mathbb{P}(X > 82) = \mathbb{P}(Z > \frac{82-75}{5}) = \mathbb{P}(Z > 1,4) = 1 - \Phi(1,4) = 1 - 0,9192 = 0,0808$.

*3) $\mathbb{P}(|X-70| \leq 10) = \mathbb{P}(-10 \leq X - 70 \leq 10) = \mathbb{P}(60 \leq X \leq 80) =$ question **1)**.*

4) $\mathbb{P}(X \geq 100) = \mathbb{P}(Z \geq \frac{100-75}{5}) = \mathbb{P}(Z \geq 5) = 1 - \Phi(5) \simeq 0$.

*5) $\mathbb{P}(X \leq x) = 0.826 \Leftrightarrow \mathbb{P}(Z \leq \frac{x-75}{5}) = 0.826 \Leftrightarrow \frac{x-75}{5} = \Phi^{-1}(0.826) \simeq 0.94$
$\Leftrightarrow x = 75 + 5 \times 0.94 \simeq 79.7$*

*6) $\mathbb{P}(|X-75| \leq y) = 0.596 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\frac{|X-75|}{5} \leq \frac{y}{5}) = 0.596 \Leftrightarrow \mathbb{P}(|Z| \leq \frac{y}{5}) = 0.596$
$\Leftrightarrow 2\Phi(\frac{y}{5}) - 1 = 0.596 \Leftrightarrow \frac{y}{5} = \Phi^{-1}(0.798) \Leftrightarrow y = 5 \times \Phi^{-1}(0.798)$*

Dans la table statistique, on peut remarquer que 0.798 se trouve entre 0.83 et 0.84, ($\Phi(0.83) = 0.7967$ et $\Phi(0.84) = 0.7995$) ce qui peut entraîner que $\Phi(\frac{0.83+0.84}{2}) \simeq 0.798$ et donc $y \simeq 5 \times 0.835 \simeq 4.175$.

(II) *$X \sim \chi^2(n)$, $n = 18; 55$. Calculer a tel que : $\mathbb{P}(X > a) = 0.05 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X < a) = 0.95$:*

(a) pour 18 degrés de libertés : `= 28.8693`*;*

(b) pour 55 degrés de libertés : `= 73.31149`*;*

Sur la table statistique de la loi du χ^2 on n'a pas des valeurs pour des degrés supérieur à 30. On utilise l'approximation de la loi de $\chi^2(n)$ vers la loi normale $\mathcal{N}(n, 2n)$.

(III) *Supposons que la variable aléatoire $T \sim t_\nu$. le quantile $qt_{\nu;1-\alpha/2}$ d'ordre $1-\alpha/2$ sachant que :*

(a) $\nu = 14$ degrés de libertés et $\alpha = 0.10$, $1-\alpha/2 = 0.95$: `qt(0.95,14) = 1.76131`*;*

(b) $\nu = 10$ degrés de libertés et $\alpha = 0.05$, $1-\alpha/2 = 0.975$: `qt(0.975,10) = 2.228139`.

Exercice 6. On prélève un échantillon de 100 personnes d'une population où un individu sur quatre est malade. On désigne par X la variable aléatoire représentant le nombre d'individus malades dans l'échantillon

1) Quelle est la loi de X ?

2) Calculer l'espérance et la variance de X, en déduire l'écart-type.

3) Montrer que l'on peut approximer la loi de X par une loi continue dont on précisera les paramètres.

4) Après cette approximation, calculer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(X \geq 25)$ et $\mathbb{P}(23 \leq X \leq 27)$.

Solution –

1) Il s'agit de 100 réalisations indépendantes d'une expérience de Bernoulli. Donc X suit une loi binomiale $X \sim \mathcal{B}(n = 100, p = 1/4)$ (le succès est d'obtenir un individu malade avec sa probabilité vaut $p = 1/4$).

2) L'espérance $\mathbb{E}(X) = np$, la variance $S_X^2 = \mathbb{V}(X) = npq$ et l'écart-type $S_X = \sqrt{npq}$ (avec $q = 1-p$).

3) Puisque $n > 30$ et $np > 5$, alors la loi de X peut être approximativement une loi normale de paramètres $\mu = np$ et $\sigma^2 = npq$: $X \sim \mathcal{N}(np, npq) \Leftrightarrow Z = \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$np = 25$; $npq = 18.75$

4) – $\mathbb{P}(X \geq 25) = \mathbb{P}(X_D \geq 25) = \mathbb{P}(X_C \geq 24,5) = \mathbb{P}(Z \geq -0.12) = \Phi(0.12) = 0.5478$.

– $\mathbb{P}(23 \leq X \leq 27) = \mathbb{P}(23 \leq X_D \leq 27) = \mathbb{P}(22.5 \leq X_C \leq 27.5) = \mathbb{P}(-0.58 \leq Z \leq 0.58) = 2\Phi(0.58) - 1 = 2 \times 0.7190 - 1$.

Exercice 7. La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ inconnus. Les spécifications impliquent que 80% de la production des appareils ait une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5% de la production des appareils ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

1) Quelles sont les valeur de μ et σ ?

2) Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 et 230 jours ?

Solution – *$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$:*

$$\left\{\begin{array}{r} \mathbb{P}(120 \leq X \leq 200) = 0.80 \\ \mathbb{P}(X \leq 120) = 0.05 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}(X \leq 200) = 0.85 \\ \mathbb{P}(X \leq 120) = 0.05 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{200-\mu}{\sigma}\right) = 0.85 \\ \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{120-\mu}{\sigma}\right) = 0.05 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{200-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.85) \simeq 1.05 \\ \frac{120-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.05) \simeq -1.65 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 200 \simeq \mu + 1.05\sigma \\ 120 \simeq \mu - 1.65\sigma \end{cases}$$

$\sigma \simeq \frac{200-120}{1.05+1.65} \simeq 29.6296$
$\mu \simeq 120 + 1.65\sigma = 120 + 1.65 \times 29.6296 \simeq 168.8889$
$X \sim \mathcal{N}(168.89, 29.63^2) \Longrightarrow Z = \frac{X-168.89}{29.62} \sim \mathcal{N}(0,1)$:
$\mathbb{P}(200 \leq X \leq 230) = \mathbb{P}\left(\frac{200-168.89}{29.62} \leq Z \leq \frac{230-168.89}{29.62}\right) = \mathbb{P}(1.05 \leq Z \leq 2.06) = \Phi(2.06) - \Phi(1.05) = 0.9803 - 0.8531 = 0.1272$

Exercice 8. Soit X_i la variable aléatoire qui représente le poids d'un paquet i d'une matière première commercialisé par une entreprise. On admet que le poids X_i des différents paquets est distribué normalement, de paramètres $\mu = 500$ grammes et $\sigma = 4.5$ grammes.

On prélève un échantillon de taille $n = 40$ paquets. On considère la variable aléatoire

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

Déterminer la probabilité que S soit supérieure à 5 grammes.

Solution –

Rappelons que si, pour $i = 1, 2, ..., n$, $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ indépendamment, alors $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2(n)$.
Alors,

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n).$$

Donc, on a pour $n = 40$, $Q = \dfrac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$ et puisque n est assez grand, on peut approcher cette loi par la loi normale, on aura : $Q \sim \mathcal{N}(n, 2n)$, c'est à dire : $\dfrac{Q-n}{\sqrt{2n}} \sim \mathcal{N}(n, 2n)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S > 5) =& \mathbb{P}\left(S^2 > 25\right) = \mathbb{P}_{\chi^2}\left(\frac{nS^2}{\sigma^2} > \frac{40 \times 25}{4.5^2}\right) = \mathbb{P}_{\chi^2}(Q > 49.3827) = \mathbb{P}_{\mathcal{N}}\left(\frac{Q-n}{\sqrt{2n}} > \frac{49.3827-40}{\sqrt{2\times 40}}\right) \\ =& \mathbb{P}(Z > 1.05) = 1 - \Phi(1.05) = 1 - 0.8531 = 0.1469\end{aligned}$$

Exercice 9. La durée de téléchargement d'un fichier disponible sur le Web est une variable aléatoire X d'espérance $\mu = 142$ secondes avec un écart-type $\sigma = 10$ secondes.

1. On dispose d'un échantillon $(X_1, \cdots, X_{49})$ de 49 durées de téléchargements de ce fchier. On note $\overline{X}$ la durée moyenne de cet échantillon. Calculer la probabilité que $\overline{X}$ soit comprise entre 140 et 144 secondes ?
2. Déterminer x tel que $\overline{X}$ soit inférieure à x avec probabilité 0.9505.
3. Déterminer la taille minimale n d'un échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ de durées de téléchargements du fichier, pour que $\mathbb{P}(\overline{X} \leq 143) = 0.975$

Solution –

La v.a X suit une loi de probabilité quelconque de moyenne $\mu = E[X] = 142$ et d'écart type $\sigma = \sqrt{Var[X]} = 10$.

1. *On note $\bar{X} = \frac{1}{49}\sum\limits_{i=1}^{49} X_i$ la durée moyenne de l'échantillon $(X_1, ..., X_{49})$*

   On va chercher $P(140 \leq \bar{X} \leq 144)$. Puisque $n = 49 > 25$; On peut utiliser le théorème central limite c.à.d la v.a. $Z = \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$, lorsque n est grand (Pratiquement $n > 25$).

   Ici $Z = 7\frac{\bar{X}-142}{10} \sim N(0,1)$. Donc

$$\begin{aligned}P(140 \leq \bar{X} \leq 144) &= P\left(7\frac{140-142}{10} \leq Z \leq 7\frac{144-142}{10}\right), \\ &= P(-1.4 \leq Z \leq 1.4) = \phi(1.4) - \phi(-1.4), \\ &= 2\phi(1.4) - 1 = 0.8384.\end{aligned}$$

2. *On cherche x telle que $P(\bar{X} \leq x)$=0.9505, ce qui équivalent à, par utilisation du théoreme central limite à* $P\left(Z \leq 7\frac{x-142}{10}\right) = 0.9505$ *c.à.d* $\phi\left(7\frac{x-142}{10}\right) = \phi(1.65)$ *(Table)*
   Donc $\frac{7}{10}(x-142) = 1.65 \Rightarrow x = \frac{10}{7}1.65 + 142 = 144.36$.
3. *La taille de l'échantillon est n. D'après le T.C.L* $Z = \left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}-142}{10}\right) \sim N(0,1)$ *approximativement. Il vient que,*

$$P(\bar{X} \leq 143) = P(Z \leq \sqrt{n}\frac{143-142}{10}) = P(Z \leq 0.1\sqrt{n}),$$
$$= \phi(0.1\sqrt{n}).$$

   On a donc $P(\bar{X} \leq 143) = 0.975 = \phi(1.96)$. *et par conséquent* $0.1\sqrt{n} = 1.96 \Rightarrow \sqrt{n} = 19.6 \Rightarrow n = 384.16$.
   Donc pour $n_0 = 385$ *est la taille maximale pour que* $P(\bar{X} \leq 143) = 0.975$

Exercice 10. Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre 1.
1) Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_1)$.
2) Donner une estimation de $\mathbb{P}(X_1 + X_2 + ... + X_n \geq n(1+\alpha))$ pour $n = 100$ et $\alpha = 1/10$.
Solution –
1) $E(X_1) = \mathbb{V}(X_1) = 1 = E(X_1) = \mathbb{V}(X_1),\ \forall i = 1, 2, ..., n$.
2) On applique le TCL,
$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + ... + X_n \geq n(1+\alpha)) = \mathbb{P}(\sqrt{n}(\overline{X}_n - 1) \geq \alpha\sqrt{n}) \simeq 1 - \Phi(\alpha\sqrt{n})$

Exercices supplémentaires

Exercice 11. La fonction de densité d'une variable aléatoire X est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répatition de X.
2. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$.
3. On pose $Y = \ln(1+X)$. Chercher la densité de probabilité de Y.

Solution – *Soit X la v.a de f.d.p* $f_X(x) = 6x(1-x)\mathbf{1}_{[0,1[}(x)$.

1. $\forall x \in \mathbb{R} : F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$.
   Si $x < 0$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = 0$ *car* $f_X(u) = 0$ *pour* $u \leq x < 0$.
   Si $0 \leq x \leq 1$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = 6\int_{-\infty}^{x}(u-u^2)du = 6\left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right]_0^x = 3x^2 - 2x^3$.
   Si $x > 1$, $F_X(x) = \int_0^1 6u(1-u)du = 1$.
   Ainsi on a

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & Si\ x < 0\,; \\ 3x^2 - 2x^3, & si\ 0 \leq x \leq 1\,; \\ 1, & si\ x > 1. \end{cases}$$

2. *Par définition,*

$$\mathbf{E}(\frac{1}{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} f_X(x)dx = 6\int_0^1 (1-x)dx = 6\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 3.$$

3. *On pose $Y = log(1+X)$ Loi de probabilité de Y :*
   $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(1+X \leq e^x) = P(X \leq e^x - 1) = F_X(e^x - 1)$$

   $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = e^x f_X(e^x - 1)$. *où*

$$f_X(x) = \begin{cases} 6(e^x-1)(2-e^x), & Si\ 0 \leq x \leq ln(2)\,; \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Exercice 12. La fonction de densité d'une variable aléatoire X est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} ax(x-2) & si \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

où a est une constante réel le négative.

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer la fonction de répatition de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Solution −

1)- On doit avoir $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow a\int_0^2 (x^2-2x)dx = 1 \Leftrightarrow a[\frac{x^3}{3} - x^2]_0^2 = 1 \Leftrightarrow a(\frac{8}{3} - 4) = 1$

$\Leftrightarrow -\dfrac{4}{3}a = 1 \Leftrightarrow a = -\dfrac{3}{4}$

Alors

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x(x-2) & si\ 0 \le x \le 2 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

2)-

-Si $x < 0$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0$

-Si $0 \le x \le 2$, $F(x) = a\displaystyle\int_0^x u(u-2)du = a[\frac{u^3}{3} - u^2]_0^x = a(\frac{x^3}{3} - x^2) = -\frac{x^3}{4} + \frac{3x^2}{4}$

- Si $x \ge 2$, $F(x) = \displaystyle\int_0^2 f(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = 1$

Ainsi

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ -\frac{x^3}{4} + \frac{3x^2}{4} & si\ 0 \le x \le 2 \\ 1 & si\ \ x > 2 \end{cases}$$

3)- a)- $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = a\int_0^2 (x^3 - 2x^2)dx = 1$

b)- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - 1$ *Avec* $E(X^2) = a\displaystyle\int_0^2 x^3(x-2)dx = a[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2}]_0^2 = \frac{6}{5}$

$V(X) = \dfrac{6}{5} - 1 = \dfrac{1}{5}$

Exercice 13. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1]$.

1) Déterminer la loi de $Y = \dfrac{-\ln(X)}{\lambda}$ avec $\lambda > 0$.

2) Déterminer la fonction de répartition de Y.

Exercice 14. On suppose que les salaires des ouvriers d'une certaine entreprise sont répartis d'une manière uniforme entre 2500 DH et 4500 DH par mois.

1. Quelle est la probabilité qu'un ouvrier choisi au hasard reçoive un salaire compris entre 2800 DH et 4200 DH ?
2. Quelle est la probabilité qu'un ouvrier choisi au hasard reçoive un salaire qui ne dépasse pas 3000 DH ?
3. Quelle est la probabilité qu'un ouvrier choisi au hasard reçoive un salaire qui dépasse 4000 DH ?
4. Calculer le salaire moyen d'un ouvrier dans cette entreprise ?
5. Calculer la variance du salaire d'un ouvrier dans cette entreprise

Solution − *Soit X la v.a "Le salaire d'un ouvrier de cette entreprise".* $X \sim \mathcal{U}([2500, 4500])$.

1. En géneral lorsque $X \sim \mathcal{U}([a,b])$, la fonction de répartition est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < a\,; \\ \frac{x-a}{b-a} & si\ a \leq x \leq b\,; \\ 1 & si\ x > b. \end{cases}$$

Alors dans notre cas,

$$P(2800 \leq X \leq 4200) = F_X(4200) - F_X(2800) = \frac{4200-2800}{2000} = \frac{7}{10} = 0.7$$

2.

$$P(X \leq 3000) = F_X(3000) = \frac{3000-2500}{2000} = \frac{5}{20} = 0.25$$

3.

$$P(X \geq 4000) = 1 - P(X \leq 4000) = 1 - F_X(4000) = 1 - \frac{4000-2500}{2000} = 1 - \frac{15}{20} = 1 - 0.75 = 0.25$$

4. Le salaire moyen d'un ouvrier est

$$E[X] = \frac{a+b}{2} = \frac{2500+4500}{2} = 3500\, DH.$$

5.

$$E[X] = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(4500-2500)^2}{12} = 333\,333.3\, DH^2.$$

Exercice 15. Des sachets de carottes sortent d'une usine agro-alimentaire. Chaque sachet pèse environ 1 kg. Les sachets sont ensuite regroupés par 100 dans des caisses avant d'être envoyés vers divers magasins. On suppose que le poids des caisses suit une loi normale, avec un poids moyen $\mu = 100$ kg et un écart-type $\sigma = 0,5$ kg.

1. Caculer la probabilité qu'une caisse pèse plus de 101 kg.
2. Caculer la probabilité qu'une caisse pèse moins de 99 kg.
3. Caculer la probabilité qu'une caisse pèse entre 99,5 et 100,5 kg.

Solution – *Soit X la v. a. désignant "le poids d'une caisse comprenant 100 sachets".*
Par hypothèse $X \sim \mathcal{N}\left(100, (0.5)^2\right) \Longrightarrow Z := \frac{X-100}{0.5} \sim \mathcal{N}(0,1)$

1. On cherche $P(X > 101)$. On obtient

$$\begin{aligned} P(X \geq 101) &= P\left(Z \geq \frac{101-100}{0.5}\right) \\ &= P(Z \geq 2) \\ &= 1 - \phi(2) \\ &= 1 - 0.9772 \\ &= 0.0228 \qquad\qquad (\textit{ tableau}) \end{aligned}$$

2. On trouve

$$\begin{aligned} P(X \leq 99) &= P\left(Z \leq \frac{99-100}{0.5}\right) \\ &= P(Z \leq -2) \\ &= 1 - \phi(2) \\ &= 0.0228. \end{aligned}$$

3. On obtient

$$\begin{aligned} P(99.5 \leq X \leq 100.5) &= P\left(\frac{99.5-100}{0.5} \leq Z \leq \frac{100.5-100}{0.5}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 1) \\ &= \phi(1) - \phi(-1) \\ &= \phi(1) - (1 - \phi(1)) \\ &= 2\phi(1) - 1 \\ &= 2 \times 0.8413 - 1 \\ &= 0.6886 \qquad\qquad (\textit{tableau}) \end{aligned}$$

Exercice 16. Les statistiques antérieures d'une compagnie d'assurances permettent de prévoir qu'elle recevra en moyenne 300 réclamations durant l'année en cours. Quelle est la probabilité que la compagnie reçoive plus de 350 réclamations pendant l'année en cours ?

Solution – *La variable X qui nous intéresse est le "nombre de réclamations reçues pendant une année". Il s'agit du nombre de réalisations d'un événement pendant un intervalle de temps donné. X suit donc une loi de Poisson. Le nombre moyen de réalisations dans une année est 300. Cette valeur moyenne est aussi le paramètre de la loi de Poisson. Donc X suit la loi $\mathcal{P}(300)$.*

On cherche à déterminer $\mathbb{P}(X > 350)$. Il n'y a pas de table de la loi de Poisson pour cette valeur du paramètre. Il nous faut donc approcher X qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(300)$ par Y qui suit la loi normale de même espérance et de même variance, c'est-à-dire $\mathcal{N}(300, 300)$.

Ici aussi, on remplace une loi discrète par une loi continue.

On se ramène finalement à la loi normale centrée réduite. On pose $T = \frac{Y-300}{\sqrt{300}}$.

$$\mathbb{P}(X > 350) = \mathbb{P}(X_D > 350) = \mathbb{P}(X_C > 350.5) = \mathbb{P}(T > \frac{350.5 - 300}{\sqrt{300}}) = \mathbb{P}(T > 2.92) = 1 - \Phi(2.92) = 1 - 0.9982 = 0.0018.$$

La compagnie d'assurances a donc environ 0.18% *de chances de recevoir plus de* 350 *réclamations en une année.*

Exercice 17. Les notes d'un concours représentées par la variable X suivent une loi normale de moyenne $\mu = 7$ et d'écart-type $\sigma = 6$. On posera

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

et on se servira des tables pour répondre aux questions suivantes :

1) Quelle est la probabilité qu'un candidat obtienne une note supérieure ou égale à 10 ?

2) Comment doit être choisie la note n de la barre de façon à ce que seuls les 10% des notes les plus élevées soient admissibles ?

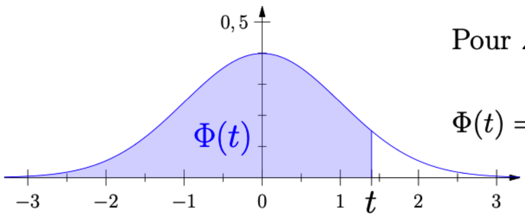
Exercice 18. **(Loi de Pareto)** Soit r et a deux nombres strictement positifs. On note f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ar^a}{x^{a+1}} & si\ x \geq r \\ 0 & si\ x < r \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. Cette densité est appelée densité de Pareto.

2. Pour quelles valeurs de a une variable aléatoire X de densité f est-elle intégrable ? de carré intégrable ?

3. Si l'on admet que la répartition des revenus suit une loi de Pareto, exprimer le paramètre a à l'aide du revenu minimum r et du revenu médian $\bar{r}$.



Pour Z de loi $\mathcal{N}(0{,}1)$,

$$\Phi(t) = F_Z(t) = P(Z \leq t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Exemples : $\Phi(0{,}25) \simeq 0{,}5987$, $\Phi(-0{,}32) = 1 - \Phi(0{,}32) \simeq 1 - 0{,}6255 = 0{,}3745$

FIGURE 1 – Fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite