

TD N° 2
ANALYSE COMBINATOIRE
– *Un corrigé*

Exercice 1.

- 1) Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot INFO ?
- 2) Quel est le nombre d'anagrammes du mot STATISTIQUE ?

Solution –

- 1) Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot INFO ? permutation sans répétition : $4!$
- 2) Quel est le nombre d'anagrammes du mot STATISTIQUE ? permutation avec répétition : $\frac{11!!}{2!3!2!1!1!1!1!1!}$

Exercice 2. Six personnes choisissent mentalement un nombre entier compris entre 1 et 6.

- 1) Combien de résultats peut-on obtenir ?
- 2) Combien de résultats ne comportant pas deux fois le même nombre peut-on obtenir ?

Solution –

- 1) Combien de résultats peut-on obtenir ? 6^6
- 2) Combien de résultats ne comportant pas deux fois le même nombre peut-on obtenir ? $6!$

Exercice 3. La FSR veut former un comité scientifique de 7 enseignants, dont 2 mathématiciens, 2 physiciens et 3 informaticiens. le choix du comité est déduit de 5 mathématiciens, 6 physiciens et 4 informaticiens. De combien de manières peut-on procéder ?

Solution –

On veut 2 mathématiciens parmi 5 et 2 physiciens parmi 6 et 3 informaticiens parmi 4.
L'ordre n'intervient pas :

$$C_5^2 \times C_6^2 \times C_4^3$$

Exercice 4. 10 livres deux à deux distincts sont placés côte à côte sur une étagère. Quel est le nombre de dispositions qui placent côte à côte 3 livres fixés de la collection ?

Solution – $8 \times 3! \times 7! = 241920$

- 8 façons pour placer les 3 fixés ;
3! permuter les 3 fixés ;
7! permuter les 7 restants.

Exercice 5. Un tournoi sportif compte 16 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?

Solution –

Un match est une rencontre entre deux équipes parmi 16, le choix **équipe A contre équipe B** est le même que **équipe B contre équipe A**. Donc l'ordre n'intervient pas, résultat : C_{16}^2 .

Exercice 6.

Après les prolongations d'un match de football, l'entraîneur doit choisir les 5 tireurs de penaltys parmi les onze joueurs et l'ordre de passage. Combien de choix a-t-il ?

Solution –

On veut sélectionner 5 parmi 11 joueurs mais l'ordre intervient donc on aura A_{11}^5 possibilités

Exercice 7. A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent et une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles ?

Exercice 8. On doit asseoir sur un rang 4 français, 3 italiens et 2 marocains. Les gens de même nationalité doivent rester ensemble. Combien de dispositions peut-on imaginer ?

Solution –

$(4!3!2!)3!$: permutation entre les membre de chaque nationalité puis permutation de 3 nationalité différente

Exercice 9. On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes.

- 1) De combien de façons peut-on constituer ce groupe de 6 personnes ?
- 2) Dans chacun des cas suivants, de combien de façons peut-on constituer ce groupe avec
 - a) uniquement des hommes ;
 - b) des personnes de même sexe ;
 - c) au moins une femme et au moins un homme.

Solution –

6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes c'est à dire parmi 57 au total.

- 1) De combien de façons peut-on constituer ce groupe de 6 personnes ?

$$C_{57}^6$$

- 2) Dans chacun des cas suivants, de combien de façons peut-on constituer ce groupe avec

a) uniquement des hommes : Ici les 6 personnes vont être choisies parmi les 32 hommes : C_{32}^6

b) des personnes de même sexe : 6 parmi 32 hommes OU 6 parmi 25 femmes : $C_{32}^6 + C_{25}^6$

c) On note l'événement A : "au moins une femme ET au moins un homme", la solution c'est le total de 6 parmi 57 moins les éléments de l'événement contraire de A : $\text{card}(A) = \text{card}(\Omega) - \text{card}(\overline{A})$
 \overline{A} : "uniquement des femmes OU uniquement des hommes". $\text{card}(\overline{A}) = C_{32}^6 + C_{25}^6$

Donc on trouve :

$$\text{card}(A) = C_{57}^6 - (C_{32}^6 + C_{25}^6)$$

Exercice 10. On lance 3 dés indiscernable. Combien y-a-t-il de configurations possibles ?

Solution – Résultat : 3 entiers non ordonnés parmi $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et peuvent être répétés puisque les dés sont indiscernables

Donc c'est une combinaison avec répétition de 3 éléments parmi 6 dont le nombre est :

$$K_6^3 = C_{6+3-1}^3 = C_8^3 = 56$$

Exercices supplémentaires

Exercice 11. En utilisant la fonction $f(x) = (1+x)^n$, calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k, \quad \sum_{k=1}^n k C_n^k.$$

Exercice 12. Une urne contient a boules blanches indiscernables et b boules noires indiscernables. On tire les boules une à une successivement, sans remise, jusqu'à vider l'urne.

- 1) De combien de façons peut-on opérer ?
- 2) Combien de séries de tirages amènent la dernière boule blanche en $k^{\text{ième}}$ position ?
- 3) En déduire alors la formule : $\sum_{k=a}^{a+b} C_{k-1}^{a-1} = C_{a+b}^a$

Solution –

- 1) De combien de façons peut-on opérer ?

C_{a+b}^a rangs des a blanches.

- 2) Combien de séries de tirages amènent la dernière boule blanche en $k^{\text{ième}}$ position ?

C_{a-1}^{k-1} tirages. $k-1$ places des $a-1$ blanches.

- 3) En déduire alors la formule : $\sum_{k=a}^{a+b} C_{k-1}^{a-1} = C_{a+b}^a$

$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^{a+b} C_{k-1}^{a-1} &= \text{nombre de tirages amenant la dernière blanche en} \\ &\quad a^{\text{ième}} \text{ position ou } (a+1)^{\text{ième}} \text{ ou } \dots \text{ ou } (a+b)^{\text{ième}} \\ &= \text{nombre de tirages vidant l'urne} \\ &= C_{a+b}^a \end{aligned}$$

QCM

Exercice 13.

Mr. ALI a 10 livres qu'il veut mettre sur son étagère. Parmi ceux-ci, 4 sont des livres de mathématiques, 3 sont des livres de chimie, 2 sont des livres d'histoire et 1 est un livre de langue. Mr. ALI veut ranger ses livres de manière à ce que tous les livres traitant du même sujet soient réunis sur l'étagère. Combien d'arrangements différents sont possibles ?

- 1) $10!$
- 2) $4!3!2!1!$
- 3) C_{10}^4
- 4) A_{10}^4

Exercice 14. Une classe se compose de 10 étudiants dont 6 hommes et 4 femmes. Un examen est donné et les étudiants sont classés en fonction de leurs performances. En supposant que deux étudiants n'obtiennent pas le même score.

1) combien de classements différents sont possibles ?

- a) 10
- b) $10!$
- c) $10!6!4!$
- d) C_6^4

2) Si tous les classements sont considérés équiprobables, quelle est la probabilité que les femmes obtiennent les 4 meilleurs scores ?

- a) $4/10$
- b) $4!/10!$
- c) $\frac{6!4!}{10!}$
- d) C_6^4/C_{10}^4

Exercice 15.

Un comité de 5 personnes est à sélectionner parmi un groupe de 6 hommes et 9 femmes. Quelle est la probabilité que le comité soit composé de 3 hommes et 2 femmes (tirés simultanément et aléatoirement) ?

- 1) $3/6 + 2/9$
- 2) $\frac{C_6^3 C_9^2}{C_{15}^5}$
- 3) $\frac{A_6^3 A_9^2}{A_{15}^5}$
- 4) $\frac{K_6^3 K_9^2}{K_{15}^5}$

Exercice 16.

A partir d'un ensemble de n éléments, un échantillon aléatoire de taille k doit être sélectionné. Quelle est la probabilité qu'un élément donné soit parmi les k sélectionnés ?

- 1) $(n - k)/n$
- 2) $1/2$
- 3) 2
- 4) $\frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k} = k/n$

Exercice 17.

Si n personnes sont présentes dans une chambre. Quelle est la probabilité que deux d'entre elles ne fêtent pas leur anniversaire le même jour de l'année ?

- 1) $1/365$
- 2) $1/2$
- 3) $\frac{(365)!}{(365)^n}$
- 4) $\frac{(365)(364)(363)\dots(365-n+1)}{(365)^n}$

Exercice 18.

Un groupe de $2n$ personnes s'assoit autour d'une table :

1) De combien de façons peuvent-elles le faire ?

- a) $(2n - 1)! = \frac{(2n)!}{2n}$
- b) C_{2n}^n
- c) A_{2n}^n
- d) $2n^n$

2) S'il y a autant de femmes que d'hommes, quelle est la probabilité de respecter l'alternance homme, femme, homme... autour de la table ?

- a) $n!(n - 1)!$
- b) C_n^{n-1}
- c) A_n^{n-1}
- d) n^{n-1}

Exercice 19.

1) Un QCM comporte 10 questions, pour chacune desquelles 4 réponses sont proposées, une seule est exacte. Combien y-a-t-il de réponses possibles ?

- a) 4^{10}
- b) 10^4
- c) C_{10}^4
- d) A_{10}^4

2) Lors d'une loterie, 100 billets sont vendus, 4 billets sont gagnants. une personne achète 10 billets, quelle est la probabilité pour qu'il gagne au moins un coup ?

- a) $\frac{C_4^1}{C_{100}^1}$
- b) $1 - \frac{C_{96}^{10}}{C_{100}^{10}}$
- c) $\frac{C_{90}^{10}}{C_{100}^{10}}$
- d) $\frac{C_{96}^{10}}{C_{100}^{10}}$

Exercice 20.

Un groupe de $2n$ personnes s'assoit autour d'une table :

1) De combien de façons peuvent-elles le faire ?

- a) $(2n - 1)! = \frac{(2n)!}{2n}$
- b) C_{2n}^n
- c) A_{2n}^n
- d) $2n^n$

2) S'il y a autant de femmes que d'hommes, quelle est la probabilité de respecter l'alternance homme, femme, homme... autour de la table ?

- a) $n!(n - 1)!$
- b) C_n^{n-1}
- c) A_n^{n-1}
- d) n^{n-1}