Université Mohammed V
Faculté des Sciences de Rabat
Département de Mathématiques

Année Universitaire **2022–2023**
Module **Probabilités et Statistique**
Filière – **SMI (S3)**

TD n° 3
Théorie des Probabilités et Variables Aléatoires
– *Un corrigé*

Exercice 1. Soit $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ un ensemble fondamental et considérons les ensembles $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta, \gamma\}, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{\beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \Omega\}$.

1) Montrer que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont des tribus sur Ω.

2) Les ensembles $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ sont-ils des tribus sur Ω ?

Solution –

1) On vérifie facilement les 3 *conditions de tribu sur* Ω*. On peut écrire*

$$\mathcal{F}_i = \{\emptyset, A_i, \overline{A}_i, \Omega\},$$

avec $A_1 = \{\alpha\}$ *et* $A_2 = \{\beta\}$.

2) $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega\}$ *est la tribu grossière,*

$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \Omega\}$ *n'est pas une tribu car* $\{\alpha, \gamma\} \cap \{\beta, \gamma\} = \{\gamma\} \notin \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

Exercice 2. On considère un jeu de tir sur une cible comportant 3 zones 1, 2 et 3. On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé associé à cette expérience et X la variable aléatoire représentant *la zone atteinte par chaque tir.* On suppose que $\mathbb{P}(X = 3) = p$, $\mathbb{P}(X = 2) = 2p$ et $P(X = 1) = 3p$.

Pour quelle valeur de p cela est-il possible ?

Solution –

$p + 2p + 3p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{6}$.

Exercice 3. Soient A, B et C trois événements avec des probabilités : $\mathbb{P}(A) = 0.6$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.2$, $\mathbb{P}(A \cap C) = 0.1$ et $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0.05$.

On considère les deux événements $E = A \cap (B \cup C)$ et $F = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.

1) Montrer que E et F sont incompatibles.

2) Que vaut $E \cup F$?

3) Calculer $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(F)$.

Solution –

1) $E = A \cap (B \cup C)$ *et* $F = A \cap \bar{B} \cap \bar{C} = A \cap (\overline{B \cup C})$

$E \cap F = A \cap B \cup C \cap \overline{B \cup C} = A \cap \emptyset = \emptyset$

2) $E \cup F = [A \cap (B \cup C)] \cup [A \cap (\overline{B \cup C})] = A \cap \Omega = A$

3) $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cup C)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0.25$

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) \Rightarrow \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(E) = 0.35$

Exercice 4. Une boite contient 6 jetons blancs, 4 jetons noirs, 3 jetons rouges et 2 jetons verts.

1) On tire un jeton de la boite, quelle est la probabilité pour que le jeton tiré soit :

a) noir,

b) blanc ou rouge ou vert.

2) On tire simultanément 4 jetons de la boite. Calculer la probabilité pour que les 4 jetons tirés soient :

a) blancs,

b) de la même couleur,

c) de couleurs différentes.

d) deux jetons rouges.

3) On tire successivement 4 jetons, en remettant à chaque fois dans la boite le jeton tiré.

a) Calculer la probabilité d'obtenir 2 jetons blancs après les 4 tirages.

b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins 2 jetons blancs après les 4 tirages.

Solution –

La boite contient 6 *jetons blancs,* 4 *jetons noirs,* 3 *jetons rouges et* 2 *jetons verts : en total* 15 *boites :*

1)

a) $\dfrac{4}{15} \simeq 0.27$

b) $\dfrac{6+3+2}{15} \simeq 0.73$
2)
a) $\dfrac{C_6^4}{C_{15}^4} \simeq 0.0109$
b) $\dfrac{C_6^4 + C_4^4}{C_{15}^4} \simeq 0.0117$
c) $\dfrac{6 \times 4 \times 3 \times 2}{C_{15}^4} \simeq 0.1054$
d) $\dfrac{C_3^2 \times C_{12}^2}{C_{15}^4} \simeq 0.14505$
3)
a) $\dfrac{C_4^2 \times 6^2 \times 9^2}{15^2 \times 15^2} \simeq 0.35$
b) $1 - \mathbb{P}(d'avoir\ 0\ ou\ 1\ jeton\ blanc) = 1 - \dfrac{9^4}{15^4} - \dfrac{C_4^1 \times 6 \times 9^3}{15 \times 15^3} \simeq 0.52$

Exercice 5. Un certain modèle de missile atteint sa cible avec la probabilité 0.2. Combien de missiles faut-il mettre à feu pour qu'il y ait une probabilité d'au moins 0.7 d'atteindre une cible ?
Solution –
On cherche n *tel que* $1-(0.8)^n \geq 0.7$, *donc* $0.8^n \leq 0.3$ *; c'est-à-dire* $n \geq \dfrac{\ln(0.3)}{\ln(0.8)} \simeq 5.39$. *On prend* $n = 6$.

Exercice 6. Dans une classe de $n \leq 365$ étudiants, quelle est la probabilité de l'événement A : "2 étudiants au moins ont la même date d'anniversaire" ?
Solution –
$\Omega = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in \{1, 2, ..., 365\}\}$
$Card(\Omega) < \infty (\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega))$
Nombre de configurations d'anniversaires possibles : $Card(\Omega) = 365^n$
Nombre de configurations d'anniversaires menant à des anniversaires tous différents : $A_{365}^n = \frac{365!}{(365-n)!}$
$\Longrightarrow \mathbb{P}(anniversaires\ tous\ différents) = \dfrac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n}$
$\Longrightarrow \mathbb{P}(au\ moins\ deux\ anniversaires\ identiques) = 1 - \dfrac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n}$
Exemple :
Pour une classe de 25 *étudiants, la probabilité qu'au moins deux étudiants aient la même date d'anniversaire est de* 0.5687
Pour une classe de 40 *étudiants, la probabilité qu'au moins deux étudiants aient la même date d'anniversaire est de* 0.8912

Exercice 7. Une personne dispose de N clés et veut ouvrir sa porte dans l'obscurité. Elle essaye les clés les unes après les autres, en mettant de coté après essaie. Quelle est la probabilité que la porte s'ouvre à la tentative numéro m ?
Solution – ***Rappel : Théorème des probabilités composées ou règle de la multiplication***

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A/B)\mathbb{P}(B).$$

En voici une généralisation

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m) &= \mathbb{P}(A_m/A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{m-1}) \times \mathbb{P}(A_{m-1}/A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{m-2}) \\ &\times ... \times \mathbb{P}(A_2/A_1)\mathbb{P}(A_1).\end{aligned}$$

Soit A_i *: "le* $i^{ème}$ *essai est un échec", donc on aura des échecs de* A_1 *jusqu'à* A_{m-1} *puis un succès qui est* $\overline{A}_m$
On cherche alors la probabilité $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{m-1} \cap \overline{A}_m)$ *qui vaut (d'après le cours)* $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{m-1} \cap \overline{A}_m)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap \overline{A}_m) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2/A_1)\mathbb{P}(A_3/A_1 \cap A_2)...\mathbb{P}(\overline{A}_m/A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{m-1}) \\ &= \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \frac{N-3}{N-2} \times ... \times \frac{N-m+1}{N-m+2} \times \frac{1}{N-m+1} = \frac{1}{N}.\end{aligned}$$

Exercice 8. Une banque possède un dispositif d'alarme. S'il y a cambriolage, ce dispositif fonctionne avec la probabilité 0.95. La probabilité pour que le dispositif soit actionné par erreur un jour donné, sans qu'il y ait cambriolage, est de 0.01. La probabilité qu'il y ait cambriolage un jour donné est de 0.005.

1) Calculer la probabilité pour qu'il y ait alarme un jour donné.

2) Calculer la probabilité qu'il ait vraiment un cambriolage lorsque l'alarme est donnée.

Solution –

Soient les événements :

D : " Il y a alarme" = "alarme fonctionne"

C : "Il y a cambriolage"

Données : $\mathbb{P}(A/C) = 0.95$ *;* $\mathbb{P}(A/\overline{C}) = 0.01$ *et* $\mathbb{P}(C) = 0.005$.

1) $P(A) = \mathbb{P}(A/C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A/\overline{C})\mathbb{P}(\overline{C}) = 0.0147$

2) $\mathbb{P}(C/A) = \frac{\mathbb{P}(C\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A/C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(A)} = 0.3231$

Exercice 9. Une usine de pellicules dispose de 4 machines M_1, M_2, M_3 et M_4 qui fabrique respectivement 10%, 20%, 30% et 40% de la production totale.

Sachant que la probabilité qu'une pellicule fabriquée par M_1, M_2, M_3 ou M_4 soit défectueuse est respectivement 0.06, 0.05, 0.03 et 0.01, calculer

1) la probabilité qu'une pellicule soit défectueuse.

2) la probabilité qu'une pellicule défectueuse provienne de la machine M_1.

3) la probabilité qu'une pellicule non défectueuse provienne de la machine M_3.

Solution – *Soient les événements :*

D : " Pellicule défectueuse"

M_i *: "Pellicule fabriquée par la machine* M_i*"*

1) $P(D) = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(D/M_i)\mathbb{P}(M_i) = 0.029.$

2) $\mathbb{P}(M_1/D) = \frac{\mathbb{P}(M_1\cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\mathbb{P}(D/M_1)\mathbb{P}(M_1)}{\mathbb{P}(D)} = 0.2069.$

3) $\mathbb{P}(M_3/\overline{D}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{D}/M_3)\mathbb{P}(M_3)}{\mathbb{P}(\overline{D})} = 0.2997.$

Exercice 10. Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs 2, 4, 6, ou 8 telle que :

$$\mathbb{P}(X < 6) = \frac{1}{3},\ \mathbb{P}(X > 6) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 4).$$

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de X.
3. S'agit-il de l'équiprobabilité ? Pourquoi ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 5)$, $\mathbb{P}(X + 4 \leq 7)$ et $\mathbb{P}(X \neq 2)$.
5. Déterminer et tracer la fonction de répartition de X.

Solution –

1. $X(\Omega) = \{2; 4; 6; 8\}$.

2. *On pose* $a = \mathbb{P}(X = 2)$; $\quad b = \mathbb{P}(X = 4)$; $\quad c = \mathbb{P}(X = 6)$; $\quad d = \mathbb{P}(X = 8)$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X < 6) = \frac{1}{3} \Rightarrow a + b = \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}(X > 6) = \frac{1}{2} \Rightarrow d = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 4) \Rightarrow a = b \\ \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 6) + \mathbb{P}(X = 8) = 1 \Rightarrow a + b + c + d = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = \frac{1}{3} \\ d = \frac{1}{2} \\ a = b \\ a + b + c + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = \frac{1}{3} \\ d = \frac{1}{2} \\ a = b \\ c = 1 - a - b - d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{6} \\ d = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{6} \end{cases}$$

3. *Non il ne s'agit pas d'équiprobabilité car* $\mathbb{P}(X = 2) \neq \mathbb{P}(X = 8)$

4. $P(X \geq 5) = P(X = 6) + P(X = 8) = c + d = \frac{2}{3}$,
$\mathbb{P}(X + 4 \leq 7) = \mathbb{P}(X \leq 3) = \mathbb{P}(X = 2) = a = \frac{1}{6}$,
$\mathbb{P}(X \neq 2) = \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 6) + \mathbb{P}(X = 8) = b + c + d = \frac{5}{6}$

5. *Soit* $x \in \mathbb{R}$.
Si $x < 2$ *alors* $F(x) = 0$
Si $2 \leq x < 4$ *alors* $F(x) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{6}$
Si $4 \leq x < 6$ *alors* $F(x) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 4) = \frac{2}{6}$
Si $6 \leq x < 8$ *alors* $F(x) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 6) = \frac{3}{6}$
Si $x \geq 8$ *alors* $F(x) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}((X = 6) + \mathbb{P}(X = 8) = 1$

Exercice 11. On lance deux dés équilibrés et on considère le jeu suivant :
— Si la somme les deux chiffres obtenus est supérieure ou égale à 10 alors on gagne $6dh$,
— Si la différence entre les deux chiffres obtenus est nulle alors on gagne $4dh$,
— Si la somme les deux chiffres obtenus est inférieure à ou égale à 4 alors on perd $2dh$,
— Sinon, on pèrd $4dh$,
Soit X la variable aléatoire représentant le gain (ou la perte) obtenu.
1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de X.
3. Quelle est la probabilité de gagner plus de $5dh$.
4. Quelle est la probabilité de perdre plus de $3dh$.
5. Quelle est la probabilité de gagner.
6. Quelle est la probabilité de perdre.
7. Déterminer et tracer la fonction de répartition de X.

Solution –
1. $X(\Omega) = \{-4, -2, 4, 6\}$ *avec* $\Omega = \{(1, 1); (1, 2); ....; (6, 5); (6, 6)\}$ *et* $Card(\Omega) = 36$.

2. $(\text{"}somme \geq 10\text{"} =)\{(4, 6); (6, 4); (5, 5); (5, 6); (6, 5); (6, 6)\}$
donc $\mathbb{P}(X = 6) = \dfrac{Card\{\text{"}somme \geq 10\}}{Card(\Omega)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$(\text{"}difference\ est\ nulle\text{"}) = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6)\}$
donc $\mathbb{P}(X = 4) = \dfrac{Card\{somme\ nulle\}}{Card(\Omega)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$(\text{"}somme \leq 4\text{"} =)\{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 2); (3, 1)\}$
donc $\mathbb{P}(X = -2) = \dfrac{Card\{\text{"}somme \leq 4\}}{Card(\Omega)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$\mathbb{P}(X = -4) = 1 - [\mathbb{P}(X = -2) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 6)] = 1 - (\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6}) = \dfrac{1}{2}$

X	-4	-2	4	6
$\mathbb{P}(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3. $\mathbb{P}(X \geq 5) = P(X = 6) = \dfrac{1}{6}$

4. $\mathbb{P}(X \leq -3) = P(X = -4) = \dfrac{1}{2}$

5. $\mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 6) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$

6. $\mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}(X = -4) + \mathbb{P}(X = -2) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$

7. $F(x) = 0 \quad ; \quad x < -4$
$F(x) = \dfrac{1}{2} \quad ; \quad -4 \leq x < -2$
$F(x) = \dfrac{4}{6} \quad ; \quad -2 \leq x < 4$
$F(x) = \dfrac{5}{6} \quad ; \quad 4 \leq x < 6$
$F(x) = 1 \quad ; \quad x \geq 6$

Exercices supplémentaires

Exercice 12. ***Répondre par vrai ou faux :***

Soient A et B deux événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, alors :

1. $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
2. Si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \frac{1}{4}$.
3. $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{2}(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B))$.
4. Si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$.
5. $(\mathbb{P}(A \cap B))^2 \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Solution –

1. $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. ***VRAIE***. *D'après le cours* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$. *Donc* $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A \cup B)$.
2. *Si* $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, *alors* $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \frac{1}{4}$. ***FAUX***. *Contre exemple :* $B = \overline{A}$ *et* $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ *qui n'est pas supérieur à* $\frac{1}{4}$.
3. $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{2}(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B))$. ***VRAI***. *On a même* $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)) \leq \frac{1}{2}(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B))$.
4. *Si* $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$, *alors* $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$. ***VRAI***. $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 2$, *ce qui n'est possible que si* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B) = 1$.
5. $(\mathbb{P}(A \cap B))^2 \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ ***VRAI***. *car* $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$*et* $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$ *donc en multipliant ces inégalités (concernant des nombres positifs), on obtient l ?inégalité voulue.*

Exercice 13. Avant le tirage au sort des quarts de finale de la Ligue des Champions de football, il reste 4 équipes anglaises. Calculer la probabilité p qu'il y ait au moins un quart de finale qui oppose 2 équipes anglaises.

Exercice 14. Une enquête effectuée auprès de 400 étudiants portant sur la lecture de deux hebdomadaires, "Tel Quel" et "Alayam", a donné les résultats suivants : 165 lisent "Tel Quel", 240 "Alayam" et 90 lisent les deux. On choisit un de ces étudiants au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'il lise l'un ou l'autre de ces deux hebdomadaires ?
2. Quelle est la probabilité qu'il lise uniquement "Alayam" ?
3. Donner, en notation ensembliste, l'événement "Ne lire ni Alayam ni Tel quel" et chercher sa probabilité.

Solution – *Considérons les évènements suivants :*

- *A " l'étudiant choisi au hasard lit TelQuel".*
- *B " l'étudiant choisi au hasard lit Alayam".*

1. *On a*

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B), \\ &= \frac{165}{400} + \frac{240}{400} - \frac{90}{400} = \frac{315}{400} = 0.7875. \end{aligned}$$

2. *On a*

$$\begin{aligned} P(B \cap \overline{A}) =& P(BnA) = P(BnA \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \\ =& \frac{240}{400} - \frac{90}{400} = 0.375. \end{aligned}$$

3. *Il vient que*

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B). \\ &= 1 - 0.7875 = 0.2125. \end{aligned}$$

Exercice 15. On utilise deux pièces de monnaie : l'une est truquée, de sorte que lorsqu'on la lance, la probabilité d'obtenir pile soit $1/4$; l'autre est normale dont la probabilité d'obtenir pile est $1/2$ à chaque lancer. On prend une pièce au hasard (chacune des deux pièces a une probabilité $1/2$ d'être prise).

1) Quelle est la probabilité d'obtenir pile ?

2) Sachant qu'on a obtenu pile, quelle est la probabilité d'avoir utilisé la pièce truquée ?

Exercice 16. Une compagnie d'assurance répartit ses clients en 3 classes R_1, R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens et les mauvais risques. Les effectifs de ces 3 classes représentent 20% de la population totale pour la classe R_1, 50% pour la classe R_2 et 30% pour la classe R_3. Les statistiques indiquent que la probabilité d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une des ces 3 classes est respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

On considère les événements suivants :

A : "La personne choisie au hasard a un accident", B_1 : "La personne choisie au hasard est un bon risque", B_2 : "La personne choisie au hasard est un risque moyen" et B_3 : "La personne choisie au hasard est un mauvais risque".

1) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard ait un accident et soit un risque moyen ?

2) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard ait un accident ?

3) Si Mme Hind n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'elle soit un bon risque ?

4) Si Mr Anas a eu un accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un risque moyen ou un mauvais risque ?

Exercice 17. Les patients dans un hôpital sont répartis selon leur groupe sanguin comme suit : 60% pour A, 30% pour B et le reste pour O. On a observé que les contaminations par un certain virus sont respectivement 10% pour A, 20% pour B et 25% pour O.

1) Quelle est la probabilité qu ?une personne choisie au hasard soit contaminée et possède le groupe sanguin A ?

2) Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard soit contaminée ?

3) Si Mr Ali n'est pas contaminé, quelle est la probabilité qu'il possède le groupe sanguin B ?

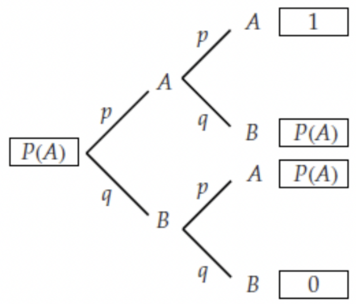
4) Si Mme Samia est contaminée, quelle est la probabilité qu'elle possède le groupe sanguin A ou O ?

Exercice 18. Deux joueurs A et B participent à un jeu avec des probabilités respectives de victoire à chaque partie p et $q = 1 - p$. Le gagnant est celui qui le premier obtient deux victoires de plus que l'autre.

Quelle est la probabilité de gain de chaque joueur ?

Solution –

On trace, par exemple pour le joueur A, un arbre du déroulement des deux premières parties et on marque à l'extrémité des quatre branches la nouvelle valeur de la probabilité de gain du joueur A :



Soit $P(A)$ la probabilité de gain du joueur A au début du jeu et examinons ce qu'elle devient après les deux premières parties. Si A gagne les deux parties, cette probabilité est devenue égale à 1, et à 0 s'il les a perdues. S'il gagne une seule partie elle est inchangée. On a donc la relation :

$$P(A) = 1 \times p^2 + 0 \times q^2 + P(A) \times pq + P(A) \times qp$$

D'où on déduit :

$$P(A) = \frac{p^2}{1 - 2pq} = \frac{p^2}{p^2 + q^2}$$

Et par conséquent : $P(B) = 1 - P(A)$.

Exercice 19. Les 160 étudiants d'une section ont le choix de continuer leurs études dans trois parcours A, B et C. On sait que 90 choisissent le parcours A, 40 choisissent le parcours B et le reste choisissent le parcours C. On sait aussi que 70% des étudiants du parcours A valident leur année, 20% valident après rattrapage et les étudiants restants ne valident pas. Ces pourcentages sont 80%, 15% pour le parcours B et 60%, 30% pour le parcours C. On choisit un étudiant.

1) Quelle est la probabilité qu'il valide son année ?

2) Quelle est la probabilité qu'il valide ou valide après rattrapage ?

3) Quelle est la probabilité qu'il appartient au parcours B sachant qu'il a validé après rattrapage ?

4) Quelle est la probabilité qu'il appartient aux parcours B ou C sachant qu'il n'a pas validé ?

Solution –

On note les événement suivants :

A :"l'étudiant choisit le parcours A"

B :"l'étudiant choisit le parcours B"

C :"l'étudiant choisit le parcours C"

V :"l'étudiant valide l'année"

VR :"l'étudiant valide l'année après rattrapage"

NV :"l'étudiant ne valide pas l'année"

Notons que :

– les événements A, B et C forment une partition ; – les événements V, VR et NV forment une partition ;

et on a les informations suivantes :

Événement $\star$	A	B	C	Σ
$\mathbb{P}(\star)$	$\frac{90}{160} = 0.5625$	$\frac{40}{160} = 0.25$	$\frac{30}{160} = 0.1875$	1
$\mathbb{P}(V/\star)$	0.7	0.8	0.6	///
$\mathbb{P}(VR/\star)$	0.2	0.15	0.3	///
$\mathbb{P}(NV/\star)$	0.1	0.05	0.1	///
Σ	1	1	1	///

1. *Quelle est la probabilité qu'il valide son année ?*
   On utilisant la formule des probabilités totales, on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V) &= \mathbb{P}(V/A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(V/B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(V/C)\mathbb{P}(C)\\ &= 0.7 \times 0.5625 + 0.8 \times 0.25 + 0.6 \times 0.1875 = 0.70625.\end{aligned}$$

2. *Quelle est la probabilité qu'il valide ou valide après rattrapage ?*

$$\mathbb{P}(V \cup VR) = \mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(VR) - \mathbb{P}(V \cap VR) = \mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(VR)$$

   car $V \cap VR = \emptyset$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(VR) &= \mathbb{P}(VR/A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(VR/B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(VR/C)\mathbb{P}(C)\\ &= 0.2 \times 0.5625 + 0.15 \times 0.25 + 0.3 \times 0.1875 = 0.20625.\end{aligned}$$

   donc $\mathbb{P}(V \cup VR) = 0.70625 + 0.20625 = 0.9125$.

3. *Quelle est la probabilité qu'il appartient au parcours B sachant qu'il a validé après rattrapage ?*
   La formule de Bays donne :

$$\mathbb{P}(B/VR) = \frac{\mathbb{P}(VR/B) \times \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(VR)} = \frac{0.15 \times 0.25}{0.20625} \simeq 0.1818.$$

4. *Quelle est la probabilité qu'il appartient aux parcours B ou C sachant qu'il n'a pas validé ? ON CHERCHE ICI $\mathbb{P}(B \cup C/NV)$:*

$$\mathbb{P}(B \cup C/NV) = \mathbb{P}_{NV}(B \cup C) = \mathbb{P}_{NV}(B) + \mathbb{P}_{NV}(C) = 1 - \mathbb{P}_{NV}(A)$$

   avec,

$$\mathbb{P}_{NV}(A) = \mathbb{P}(A/NV) = \frac{\mathbb{P}(NV/A) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(NV)} = \frac{0.1 \times 0.5625}{0.0875} = 0.6428571.$$

où,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(NV) &= \mathbb{P}(NV/A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(NV/B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(NV/C)\mathbb{P}(C) \\ &= 0.1 \times 0.5625 + 0.05 \times 0.25 + 0.1 \times 0.1875 = 0.0875.\end{aligned}$$

OU BIEN $\mathbb{P}(NV) = 1 - \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(VR) = 0.0875.$
D'où :

$$\mathbb{P}(B \cup C/NV) = 1 - \mathbb{P}_{NV}(A) = 1 - 0.6428571 = 0.3571429.$$

Exercice 20. On considère deux événements quelconques A et B. Exprimer en fonction de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$ les probabilités conditionnelles suivantes :
a) $\mathbb{P}(A|A \cup B)$,
b) $\mathbb{P}(A|A \cap B)$,
c) $\mathbb{P}(\overline{B}|\overline{A})$. Que devient cette probabilité lorsque A et B sont indépendants ?
Solution –
a) Il suffit d'appliquer la formule de Bayes et de remarquer que $A \subset A \cup B$ *:*

$$\mathbb{P}(A|A \cup B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

b) Si A et B sont réalisés, l'événement A l'est bien sûr et on peut vérifier que $\mathbb{P}(A|A \cap B) = 1$.
c) En appliquant à nouveau la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{\mathbb{P}(\overline{A \cup B})}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{1 - \mathbb{P}(A \cup B)}{1 - \mathbb{P}(A)} = 1 - \frac{\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}{1 - \mathbb{P}(A)}$$

Si A et B sont indépendants, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$*, ce qui donne*

$$\mathbb{P}(\overline{B}|\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{B}).$$

Ceci prouve le résultat suivant : Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$ *sont aussi indépendants*

Exercice 21. Un fumeur, après avoir lu une série de statistiques sur les risques de cancer, décide d'arrêter de fumer. D'après les statistiques, on estime les probabilités suivantes : si cette personne n'a pas fumé le n-ième jour, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant est 0.3 ; mais si elle a fumé le n-ième jour, alors la probabilité pour qu'elle ne fume pas le jour suivant est 0.9.

Pour $n \geq 0$, on considère l'événement :
F_n : "La personne fume le n-ième jour" et on note $p_n = \mathbb{P}(F_n)$. En particulier on a $p_0 = 1$.
1) Démontrer que $p_{n+1} = -0.6p_n + 0.7$.
2) La personne va-t-elle s'arrêter de fumer ?