Techniques d'estimation pour l'ingénieur

Niveau : $3^{\text{ème}}$ année A-B

TD n°3 : Estimation paramètrique par intervalle de confiance

Exercice 1

Un **test de débit** ou **speed test** mesure, analyse et compare les débits d'une connexion internet sur PC/Mac, Mobile ou Tablette (Wifi, CPL, Ethernet - Public, Privée). Neutre, indépendant et gratuit, ce test de débit est compatible avec tous les opérateurs internet.
Dans le but d'évaluer la qualité réelle de sa connexion, l'opérateur Orange lance une étude statistique sur la base d'un échantillon de 24 lignes ADSL avec un abonnement à 8 Mbps (mégabits par seconde) choisies indépendamment sur tous les gouvernorats de Tunisie, et durant une période allant de janvier 2021 au juin 2021. On note par $(X_1, X_2, .., X_n)$ le n-échantillon correspondant.
Soit X la variable aléatoire modélisant le débit Orange en Mb/s, qui suit une loi normale de moyenne m et d'écart type $\sigma = 0,05$.

1. a. Donner un estimateur ponctuel de la moyenne m.
   b. Donner la loi de l'estimateur proposé en justifiant votre réponse.
   c. Cet estimateur est-il biaisé ? Est-il convergent ? Justifier la réponse
2. Les mesures effectuées sur l'échantillon, ont donnés une moyenne échantillonnale égale à 4.38 Mbps.
   a. Au niveau de confiance de 99%, donner un intervalle de confiance $IC_1(m)$ de la moyenne m.
   b. Quel est le niveau de confiance de l'intervalle $IC_2(m) = [4.36; 4.40]$?
   c. Comparer les deux intervalles $IC_1(m)$ et $IC_2(m)$. Que peut-on conclure ?
3. On se donne d'un troisième intervalle de confiance $IC_3(m)$ de la moyenne au niveau de confiance 99%.
   a. Quelle devrait être la taille de l'échantillon si l'intervalle $IC_3(m)$ est d'amplitude égale à 0.02 Mbps ?
   b. Comparer les deux intervalles $IC_1(m)$ et $IC_3(m)$. Que peut-on conclure ?

Exercice 2

Une entreprise fabrique un certain type de composants électroniques dont la durée de vie X, exprimée en heures, est une variable aléatoire. Des mesures effectuées sur un échantillon aléatoire de taille 50 ont donné les résultats suivants :

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 60000 \quad \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 74 \times 10^6$$

1. Donner une estimation ponctuelle de la durée de vie moyenne des composants.
2. Donner une estimation ponctuelle de l'écart-type de cette durée de vie.
3. Donner l'intervalle de confiance à 99% de cette durée de vie moyenne.
4. Sachant que $\sigma = 242$, quel aurait dû être le niveau de confiance pour que la durée de vie moyenne des composants ait une amplitude de 60 heures si on travaille avec un échantillon de taille $n = 175$.

Exercice 3

À la veille d'une consultation électorale, nous effectuons un sondage. Dans un échantillon représentatif de 1000 personnes, 250 personnes déclarent vouloir voter pour le candidat A,

1. Donner une estimation ponctuelle de la proportion des personnes ayant l'intention de voter pour le candidat A.
2. Donner l'intervalle de confiance à 95% des personnes ayant l'intention de voter pour le candidat A.
3. Nous évaluons le pourcentage de personnes ayant l'intention de voter pour le candidat B à 17% . Combien faut-il interroger de personnes pour obtenir un intervalle de confiance à 95% du pourcentage de personnes ayant l'intention de voter le candidat B, avec une précision de 1% ?

Exercice 4

Une enquête a été menée auprès des familles rurales possédant des voitures électriques, en vue de connaître leur consommation énergétique automobile en une journée.
On suppose que sur l'ensemble des familles interrogées, le taux de consommation électrique d'une voiture en une journée, exprimé en kWh/100km, est une variable aléatoire Y qui suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ inconnus.

On interroge indépendamment 9 familles, choisies au hasard sur leur consommation énergétique journalière. On note par $(Y_1, Y_2, .., Y_n)$ le n-échantillon correspondant. L'échantillon sélectionné a fourni les résultats suivants :

$$\sum_{i=1}^{9} y_i = 90 \quad et \sum_{i=1}^{9} (y_i - \overline{y})^2 = 32.$$

1. Donner un estimateur sans biais de la moyenne et de la variance, puis calculer une estimation pour chacun des deux paramètres.
2. Estimer par intervalle de confiance la moyenne μ pour un niveau de confiance de 95%.
3. Estimer par intervalle de confiance la variance σ^2 pour un risque de 5%.