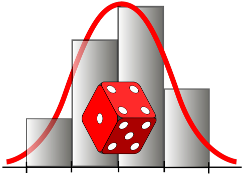
TD3 : Estimation paramétrique par intervalle de confiance



Module : Techniques d'estimation pour l'ingénieur

Exercice N°2

Énoncé :

À la veille d'une consultation électorale, nous effectuons un sondage. Dans un échantillon représentatif de 1000 personnes, 250 personnes déclarent vouloir voter pour le candidat A,

1. Donner une estimation ponctuelle de la proportion des personnes ayant l'intention de voter pour le candidat A.
2. Donner l'intervalle de confiance à 95% des personnes ayant l'intention de voter pour le candidat A.
3. Nous évaluons le pourcentage de personnes ayant l'intention de voter pour le candidat B à 17% . Combien faut-il interroger de personnes pour obtenir un intervalle de confiance à 95% du pourcentage de personnes ayant l'intention de voter le candidat B, avec une précision de 1% ?

Solution:

1. Un estimateur ponctuel de la proportion est :

$$\widehat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

avec X_i suivent la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
une estimation ponctuelle de la proportion, associée à la réalisation $(x_1, x_2, , x_n)$ de l'échantillon $(X_1, , X_n)$ est :
Donc

$$\widehat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{250}{1000} = 0.25$$

Exercice N°3

2. On a $np \geq 5$ et $np(1-p) \geq 5$, alors l'intervalle de confiance à 95% de la proportion de personnes ayant l'intention de voter pour le candidat A est donné par

$$IC_{0.95}(p) = [\widehat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}].$$

On a

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025.$$

Alors,

$$\mathbb{P}(Z > z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0.025$$

Donc, la lecture inverse de la table de la loi normale centrée réduite donne $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.
D'où

$$IC_0.99(p) = [0.25 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.25 \times 0.75)}{1000}}] = [0.25 \pm 0.026] = [0.22;\ 0.27]$$

Exercice N°3

3.La proportion de voter pour le condidat B est égale à $\widehat{p} = 0.17$. On veut une précision de 1% pour l'intervalle de confiance $IC(p)$. Alors,

$$z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}} = 0.01 \Rightarrow n = \widehat{p}(1-\widehat{p})(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{0.01})^2 \simeq 5420.$$