Résumé d'ensemble des nombres réels et sous-ensembles

Réalisé par :

Fathi Ismail

"Make studying easy with EASIER"

Contents

0.1 Ensembles de Nombres

0.1.1 Ensemble des Entiers Naturels

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

0.1.2 Ensemble des Entiers Relatifs

L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

0.1.3 Ensemble des Décimaux

L'ensemble des nombres décimaux est défini par :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

0.1.4 Ensemble des Rationnels

Les nombres rationnels sont de la forme

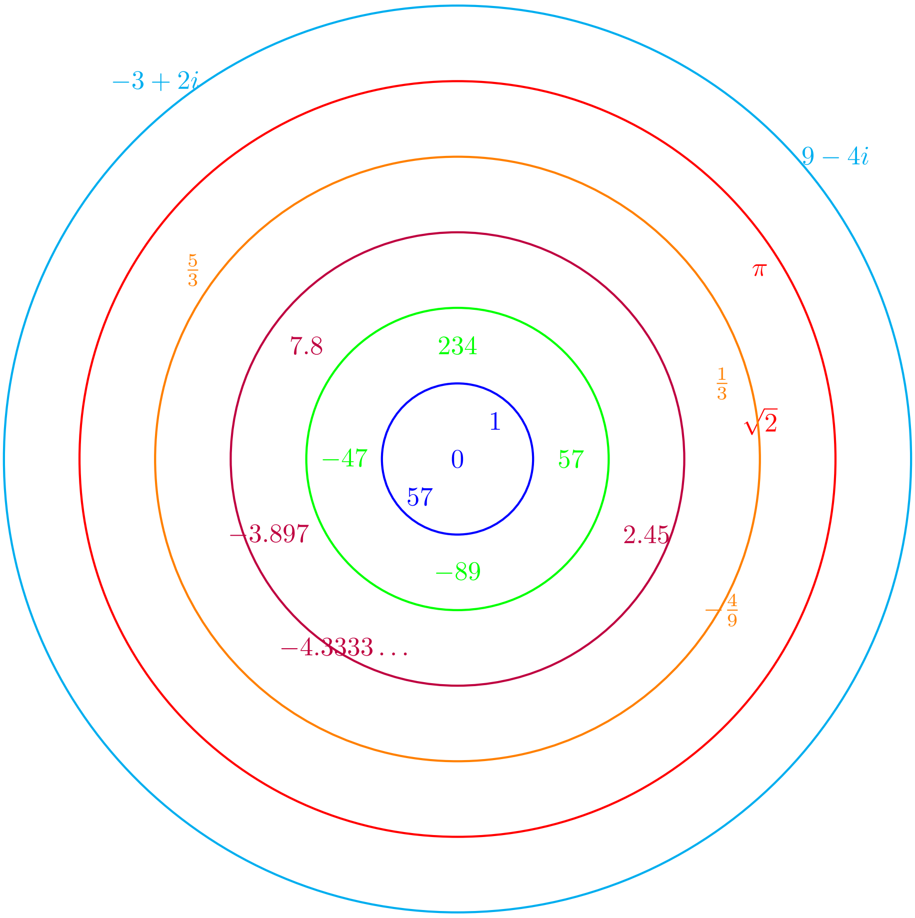
$\frac{a}{b}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ (c'est-à-dire $b \neq 0$).

L'ensemble des rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

0.1.5 Ensemble des Réels

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$. Il comprend tous les nombres rationnels et irrationnels.

Remarque : $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels positifs (y compris zéro) et $\mathbb{R}^-$ désigne l'ensemble des réels négatifs (y compris zéro).



$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels (entiers positifs) sans signe ni virgule.

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs (positifs ou négatifs) avec un signe mais sans virgule.

$\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres décimaux (du type $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$). Ils ont un nombre fini de décimales.

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels (du type $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$).

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels.

$\mathbb{R}$ est formé des nombres rationnels et des nombres irrationnels. Les irrationnels ne peuvent pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ comme les rationnels.

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes formés d'une partie réelle et d'une partie imaginaire telle que $i^2 = -1$.

0.2 Opérations et Règles de Calcul dans $\mathbb{R}$

0.2.1 Propriétés de Base

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

a + b = b + a (Commutativité de l'addition)
ab = ba (Commutativité de la multiplication)
(a + b) + c = a + (b + c) (Associativité de l'addition)
(ab)c = a(bc) (Associativité de la multiplication)

$a(b + c) = ab + ac$ (Distributivité)

$a + b = b + a$ (Commutativité de l'addition)
$ab = ba$ (Commutativité de la multiplication)
$(a + b) + c = a + (b + c)$ (Associativité de l'addition)
$(ab)c = a(bc)$ (Associativité de la multiplication)
$a(b + c) = ab + ac$ (Distributivité)

0.2.2 Opposé et Inverse

L'opposé de a est $-a$ tel que

$a + (-a) = 0.$

L'inverse de a (pour $a \neq 0$) est

a^{-1} tel que $a \times a^{-1} = 1.$

0.3 Racine Carrée

0.3.1 Définition

Pour un nombre réel $a \geq 0$, la racine carrée de a est notée

$\sqrt{a}$, et vérifie $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a.$

0.4 Les Puissances

0.4.1 Définition et Propriétés

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, la puissance n-ième de a est notée

a^n et est définie par :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$$

Les propriétés des puissances incluent :

$a^n \times a^m = a^{n+m}$
$(a^n)^m = a^{nm}$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (pour $a \neq 0$)

$a^n \times a^m = a^{n+m}$
$(a^n)^m = a^{nm}$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (pour $a \neq 0$)

0.5 Parité d'un entier

0.5.1 Nombre pair

On dit qu'un nombre est pair s'il est un multiple de 2 ou s'il existe un entier naturel k tel que :

$$n = 2 \cdot k$$

0.5.2 Nombre impair

On dit qu'un nombre est impair s'il existe un entier naturel k tel que :

$$n = 2 \cdot k + 1$$

0.5.3 Remarques

Un nombre entier naturel est soit pair soit impair, et on a les résultats suivants :

0.6 Nombres premiers

Un nombre entier naturel est dit premier s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

0.6.1 Remarques

1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1.
2 est le seul nombre premier pair.
Il y a une infinité de nombres premiers.

0.6.2 Liste des nombres premiers jusqu'à 200

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 14$

0.7 Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout entier naturel non premier se décompose en produit de facteurs premiers et cette décomposition est unique.

0.8 Le plus grand commun diviseur (PGCD)

0.8.1 Définition

Soient a et b deux entiers non nuls. Le PGCD de a et b est le plus grand diviseur commun des nombres a et b. On le note :

$$\mathrm{PGCD}(a, b) \quad \text{ou} \quad a \wedge b$$

0.8.2 Calcul du PGCD

Le plus grand diviseur commun de deux nombres est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans leur décomposition.

0.9 Le plus petit commun multiple (PPCM)

0.9.1 Définition

Soient a et b deux entiers non nuls. Le PPCM de a et b est le plus petit multiple commun des nombres a et b. On le note :

$$\mathrm{PPCM}(a, b) \quad \text{ou} \quad a \vee b$$

0.9.2 Calcul du PPCM

Le plus petit multiple commun de deux nombres est le produit des facteurs communs et non communs munis du plus grand des exposants trouvés dans leur décomposition.

0.10 Écriture Scientifique

Tout nombre décimal peut être écrit sous la forme

$a \times 10^p$, où $1 \leq a < 10$ et $p \in \mathbb{Z}$.

0.11 Identités Remarquables

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

0.12 Méthodes et astuces et remarques et conseils

Remarque 1 : Pour comparer un ensemble avec un élément on utilise les deux symboles : $\in$ et $\notin$.
Exemples : $0 \in \mathbb{N}; 0 \notin \mathbb{N}^*; \ldots$
Pour comparer un ensemble avec un autre ensemble on utilise les deux symboles : $\subseteq$ et $\nsubseteq$.
Exemples : $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$; $\mathbb{Q} \nsubseteq \mathbb{R}$; ...

Méthode 1 : Chercher si un nombre n est premier

Diviser ce nombre par les nombres premiers croissants.
Exemples : Diviser 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; etc.
$11, 13, \ldots$
Arrêter dès qu'on trouve un nombre p tel que n est divisible par aucun de ces nombres premiers, alors n est premier.

Méthode 2 : Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers

Diviser le nombre n par le plus petit nombre premier et noter le quotient.
Recommencer avec le quotient obtenu jusqu'à ce que le dernier quotient soit 1.
Le produit des diviseurs est la décomposition en produit de facteurs premiers.
Exemple : $56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$.
Remarque : Chercher le PGCD et le PPCM à partir de la décomposition en facteurs premiers est une méthode directe.

Méthode 3 : Trouver le PPCM de deux nombres

Pour trouver le PPCM de deux nombres, multiplier tous les facteurs qui figurent dans l'une ou l'autre des décompositions, affectés des plus grands exposants rencontrés dans ces décompositions.

Exemple :

$$\mathrm{PPCM}(36,48) = 2^4 \times 3^2 = 144$$

Méthode 4 : Décomposer et trouver le PGCD de deux nombres

1) Décomposer les deux nombres a et b en produit de facteurs premiers.
Exemple : $a = 36 = 2^2 \times 3^2$ et $b = 48 = 2^4 \times 3$
2) Le PGCD est le produit des facteurs communs affectés des plus petits exposants.

$$\mathrm{PGCD}(36,48) = 2^2 \times 3 = 12$$

Méthode 5 : Les multiples communs à deux nombres

Pour trouver les multiples communs à deux nombres a et b, décomposer a et b en produit de facteurs premiers.

$$a = 2^3 \times 3 \quad b = 2^4 \times 3 \times 5$$

Le PPCM est le produit des facteurs affectés des plus grands exposants.

$$\mathrm{PPCM}(24,48) = 2^4 \times 3 = 144$$