

## B. Implémentation numérique

### B.1 Chaînes ouvertes

#### B.1.1 Principe

Dans le cas de chaînes ouvertes, les paramètres du mouvement permis par chaque liaison sont indépendants et constituent donc les degrés de liberté de l'ensemble de solides étudié : on les regroupe dans le vecteur  $\mathbf{q}$ , qui est de dimension égale au nombre de degrés de liberté. Les équations du mouvement sont alors déterminées :

- soit par l'obtention systématique des équations de Newton et d'Euler relatives à chaque solide de la chaîne puis élimination des inconnues de liaison intervenant dans ces équations (stratégie proposée dans le paragraphe 3.2.2) ;
- soit par l'écriture des équations de Newton et d'Euler pour différents sous-ensembles de solides, comme proposé par la stratégie « optimisée » du paragraphe 3.2.3 ;
- soit par l'application de méthodes énergétiques comme le PPV (avec des vitesses compatibles avec les liaisons), comme au paragraphe 4.2.3, ou les équations de Lagrange, présentées dans le paragraphe 4.3.2.

Dans tous les cas, ces équations peuvent s'écrire sous la forme générique suivante :

$$\mathbb{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}$$

qui doit être résolue sur un ensemble de « pas de temps » correspondant à la discrétisation temporelle de la durée du problème. Dans ce qui précède :

- la matrice  $\mathbb{A}$  comprend tous les termes relatifs à l'inertie des différents solides de la chaîne, et ses composantes peuvent éventuellement dépendre des paramètres  $\mathbf{q}$  du mouvement ;
- le vecteur  $\mathbf{C}$  comprend tous les termes faisant intervenir les dérivées temporelles  $\dot{\mathbf{q}}$  des paramètres du mouvement : on peut y retrouver des termes liés à l'inertie des différents solides de la chaîne (termes dits « gyroscopiques ») ou à certains phénomènes de dissipation comme l'amortissement ou le frottement fluide ; dans certains cas, on préférera utiliser la notation équivalente :

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbb{D}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$$

pour souligner la dépendance en  $\dot{\mathbf{q}}$  de ce terme, ou sinon quand la matrice  $\mathbb{D}$  ne dépend ni des paramètres  $\mathbf{q}$  du mouvement, ni de leurs dérivées temporelles  $\dot{\mathbf{q}}$  ;

- le vecteur  $\mathbf{Q}$  comprend les termes ne faisant intervenir que les paramètres  $\mathbf{q}$  du mouvement : il peut s'agir d'actions à distance comme la pesanteur, ou d'actions exercées par contact ;
- le vecteur  $\mathbf{F}$  comprend les termes indépendants des paramètres du mouvement, comme les actions motrices des actionneurs présents sur certaines liaisons.

La résolution de ce système matriciel peut être effectuée de façon discrétisée en temps à l'aide de schémas d'intégration temporelle variés. Une possibilité d'implémentation dans un logiciel tel que la toolbox Simulink de Matlab est donnée sur la figure B.1.

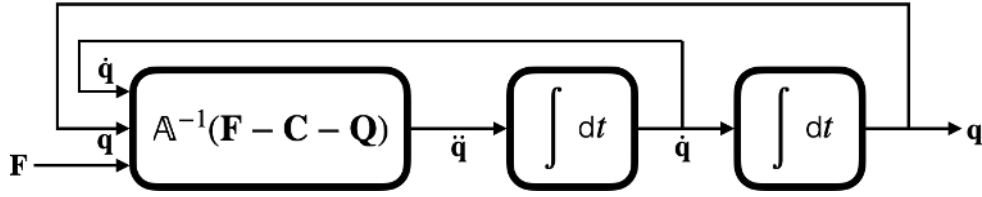


FIGURE B.1 – Schéma générique de la résolution numérique pour une chaîne ouverte.

**R** Dans le cas d'une liaison motorisée, il peut être nécessaire de tenir compte de l'inertie de la partie « mobile » de l'actionneur (comme le rotor pour un moteur rotatif) dans les équations du mouvement obtenues précédemment. Ceci est d'autant plus crucial quand le rapport de réduction de la chaîne de transmission proposée entre l'actionneur et les solides concernés est important : dans ce cas, on doit exprimer l'inertie équivalente de la partie mobile de l'actionneur au niveau de la liaison, et ceci s'ajoute au niveau d'un terme diagonal de la matrice  $\mathbb{A}$  évoquée précédemment.

### B.1.2 Illustration

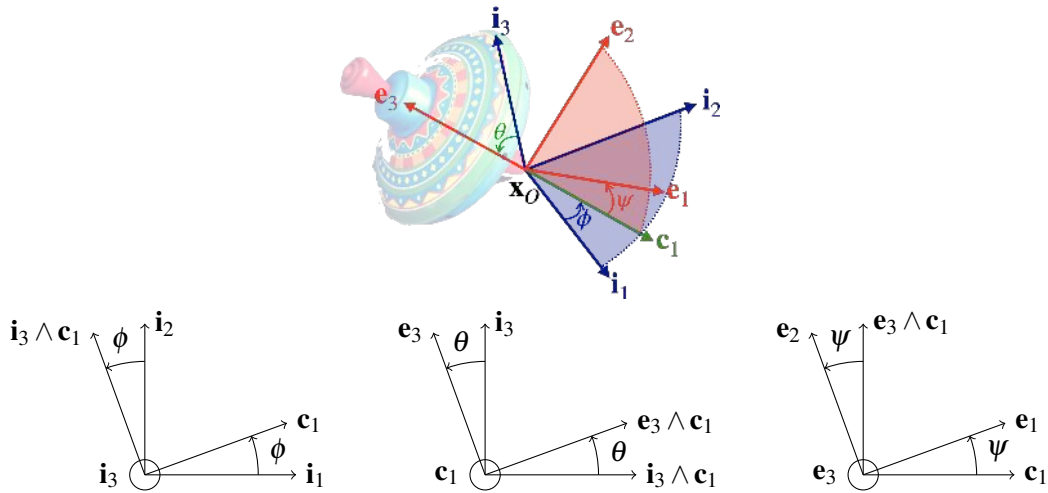


FIGURE B.2 – Toupie et paramétrage à l'aide des angles d'Euler.

On s'intéresse ici, à des fins d'illustration, aux équations du mouvement d'une toupie afin de déterminer son attitude au cours du temps. On considère ainsi un solide  $\Omega$  axisymétrique d'axe  $\mathbf{e}_3$ , en contact avec un plan horizontal fixe et indéformable  $\Omega_0$ , de base  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ . À des fins de simplification, on suppose que le contact se fait en un point  $O$  de l'axe  $\mathbf{e}_3$  d'axisymétrie du solide, et que ce point  $O$  reste immobile par rapport à  $\Omega_0$ . Ceci revient alors à considérer que le solide  $\Omega$  est en liaison sphérique de centre  $O$  par rapport à  $\Omega_0$ , liaison que l'on supposera parfaite. En

utilisant les angles d'Euler, rappelés sur la figure B.2, et définis dans le paragraphe 1.1.2, le champ des vitesses de  $\Omega$  par rapport à  $\Omega_0$  peut alors s'exprimer comme :

$$\dot{\mathbf{x}} = (\dot{\phi}\mathbf{i}_3 + \dot{\theta}\mathbf{c}_1 + \dot{\psi}\mathbf{e}_3) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_O)$$

où  $\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{i}_2$  est l'axe fixe vertical ascendant.

On suppose par ailleurs que la toupie est de masse  $m$ , de centre d'inertie  $C$  tel que  $\mathbf{x}_C = \mathbf{x}_O + l\mathbf{e}_3$ , et de tenseur d'inertie exprimé en  $O$  tel que  $\mathbb{J}_{\mathbf{x}_O} = I_e\mathbb{I} - (I_\perp - I_e)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^{\wedge 2}$ . La toupie n'étant soumise qu'à l'action de la pesanteur et la réaction du plan fixe  $\Omega_0$ , l'équation d'Euler au point  $O$  nous permet d'établir :

$$\overbrace{\mathbb{J}_{\mathbf{x}_O}(\dot{\phi}\mathbf{i}_3 + \dot{\theta}\mathbf{c}_1 + \dot{\psi}\mathbf{e}_3)}^{\cdot} = (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_O) \wedge (-mg\mathbf{i}_3) = mgl\mathbf{i}_3 \wedge \mathbf{e}_3 = mgl \sin \theta \mathbf{c}_1$$

vu que le point  $O$  est fixe et que le moment de l'action du plan est nul en ce point. Compte tenu de la forme du tenseur d'inertie, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{\mathbf{x}_O}(\dot{\phi}\mathbf{i}_3 + \dot{\theta}\mathbf{c}_1 + \dot{\psi}\mathbf{e}_3) &= I_e\dot{\phi}\mathbf{i}_3 - (I_\perp - I_e)\dot{\phi}\mathbf{e}_3 \wedge (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{i}_3) + I_e\dot{\theta}\mathbf{c}_1 - (I_\perp - I_e)\dot{\theta}\mathbf{e}_3 \wedge (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{c}_1) + I_e\dot{\psi}\mathbf{e}_3 \\ &= I_\perp\dot{\phi}\mathbf{i}_3 - (I_\perp - I_e)\dot{\phi} \cos \theta \mathbf{e}_3 + I_\perp\dot{\theta}\mathbf{c}_1 + I_e\dot{\psi}\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

L'équation d'Euler s'établit alors comme :

$$I_\perp\ddot{\phi}\mathbf{i}_3 - (I_\perp - I_e)\overbrace{\dot{\phi} \cos \theta \mathbf{e}_3}^{\cdot} - (I_\perp - I_e)\dot{\phi} \cos \theta \dot{\mathbf{e}}_3 + I_\perp\ddot{\theta}\mathbf{c}_1 + I_\perp\dot{\theta}\dot{\mathbf{c}}_1 + I_e\ddot{\psi}\mathbf{e}_3 + I_e\dot{\psi}\dot{\mathbf{e}}_3 = mgl \sin \theta \mathbf{c}_1$$

avec  $\dot{\mathbf{c}}_1 = \dot{\phi}\mathbf{i}_3 \wedge \mathbf{c}_1$  et  $\dot{\mathbf{e}}_3 = (\dot{\phi}\mathbf{i}_3 + \dot{\theta}\mathbf{c}_1) \wedge \mathbf{e}_3$ , soit finalement :

$$\begin{aligned} I_\perp\ddot{\phi}\mathbf{i}_3 - (I_\perp - I_e)(\ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta)\mathbf{e}_3 - (I_\perp - I_e)\dot{\phi}^2 \cos \theta \mathbf{i}_3 \wedge \mathbf{e}_3 - (I_\perp - I_e)\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta \mathbf{c}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \\ + I_\perp\ddot{\theta}\mathbf{c}_1 + I_\perp\dot{\theta}\dot{\mathbf{i}}_3 \wedge \mathbf{c}_1 + I_e\ddot{\psi}\mathbf{e}_3 + I_e\dot{\phi}\dot{\psi}\mathbf{i}_3 \wedge \mathbf{e}_3 + I_e\dot{\theta}\dot{\psi}\mathbf{c}_1 \wedge \mathbf{e}_3 = mgl \sin \theta \mathbf{c}_1 \end{aligned}$$

En projetant dans la base  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{c}_1, \mathbf{e}_3)$ , on obtient les trois équations du mouvement suivantes :

$$\begin{aligned} I_\perp\ddot{\theta} - (I_\perp - I_e)\dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta + I_e\dot{\phi}\dot{\psi} \sin \theta &= mgl \sin \theta \\ I_\perp\ddot{\phi} \sin \theta + (2I_\perp - I_e)\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta - I_e\dot{\theta}\dot{\psi} &= 0 \\ I_e\ddot{\phi} \cos \theta - I_e\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta + I_e\ddot{\psi} &= 0 \end{aligned}$$

que l'on aurait bien sûr pu obtenir également à l'aide du PPV ou des équations de Lagrange. Comme attendu, ces équations peuvent se réécrire sous la forme générale présentée dans le paragraphe précédent :

$$\begin{pmatrix} I_\perp & 0 & 0 \\ 0 & I_\perp \sin \theta & 0 \\ 0 & I_e \cos \theta & I_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(I_\perp - I_e)\dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta + I_e\dot{\phi}\dot{\psi} \sin \theta \\ (2I_\perp - I_e)\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta - I_e\dot{\theta}\dot{\psi} \\ -I_e\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -mgl \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**R** La matrice  $\mathbb{A}$  obtenue ci-dessus n'est pas inversible lorsque  $\theta = 0$ , vu que  $\det \mathbb{A} = I_e I_\perp^2 \sin \theta$ . Ceci correspond à la singularité déjà évoquée dans le paragraphe 1.1.2, pour laquelle l'axe nodal  $\mathbf{c}_1$  ne peut plus être défini, et les angles  $\phi$  et  $\psi$  ne peuvent plus être distingués. Ceci nécessite alors un traitement numérique particulier.

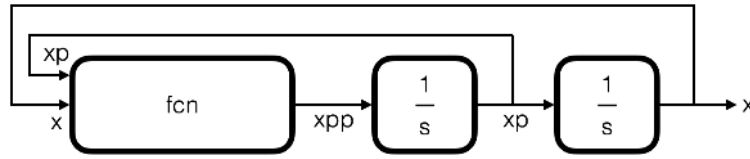


FIGURE B.3 – Schéma Simulink de la résolution numérique pour le problème de la toupie.

Une possibilité d'implémentation dans un logiciel tel que la toolbox Simulink de Matlab est donnée sur la figure B.3, les conditions initiales en angles et vitesses angulaires étant précisées dans les blocs intégrateurs. Le code de la fonction `fcn`, qui permet le calcul à chaque pas de temps du vecteur `xpp` (contenant les dérivées secondes  $\ddot{\theta}$ ,  $\ddot{\phi}$  et  $\ddot{\psi}$ ) en fonction de `x` (contenant  $\theta$ ,  $\phi$  et  $\psi$ ) et `xp` (contenant les dérivées premières  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  et  $\dot{\psi}$ ), est donné sur le listing B.1.

```

function xpp = fcn(x,xp)

A = [Ip 0 0 ;
     0 Ip*sin(x(1)) 0 ;
     0 Ie*cos(x(1)) Ie];

C = [-(Ip-Ie)*xp(2)^2*cos(x(1))*sin(x(1))+Ie*xp(2)*xp(3)*sin(x(1)) ;
     (2*Ip-Ie)*xp(1)*xp(2)*cos(x(1))-Ie*xp(1)*xp(3) ;
     -Ie*xp(1)*xp(2)*sin(x(1))];

Q = [-m*g*l*sin(x(1)) ;
     0 ;
     0];

xpp = -inv(A)*(C+Q);

```

Listing B.1 – Code Matlab de la fonction `fcn` pour le problème de la toupie.

La figure B.4 présente les résultats de simulation obtenus pour un temps de simulation de 10 s et des conditions initiales :  $\theta = \pi/6 \text{ rad}$ ,  $\phi = \psi = 0 \text{ rad}$ ,  $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0 \text{ rad/s}$  et  $\dot{\psi} = 1000 \text{ rad/s}$ . Tandis que le mouvement de rotation propre se fait à vitesse  $\dot{\phi}$  constante au cours du temps (figure de droite, où l'on a représenté la simulation jusqu'à 0,05 s), une rotation de précession  $\psi$  s'établit à vitesse presque constante (figure du milieu, où l'on a représenté la simulation jusqu'à 5 s), cette dernière étant liée à l'oscillation de l'angle de nutation  $\theta$  (figure de gauche, où l'on a représenté la simulation jusqu'à 0,5 s).

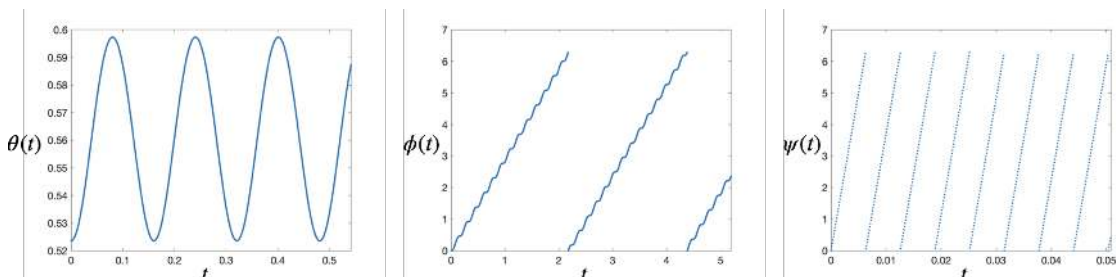


FIGURE B.4 – Solution numérique pour le problème de la toupie.

## B.2 Chaînes fermées

### B.2.1 Principe

Dans le cas d'une chaîne fermée, les paramètres du mouvement autorisés par les différentes liaisons ne sont plus indépendants, et il est nécessaire de prendre en compte un certain nombre de relations de fermeture, comme évoqué dans le paragraphe 3.1.2. Deux stratégies sont alors possibles :

1. soit on utilise les relations de fermeture pour ne garder qu'un jeu de paramètres du mouvement tous indépendants, ce qui permet de se ramener à la situation décrite dans le paragraphe B.1 pour les chaînes ouvertes ; en revanche, selon la forme des relations de fermeture, il peut être difficile de déterminer explicitement les degrés de liberté de l'ensemble de solides ;
2. soit on ne prend pas en compte explicitement les relations de fermeture de façon à garder le plus longtemps possible les paramètres du mouvement des différentes liaisons, c'est-à-dire dépendants entre eux : c'est le cas par exemple du PPV pour des champs de vitesses virtuels qui ne sont pas compatibles avec certaines liaisons, comme dans l'exemple 4.10, ou des équations de Lagrange avec multiplicateurs, détaillées dans le paragraphe 4.3.3.

Nous allons développer ici la deuxième stratégie dans le cas de l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange, qui sont utilisés dans le cadre des équations de Lagrange, mais peuvent aussi être employés dans l'application du PPV.

Contrairement au paragraphe B.1, nous notons ici  $\mathbf{q}$  le vecteur des paramètres du mouvement même si ces derniers ne sont pas indépendants les uns des autres. Ce vecteur est donc de dimension égale à la somme du nombre de degrés de liberté de l'ensemble de solides et du nombre de relations scalaires de fermeture indépendantes qu'il est possible d'écrire. On suppose que ces dernières relations peuvent s'écrire sous la forme générique suivante :

$$\mathbf{L}(\mathbf{q}) + \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

où  $\mathbf{c}$  est un vecteur indépendant des paramètres du mouvement, mais qui peut dépendre du temps. Ces relations de fermeture géométriques peuvent être dérivées par rapport au temps pour obtenir les relations de fermeture cinématiques associées :

$$\mathbb{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$$

où la matrice  $\mathbb{J}$  correspond à la matrice jacobienne du vecteur  $\mathbf{L}$  vis-à-vis des paramètres  $\mathbf{q}$  du mouvement, considérés à ce moment comme étant encore indépendants :  $\mathbb{J} = \mathbb{D}_{\mathbf{q}}\mathbf{L}$ . Afin de pouvoir aboutir à un système matriciel formellement semblable à celui obtenu dans le cas de chaînes ouvertes dans le paragraphe B.1, on dérive une dernière fois cette expression par rapport au temps :

$$\mathbb{J}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{I}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$$

où  $\mathbf{I} = \dot{\mathbb{J}}\dot{\mathbf{q}}$  est un vecteur qui dépend des paramètres  $\mathbf{q}$  du mouvement et de leurs dérivées  $\dot{\mathbf{q}}$ .

Compte tenu de l'introduction des multiplicateurs de Lagrange au sein des équations du même nom, le système matriciel final à résoudre s'écrit alors sous la forme par blocs suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{q}) & \mathbb{J}^T(\mathbf{q}) \\ \mathbb{J}(\mathbf{q}) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ -\boldsymbol{\mu} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{I}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \\ \ddot{\mathbf{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

où  $\boldsymbol{\mu}$  est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange (chacun étant associé à une relation scalaire de fermeture). En plus de déterminer les paramètres du mouvement, la résolution de ce système permet d'assurer que les relations de fermeture sont vérifiées à chaque instant et de connaître également les efforts de liaison associés à ces contraintes cinématiques.

La résolution de ce système matriciel peut être effectuée de façon discrétisée en temps à l'aide de schémas d'intégration temporelle variés. Une possibilité d'implémentation dans un logiciel tel que la toolbox Simulink de Matlab est donnée sur la figure B.5.

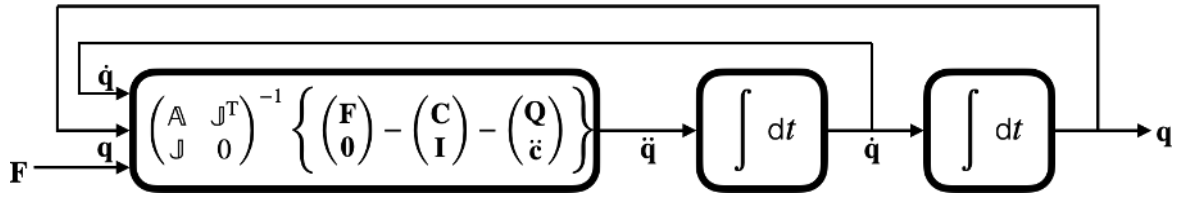


FIGURE B.5 – Schéma générique de la résolution numérique pour une chaîne fermée.

### B.2.2 Illustration

On s'intéresse ici, à des fins d'illustration, à la simulation numérique d'un système bielle-manivelle, dont la cinématique a été étudiée en détails dans l'exemple 3.2. Comme évoqué dans le paragraphe précédent, deux stratégies peuvent être envisagées.

La première consiste à injecter les relations de fermeture dans les équations de la dynamique qu'il est possible d'établir. Dans ce cas, on obtient une seule équation du mouvement, vu que le nombre de degrés de liberté du mécanisme est égal à un. Ainsi, l'exemple 4.5 permet d'aboutir à :

$$\begin{aligned} & (I_{zz}^{O1} + I_{zz}^{B2} f(\alpha)^2 - m_2 l_1^2 f(\alpha) g(\alpha) \sin \alpha + (m_2 + m_3) l_1^2 g(\alpha)^2) \ddot{\alpha} \\ & + \frac{1}{2} (I_{zz}^{B2} f(\alpha)^2 - m_2 l_1^2 f(\alpha) g(\alpha) \sin \alpha + (m_2 + m_3) l_1^2 g(\alpha)^2)' \dot{\alpha}^2 + F_r l_1 g(\alpha) = C_m \\ & \text{où } f(\alpha) = -\frac{l_1 \cos \alpha}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \alpha}}, \text{ et } g(\alpha) = -\frac{l_1 \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \alpha}} - \sin \alpha \end{aligned}$$

Cette équation correspond en fait à une forme « dégradée » de l'équation matricielle générique  $\mathbb{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}$ , car les matrices et vecteurs se réduisent ici à de simples scalaires.

La seconde stratégie, qui peut s'avérer être la seule applicable dans le cas de mécanismes plus complexes, consiste à utiliser le concept des multiplicateurs de Lagrange, et à procéder comme dans l'exemple 4.13. On obtient alors :

$$\begin{aligned} I_{zz}^{O1} \ddot{\alpha} &= C_m + \mu_1 l_1 \sin \alpha + \mu_2 l_1 \cos \alpha \\ I_{zz}^{B2} \ddot{\beta} + m_2 \frac{l_2}{2} \ddot{\lambda} \sin \beta &= \mu_1 l_2 \sin \beta + \mu_2 l_2 \cos \beta \\ (m_2 + m_3) \ddot{\lambda} + m_2 \frac{l_2}{2} (\ddot{\beta} \sin \beta + \dot{\beta}^2 \cos \beta) &= -F_r + \mu_1 \end{aligned}$$

où  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont les deux multiplicateurs de Lagrange respectivement associés aux relations de fermeture :

$$\dot{\lambda} + l_1 \dot{\alpha} \sin \alpha + l_2 \dot{\beta} \sin \beta = 0, \text{ et } l_1 \dot{\alpha} \cos \alpha + l_2 \dot{\beta} \cos \beta = 0$$

Pour obtenir l'expression matricielle présentée dans le paragraphe précédent, ces deux relations sont dérivées par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda} + l_1 \ddot{\alpha} \sin \alpha + l_1 \dot{\alpha}^2 \cos \alpha + l_2 \ddot{\beta} \sin \beta + l_2 \dot{\beta}^2 \cos \beta &= 0 \\ l_1 \ddot{\alpha} \cos \alpha - l_1 \dot{\alpha}^2 \sin \alpha + l_2 \ddot{\beta} \cos \beta - l_2 \dot{\beta}^2 \sin \beta &= 0 \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir le système matriciel complet suivant :

$$\begin{pmatrix} I_{zz}^{O1} & 0 & 0 & l_1 \sin \alpha & l_1 \cos \alpha \\ 0 & I_{zz}^{B2} & m_2 \frac{l_2}{2} \sin \beta & l_2 \sin \beta & l_2 \cos \beta \\ 0 & m_2 \frac{l_2}{2} \sin \beta & m_2 + m_3 & 1 & 0 \\ l_1 \sin \alpha & l_2 \sin \beta & 1 & 0 & 0 \\ l_1 \cos \alpha & l_2 \cos \beta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\lambda} \\ -\mu_1 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 \frac{l_2}{2} \dot{\beta}^2 \cos \beta \\ l_1 \dot{\alpha}^2 \cos \alpha + l_2 \dot{\beta}^2 \cos \beta \\ -l_1 \dot{\alpha}^2 \sin \alpha - l_2 \dot{\beta}^2 \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_m \\ 0 \\ -F_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui correspond à la forme générique établie dans le paragraphe précédent :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}(\mathbf{q}) & \mathbb{J}^T(\mathbf{q}) \\ \mathbb{J}(\mathbf{q}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ -\ddot{\boldsymbol{\mu}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{I}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \\ \ddot{\mathbf{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

avec notamment :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} I_{zz}^{O1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{zz}^{B2} & m_2 \frac{l_2}{2} \sin \beta \\ 0 & m_2 \frac{l_2}{2} \sin \beta & m_2 + m_3 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{J} = \begin{pmatrix} l_1 \sin \alpha & l_2 \sin \beta & 1 \\ l_1 \cos \alpha & l_2 \cos \beta & 0 \end{pmatrix}$$

Une possibilité d'implémentation dans un logiciel tel que la toolbox Simulink de Matlab est donnée sur la figure B.6, les conditions initiales étant supposées nulles. Le code de la fonction `fcn`, qui permet le calcul à chaque pas de temps du vecteur `xpp` (contenant les dérivées secondes  $\ddot{\alpha}$ ,  $\ddot{\beta}$  et  $\ddot{\lambda}$ ) en fonction notamment de `x` (contenant  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\lambda$ ) et `xp` (contenant les dérivées premières  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  et  $\dot{\lambda}$ ), est donné sur le listing B.2.

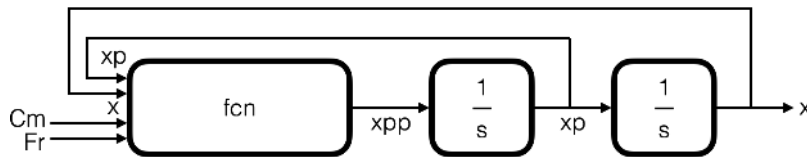


FIGURE B.6 – Schéma Simulink de la résolution numérique pour le système bielle-manivelle.

```
function xpp = fcn(x,xp,Cm,Fr)

A = [Iz1 0 0 ;
      0 Iz2 m2*l2*sin(x(2))/2 ;
      0 m2*l2*sin(x(2))/2 m2+m3];

J = [l1*sin(x(1)) l2*sin(x(2)) 1 ;
      l1*cos(x(1)) l2*cos(x(2)) 0];

C = [0 ;
      0 ;
      m2*l2*xp(2)^2*cos(x(2))/2];

I = [l1*xp(1)^2*cos(x(1))+l2*xp(2)^2*cos(x(2)) ;
      -l1*xp(1)^2*sin(x(1))-l2*xp(2)^2*sin(x(2))];

F = [Cm ;
      0 ;
      -Fr];

y = inv([A J.' ; J zeros(2,2)]*( [F ; zeros(2,1)] - [C ; I]));
xpp = y(1:3);
```

Listing B.2 – Code Matlab de la fonction `fcn` pour le système bielle-manivelle.

La figure B.7 présente les résultats de simulation obtenus pour un temps de simulation de 30 s, des conditions initiales nulles, et un couple moteur  $C_m$  et une force résistante  $F_r$  constants appliqués à partir de  $t = 1$  s. La transformation d'un mouvement de rotation  $\alpha(t)$  « continu » en un mouvement de translation  $\lambda(t)$  alternatif est bien visible.

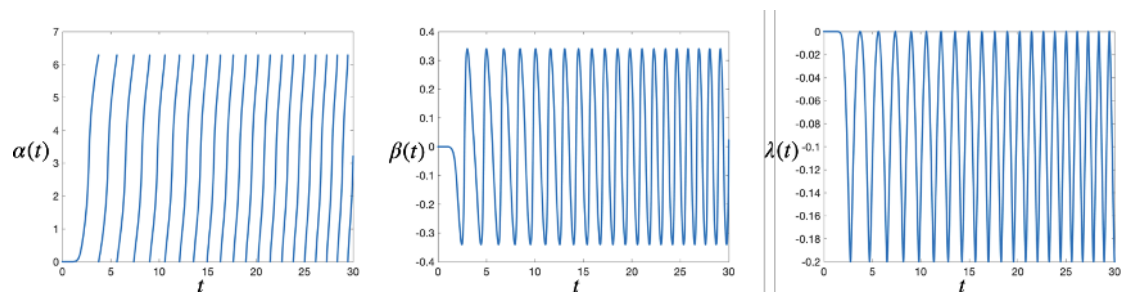


FIGURE B.7 – Solution numérique pour le système bielle-manivelle.