

GBM8378 – Laboratoire 1 : Rayon-X

Table des matières

Introduction	1
Théorie	2
Reconstruction par rétroprojection	3
Théorème de la tranche centrale	3
Bruit	5
Modélisation du bruit	5
Sensibilité/spécificité	5
Travail à effectuer	6
Critères d'évaluation	6

Introduction

L'expression *tomographie axiale* décrit en général un ensemble de techniques numériques servant à reconstruire l'image de coupe d'un objet à partir d'un ensemble de projections unidimensionnelles. L'assemblage de plusieurs coupes permet en outre de reconstruire l'objet en 3D. Cette technique est utilisée notamment par les appareils de mesure (*scanners*) de tomographie par rayon X (*CT scan*) et en tomographie par émission de positons (*PET scan*). En effet, le *CT* (et le *PET scan*) fait l'acquisition de rayons X (positons pour le *PET*) traversant le corps dans plusieurs directions de l'espace : ce sont les projections. La figure 1 présente une image reconstruite de *CT* et de *PET*, ainsi que la combinaison des deux.

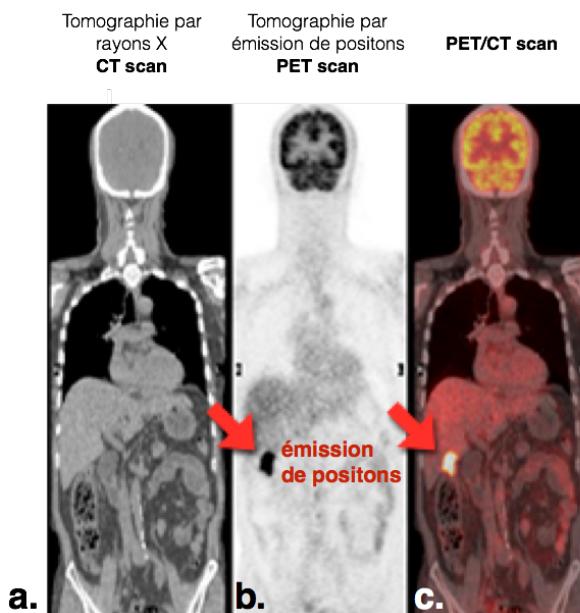


Figure 1: a. Tomographie par rayon X : Les os et les organes apparaissent clairement. b. PET scan. Les cellules présentant une activité élevées (e.g. cellules cancéreuses) présentent une forte émission de positons. c. La combinaison des deux permet de révéler l'organe affecté.

Dans ce laboratoire, vous allez réaliser les algorithmes pour reconstruire les images 2D à partir des projections mesurées par un scanner à rayon X. Les projections tomographiques peuvent être obtenues en utilisant une géométrie à rayons parallèles (scanner de première génération) ou à rayons divergents. Dans le cadre de ce laboratoire, pour simplifier, nous allons étudier principalement les principes de tomographie axiale en utilisant les rayons parallèles.

Durant ce laboratoire vous apprendrez à :

- Reconstruire des images par tomographie axiale
- Comprendre l'effet du filtrage sur la reconstruction des images
- Observer l'effet du bruit, du temps d'acquisition des images et du nombre d'angles différents utilisés sur la qualité des images reconstruites

Théorie

En *tomographie axiale*, l'objet à imager est modélisé par une fonction bidimensionnelle $f(x,y)$ représentant la propriété physique de l'objet qui sera mesurée. $f(x,y)$ peut être la radioactivité locale (médecine nucléaire), le temps de transit d'une onde acoustique (tomographie axiale par ultrasons, une méthode rarement utilisée toutefois), la densité de protons (imagerie par résonance magnétique nucléaire) ou le coefficient d'atténuation aux rayons X.

En termes mathématiques, la projection tomographique illustrée en figure 2 est le résultat de l'intégrale de ligne (le long de la direction de projection) de $f(x,y)$. Le signal mesuré est lié à l'intensité du faisceau de rayons X ayant traversé les tissus, soit :

$$I_d = I_0 \exp \left[- \int_0^{-d} \mu(s; \underline{E}) ds \right] \quad (1)$$

$$\ln \left(\frac{I_d}{I_0} \right) = - \int_0^d \mu(s; \underline{E}) ds \quad (2)$$

où : I_0 , I_d sont respectivement l'intensité du rayon incident et émergent, \underline{E} est l'énergie effective du rayon et $\mu(s)$ est le coefficient d'atténuation linéaire (en m^{-1}).

Pour effectuer la reconstruction tomographique, il est nécessaire d'avoir des projections le long d'un axe l pour différents angles θ . La matrice $f(l, \theta)$ représentant les projections pour différents angles est appelée **sinogramme**.

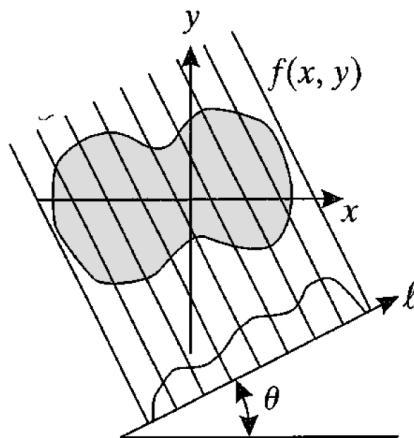


Figure 2 - Exemple d'une projection

Reconstruction par rétroprojection

La rétroprojection consiste à reprojeter la projection obtenue pour un angle θ sur toute la surface imagée. La reconstruction d'image par rétroprojection consiste à reconstruire une image en additionnant les images obtenues par rétroprojection pour différents angles.

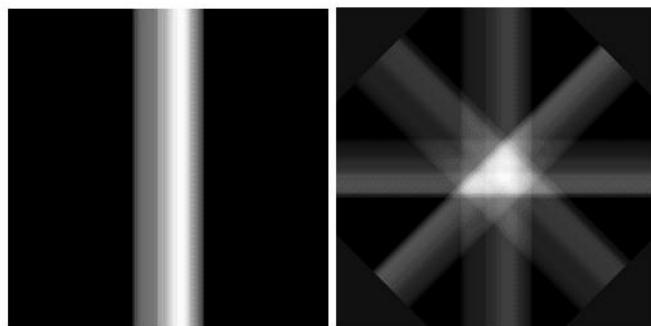


Figure 3 - Exemple d'une rétroprojection avec 1 et 4 angles

Théorème de la tranche centrale

Ce théorème est connu sous le nom de *Fourier Slice Theorem* dans les publications anglophones. C'est sur ce théorème que reposent les modèles analytiques de reconstruction tomographique.

Ce théorème fait un lien entre le domaine spatial et le domaine spectral (après transformée de Fourier). La figure 4 illustre la transformée de Fourier 2D de quelques images.

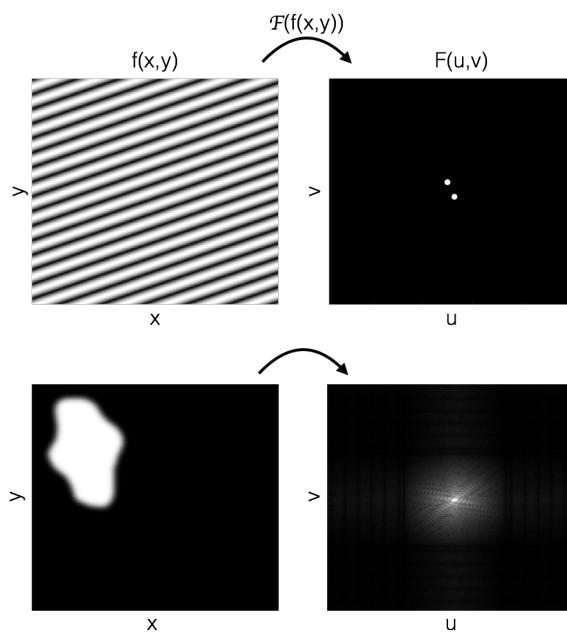


Figure 4 - Image et sa transformée de Fourier

Le théorème de la transformée de Fourier d'une projection nous dit que la transformée de Fourier (1D) d'une projection de $f(x, y)$ sur un axe d'orientation θ est identique à la tranche centrale d'angle θ de la transformée (2D) de $f(x, y)$. Par *tranche centrale*, on entend ici l'ensemble des valeurs que prend la transformée de Fourier sur une droite qui passe par l'origine du domaine spectral.

Le théorème est illustré en figure 5 avec : **I** La projection d'angle θ , **Q** sa transformée de Fourier 1D, $f(x, y)$ le domaine spatial et $F(u, v)$ le domaine spectral (transformée 2D). La figure 6 illustre la position de 8 projections (**Q**) dans le domaine de Fourier (u, v). On peut constater sur cette représentation que le centre de l'espace de Fourier (basses fréquences) est suréchantillonné par rapport aux bords. Afin de réduire l'effet des basses fréquences, chaque projection est filtrée par une fonction rampe $|\omega|$ dans le domaine spectral (voir le chapitre 6.3.3, Prince & Links) (rétroprojection filtrée). Dans le cas de ce laboratoire, le filtrage fréquentiel est effectué à l'aide d'une convolution dans le domaine spatial.

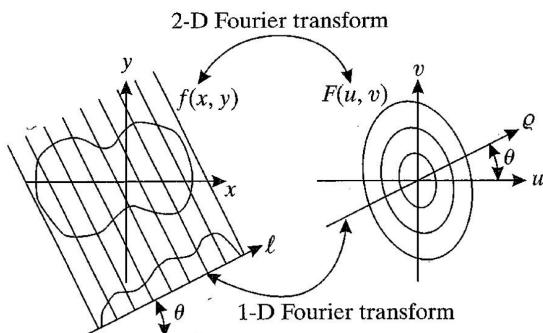


Figure 5 - Représentation du théorème de la tranche centrale

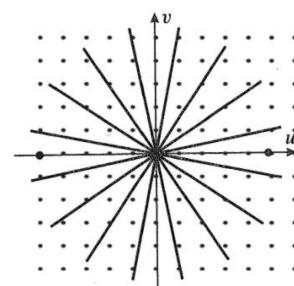


Figure 6 - Domaine spectral de la transformée discrète et des projections

Bruit

En tomographie, la probabilité qu'un photon soit détecté par un détecteur peut être modélisée par un processus de Poisson de moyenne $\mu_g = \lambda$ et de variance $\sigma_g^2 = \lambda$. Le rapport signal sur bruit (*RSB*) est donc donné par :

$$RSB = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda} \quad (3)$$

On peut aussi définir le *RSB* différentiel :

$$RSB_{diff} = \frac{CI_{ap}}{\sigma_b(A)} \quad (4)$$

où C est le contraste, I_{ap} est l'intensité de l'arrière-plan, et $\sigma_b(A)$ est l'écart-type de l'arrière-plan mesuré sur une aire de même dimension que la cible. Le contraste d'une image étant défini comme :

$$C = \frac{I_{cible} - I_{ap}}{I_{ap}} \quad (5)$$

Modélisation du bruit

Nous devons modéliser un signal d'intensité et de variance $\mu_g = \sigma_g^2 = I_{in}$ provenant d'une distribution de Poisson. La fonction python `np.random.poisson(...)` peut simuler un bruit provenant d'un processus de Poisson.

Sensibilité/spécificité

Pour déterminer la sensibilité et la spécificité d'un appareil, il est préférable de d'abord établir le tableau de contingence (Tableau 1). Pour ce faire, il faut fixer un seuil puis évaluer le nombre de vrais et faux positifs ainsi que le nombre de vrais et faux négatifs.

Tableau 1: Tableau de contingence

		Réalité	
		Malade	Sain
Diagnostic	Malade	Vrai positif (A)	Faux positif (B)
	Sain	Faux négatif (C)	Vrai négatif (D)

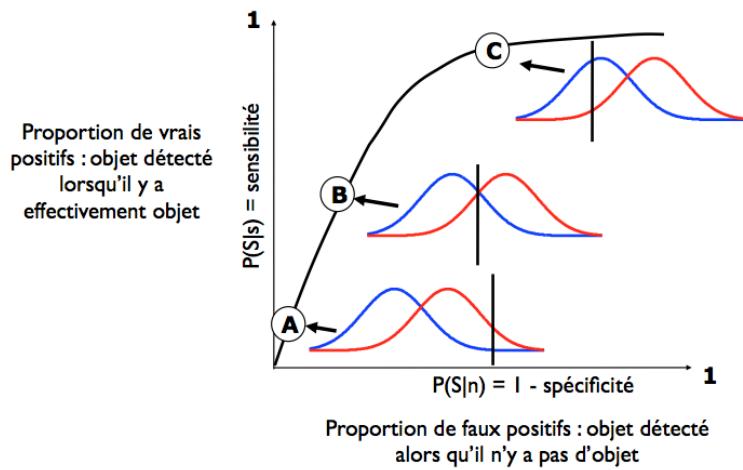
Il est ensuite possible de calculer la proportion de patient malade que le test diagnostique identifie comme étant malade (sensibilité) et la proportion de patient sain que le test diagnostique identifie comme étant sain (spécificité).

$$Sensibilité = \frac{A}{A + C} \quad Spécificité = \frac{D}{B + D}$$

La précision du diagnostic peut aussi être calculée. La précision du diagnostic correspond à la proportion de diagnostics valides.

$$Précision = \frac{A + D}{A + B + C + D}$$

Enfin, en faisant varier le seuil, il est possible d'effectuer une analyse ROC afin d'optimiser le seuil. Pour tracer une courbe ROC (figure 6), il suffit de calculer la sensibilité et la spécificité à différents seuils puis de les rapporter l'un en fonction de l'autre.



Travail à effectuer

Complétez le Jupyter Notebook.

N.B: Afin d'accéder aux ressources des labs, suivez les instructions de [la page GitHub GBM8378](#).

Critères d'évaluation

- Le rapport (en format *.pdf*) doit être déposé sur *Moodle*.
- Le code (en format *.zip*) doit être déposé sur *Moodle*.
- Pénalité de 20 % par jour de retard.
- Présentation et langue