CÉGEP RIMOUSKI

TECHNIQUES DE L'INFORMATIQUE // Cégep de Rimouski

Algèbre de Boole

Quantificateurs

L'ordinateur: machine numérique

Plan de match

- Priorité des opérateurs
- Forme booléenne et ensembles
- Quantification
- Exercices en classe

Dans votre livre:
Chapitre 5.3: (pages 104-105).

Priorité des opérations

- Dans l’écriture d’un énoncé booléen, il y a un ordre de priorité des symboles à respecter.

Ordre	Opérateurs
1	( )
2	$\neg$
3	$\wedge$
4	$\vee$
5	$=, \neq, <, >, \leq, \geq$

Rappel: forme booléenne

Une forme booléenne est une expression comportant une ou des variables qui devient un énoncé booléen (proposition) lorsqu'on assigne des valeurs à chacune de ses variables.

Exemples

- $x + 4 = 8$
- $x - y \leq 22$
- x est pair

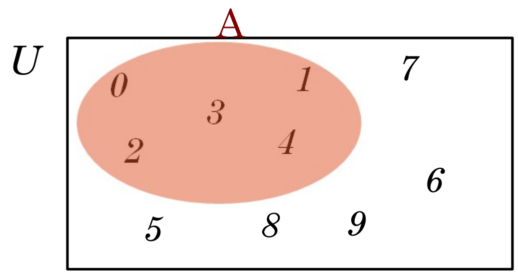
Forme booléenne et ensembles

- En associant un ensemble de valeurs à une forme booléenne, on indique pour quelles valeurs nous désirons déterminer le résultat de la forme booléenne.

Considérons l'ensemble *U* ci-contre et le sous-ensemble *A* défini par:

$$A = \{x \in U | x \leq 4\}$$

On peut « lire » l'expression comme suit:
« L'ensemble A est égal à toutes valeurs l'ensemble U qui sont plus petites ou égale à 4 ».



En langage mathématique, $\{x \in U | x \leq 4\}$ signifie *« Pour tout x appartenant à U, où $x \leq 4$ »*

∀ Quantificateur universel

La **quantification universelle** d'une forme booléenne *P(x)* est la proposition « *P(x)* est vraie pour toutes les valeurs de *x* dans l'ensemble de référence ».

Symboliquement, on l'écrit comme suit:

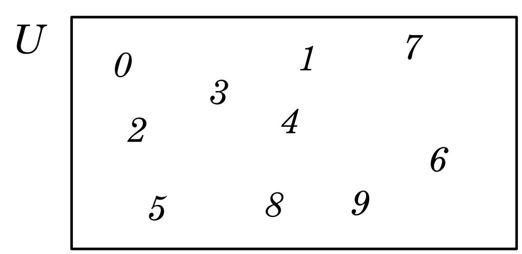
$$\forall\, x \in U, P(x)$$

Le symbole ∀ est appelé **quantificateur universel**.

Exemple:

Q. Est-ce que les propositions suivantes sont vraies?

- $\forall\, x \in U, x > 4$
- $\forall\, x \in U, x \in \mathbb{Z}$
- $\forall\, x \in \mathbb{Z}, 1/x \in \mathbb{Z}$



$\exists$ Quantificateur existentiel

La **quantification existentiel** d'une forme booléenne *P(x)* est la proposition « Il existe au moins un élément de x de l'ensemble de référence tel que *P(x)* est vraie ».

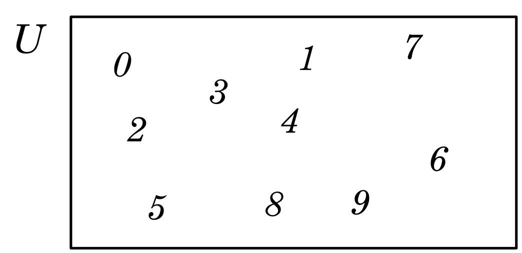
Symboliquement, on l'écrit comme suit:

$$\exists\, x \in U, P(x)$$

Le symbole $\exists$ est appelé **quantificateur existentiel**.

Exemple:
Q. Est-ce que les propositions suivantes sont vraies?

- $\exists\, x \in U, x > 8$
- $\exists\, x \in \mathbb{Z}, x^2 - 4 = 0$



Quantification et simplification

- Il est <u>partiellement possible</u> d'appliquer une simplification de distributivité à un quantificateur universel ou existentiel.
- Il faut cependant être prudent, car ce n'est pas possible à la fois pour $\wedge$ *et* $\vee$.

(rappel)
Distributivité

- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Quantification universelle et conjonction

- On peut distribuer le quantificateur universel sur la conjonction($\wedge$), mais ce n'est pas possible sur la disjonction($\vee$).
- Symboliquement, on a donc l'équivalence logique suivante:

$$\forall\, x \in U, P(x) \wedge Q(x) \Leftrightarrow (\forall\, x \in U, P(x) \wedge \forall\, x \in U, Q(x))$$

Contre-exemple pour la disjonction:

$\forall\, x \in \mathbb{N}, x\ est\ pair\ ou\ x\ est\ impair$

Si on distribue, ça donne

$$(\forall\, x \in \mathbb{N}, x\ est\ pair) \vee (\forall\, x \in \mathbb{N}, x\ est\ impair)$$

L'équivalence est fausse, car les 2 propositions résultantes sont fausses (tous les nombres naturels ne sont pas pairs, et tous les nombres naturels ne sont pas impairs).

Quantification existentielle et conjonction

- On peut distribuer le quantificateur existentiel sur la disjonction($\vee$), mais ce n'est pas possible sur la conjonction($\wedge$).
- Symboliquement, on a donc l'équivalence logique suivante:

$$\exists\ x \in U, P(x) \vee Q(x) \Leftrightarrow (\exists\ x \in U, P(x) \vee \exists\ x \in U, Q(x))$$

Contre-exemple pour la disjonction:

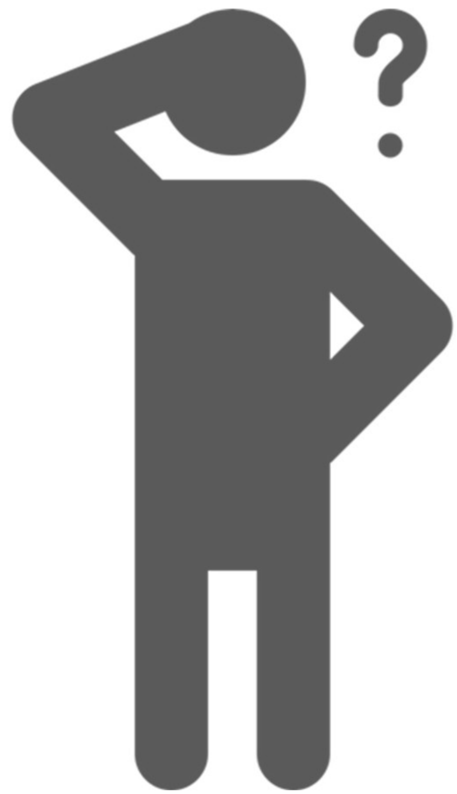
La proposition suivante est fausse, car un nombre ne peut pas être à la fois pair et impair.

$\exists\ x \in \mathbb{N}, x\ est\ pair\ et\ x\ est\ impair$

Cependant, si on distribue, ça donne une proposition vraie.

$$(\exists\ x \in \mathbb{N}, x\ est\ pair)\ \wedge\ (\exists\ x \in \mathbb{N}, x\ est\ impair)$$

Questions ?



Exemples en classe

L'image provient de www.flaticon.com

Exemple de quantification

Donner la valeur de vérité en justifiant votre affirmation

- $\forall\ x \in \mathbb{Z}, x \geq 1\ ou\ x < 1$

Solution:

La proposition est vraie puisque tout nombre entier est soit plus grand ou égal à 1, soit plus petit que 1

Exemple de quantification

Donner la valeur de vérité en justifiant votre affirmation

- $\forall\, x \in \mathbb{Z}, x > 0$

Solution:

La proposition est fausse puisqu'il existe au moins un nombre entier qui est plus petit ou égal à zéro!

Exemple de quantification

Donner la valeur de vérité en justifiant votre affirmation

- $\exists\ x \in \mathbb{Z}, x \geq 1\ et\ x < 1$

Solution:

La proposition est fausse, puisqu'aucun nombre entier n'est à la fois plus grand ou égal à 1 et plus petit que 1

Exemple de quantification

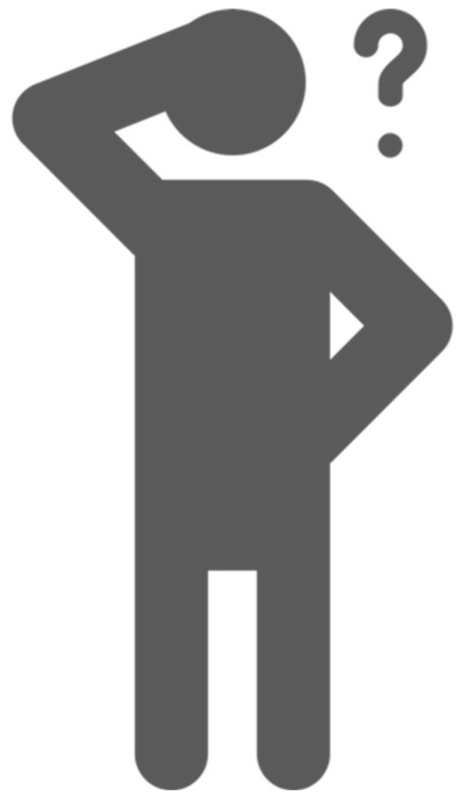
Donner la valeur de vérité en justifiant votre affirmation

- $\exists\, x \in \mathbb{Z}, x \geq 1\ ou\ x < 1$

Solution:

La proposition est vraie, puisqu'il existe au moins un nombre entier qui est soit plus grand ou égal à 1 ou plus petit que 1

Questions ?



Prochains cours

- Prochain Cours:
  - Travail en classe (Lab 2)
- Cours Suivant:
  - Révision
- Cours d'après:
  - Examen formatif
- Cours d'ensuite (date à venir):
  - Examen #1

#4, 5, 6, 7, 10, 11 12, 13, 14

* Vars

Icônes: https://www.flaticon.com