Algèbre de Boole

Opérateurs booléens

L’ordinateur: machine numérique

Plan de match

- Pourquoi l'algèbre de Boole ?
- Définition : énoncé booléen
- Opérateurs booléens
  - négation,
  - conjonction,
  - disjonction,
  - Conditionnelle,
  - …

Dans votre livre:
Chapitre 5.1: Algèbre des propositions.

Pourquoi l’algèbre de Boole?

- Nos ordinateurs parlent un langage fait de noir ou de blanc, le binaire, soit une série de 0 et de 1.
- L’algèbre de Boole est le fondement des circuits logiques que composent les ordinateurs.
- Utilisé dans la programmation et les structures de contrôle (Boucles et conditionnelles : IF, FOR, WHILE)
- Base des systèmes numériques et des réseaux
- Partout où l’on trouve de l’informatique!

```
01101100 01100101 00100000
01100010 01101001 01101110
01100001 01101001 01110010
01100101 00100000 01100011
00100111 01100101 01110011
01110100 00100000 01100011
01101111 01101111 01101100
```

Algèbre de Boole

- L'algèbre de Boole est une algèbre dans laquelle les variables n'ont que deux valeurs possibles, appelées valeurs de vérité.
  - **VRAI (V ou 1)**
  - **FAUX (F ou 0)**

- Les variables booléennes sont essentielles en programmation:
  - Les décisions (conditions) d'exécution du code dans un programme sont définies à l'aide de variables booléennes et des principes de l'algèbre de Boole.

Algèbre de Boole!

```
Si la condition est vraie Alors
    Opération V1
    Opération V2
    …
    Opération VN
Sinon
    Opération F1
    Opération F2
    …
    Opération FN
```

Définition mathématique: proposition

Une proposition (ou énoncé booléen) est un énoncé dont on peut décider de la valeur de vérité. Les valeurs de vérité possibles sont « vraie » (représenté par V ou 1) et « faux » (représenté par F ou 0).

Énoncé booléens valides

- Paris est la capitale de la France.
- Rome est la capitale de la Belgique.
- 2+2=7.
- 2+2=4.

Pas des énoncés booléens

- Quelle est la température extérieure?
- Faites tous vos exercices.
- x+3=5

« x+3=5 » est appelée **forme booléenne**. Une forme booléenne devient un énoncé booléen lorsqu'on affecte une valeur à chacune des variables présente dans la forme

Opérateurs booléens

- Un énoncé booléen peut être composé de plusieurs énoncés simples reliés par des opérateurs booléens.
- La valeur de vérité d'un énoncé composé dépend
  - des valeurs de vérité des énoncés simples qui le composent
  - et des opérateurs reliant ces énoncés simples.
- Afin de visualiser les possibilités d’un énoncé composé, nous utilisons des **tables de vérité**.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\neg$ Négation (« NON »)

- Soit *p* un énoncé booléen (ou proposition). La négation de *p*, notée $\neg p$ et qui se lit « non *p* », est également un énoncé booléen qui est vrai lorsque *p* est faux et qui est faux lorsque *p* est vrai.

- La table de vérité est donnée comme suit :

p	$\neg p$
0	1
1	0

Déterminer la négation des propositions suivantes et donner leur valeur de vérité.

- p: Ottawa est la capitale du Canada
- q: $2 + 5 = 9$
- r: Jean(32 ans) à moins de 18 ans
- $\neg p$:
- $\neg q$:
- $\neg r$:

$\wedge$ Conjonction (« ET »)

- Soit *p* et *q* deux propositions.
  La proposition composée notée $p \wedge q$, qui se lit « *p* et *q* », est vraie si les deux propositions *p* et *q* sont vraies et elle est fausse dans les autres cas.

- La table de vérité est donnée comme suit :

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes.

- p: 5 est plus grand que 0
  q: 5 est plus petit que 8

- p: Rimouski est à l'ouest de Québec
  q: Gaspé est à l'est de Rimouski

$\vee$ Disjonction (« OU »)

- Soit *p* et *q* deux propositions.
  La proposition composée notée $p \vee q$, qui se lit « *p* ou *q* », est vraie si au moins l'une des deux propositions simples est vraie et elle est fausse lorsque les deux sont fausses.

- La table de vérité est donnée comme suit :

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes.

- p: 5 est plus grand que 0
  q: 5 est plus petit que 8

- p: Rimouski est à l'ouest de Québec
  q: Gaspé est à l'est de Rimouski

Tautologie (« toujours vrai »)

- Une tautologie, notée *t*, est un énoncé composé qui est <u>toujours vrai quelle que soit la valeur de vérité de ses composantes</u>.
- L'énoncé $p \vee \neg p$ est une tautologie, comme sa table de vérité, donnée ci-bas permet de le constater.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
0	1	1
1	0	1

Exemple de Tautologie:
p: Charles peut porter ou non une tuque

Contradiction (« toujours faux »)

- Une contradiction, notée *c*, est un énoncé composé qui est toujours faux quelle que soit la valeur de vérité de ses composantes.
- L'énoncé $p \wedge \neg p$ est une contradiction, comme sa table de vérité, donnée ci-bas permet de le constater.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
0	1	0
1	0	0

Exemple de contradiction:
À l'épicerie, lorsque l'on exige « *8 articles et moins* » pour utiliser la caisse rapide.

$\oplus$ Disjonction exclusive (« OU exclusif »)

- Soit *p* et *q* deux propositions.
  La proposition composée notée $p \oplus q$, qui se lit « *p* ou exclusif *q* », est vraie si une seule des deux propositions simples est vraie et elle est fausse dans les autres cas.

- La table de vérité est donnée comme suit :

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes.

- p: 5 est plus grand que 0
  q: 5 est plus petit que 8

- p: 8 est plus grand que 0
  q: 8 est plus grand que 10

$\rightarrow$ Conditionnelle (« SI - ALORS »)

- Soit *p* et *q* deux propositions.
  La proposition composée notée $p \rightarrow q$, qui se lit « si *p* alors *q* », est fausse lorsque la proposition *p* est vraie et que la proposition *q* est fausse, et elle est vraie dans tous les autres cas.

- Ici **p** est la **condition** et **q** est le **résultat**

- est donnée comme suit :

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Déterminer la valeur de vérité des conditionnelles suivantes.

- $p \rightarrow q$: S'il pleut dehors, **alors** le sol est mouillé
- $y \rightarrow x$: Si tu passes l'examen, alors tu recevras un prix
- $r \rightarrow s$: si 5 est plus grand que 0, alors 5 est plus grand que 8

$\rightarrow$ Réciproque et contraposée

- Soit $p \rightarrow q$ une conditionnelle.
  - $q \rightarrow p$ est appelée **conditionnelle réciproque**.
  - $\neg q \rightarrow \neg p$ est appelée **conditionnelle contraposée**

Écrire la réciproque et la contraposée des implication suivantes.

- $p \rightarrow q$: si vous conduisez à plus de 110 km/h, alors vous aurez une contravention.
- $r \rightarrow s$: si vous n'avez pas fait vos exercices, alors vous échouerez votre cours.

$\leftrightarrow$ Biconditionnelle (« SI et seulement SI »)

- Soit *p* et *q* deux propositions. La proposition composée notée $p \leftrightarrow q$, qui se lit « *p* si et seulement si *q* », est vraie lorsque les deux propositions ont la même valeur de vérité; elle est fausse dans les autres cas.

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemple:
L'énoncé « *je vais te reconduire en voiture si et seulement si il pleut* » est un énoncé biconditionnel.

$\Longrightarrow$ Implication logique

- Soit *P* et *Q* deux énoncés composés. On dit que *P* implique logiquement *Q* si l'énoncé $P \to Q$ est une tautologie.
  On note alors $P \Rightarrow Q$.

- En d'autres mots, c'est une conditionnelle où la situation *P* = VRAI et *Q* = FAUX est impossible.

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
~~1~~	~~0~~	~~0~~
1	1	1

Exemple:
L'énoncé « $p \wedge q \to q$ » est une implication logique.
- p: il pleut
- q: le gazon est mouillé
- S'il pleut et S'il le gazon est mouillé alors le gazon est mouillé

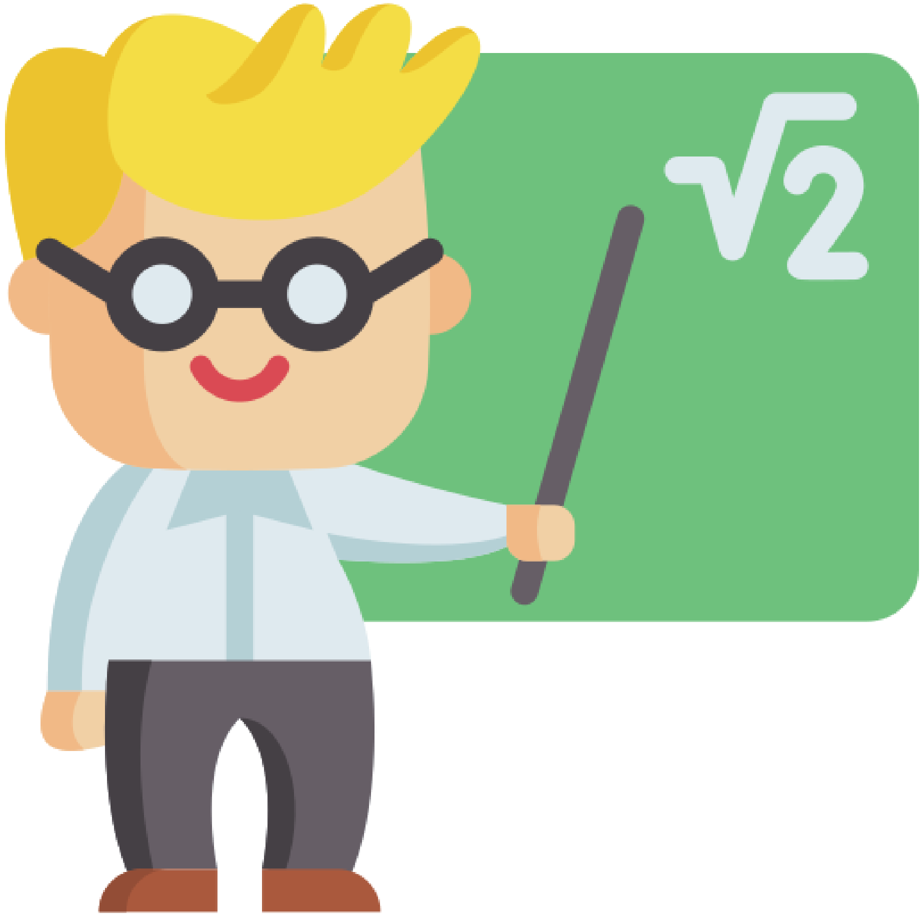
$\Leftrightarrow$ Équivalence logique

- Soit *P* et *Q* deux énoncés composés.
  On dit que *P* et *Q* sont logiquement équivalents si l'énoncé $p \leftrightarrow Q$ est une tautologie. On note alors *P*⟺*Q* ou *P*≡*Q*
- En d’autres mots, c’est une bidirectionnelle où le résultat est toujours VRAI.

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
~~0~~	~~1~~	~~0~~
~~1~~	~~0~~	~~0~~
1	1	1

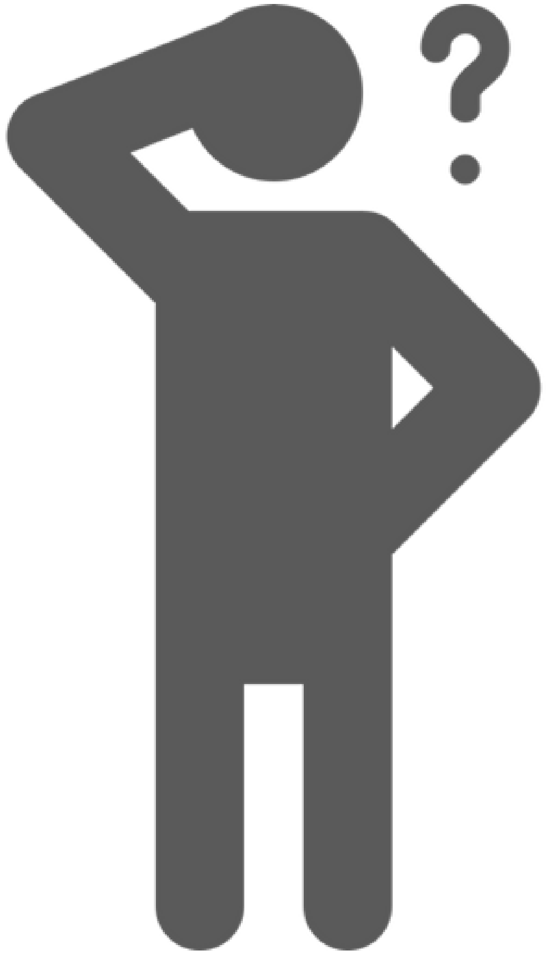
Exemple:
Montrer que $\neg(p \rightarrow q)$ et $p \wedge \neg q$ sont logiquement équivalentes

Exemples en classe



L'image provient de www.flaticon.com

Questions ?



Tâches du jour

L’ordinateur: machine numérique

Lab 1:
Algèbre Booléen - propriétés des opérateurs

Le document est disponible via LÉA, section « Algèbre de Boole »

Laboratoire 1
420-123-RK L'ordinateur: machine numérique

Algèbre Booléen - propriétés des opérateurs

1. (1 point) Indiquez, pour chacun des énoncés suivants, s'il s'agit d'une proposition ou non, ou s'il s'agit d'une forme booléenne
   (a) Une voiture bleue.
   (b) Bill Gates est le président des États-Unis d'Amérique
   (c) $x \cdot 4 \geq 25$
   (d) Le fleuve St-Laurent est le plus long fleuve du Canada
2. (1 point) Construisez la table de vérité de l'énoncé composé suivant:
$$[(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)] \wedge (\neg q \vee p)$$
3. (1 point) Construisez la table de vérité de l'énoncé composé suivant:
$$[(p \rightarrow \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg p)] \wedge [(q \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow q)]$$
4. (0,5 points) Indiquez si l'énoncé suivant est une tautologie:
$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$
5. (0,5 points) Indiquez si l'énoncé suivant est une contradiction:
$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q)$$
6. (2 points) Indiquez pour quelles valeurs de p, q, r et s l'énoncé suivant est vrai:
$$([(\neg p \wedge s) \wedge (q \vee \neg s)] \vee (\neg r \wedge \neg q)) \wedge [(s \vee \neg q) \wedge (r \vee s)]$$

Remise

À remettre au plus tard le mardi 30 août 2022 à 23h50 via Léa: un document manuscrit numérisé (PDF) ou un document électronique (Word ou autre).

Icône: Line icon for binary mind 3329521 Vector Art at Vecteezy

Prochains cours

- Prochain cours:
  - Lab 1: Opérateurs booléens (6 %) (travail en classe)
- Cours d’après:
  - Algèbre de Boole - simplifications