

## *Algèbre de Boole*

# Simplification d'énoncés

L'ordinateur: machine numérique

# Plan de match

---

- Principe: simplification d'énoncés
- Propriétés des opérateurs
- Procédures de simplification
- Exercices en classe



**Dans votre livre:**  
Chapitre 5.3: Simplification d'énoncés.

# Principe – simplification d'énoncés

---

- Les opérateurs booléens ont des **propriétés** que l'on peut écrire à l'aide des équivalences logiques.
- Ces équivalences sont utilisées pour simplifier les énoncés booléens complexes.

# Propriétés

---

- Les propriétés présentées dans les prochaines diapositives partent tous de la prémisse suivante:

Soit  $p$ ,  $q$  et  $r$  des énoncés booléens,  $t$  une tautologie et  $c$  une contradiction,  $\wedge$ ,  $\vee$  et  $\neg$  les opérations de conjonction et négation respectivement. Ces opérations satisfont alors aux propriétés suivantes:

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$p \vee q$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

# Idempotence et associativité

---

- **Idempotence**

- $p \wedge p \equiv p$

- $p \vee p \equiv p$

- **Associativité**

- $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

- $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

# Commutativité et Distributivité

---

- **Commutativité**

- $p \vee q \equiv q \vee p$

- $p \wedge q \equiv q \wedge p$

- **Distributivité**

- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

# Élément absorbant et élément neutre

---

- **Élément absorbant**

- $p \vee t \equiv t$

- $p \wedge c \equiv c$

- **Élément neutre**

- $p \wedge t \equiv p$

- $p \vee c \equiv p$

# Complémentarité et involution

---

- **Complémentarité**

- $p \vee \neg p \equiv t$

- $p \wedge \neg p \equiv c$

- $\neg t \equiv c$

- $\neg c \equiv t$

- **Involution**

- $\neg\neg p \equiv p$



## Loi de Morgan et négation de la conditionnelle

- **Loi de Morgan**

- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

- **Négation de la conditionnelle**

- $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

		Q		R		
p	q	$p \rightarrow q$	$\neg Q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg Q \leftrightarrow R$
0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1

Questions ?



# Exemples en classe

---



L'image provient de [www.flaticon.com](http://www.flaticon.com)

# Exemple de simplification

---

- Démontrer la propriété  $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv p$

# Solution

---

**Solution:**

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) &\equiv p \wedge (q \vee \neg q) && \text{par la distributivité} \\ &\equiv p \wedge t && \text{par la complémentarité} \\ &\equiv p && \text{car } t \text{ est neutre pour } \wedge\end{aligned}$$

# Exemple de simplification

---

- Démontrer la propriété  $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

# Solution

---

**Solution:**

$$\begin{aligned} p \vee (p \wedge q) &\equiv (p \wedge t) \vee (p \wedge q) && \text{par l'élément neutre} \\ &\equiv p \wedge (t \vee q) && \text{par la distributivité} \\ &\equiv p \wedge t && \text{car } t \text{ est absorbant pour } \vee \\ &\equiv p && \text{car } t \text{ est neutre pour } \wedge \end{aligned}$$

# Exemple de négation

---

- Donner la négation de l'expression  
$$p \wedge (r \vee \neg q)$$



# Solution

---

**Solution:**

$$\begin{aligned}\neg[p \wedge (r \vee \neg q)] &\equiv \neg p \vee \neg(r \vee \neg q) && \text{par la loi de Morgan} \\ &\equiv \neg p \vee (\neg r \wedge \neg\neg q) && \text{par la loi de Morgan} \\ &\equiv \neg p \vee (\neg r \wedge q) && \text{par l'involution}\end{aligned}$$

*La négation est donc  $\neg p \vee (\neg r \wedge q)$*

Questions ?



# Pour vous pratiquer...

---

## Exercices formatifs

- Livre, chapitre 5.4 (p.111)
  - Nos 1, 2 et 3

# Prochains cours

---

- Prochain cours :
  - Algèbre de Boole - les quantificateurs
  - Lab 2 – simplification et quantification
- Cours suivant:
  - Travail en classe (Lab 2)