Projet de fin d'étude

Calcul de valeurs propres : Théorie et méthodes numériques

Réalisé par :
Ayoub Elhassani

Sous l'encadrement de :
Pr. Karim Kreit

Membre du jury :
Pr. Mehdi Zahid
Pr. Noureddine Alaa
Pr. Abdeslem Hafid Bentbib
Pr. Karim Kreit

Année universitaire :
2020/2021

Le 28/06/2021

Table des matières

Remerciement :

Avant de présenter mon projet de fin d'étude, je tiens à remercier Monsieur Karim Kreit mon encadrant, ainsi Monsieur Abdeslem Hafid Bentbib pour tout l'aide qu'ils m'ont apporté et leurs patience, leurs conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intérêt .

J'adresse aussi mes remerciements aux membres du jury, Monsieur Nour Eddine Alaa et Monsieur Mehdi Zahid, d'avoir accepter de juger ce projet.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Chapitre 1

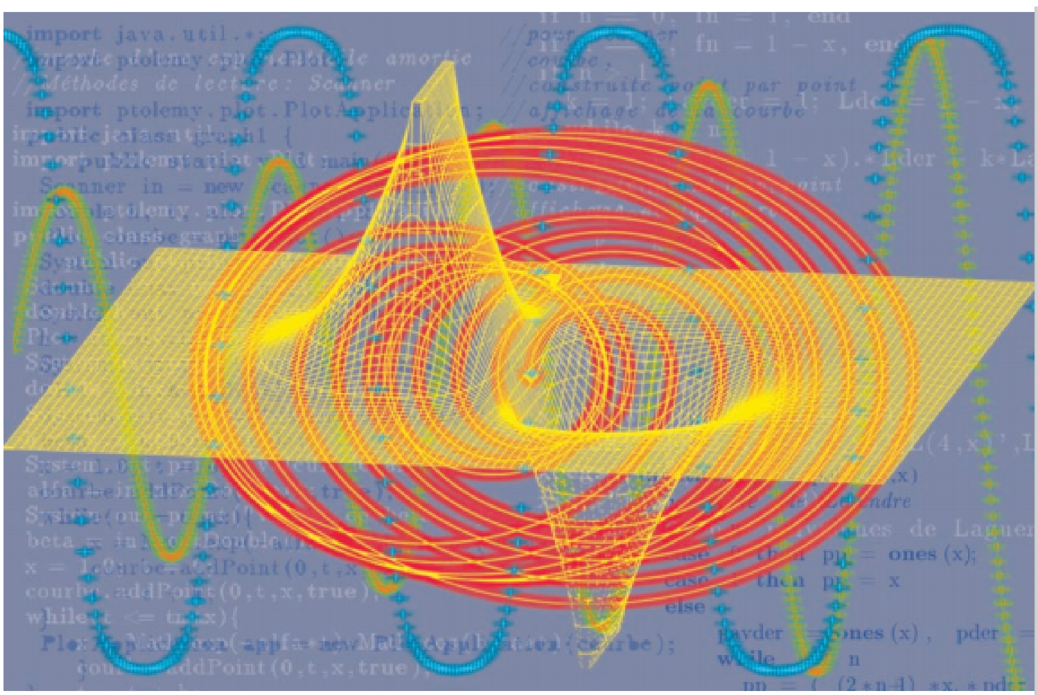
Introduction

Les valeurs propres sont des nombres calculés par des méthodes applicables sur une matrice. Ces nombres sont associés à des vecteurs appelés les vecteurs propres, qu'ils permettent d'exprimer la matrice sous une forme simplifiée et puis rendre le calcul facile. Le calcul de ces valeurs et leurs vecteurs propres associés est un des problèmes les plus importants en mathématique modernes et en particulier dans l'analyse numérique linéaire, alors à quoi sert le calcul de ces valeurs dans la pratique ?

Les techniques requérant la connaissance du spectre de matrices sont utilisées dans des domaines aussi variés que la mécanique quantique, l'analyse des structures, la théorie des graphes, les modèles de l'économie et le classement des pages de la toile informatique par les moteurs de recherche.

Par exemple, en mécanique des structures, les problèmes de résonances ou de vibrations de structures mécaniques, décrits par l'analyse spectrale, se ramènent à des calculs de valeurs et de vecteurs propres. Les problèmes non symétriques de valeurs propres apparaissent dans l'analyse de la stabilité de systèmes dynamiques. Dans un tout autre domaine, la chimie quantique donne lieu à des problèmes symétriques aux valeurs propres qui peuvent être gigantesques, tant par leur taille que par le nombre de valeurs et de vecteurs propres à extraire. On peut également mentionner que la décomposition aux valeurs singulières, qui est une sorte de généralisation de la décomposition spectrale classique, est primordiale en statistique et dans les problèmes de la « nouvelle économie » (reconnaissance de formes, fouille de données, traitement du signal, exploitation de données, etc.).

Les problèmes de valeurs propres sont très riches, tant par leur variété que par le type de matrices que l'on doit traiter et par les méthodes et algorithmes de calcul à utiliser : les matrices peuvent être symétriques ou non symétriques, creuses ou pleines, et les problèmes peuvent être classiques ou généralisés ou même quadratiques. Il existe des applications qui requièrent le calcul d'un très petit nombre de valeurs propres, d'autres au contraire un grand nombre de valeurs propres ou même tout le spectre. On essaiera donc de survoler les outils permettant de résoudre ces différents cas.



Chapitre 2

Notion Mathématique

2.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Dans ce chapitre : $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$
$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $m \times n$ (à m lignes et n colonnes).
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$.

Définition 2.1 *Soit A une matrice de taille $n \times n$, on dit que v est un vecteur propre de A s'il existe un vecteur non nul v tel que :*

$$Av = \lambda v$$

λ est appelé valeur propre de A, et v vecteur propre de A correspondant à λ.

Remarque 2.1 *:*

- *Le spectre de A est l'ensemble des valeurs propres de A , et on le note $sp(A)$.*
- *Même si A est réel, les valeur propres et les vecteurs propres peuvent être complexes.*
- *Si v est un vecteur propre, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, αv est aussi un vecteur propre.*

2.1.1 Polynôme caractéristique

Définition 2.2 (Inverse d'une matrice) *Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :*

$$AB = BA = I_n.$$

Une matrice B vérifiant la relation précédente est unique, elle s'appelle matrice inverse de A et se note A^{-1}.

Définition 2.3 (Matrices semblables) *On dit que deux matrices A et B sont semblables s'il existe une matrice inversible P telle que :*

$$A = PBP^{-1}.$$

Définition 2.4 *: Le polynôme caractéristique d'une matrice A est :*

$$P_A(X) = det(A - XI_n)$$

avec I_n la matrice identité de taille n.

Proposition 2.1 *Deux matrice semblables ont la même polynôme caractéristique.*

Démonstration 2.1 *En effet, A et B sont semblables, alors on sait qu'il existe $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$, On écrit :*

$$B - XI_n = P^{-1}(A - XI_n)P$$

alors :

$$P_B(X) = det(B - XI_n) = \frac{1}{det(P)} det(A - XI_n) det(P) = det(A - XI_n) = P_A(X).$$

Proposition 2.2 *On a $\lambda \in Sp(A)$ si et seulement si λ est une racine de P_A, c'est à dire :*

$$\lambda \textit{ valeur propre de } A \iff P_A(\lambda) = 0.$$

Démonstration 2.2

$$\begin{aligned} \lambda \textit{ est une valeur propre de } A &\iff \exists v \neq 0, Av = \lambda v \\ &\iff \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \\ &\iff A - \lambda I_n \textit{n'est pas inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I_n) = 0 \\ &\iff P_A(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Proposition 2.3 *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, toute matrice admet au moins une valeur propre.*

Démonstration 2.3 *Une valeur propre est une racine du polynôme caractéristique de la matrice A et on sait d'après le théorème de d'Alembert que tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

Proposition 2.4 *Toute matrice $n{\times}n$ admet au plus n valeurs propres.*

En effet, nous savons qu'un polynôme de degré n admet au plus n racines, c'est à dire qu'un polynôme de degré n ne peut avoir plus que n racines.

2.2 Sous-espace propre

Définition 2.5 *Soit λ une valeur propre, on appelle un sous-espace propre associé à λ l'espace vectoriel :*

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = \lambda x\} = \ker(A - \lambda I_n).$$

Rappel 2.1 *Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, la somme de E_1 et E_2 est :*

$$E_1 + E_2 = \{v_1 + v_2, v_1 \in E_1 et\ v_2 \in E_2\}.$$

On dit que E_1 et E_2 sont en somme directe si $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Théorème 2.1 *Les sous-espaces propres d'une matrice A associes à des valeurs propres distinctes de A sont en somme directe.*

Démonstration 2.4 *Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{K}$, $p{\leq}n$ les valeurs propres distinctes deux à deux de A et soient $E_{\lambda_1}, ...E_{\lambda_p}$ les sous-espaces propres associes dans $\mathbb{K}_n$, par récurrence sur le nombre de sous-espaces propres :*
Pour un seul sous-espace propre est trivialement en somme directe, car la seule décomposition du vecteur nul est le vecteur nul.
Supposons le résultat est vrai pour k-1 sous-espaces propres avec $k \leq p$ prenons $x_i \in E_{\lambda_i}$, $i = 1, ..., k$ tel que :

$$x_1 + x_2 + ... + x_k = 0$$

multiplions cette relation par λ_k, il vient :

$$\lambda_k x_1 + \lambda_k x_2 + ... + \lambda_k x_k = 0$$

multiplions également cette égalité par la matrice A, il vient :

$$Ax_1 + Ax_2 + ... + Ax_k = \lambda_k x_1 + \lambda_k x_2 + ... + \lambda_k x_k = 0$$

par soustraction des deux égalités obtenues ou dessus , on aura :

$$(\lambda_k - \lambda_1)x_1 + (\lambda_k - \lambda_2)x_2 + (\lambda_k - \lambda_{k-1})x_{k-1} = 0$$

posons $y_i = (\lambda_k - \lambda_i)x_i \in E_{\lambda_i}$, i=1,...,k-1 , on obtient une décomposition de vecteur nul sur k-1 sous-espaces propres.
Or on a supposé que les valeurs propres sont distincts, alors $(\lambda_k - \lambda_i) \neq 0$.
Par conséquent $x_i = 0$ pour $i = 1, ..., k-1$
alors d'après la première relation, on déduit que λ_k = 0, et les sous-espaces propre sont bien en somme directe.

Corollaire 2.1 *Si $x_1, ..., x_n$ sont des vecteurs propres d'une matrice A respectivement associés à des vecteurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ deux à deux distinctes alors la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre.*

Démonstration 2.5 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété soit vraie. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, $n+1$ vecteurs propres d'une matrice A, associés aux valeurs propre $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ (distinctes). Soient a_i des scalaires tels que*

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1}x_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad (\star)$$

On applique A à l'égalité et par linéarité, il vient :

$$a_{n+1}Ax_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} a_i A x_i.$$

Or, on a par définition $Ax_i = \lambda_i x_i$ pour tout $i \in [1, n+1]$, donc

$$\lambda_{n+1}(a_{n+1}x_{n+1}) = -\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i x_i$$

On utilise $(\star)$ à gauche de l'égalité :

$$\Rightarrow \quad \lambda_{n+1}\left(-\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = -\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i x_i$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\left(\lambda_{n+1} - \lambda_i\right) x_i = 0$$

or $x_1, \ldots, x_n$ est une famille de n vecteurs propres associée à des valeurs propres distinctes, donc elle est libre, donc $\forall i = 1 \ldots n$, on a $a_i\left(\lambda_1 - \lambda_i\right) = 0$. Les λ étant distincts, on a donc $a_i = 0, \forall i = 1 \ldots n$
en reportant dans l'égalité de départ, on obtient $a_{n+1} x_{n+1} = 0$. Donc $a_{n+1} = 0$ car $x_{n+1} \neq 0$.
Donc tous les a_i sont nuls et la famille est libre.

Corollaire 2.2 *Si A est une matrice $n \times n$ posséde n valeurs propres distincts, l'ensemble des vecteurs propres associés forment une base.*

2.3 Matrice diagonalisable

Définition 2.6 (Transposée d'une matrice) *La matrice transposée de la matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est la matrice $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ telle que $b_{i,j} = a_{j,i}$.*
En d'autres termes les lignes de la matrice A deviennent les colonnes de la matrice B et les colonnes de la matrice A deviennent les lignes de la matrice B, et noté par A^t.

Définition 2.7 (Matrice diagonalisable) *Une matrice est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale*

Proposition 2.5 *Une matrice A est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres de A.*

Démonstration 2.6 *Supposons qu'il existe $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ base de $\mathbb{K}^n$ telle que $Ax_i = \lambda_i x_i$, alors la matrice A' de l'application linéaire $x \longrightarrow Ax$ dans la base $\mathcal{B}$ est diagonal, ses éléments diagonaux étant les valeurs propres λ_i. Si P designe la matrice de passage de la base canonique dans $\mathcal{B}$, on a bien que :*

$$A' = P^{-1} A P$$

donc A et A' semblables, d'où A est diagonalisable.
Réciproquement, on suppose que A semblable à une matrice diagonable A', c'est-à-dire qu'il existe P inversible telle que $A' = P^{-1}AP$.
Interprétons P comme la matrice de passage de la base canonique à une autre base $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, alors on voit que $(Ax_i)_\mathcal{B} = A'e_i = \lambda_i e_i$, on effet $(x_i)_\mathcal{B} = e_i$.
On en déduit que $(Ax_i)_\mathcal{B} = \lambda_i (x_i)_\mathcal{B}$, donc $Ax_i = \lambda_i x_i$ et les x_i forment une base de vecteurs propres de A.

Théorème 2.2 *Une matrice A est diagonalisable si et seulement si $\mathbb{K}^n$ est somme directe de sous-espaces propres.*

Démonstration 2.7 *En effet, la réunion de bases des sous-espaces propres forment alors une base de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres de A.*

2.3.1 Matrice Symétriques

Définition 2.8 *Une matrice A de taille $n \times n$ est symétrique si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si*

$$A = A^t$$

ou encore si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$.
Les coefficients sont donc symétriques par rapport à la diagonale.

Définition 2.9 *Une matrice A de taille $n \times n$ est antisymétrique si*

$$A^t = -A$$

c'est-à-dire si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$.

Théorème 2.3 *Soit $A = (a_{i,j=1,\ldots,n}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique ($A = A^t$), alors :*

- *Toutes les valeurs propres de A sont réelles.*
- *A est diagonalisable et il existe une matrice P orthogonale telle que $D = P^t AP$*
- *Il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, constituée de vecteur propre de A.*

Démonstration 2.8 *Soit v un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Donc :*

$$\bar{v}Av = \lambda \bar{v}^t v.$$

Prenons le conjugué de la transposée de ce même produit (rappelons que $(AB)^t = B^t A^t$)

$$\bar{\lambda}\left(\bar{v}^t v\right) = (\overline{\bar{v}^t A v})^t = \bar{v}^t \bar{A}^t v = \bar{v}^t A v = \lambda\left(\bar{v}^t v\right)$$

puisque A est symétrique. Donc $\lambda = \bar{\lambda}$: la valeur propre λ est réelle.

Proposition 2.6 *: Soit A une matrice de taille $n \times n$ symétrique, si x_1 et x_2 sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distincts, alors ils sont orthogonaux.*

Démonstration 2.9 *Soit λ_1, λ_2 les deux valeurs propres, on a :*

$$\begin{cases} Ax_1 = \lambda_1 x_1 \\ Ax_2 = \lambda_2 x_2 \end{cases}$$

Si on multiplie la première relation par le transposé-conjugué ($\bar{x}_2^t$) de x_2 et la seconde relation par le transposé-conjugué ($\bar{x}_1^t$) de x_1, il vient :

$$\begin{cases} \bar{x}_2^t A x_1 = \lambda_1 \bar{x}_2^t x_1 \quad (*) \\ \quad \bar{x}_1^t A x_2 = \lambda_2 \bar{x}_1^t x_2 \end{cases}$$

en prenant la transposée-conjuguée de la deuxième relation, sachant que λ_1 et λ_2 sont des valeurs réelles, cette deuxième relation devient :

$$(\overline{\bar{x}_1^t A x_2})^t = (\overline{\lambda_2 \bar{x}_1^t x_2})^t \quad \longrightarrow \quad \bar{x_2}^t A x_1 = \lambda_2 \bar{x_2}^t x_1$$

en soustrayant de la relation $(*)$:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{x_2}^t x_1$$

puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, il faut que : $\bar{x_2}^t x_1 = 0$
d'où x_1 et x_2 sont orthogonaux.

Proposition 2.7 *Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est antisymétrique ($A^t = -A$), alors toutes ses valeurs propres sont imaginaires pures.*

Démonstration 2.10 *Même étapes de la démonstration précédentes, on remplaçant A^t par $-A$ on trouve que :*

$$\lambda = -\bar{\lambda}.$$

2.4 Décomposition QR

Il existe différents moyens de décomposer une matrice quelconque. L'une des plus utilisée est la décomposition QR.

Définition 2.10 (Matrice orthogonal) *:*

- *On appelle matrice orthogonal de taille n toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :*

$$M^t M = I_n$$

I_n : matrice d'identité de taille n.

- *Une matrice est orthogonale si et seulement si ses colonnes et ses lignes forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.*

Théorème 2.4 *Si A est une matrice carrée de taille n inversible, alors il existe une unique matrice orthogonale Q et une unique matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs R telle que*

$$A = QR$$

Cette factorisation s'appelle la décomposition QR de la matrice A.

Démonstration 2.11

l'existence :

La matrice A étant inversible, ses colonnes, notées $a_1, \dots, a_n$ forment une base de $\mathbb{R}^n$. On peut alors obtenir une base orthonormée, $\{q_i\}_{1 \le i \le n}$ de $\mathbb{R}^n$ à partir de la famille $\{a_i\}_{1 \le i \le n}$ en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

$$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|_2}$$

$$q_{i+1} = \frac{a_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} < a_{i+1}, q_k > q_k}{\left\| a_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} < a_{i+1}, q_k > q_k \right\|_2} \quad i = 1, \dots, n-1$$

On en déduit alors que :

$$a_i = \sum_{j=1}^{i} r_{ij} q_j$$

avec

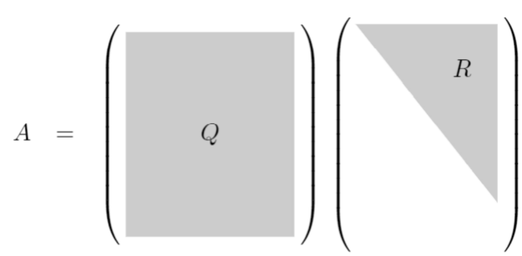
$$r_{ii} = \left\| a_i - \sum_{k=1}^{i-1} < a_i, q_k > q_k \right\|_2 > 0$$

$r_{ij} =< a_i, q_j >$ *pour* $\quad 1 \leq j \leq i-1$
et $r_{ij} = 0$ *pour* $i < j \leq n, 1 \leq i \leq n$.
En notant R *la matrice triangulaire supérieure (inversible) de coefficients* r_{ij} $1 \leq i, j \leq n$, *et* Q *la matrice orthogonale dont les colonnes sont les vecteurs* $q_i, 1 \leq i \leq n$, *on vient d'établir que* $A = QR$.
l'unicité :
Pour montrer l'unicité de la factorisation, on suppose qu'il existe deux décompositions QR :

$$A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$$

d'où : $Q_2^t Q_1 = R_2 R_1^{-1}$ *alors* $R_2 R_1^{-1}$ *est orthogonale (car égale à* $Q_1 Q_2^{-1}$ *). Elle est aussi triangulaire supérieure. Comme toute matrice triangulaire orthogonale est égale à l'unité, on en déduit que* $R_1 = R_2$ *et ainsi* $Q_1 = Q_2$.

Remarque 2.2 *Si la matrice* A *n'est pas inversible, elle peut toujours se décomposer sous la forme* $A = QR$, *mais cette fois on ne peut plus demander que les coefficients diagonaux de* R *soient strictement positifs ni que la décomposition soit unique.*



Remarque 2.3 *Il existe plusieurs méthodes pour réaliser cette décomposition :*

- *la méthode de Householder où Q est obtenue par produits successifs de matrices orthogonales élémentaires.*
- *la méthode de Givens où Q est obtenue par produits successifs de matrices de rotation plane.*
- *la méthode de Gram-Schmidt.*

2.4.1 La méthode de Householder

Définition 2.11 (Matrice de Householder) *On appelle matrice de Householder associée au vecteur $u \neq 0$, la matrice donnée par :*

$$H_u = \begin{cases} I_n - 2\dfrac{uu^t}{\|u\|^2} & \text{si } u \text{ est non-nul} \\ I_n & \text{si } u \text{ est le vecteur nul} \end{cases}$$

avec $u \in \mathbb{R}^n$, $u^{\mathbf{t}}$ le transposé de u et $\|u\|$ la norme de u.

Remarque 2.4

- *Toute matrice de Householder est symétrique et orthogonal.*
- *La matrice de Householder est la symétrie orthogonal par rapport à l'hyperplan perpendiculaire orthogonal à u.*

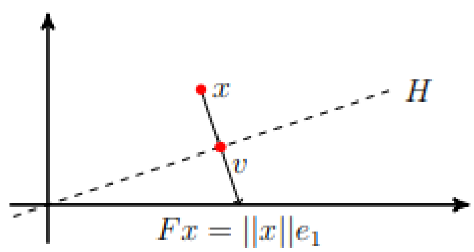
La méthode de Householder applique successivement des transformations $H_1A, H_2A, ...,$ sur les colonnes de A pour introduire des zéros sous la diagonale. Chaque matrice H_k est unitaire et agit en introduisant des zéros sous la diagonale de la colonne k, sans affecter les premières $k-1$ colonnes. La matrice H_k a la forme suivante

$$H_k = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}$$

où I est la matrice identité de taille $(k-1) \times (k-1)$ et F est une matrice unitaire de taille $(m-k+1) \times (m-k+1)$. Si on a une matrice avec des zéros sous la diagonale des $k-1$ premières colonnes, le produit par H_k est de la forme

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & B \\ 0 & FC \end{bmatrix}$$

On voit que le produit par H_k ne modifie que la sous-matrice inférieure droite. La sous-matrice FC doit avoir des zéros sous la diagonale de la première colonne. Si x est le vecteur première colonne de C, on veut $F_x = cste$, avec $e_1 = {}^t(1, 0, \ldots, 0)$. Comme F est unitaire, F doit préserver la norme de x, donc $F_x = \pm\|x\|e_1$. On veut donc envoyer x sur l'axe de la première coordonnée. Pour ce faire, on utilise le réflecteur de Householder.



L'idée du réflecteur est de réfléchir x orthogonalement à travers un hyperplan H. Le vecteur orthogonal à l'hyperplan H est $v = \|x\|e_1 - x$. On sait déjà comment envoyer x sur le plan H, à l'aide des projecteurs orthogonaux. Ce projecteur est le projecteur qui projette sur l'espace orthogonal à v, c'est à dire :

$$P_{\perp v} = I - \frac{vv^*}{v^*v}$$

(On divise pour normaliser v.) On ne veut pas aller sur H mais de l'autre côté. Le réflecteur sera donc

$$F = I - 2\frac{vv^*}{v^*v}$$

F est unitaire : On a $F = F^*$, ce qui implique que et $F^*F = F^2$ et $F^2 = I$. Le réflecteur F n'est pas unique. On aurait pu envoyer x sur $-\|x\|e_1$. Pour des raisons de stabilité numérique, on veut envoyer x le plus loin possible. Pour cela on choisit le signe inverse du signe de x_1, la première composante de x. Le vecteur v devient $v = -\operatorname{sign}(x_1)\,\|x_1\|\,e_1 - x$, ou de façon équivalente

$$v = \operatorname{sign}(x_1)\,\|x\|e_1 + x$$

Exemple 1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & -11 \\ 2 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x = (-1,-2,2)^T, \quad \|x\| = \sqrt{1+4+4} = 3, \quad \operatorname{sign}(x_1) = -1$$

$$v = -\operatorname{sign}(x_1)\,\|x\|e_1 - x = \|x\|e_1 - x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = I - 2\frac{vv^t}{v^tv} = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = P_1A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$x = (0,9)^t, \quad \|x\| = 9, \quad \operatorname{sign}(x_1) = 1$$

$$\mathbf{v} = -\|x\|\mathbf{e}_1 - x = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$P_2' = I - 2\frac{vv^t}{v^tv} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad P_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_2 = P_2 P_1 A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Q = P_1 P_2 = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Algorithme de la décomposition QR par Householder :

Données : Une matrice A de taille n.

Résultat : Une matrice orthogonal Q, et une autre triangulaire supérieur R.

$Q = I; \quad R = A$

pour $j = 1, n-1$ **faire**

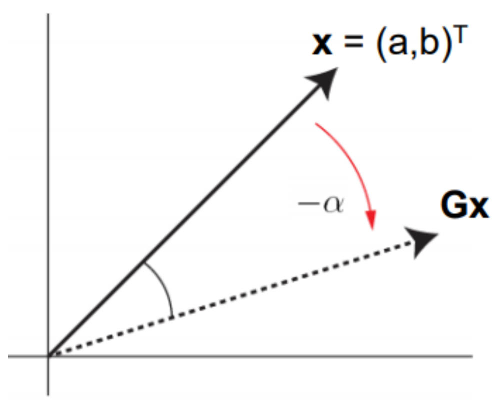
- $x = R(j:n, j)$
- $v = -\operatorname{sign}(x_1)\,\|x\| e_1 - x$
- **si** $\|v\| > 0$ **alors**
  - $v = v/\|v\|$
  - $P = I$
  - $P = P - 2 * v * v^t$
  - $R = P * R$
  - $Q = Q * P$

2.4.2 La méthode de Givens

La méthode de décomposition de Givens procède de la même idée de base que celle de Householder, mais en remplaçant les symétries par des rotations. Elle a la réputation d'être un peu plus complexe mais plus stable sur le plan calculatoire, c'est à dire plus fiable pour les systèmes mal conditionnés. La méthode de Givens de calcul de la décomposition QR d'une matrice A consiste à premultiplier A par une suite de matrices de rotation qui annulent successivement les coefficients en dessous de la diagonale de A. La matrice obtenue est donc triangulaire supérieure et le produit des matrices de rotation est l'inverse de la matrice orthogonale cherchée.

Définition 2.12 (Matrice de Givens) *La matrice de Givens est une matrice qui fait une rotation d'un vecteur $(a, b)^T$ dans un plan xy par un angle -α autour de l'origine :*

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$



avec $c = \cos(\theta)$ et $s = \sin(\theta)$.
Cette matrice est orthogonale et vérifie des propriétés semblables à celles de la matrice de Householder.

Nous pouvons utiliser la matrice G pour remettre à zéro les éléments et on considére :

$$G^t\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors :

$$c = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad s = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Généralisation pour les vecteurs de l'ordre n :

$$\mathbf{G_{ij}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & & s & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & -s & & c & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Pour mettre à zéro l'élément dans la j-ème rangée on a :

$$c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}}, \quad s = \frac{-x_j}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}}.$$

La forme de la matrice de rotation à l'élément de zérotage dans la rangée i-ème est :

$$G(i-1,i), avec \quad c = \frac{x_{i-1}}{\sqrt{x_{i-1}^2+x_i^2}}, \quad s = \frac{-x_i}{\sqrt{x_{i-1}^2+x_i^2}}$$

À l'aide des matrices de rotation, on aura :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \underset{\longrightarrow}{\mathrm{G}(2,3)^T} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \underset{\longrightarrow}{\mathrm{G}(1,2)^T} \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \underset{\longrightarrow}{\mathrm{G}(2,3)^T} \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} = R.$$

$$\left\{ G_p^T \dots G_1^T A = R \quad \Leftrightarrow \quad Q^T A = R \right\}$$

$$A = \mathrm{QR}, \quad Q = G_1 \dots G_p.$$

Exemple 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & -11 \\ 2 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour définir $A(3,1) = 0$, nous devons construire la matrice $G_1(1,2)$

$$c = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}, \quad s = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$G_1(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = G_1(2,3)^T A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2\sqrt{2} & 11\sqrt{2}/2 & 13\sqrt{2}/2 \\ 0 & -9\sqrt{2}/2 & 9\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Pour définir $A_1(2,1) = 0$, nous devons construire la matrice $G_2(1,2)$

$$\begin{array}{l} c = -1/3 \\ s = -2\sqrt{2}/3 \end{array} \qquad G_2(1,2) = \begin{pmatrix} -1/3 & -2\sqrt{2}/3 & \\ 2\sqrt{2}/3 & -1/3 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}_2 = \mathrm{G}_2(1,2)^t\ \mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -9\sqrt{2}/2 & -3\sqrt{2}/2 \\ 0 & -9\sqrt{2}/2 & 9\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Pour définir $A_2(3,2) = 0$, nous devons construire la matrice $G_3(2,3)$

$$\begin{array}{l} c = -\sqrt{2}/2, \\ s = -\sqrt{2}/2 \end{array} \qquad G_3(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = G_3(2,3)^t A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = R$$

$$\mathrm{Q} = \mathrm{G}_1(2,3)\mathrm{G}_2(1,2)\mathrm{G}_3(2,3) = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Algorithme de la décomposition QR par Givens :

Données : Une matrice A de taille n.

Résultat : Une matrice orthogonal Q, et une autre triangulaire supérieur R.

$Q = I; R = A$

pour $j = 1 : n$ **faire**

  pour $i = n : (-1) : j+1$ **faire**

    si $\|x_{i-1}, x_i\| > 0$ **alors**

      $c = \frac{x_{i-1}}{\|x_{i-1}, x_i\|}$

      $s = \frac{-x_i}{\|x_{i-1}, x_i\|}$

      $G = I$

      $G([i-1, i], [i-1, i]) = [c, s; -s, c]$

      $R = G^t R$

      $Q = QG$;

2.4.3 La méthode de Gram-Schmidt

L'idée de cette méthodes est d'orthonormaliser les vecteurs colonnes $(q_1, q_2, ..q_n)$ de la matrice A on utilisant la procédé d'orthonalisation de Gram-Schmidt :

$$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|_2}$$

$$q_{i+1} = \frac{a_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} < a_{i+1}, q_k > q_k}{\left\| a_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} < a_{i+1}, q_k > q_k \right\|_2} \quad i = 1, \ldots, n-1$$

alors :

$$Q = (q_1, q_2, q_2, q_3) \quad et \quad on \quad a \quad : Q^t A = Q^t Q R = R \quad (car \quad Q^t Q = I)$$

Exemple 3

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

Rappelons qu'une matrice orthogonale Q vérifie

$$Q^T Q = I.$$

On peut alors calculer Q par les moyens de Gram-Schmidt et on trouve :

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/7 & -69/175 & -58/175 \\ 3/7 & 158/175 & 6/175 \\ -2/7 & 6/35 & -33/35 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, on a

$$Q^T A = Q^T Q R = R$$

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}.$$

Algorithme de la décomposition QR par Gram-Schmidt :

Données : Une matrice A

Résultat : Une matrice orthogonale Q, et une autre triangulaire supérieur R.

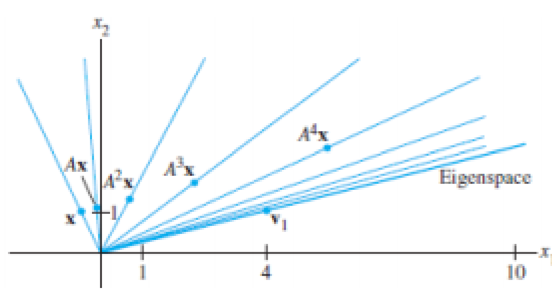
```
pour j = 1 : n faire
    V(1 : n, j) = A(1 : n, j);
    pour i = 1 : j − 1 faire
        R(i, j) = Q(1 : n, i)^t ∗ A(1 : n, j);
        V(1 : n, j) = V(1 : n, j) − R(i, j) ∗ Q(1 : n, i);
    R(j, j) = ‖V(1 : n, j))‖_2;
    Q(1 : n, j) = V(1 : n, j)/R(j, j)
```

Chapitre 3

Méthodes de calcul de valeurs propres

3.1 Méthode de la puissance itérée

La méthode de la puissance itérée ou méthode des puissances est un algorithme pour calculer la valeur propre dominante d'une matrice. Bien que cet algorithme soit simple à mettre en œuvre et populaire, il ne converge pas très vite.
Le principe de cette méthode repose sur le fait qu'en appliquant un grand nombre de fois la matrice sur un vecteur initial quelconque, les vecteurs successifs vont prendre une direction qui se rapproche du vecteur propre de la plus grande valeur propre (en module) :



Soit $q^{(0)}$ un vecteur inital quelconque tel que :$\|q^{(0)}\|_2 = 1$, calculer pour k ≥ 1

$$\begin{cases} z^{(k)} = Aq^{(k-1)} \\ q^{(k)} = \dfrac{z^{(k)}}{\|z^{(k)}\|_2} \\ \nu^{(k)} = (q^{(k)})^* Aq^{(k)} \end{cases}$$

Théorème 3.1 *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres. et $v_1, \ldots, v_p$ ses vecteurs propres associés normalisés ($\|v_i\|_2 = 1$) avec $1 \leq p \leq n$, si*

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_p| \tag{3.1}$$

et si $q^{(0)} = \sum_{i=1}^{p} v_i$, tel que $v_1 \neq 0$ alors la méthode de la puissance converge.

Démonstration 3.1 *Par une simple récurrence sur l'indice k, on vérifie que*

$$q^{(k)} = \frac{A^k q^{(0)}}{\|A^k q^{(0)}\|_2}, k \geq 1$$

et l'on voit alors plus clairement le rôle joué par les puissances de la matrice A, qui donnent son nom à la méthode. En effet, l'ensemble $\{v_j, \quad j = 1, \ldots, p\}$ des vecteurs propres de A forme une base de $\mathbb{C}^n$, et on a $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$.
Le vecteur $q^{(0)}$ peut se décomposer de la manière suivante

$$q^{(0)} = \sum_{i=1}^{p} v_i \qquad 1 \leq p \leq n$$

et l'on a alors

$$A^k q^{(0)} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k v_i = \lambda_1^k \left(v_1 + \sum_{i=2}^{p} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k v_i \right)$$

Comme $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1 \quad (i = 2 \cdots, p), \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \to 0$, donc le terme prépondérant devient $\alpha_1 \lambda_1^k v_1$. En supposant que les vecteurs de la base $\{v_i, \quad i = 1, \cdots, p\}$ sont de norme euclidienne égale à 1 , il vient

$$\left\| \sum_{i=2}^{p} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k v_i \right\|_2 \leq \sum_{i=2}^{p} \left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right|^k \leq \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k \left(\sum_{i=2}^{p} 1 \right) = C \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k$$

et l'on déduit que

$$q^{(k)} = \frac{\lambda_1^k \left(v_1 + w^{(k)}\right)}{\left\|\lambda_1^k \left(v_1 + w^{(k)}\right)\right\|_2}, k \geq 1$$

où la suite de vecteurs $\left(w^{(k)}\right)_{k\geq 1}$ *a pour limite le vecteur nul. Le vecteur* $q^{(k)}$ *devient donc peu à peu colinéaire avec le vecteur propre* v_1 *associé à la valeur propre dominante* λ_1 *quand* k *tend vers* $+\infty$ *et ce d'autant plus rapidement que le rapport* $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ *est petit.*
Alors

$$\left(q^{(k)}\right)^* A q^{(k)} = \nu^{(k)}, k \geq 1$$

converge donc vers la valeur propre λ_1*.*

Remarque 3.1

- *L'hypothèse que* $v_1 \neq 0$ *est en général vérifie pour* $q^{(0)}$ *choisi de façon aléatoire.*
- *Si* $|\lambda_1| \approx |\lambda_2|$, *alors la convergence sera très lente car* $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| << 1$ *doit être vrai pour avoir une convergence rapide.*
  On a :
$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ A^{-1}Ax = A^{-1}\lambda x &= \lambda A^{-1}x \\ x &= \lambda A^{-1}x \\ A^{-1}x &= \tfrac{1}{\lambda}x \end{aligned}$$
  pour obtenir la plus petite valeur propre, nous pouvons donc utiliser la méthode des puissances sur A^{-1}.

Remarque 3.2 *D'après les hypothèses,* λ_1 *est une valeur propre simple réelle. La méthode de la puissance ne permet pas d'accéder à des valeurs propres complexes.*
Dans ce cas en suivant le principe suivant :
on prend au début $V^{(0)} \in \mathbb{R}^{n\times 2}$
on normalise $V^{(0)}$ *par la décomposition QR.*
On obtient $V^{(1)} = Q(:, 1:2) = [q_1, q_2]$

répéter
  $W = AV^{(k)}$
  on normalise W par la décomposition QR, on obtient
  $V^{(k)} = [q_1, q_2]$
  $\Lambda = (V^{(k)})^t AV^{(k)}$
jusqu'à $\|AV^{(k)} - V^{(k)}\Lambda\| < \epsilon$;
Finalement on aura
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_r & \lambda_i \\ -\lambda_i & \lambda_r \end{pmatrix}$$
alors $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$.

3.2 Méthode de la puissance inverse

La méthode de la puissance inverse est un algorithme permettant de calculer la valeur propre de plus petit module d'une matrice.
Cette méthode consiste à l'application de la méthode de la puissance à l'inverse de la matrice A, à condition que A soit inversible. Les valeurs propres de A^{-1} sont les valeurs inverses de celles de A. Ainsi en appliquant la méthode de la puissance à la matrice A^{-1}, nous pouvons calculer la valeur propore de A de module le plus petit. En effet (2.1) devient :

$$\left|\frac{1}{\lambda_1}\right| < \left|\frac{1}{\lambda_2}\right| \leq \left|\frac{1}{\lambda_3}\right| \cdots \leq \left|\frac{1}{\lambda_p}\right|$$

Nous approximons donc λ_n, valeur propre de module minimale de A, en estimant $\frac{1}{\lambda_p}$, valeur propre de module maximal de A^{-1}. De cette façon nous obtenons la méthode de la puissance inverse : Etant donné un vecteur initial arbitraire $q^{(0)}$ tel que : $\left\|q^{(0)}\right\|_2 = 1$, pour $k \geq 1$, on utilise l'algorithme suivant :

Données : Une matrice A, un vecteur quelconque normé q^0.
Résultat : La plus petite valeur propre λ_n.
répéter
$z^{(k)} = A^{-1}q^{(k-1)}$
$q^{(k)} = \frac{z^{(k)}}{\left\|z^{(k)}\right\|_2}$
$\nu^{(k)} = \left(q^{(k)}\right)^* A^{-1}q^{(k)}$
jusqu'à $|q^{k+1} - q^k| < \epsilon$;

De la même manière que pour la méthode de la puissance, on suppose que A admet des vecteurs propres linéairement indépendants et que $\frac{1}{\lambda_p}$ est la seule valeur propre dominante de A^{-1}. Ainsi, λ_n est de module minimal et distinctes des autres valeurs propres. On a par conséquent

$$\lim_{k\to\infty} \nu^{(k)} = \frac{1}{\lambda_p} \text{ donc } \lim_{k\to\infty} \left(\nu^{(k)}\right)^{-1} = \lambda_p.$$

A chaque étape k, on doit résoudre un système linéaire de la forme

$$Ax^{(k)} = y^{(k-1)}$$

Il est donc commander d'effectuer une factorisation LU de A une fois pour toute, afin de n'avoir à résoudre que deux systèmes triangulaires à chaque

itération.
Rappelons que la commande lu (par MATLAB) peut également effectuer la décomposi- tion LU pour des matrices complexes.

3.3 Méthode de la puissance inverse décalée(shifted)

La méthode de la puissance inverse est utile aussi lorsqu'on connaît une valeur σ approchée d'une valeur propre λ. Nous avons :

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ Ax - \sigma I x &= \lambda x - \sigma I x \\ (A - \sigma l)x &= (\lambda - \sigma)x. \end{aligned}$$

Puisque la matrice $B = A - \sigma I$ est inversible, on a :

$$B^{-1}x = (A - \sigma I)^{-1}x = \frac{1}{(\lambda - \sigma)}x.$$

La matrice B et possède $\lambda - \sigma$ (qui est très petit ≈ 0) comme valeur propre donc pour trouver la valeur propre λ la plus proche de σ on applique l'algorithme de la puissance inverse sur la matrice B, on a l'itération suivant :

$$\begin{aligned} Bx^{(k)} &= y^{(k-1)} \\ y^{(k)} &= \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|_2}. \end{aligned}$$

Remarque 3.3 *:*

- *On obtient la valeur la plus proche de σ avec $\sigma \notin Sp(A)$.*
- *C'est un moyen d'améliorer le calcul d'une valeur propre et d'obtenir un vecteur propre correspondant à cette valeur.*
- *Cela permet d'accélérer le calcule d'une valeur propre.*

Algorithme de la méthode de la puissance inverse décalée(shifted)

Données : Une matrice A, un vecteur quelconque normé q^0, une valeur σ approchée d'une valeur propre λ
Résultat : La valeur propre λ la plus proche de σ
Faire : $B = A - \sigma I$
On applique l'algorithme de la puissance itérée sur la matrice B on obtient λ
Alors $\lambda = \lambda + \sigma$.

3.4 Méthode de déflation

Cette méthode est une généralisation de la méthode de la puissance itérée, en effet, connaissant la valeur de plus grand module d'une matrice et un vecteur propre associé, cette méthode permet de trouver la seconde valeur propre dont le module est le plus grand. Précieusement, on part d'une matrice A d'ordre n dont les valeurs propres vérifient $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_p|$. La méthode de la puissance nous donne la plus grande valeur propre en module λ_1, et un vecteur propre associé v_1 tel que $\|v_1\|_2 = 1$. On pose alors.

$$B = A - \lambda_1 v_1 v_1^t.$$

Alors B possède les valeurs propres $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_p$ et 0. Il suffit d'appliquer à nouveau la méthode de la puissance, mais à B pour obtenir la deuxième plus grande valeur propre de A et son vecteur propre associé. On peut ainsi recommencer l'application du couple (puissances itérées déflation) pour trouver toutes les valeurs propres de A.
• Nous allons montrer que la matrice B admet $0, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_p$ comme valeurs propre :
-Si A est une matrice normale($A^t A = AA^t$), ses vecteurs propres vont être orthonnormaux. nous avons :

$$Bv_i = (A - \lambda_1 v_1 v_1^t)\, v_i \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, p\}$$
$$Bv_i = Av_i - \lambda_1 v_1 v_1^t v_i$$

Comme

$$v_1^t v_i = \delta_{i1}$$

et

$$Av_1 = \lambda_1 v_1$$

Alors

$$Bv_1 = 0$$

et
$$Bv_i = \lambda_i v_i \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, p\}$$
Ainsi si A est normale le problème est résolu.
-Maintenant si A est quelconque, considérons la transposée de A, elle a les mêmes valeurs propres de A (même polynôme caractéristique).
Donc $\forall i \in \{2, \ldots, p\} \quad \lambda_i$ valeur propre de A^t.
Soit v_i le vecteur propre associé à la valeur propre de λ_i de A^t,
c'est-à-dire
$$A^t v_i = \lambda_i v_i$$
on a :
$$< v_1, v_i >=< \frac{1}{\lambda_1} A v_1, v_i >=< \frac{1}{\lambda_1} v_1, A^t v_i >=< \frac{1}{\lambda_1} v_1, \lambda_i v_i >= \frac{\lambda_i}{\lambda_1} < v_1, v_i >$$
donc
$$< v_1, v_i > \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) = 0 \Longrightarrow < v_1, v_i >= 0 \quad \forall i \neq 1.$$
Les deux vecteurs v_1 et v_i ($\forall i \in \{2, \ldots, n\}$) sont orthogonaux.
D'autre part, B et B^t ont les mêmes valeurs propres et on a :
$$B^t v_i = \left(A - \lambda_1 v_1 v_1^t\right)^t v_i = A^t v_i - \lambda_1 v_1 \underbrace{\left(v_1^t v_i\right)}_{=0} = A^t v_i = \lambda_i v_i \quad \forall i \in \{2, \ldots, p\}$$
Donc $\lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont valeurs propres de B
. Il reste à montrer que 0 est une valeur propre de B.
$$Bv_1 = \left(A - \lambda_1 v_1 v_1^t\right) v_1 = Av_1 - \lambda_1 v_1 \underbrace{v_1^t v_1}_{=1} = \lambda_1 v_1 - \lambda_1 v_1 = 0$$
Ainsi on a montré que les valeurs propres de B sont : $\{0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$.

Utilisation de la méthode :

Avantages :

• La méthode de déflation permet de trouver toutes les valeurs propres de la matrice ainsi que les vecteurs propres correspondants.

Inconvénients :

• Accumulation de l'erreur : La méthode de la puissance donne une approximation de la valeur propre et du vecteur propre associé, ce qui peut conduire à des mauvais résultats avec la méthode de déflation.

• La matrice B utilisée n'est pas exactement la bonne.

• Dégradation du résultat (le calcul d'une valeur propre nécessite l'utilisation des valeurs propres précédentes qui comportent déjà une légère modification).

Remarque 3.4 *La méthode de déflation est une méthode qui permet de calculer tous les valeurs propres et ses vecteurs associent*
Cas simple : A est symétrique les valeurs propres forment une base orthogonale et donc $x_1^T x_i = \delta_{1,i}$*, alors B admet les mêmes valeurs et vecteurs propre que A et 0 a la place de* λ_1
Si A non symétrique en utilisant la transposée de A.
En effet, A et A^t *ont les mêmes valeurs propres, et si on applique la méthode de la puissance itérée à* A^t*.on trouve un vecteur propre* $w1$ *de* A^t *associé à* λ_1

Chapitre 4

Méthodes de calcul de toutes les valeurs propres

4.1 Matrices symétrique :

4.1.1 Jacobi

Nous cherchons à déterminer numériquement les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice A symétrique réelle $(A^t = A)$. Nous savons qu'une telle matrice est diagonalisable dans une base orthonormée, donc il existe une matrice réelle et orthogonale U telle que $D = U^t AU$ soit diagonale, la diagonale étant composée des valeurs propres de A.
La méthode de Jacobi consiste à utiliser une suite de transformations orthogonales. Chaque transformation est une rotation qui annule un des éléments hors diagonale, ces derniers deviennent de plus en plus petits jusqu'à ce que la matrice devienne diagonale.
En partant de la matrice $A_0 = A$, la méthode de Jacobi consiste à construire une suite $(O_k)_k$ de matrices orthogonales, en s'arrangeant pour que la suite de matrices

$$A_{k+1} = O_{k+1}^t A_k O_{k+1}$$

soit encore symétriques et converge vers une matrice diagonale D ayant les mêmes valeurs propres que la matrice A.
A chaque étape, O_k est choisie de façon à augmenter les termes diagonaux, autrement dit, la diagonale de A_{k+1} sera plus grande que celle de A_k.

La méthode est moins efficace que la méthode QR, elle est conseillée pour les matrices de taille moyenne $n \leq 30$(On va prouver ca dans l'application numérique)
Notons que toutes les matrices A_k ont les mêmes valeurs propres qui sont celles de A, en effet :

$$\begin{aligned} \det\left(A_{k+1} - \lambda I\right) &= \det\left(O_{k+1}^t A_k O_{k+1} - \lambda I\right) \\ &= \det\left(O_{k+1}^t (A - \lambda I) O_{k+1}\right) \\ &= \det\left(A_k - \lambda I\right) \end{aligned}$$

car O_{k+1} est orthogonale.
Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} A_k &= O_k^t A_{k-1} O_k \\ &= O_k^t O_{k-1}^t A_{k-2} O_{k-1} O_k \\ &= O_k^t O_{k-1}^t \dots O_1^t A O_1 O_2 \dots O_k \end{aligned}$$

et si l'on pose

$$Q_k = O_1 O_2 \dots O_k$$

alors on obtient

$$A_k = Q_k^t A Q_k$$

Ceci montre que si en plus de la convergence de la matrice A_k vers une matrice diagonale D , la suite de matrice orthogonales $(Q_k)_k$ converge vers une matrice orthogonale Q, alors on a $D = Q^t A Q$ et les vecteurs colonnes de Q forment une base orhonormée de vecteurs propres de A.
Principe de la méthode
Voici le choix de la matrice de rotation O :

$$O_{pq} = \begin{pmatrix} I_{p-1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\theta & \dots & \sin\theta & & \\ & & \vdots & I_{q-p-1} & \vdots & & \\ & & -\sin\theta & \dots & \cos\theta & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & I_{n-q} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

La matrice $O_{pq} \in M_n(\mathbb{R})$ ainsi construite satisfait les propriétés suivantes :

Lemme 1 *La matrice O_{pq} vérifie les propriétés suivantes :*
-Pour la norme de Frobenius donnée par $\|A\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 = \mathrm{tr}\,(A^t A)$,

$$\|O_{pq}\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^n \left|(O_{pq})_{i,j}\right|^2 = n$$

-La matrice O_{pq} est orthogonale, c'est-à-dire : $O_{pq}O_{pq}^t = I_n$.

Démonstration 4.1 *Le premier résultat est évident*

$$\|O_{pq}\|_F^2 = (n-2) \times 1^2 + 2 \times \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = n.$$

D'autre part en écrivant le produit $O_{pq}O_{pq}^t$ et en effectuant un produit matriciel par bloc, nous obtenons le résultat $O_{pq}O_{pq}^t = I_n$

Théorème 4.1 *Soient* p *et* q *deux entiers tel que $1 \leq p < q \leq n$ et $\theta \in \mathbb{R}$, auxquels on associe la matrice orthogonale O_{pq} définie ci-dessus, alors*

- *Si la matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique et si $B = O_{pq}^t A O_{pq}$ alors $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique, et on a :*

$$\sum_{i,j=1}^n (b_{ij})^2 = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij})^2 \,(*).$$

- *Si $a_{pq} \neq 0$, alors il existe un unique $\theta \in]-\frac{\pi}{4}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{4}[$ tel que $b_{pq} = 0$ et θ est déterminé par*

$$\mathrm{cotan}(2\theta) = \frac{(a_{qq} - a_{pp})}{2a_{pq}}.$$

De plus, on a dans ce cas

$$\sum_{i=1}^n (b_{ii})^2 = \sum_{i=1}^n (a_{ii})^2 + 2\,(a_{pq})^2\,.$$

Démonstration 4.2 *Il est clair que la matrice $B = O_{pq}^t A O_{pq}$ est symétrique lorsque A est symétrique. En effet*

$$B^t = \left(O_{pq}^t A O_{pq}\right)^t = O_{pq}^t A O_{pq} = B.$$

Montrons $(*)$. *On a*

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij})^2 &= \operatorname{tr}\left(BB^t\right)\\ &= \operatorname{tr}\left(O_{pq}^t A O_{pq} O_{pq}^t A^t O_{pq}\right)\\ &= \operatorname{tr}\left(O_{pq}^t A A^t O_{pq}\right)\end{aligned}$$

car O_{pq} *est orthogonale.*
Or pour deux matrices A *et* C *quelconques, on a toujours* $\operatorname{tr}(AC) = \operatorname{tr}(CA)$.
Il s'en suit que :

$$\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij})^2 = \operatorname{tr}\left(O_{pq}^t A A^t O_{pq}\right) = \operatorname{tr}\left(O_{pq} O_{pq}^t A A^t\right) = \operatorname{tr}\left(AA^t\right)$$

Utilisant le fait que

$$\operatorname{tr}\left(AA^t\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$$

on obtient donc

$$\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij})^2 = \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij})^2$$

ce qui prouve (*).
2) Puisque $B = O_{pq}^t A O_{pq}$, *alors en utilisant la forme particulière de la matrice* O_{pq}, *on obtient*

$$\begin{pmatrix} b_{pp} & b_{pq} \\ b_{qp} & b_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{qp} & a_{qq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} (**)$$

Or la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *étant orthogonale, alors le même raisonnement qu'en 1) nous conduit au résultat suivant :*

$$b_{pp}^2 + b_{qq}^2 + 2b_{pq}^2 = a_{pp}^2 + a_{qq}^2 + 2a_{pq}^2.$$

Par ailleurs, en utilisant $(**)$ *on a*

$$b_{pq} = b_{qp} = a_{pq}\cos 2\theta + \frac{(a_{pp} - a_{qq})}{2}\sin 2\theta$$

Ainsi si $a_{pq} \neq 0$ et si on choisit θ tel que

$$\operatorname{cotan} 2\theta = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}} \quad (***),$$

alors $b_{pq} = 0$ En utilisant la forme particulière de O_{pq}, on obtient pour $i \neq p$ et $i \neq q$ $a_{ii} = b_{ii}$. Et par suite, on obtient pour θ vérifiant $(***)$

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq p,q}}^{n} b_{ii}^2 + b_{pp}^2 + b_{qq}^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq p,q}}^{n} a_{ii}^2 + a_{pp}^2 + a_{qq}^2 + 2a_{pq}^2$$

Ainsi on a

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 + 2a_{pq}^2$$

Pour finir la démonstration, notons que l'existence de θ vérifiant (***) est unique dans $]-\frac{\pi}{4}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{4}[$.

Commentaire :

Etant donné $B = O_{pq}^t A O_{pq}$ avec O_{pq} n'est autre que la matrice de rotation d' angle θ dans le plan engendré par le p-ème et q-ème vecteur de la base canonique.
Les coefficients b_{ij} de la matrice B sont donnés par :

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{lcl} b_{ij} & = & a_{ij} \text{ pour } i,j \neq p,q \\ b_{pj} & = & a_{pj}\cos\theta - a_{qj}\sin\theta \text{ pour } \quad j \neq p,q \\ b_{iq} & = & a_{ip}\sin\theta + a_{iq}\cos\theta \text{ pour } \quad i \neq p,q \\ b_{pp} & = & a_{pp}\cos^2\theta + a_{qq}\sin^2\theta - a_{pq}\sin 2\theta \\ b_{qq} & = & a_{pp}\sin^2\theta + a_{qq}\cos^2\theta + a_{pq}\sin 2\theta \\ b_{pq} & = & a_{pq}\cos 2\theta + \frac{a_{pp}-a_{qq}}{2}\sin 2\theta \end{array} \right.$$

Si $a_{pq} \neq 0$, on choisit $\theta \in]-\frac{\pi}{4}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{4}[$ tel que : $b_{pq} = 0$, et θ est donné par

$$\operatorname{cotan} 2\theta = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}.$$

Supposons que A_k a déjà étée calculée. Comment choisir la matrice O_{pq} de sorte que $A_{k+1} = O_{k+1}^t A_k O_{k+1}$? La méthode de Jacobi classique consiste à choisir (p_k, q_k) avec $p_k < q_k$ tels que $(A_k)_{p_k q_k}$ soit un coefficient (non diagonal) de plus grand module de la matrice A_k

$$\left|(A_k)_{p_k q_k}\right| = \max_{1 \leq i < j \leq n} \left|(A_k)_{ij}\right|$$

4.2 Matrices quelconques :

4.2.1 Méthode QR :

Cette méthode s'applique aux matrices quelconques. Voici le principe de base de cette méthode.
- Posons $A_1 = A$, on écrit la factorisation QR de A_1

$$A_1 = Q_1 R_1$$

- et on forme $A_2 = R_1 Q_1 = Q_1^t A_1 Q_1$, a l'étape K, on a

$$A_k = Q_k R_k$$

- On pose $A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^t A_k Q_k$, on obtient :

$$A_{k+1} = (Q_1 Q_2 \dots Q_k)^t A (Q_1 Q_2 \dots Q_k)$$

ce qui montre que A_{k+1} est semblable à A donc admet les mêmes valeurs propres.

Algorithme de la méthode QR :

Données : Une matrice A

$A_0 = A$

répéter

| *décomposition*$A_k = Q_k * R_k$
| $A_{k+1} = R_k * Q_k$

jusqu'à $A_{(k+1)}$ *soit triangulaire supérieure* ;

Remarque 4.1 *:*

- *La méthode QR ne calcule pas directement les vecteurs propres.*
- *La convergence est lente mais peut être accélérée, en réduisant la matrice A en une matrice plus simple (quasi triangulaire) dite de Hessenberg :*

$$A = \begin{pmatrix} x & x & \dots & \dots & x \\ x & x & \dots & \dots & x \\ 0 & x & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x & x \end{pmatrix}$$

- *On peut également accélérer la convergence lorsqu'il s'agit d'une matrice symétrique, en réduisant cette dernière en une forme tridiagonale à l'aide des matrices de Householder.*

Remarque 4.2 *:*

- *On ne peut rien dire sur la convergence de la partie supérieure* i < j.
- *Si A est une matrice réelle et que les valeurs propres sont différentes en module, ceci entraine que les valeurs propres sont toutes réelles car sinon les valeurs propres complexes apparaissent par paires de racines conjuguées, donc de même module ce qui est exclu par hypothèse du théorème.*
- *Si A est symétrique alors la suite A_k converge vers une matrice diagonale formée par les valeurs propres de A.*

Chapitre 5

Application numérique

5.1 Application de la méthode de la puissance

Soit A une matrice de taille 8 :

$$A = \begin{pmatrix} 0.9187 & 0.4110 & 0.4265 & 0.7257 & 0.7264 & 0.3586 & 0.0635 & 0.5454 \\ 0.0766 & 0.6501 & 0.7319 & 0.6806 & 0.1522 & 0.1618 & 0.7655 & 0.5980 \\ 0.9244 & 0.7108 & 0.4903 & 0.8835 & 0.0401 & 0.0310 & 0.5855 & 0.5693 \\ 0.7622 & 0.8824 & 0.5063 & 0.9149 & 0.9083 & 0.9039 & 0.9771 & 0.7334 \\ 0.7293 & 0.6354 & 0.5180 & 0.4569 & 0.7769 & 0.6622 & 0.8091 & 0.5896 \\ 0.4206 & 0.1568 & 0.9556 & 0.4023 & 0.5403 & 0.2352 & 0.4675 & 0.9905 \\ 0.6514 & 0.1435 & 0.8822 & 0.1130 & 0.3553 & 0.0118 & 0.6075 & 0.2387 \\ 0.5315 & 0.8599 & 0.9298 & 0.1863 & 0.6703 & 0.5660 & 0.4166 & 0.7363 \end{pmatrix}$$

$B = A + A^t$: matrice symétrique
$C = A - A^t$: matrie antisymétrique
On applique la méthode de puissance sur la matrice B :

$$\lambda = 9.1575$$

et

$$x = \begin{bmatrix} 0.3633 & 0.3275 & 0.3717 & 0.4238 & 0.3603 & 0.2847 & 0.2983 & 0.3784 \end{bmatrix}^t$$

On applique la méthode de puissance sur la matrice C, nous ne pouvons pas trouver la plus grand valeur propre, car n'est pas réelle.
• Solution :

On normalise les vecteurs en utilisant la décomposition QR dans l'algorithme de puissance.
Nous appliquons la nouvelle méthode de puissance sur la matrice C, on a :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 16.0185 \\ -16.0185 & 0.0000 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} -0.6447 & -0.1484 \\ -0.3018 & -0.3407 \\ 0.2873 & -0.6719 \\ 0.0519 & -0.1187 \\ -0.1556 & 0.1378 \\ -0.2219 & 0.5498 \\ 0.1111 & -0.0642 \\ -0.5677 & -0.2666 \end{bmatrix}$$

ç'est à dire : $\lambda_1 = 0 + 16.0185i$ et $\lambda_2 = 0 - 16.0185i$

- Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le calcul à la main donne :

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0.$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_{th} = 1$ et $\lambda_{th} = 2$.

En résolvant $(A - \lambda I)x = 0$ pour chaque valeur de λ, on obtient

- une base pour $\lambda_{th} = 1$: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- une base pour $\lambda_{th} = 2$: $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Par la méthode de la puissance :

Prenons un vecteur initial $y = (1, 1, 1)^t$, $nmax = 10^6$ et $tol = 10^{-17}$

aprés 10 itération sur l'algorithme de la méthode de la puissance on obtient :

$$\lambda_{ex} = 2.0007$$

et

$$x_{ex} = (0.3017, 0.9046, -0.3011)^t$$

donc on retrouve la plus grande valeur propre en module ($\lambda_{th} \cong \lambda_{ex}$) mais pour les vecteurs propres associés on trouve des résultats différents.

5.2 Application de la méthode de la puissance inverse

Pour la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

on trouve que :$P_M(X) = (1 - X)(X + 4)(X - 2)$

alors $Sp(A) = (1, -4, 2)$, $\lambda = 1$ la plus petite valeur propre en module et $x = (1, 1, 1)^t$ le vecteur propre associé.

On utilisant la méthode de la puissance inverse on a les résultats suivants :

y0	lambda	x
$(1,1,1)^t$	1	$(1,1,1)^t$
$(0,1,0)^t$	1.0769	$(1.0000, 0.9615, 1.0000)^t$
$(1,2,1)^t$	1.0222	$(1.0000, 0.9889, 1.0000)^t$

On constate que le choix du vecteur initial influe sur les résultats.

5.3 Application de la méthode de la puissance inverse décalée

Pour la même matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$z0 = (1;1;1)$$

$$tol = 10^{-4}$$

»On sait que Sp(M)=(2,1)

•Choisons $mu = 0.9654$

On veut trouver la valeur propre de M la plus proche de mu par la méthode de la puissance inverse décalée(shifted), on programme notre méthode sur MATLAB :
après une seule itération on a les résultats :

$$lambda = 1$$

$$x = (0.5774, 0.5774, 0.5774)^t$$

5.4 Application de la méthode de Jacobi

On prend :

$$u = (0.8147, 0.9058, 0.1270)^t$$

normalisons u

$$u = (0.6651, 0.7395, 0.1037)^t$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0.6651 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7395 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1037 \end{pmatrix}$$

$P = I_3 - 2uu^t$

$$P = \begin{pmatrix} 0.1152 & -0.9837 & -0.1379 \\ -0.9837 & -0.0937 & -0.1533 \\ -0.1379 & -0.1533 & 0.9785 \end{pmatrix}$$

$A = PQP^t$

$$A = \begin{pmatrix} 0.7264 & -0.0050 & 0.0870 \\ -0.0050 & 0.6526 & 0.0853 \\ 0.0870 & 0.0853 & 0.1293 \end{pmatrix}$$

On obtient donc une matrice symétrique et appliquant la méthode de Jacobi :

Une matrice D qui contient les valeurs propres dans sa diagonal :

$$D = \begin{pmatrix} 0.7395 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.6651 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.1037 \end{pmatrix}$$

et une matrice V dans les colonnes sont les vecteurs propres de A :

$$V = \begin{pmatrix} 0.9837 & -0.1152 & -0.1379 \\ 0.0937 & 0.9837 & -0.1533 \\ 0.1533 & 0.1379 & 0.9785 \end{pmatrix}$$

5.5 Application de la méthode QR pour les valeurs propres

•Cas symétrique :

Soit A une matrice de taille 8 :

$$A = \begin{pmatrix} 0.9187 & 0.4110 & 0.4265 & 0.7257 & 0.7264 & 0.3586 & 0.0635 & 0.5454 \\ 0.0766 & 0.6501 & 0.7319 & 0.6806 & 0.1522 & 0.1618 & 0.7655 & 0.5980 \\ 0.9244 & 0.7108 & 0.4903 & 0.8835 & 0.0401 & 0.0310 & 0.5855 & 0.5693 \\ 0.7622 & 0.8824 & 0.5063 & 0.9149 & 0.9083 & 0.9039 & 0.9771 & 0.7334 \\ 0.7293 & 0.6354 & 0.5180 & 0.4569 & 0.7769 & 0.6622 & 0.8091 & 0.5896 \\ 0.4206 & 0.1568 & 0.9556 & 0.4023 & 0.5403 & 0.2352 & 0.4675 & 0.9905 \\ 0.6514 & 0.1435 & 0.8822 & 0.1130 & 0.3553 & 0.0118 & 0.6075 & 0.2387 \\ 0.5315 & 0.8599 & 0.9298 & 0.1863 & 0.6703 & 0.5660 & 0.4166 & 0.7363 \end{pmatrix}$$

$B = A + A^t$

On applique la méthode QR sur la matrice B avec laquelle on a déjà travaillé dans l'application de la méthode de la puissance, on obtient :
Aprés 25 itérations et avec un erreur égale à 0.0057, les valeurs propres obtenus est :

$$Sp(B) = \begin{bmatrix} 9.1575 & 1.5158 & -1.3119 & 1.0384 & -1.0261 & 0.6474 & 0.5434 & 0.0954 \end{bmatrix}^t$$

La plus grande valeur c'est exactement la valeur obtenue dans la méthode de la puissance : 9.1574
• Cas général :

Prenons une matrice quelconque A de taille 6 tel que :

$$A = \begin{pmatrix} 0.7015 & -1.1222 & 0.7904 & 1.2455 & 0.2096 & 0.2470 \\ -0.2561 & 1.2736 & 0.7844 & -1.0452 & 0.4264 & -0.7916 \\ 1.7762 & 0.1369 & -1.8579 & 1.7931 & 0.7631 & -0.1583 \\ 0.3212 & 0.0243 & 0.5918 & 1.0169 & 0.1297 & 0.6857 \\ -1.2809 & -0.2918 & 0.1821 & -0.4933 & 0.3574 & -4.0471 \\ -0.5329 & -2.2588 & 1.1105 & 1.7157 & 0.0768 & -0.3213 \end{pmatrix}$$

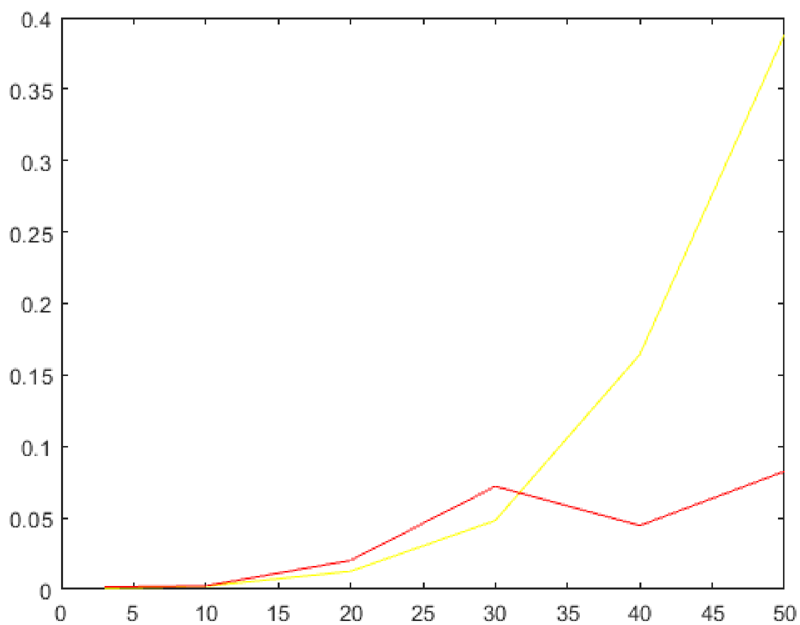
Appliquant l'algorithme QR on obtient après 630 itérations et avec un erreur égale à 0.0072 :

$$Sp(B) = \begin{bmatrix} 2.8911 & -2.8544 & 1.4868 & -0.8437 & -0.0989 & 0.5893 \end{bmatrix}^t$$

Ce qui montre l'efficacité de cette algorithme.

5.6 Comparaison de la méthode Jacobi et QR dans le cas symétrique

On traçons une courbe de temps de calcul dans la méthode QR en fonction de la taille d'une matrice symétrique,(représentant par le rouge)
et une autre courbe de temps de la méthode de Jacobi en fonction de la même matrice(représentant par le jaune), on obtient les résultats :



On voit bien que pour n<30 la méthode Jacobi calcul les valeurs propres d'une matrice symétrique dans un temps moins que la méthode QR, mais pour n>30 la méthode QR donne une bonne estimation.

Conclusion :

Dans cette mémoire on a vu les méthodes les plus utilisées pour le calcul des valeurs propres par ordinateur on utilisant des algorithmes.

Ce calcul nous permettons de représenter la matrice sous une forme simple.

Bibliographie

[1] Trefethen, Lloyd N and Bau III, David, Numerical linear algebra, 50, 1997, Siam

[2] Grivet, Jean-Philippe, Méthodes numériques appliquées pour le scientifique et l'ingénieur, 2013, EDP Sciences.