Optimisation

Janvier 2020 **Documents autorisés**

Toute affirmation intuitive non argumentée sera à éviter

Exercice 1. Multiplicateurs de Lagrange, cas égalité. 6 points

On considère les deux problèmes à deux variables suivants :

$$\mathcal{P}_1 \; : \; \min_{x_1=0}(x_1-1)^2+2(x_2-1)^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 \; : \; \min_{x_1^2=0} \; (x_1-1)^2+2(x_2-1)^2$$

(1) Dessiner pour chaque problème les lignes de niveau de la fonction et représenter les contraintes. Chercher graphiquement la solution de ces problèmes.

(2) Démontrer l'existence de solution pour ces deux problèmes.

(2) Former le Lagrangien pour chacun de ces problèmes. Appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour retrouver les solutions obtenues en (1).

Exercice 2. Un problème aux valeurs propres. 6 points

Soit A une matrice symétrique et $y \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|y\|_2 = 1$. On s'intéresse à

$$\min_{\begin{cases} x^T x = 1 \\ y^T x = 0 \end{cases}} \frac{1}{2} x^T A x.$$

(1) Ce problème admet-il une solution ?

(2) Ecrire le Lagrangien associé à ce problème.

(3) Appliquer les conditions d'optimalité KKT au 1er ordre.

(4) Montrer que toute solution du problème est un vecteur propre associé à la matrice $(I - yy^T)A$.

(5) Bonus : traiter le cas où A n'est pas symétrique.

Problème. Résolution par pénalisation extérieure. 10 points

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ continue et dérivable sur $\mathbb{R}^d$. Soit C un sous-ensemble fermé non vide de $\mathbb{R}^d$.

On appelle pénalité extérieure (PE) associée à C toute fonction p de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes

i) p est continue sur $\mathbb{R}^d$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}^d,\ p(x) \geq 0$

iii) $p(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in C$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit sur $\mathbb{R}^d$ la fonction Φ_n par $\Phi_n(x) = f(x) + n\,p(x)$, et on suppose dans cet exercice que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^d$, $\lim_{\|x\|_2 \to +\infty} \Phi_{n_0}(x) = +\infty$.

On s'intéresse aux problèmes d'optimisation

$$\mathcal{P}\ :\ \min_{x\in C} f(x) \ \text{ et } \mathcal{P}_n\ :\ \min_{x\in\mathbb{R}^d} \Phi_n(x).$$

On désire étudier le problème de l'approximation de minima *sous contrainte* (s'ils existent) de $\mathcal{P}$ par la suite des minima *sans contrainte* de $\mathcal{P}_n$ (à nouveau, s'ils existent).

(1) On considère $p_1(x) = \left(\|x\|_2^2 - 1\right)^2$, $p_2(x) = \|g(x)\|_2^2$ (ici, g est une application continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^m$), $p_3 = \|\max(-x,0)\|_2^2$ (ici, $\max(-x,0)$ est le vecteur de composantes $\max(-x_i,0)$). Ces fonctions sont-elles des PE. Dans l'affirmative, préciser l'ensemble C associé.

(2) Montrer que $\forall n \geq n_0$, $\lim_{\|x\|_2 \to +\infty} \Phi_n(x) = +\infty$. En déduire que l'on peut définir une suite $(x_n)_{n\geq n_0}$ dont le terme de rang n, x_n, est un minimum sur $\mathbb{R}^d$ de la fonction Φ_n.

(3) Montrer que $\forall x \in C$, $\forall n \geq n_0$, $\Phi_{n_0}(x_n) \leq \Phi_n(x_n) \leq f(x)$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq n_0}$ est bornée.

(4) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq n_0}$ admet au moins une valeur d'adhérence. On appelle alors $(y_j)_{j\in J}$ une sous-suite de $(x_n)_{n\geq n_0}$ convergent vers une telle valeur d'adhérence noté $\bar{x}$. On pose notamment $y_j = x_{\theta(j)}$, où θ est la fonction strictement croissante de J dans $\mathbb{N}$ permettant d'extraire la sous-suite.

(5) Montrer que pour tout $x \in C$, $\Phi_{n_0}(y_j) + (\theta(j) - n_0)p(y_j) = \Phi_{\theta(j)}(y_j) \leq f(x)$, puis que

$$p(y_j) \leq \frac{f(x) - \inf_{z\in\mathbb{R}^n} \Phi_{n_0}(z)}{\theta(j) - n_0}.$$

En déduire que toute valeur d'adhérence $\bar{x}$ de $(x_n)_{n\geq n_0}$, on a $p(\bar{x}) = 0$, et puis que $\bar{x} \in C$.

(6) Prendre $x \in C$ et rappeler pourquoi $\forall j \in \mathbb{N}$, $f(y_j) \leq f(x)$. En déduire que $\forall x \in C$, $f(\bar{x}) \leq f(x)$. Conclure grâce aux questions précédentes que tout point d'accumulation de la suite $(x_n)_{n\geq n_0}$ est une solution de $\mathcal{P}$.