Une méthode de résolution des problèmes elliptiques symétriques en grande dimension

Ahmed Taha Alouane
Ayoub Foussoul

Question 1

On a

$$(1) \Leftrightarrow \text{Trouver } u \in V \cap \mathrm{C}^2(\bar{\Omega}) \text{ tel que : } -\Delta u = f$$

Et

$$\begin{aligned} -\Delta u = f &\Rightarrow \forall v \in V,\ -v\Delta u = fv \\ &\Rightarrow \forall v \in V,\ -\int_\Omega v\Delta u = \int_\Omega fv \\ &\Rightarrow \forall v \in V,\ \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_\Omega fv \\ &\Rightarrow \forall v \in V,\ \int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv \end{aligned}$$

(car v est nulle sur le bord de Ω)

La formule variationnelle choisie :

$$\text{Trouver } u \in V \cap \mathrm{C}^2(\bar{\Omega}) \text{ tel que : } \forall v \in V,\ \int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv$$

Question 2

Soit u_h un vecteur de $V_h \bigotimes V_h$. On peut écrire

$$u_h = \sum_{i,j=1}^{I} U_{i,j} \phi_i \bigotimes \phi_j$$

u_h est une solution discrétisée du problème si pour tout $v \in V_h \bigotimes V_h$

$$\int_\Omega \nabla u_h \nabla v = \int_\Omega fv$$

Il suffit que la condition soit vérifiée pour les éléments de la base $(\phi_i \bigotimes \phi_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant I}$ de $V_h \bigotimes V_h$.

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant I, \forall 1 \leqslant l \leqslant I,\ \int_\Omega \nabla u_h \nabla(\phi_k \bigotimes \phi_l) = \int_\Omega f \phi_k \bigotimes \phi_l$$

Ceci est équivalent à :

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant I, \forall 1 \leqslant l \leqslant I,\ \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{I} \nabla(\phi_i \bigotimes \phi_j) \nabla(\phi_k \bigotimes \phi_l) = \int_\Omega f \phi_k \bigotimes \phi_l$$

On a

$$\nabla(\phi_i \bigotimes \phi_j)\nabla(\phi_k \bigotimes \phi_l)(x,y) = (\phi_i^{'}\phi_k^{'})(x)(\phi_j\phi_l)(y) + (\phi_i\phi_k)(x)(\phi_j^{'}\phi_l^{'})(y)$$

En posant $D_{i,k} = \displaystyle\int_{(0,1)} \phi_i^{'}\phi_k^{'}$ et $M_{i,k} = \displaystyle\int_{(0,1)} \phi_i\phi_k$ (et par Fubini), on trouve

$$\int_\Omega \nabla(\phi_i \bigotimes \phi_j)\nabla(\phi_k \bigotimes \phi_l) = D_{i,k}M_{j,l} + M_{i,k}D_{j,l}$$

On pose aussi $F_{k,l} = \displaystyle\int_\Omega f \phi_k \bigotimes \phi_l$.

Le problème discrétisé devient alors :

$$\begin{cases} \text{trouver } U \in \mathbb{R}^{I\times I} \text{ tel que :} \\ \forall 1 \leqslant k \leqslant I, 1 \leqslant l \leqslant I,\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{I} U_{i,j}(D_{i,k}M_{j,l} + M_{i,k}D_{j,l}) = F_{k,l} \end{cases}$$

Montrons que le problème est bien posé. Soient,

$$U = (U_{1,1}, \dots, U_{1,I}, \dots, U_{I,1}, \dots, U_{I,I})^{\mathrm{T}}$$
$$F = (F_{1,1}, \dots, F_{1,I}, \dots, F_{I,1}, \dots, F_{I,I})^{\mathrm{T}}$$

et K la matrice de taille $I \times I$ (en fonction des $M_{a,b}$ et $D_{a,b}$) qui vérifie (pour le problème discret)

$$KU = F$$

.

On peut l'écrire comme matrice par blocs

$$K = (K_{a,b})_{1\leqslant a,b\leqslant I} \in \mathrm{M}_{I\times I}(\mathbb{R})$$

où

$$K_{a,b} = (D_{b,a}M_{j,i} + M_{b,a}D_{j,i})_{1\leqslant i,j\leqslant I} \in \mathrm{M}_I(\mathbb{R})$$

Pour tout $U \in \mathbb{R}^{I\times I}$

$$\begin{aligned} KU \cdot U &= \sum_{i,j=1}^{I} \sum_{k,l=1}^{I} U_{i,j}U_{k,l}(D_{i,k}M_{j,l} + M_{i,k}D_{j,l}) \\ &= \sum_{i,j=1}^{I} \sum_{k,l=1}^{I} U_{i,j}U_{k,l} \int_\Omega \nabla(\phi_i \bigotimes \phi_j)\nabla(\phi_k \bigotimes \phi_l) \\ &= \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{I} U_{i,j}\nabla(\phi_i \bigotimes \phi_j) \Big)^2 \\ &= \int_\Omega (\nabla u)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

où $u = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{I} U_{i,j}\phi_i \bigotimes \phi_j$

De plus, si $KU \cdot U = 0$ alors $\nabla u = 0$, donc u est constante sur Ω (car étoilé). Or $u = 0$ sur $\partial\Omega$, donc u sera identiquement nulle et $U = 0$.

Donc, $KU \cdot U > 0$.

En dimension quelconque d @TODO :

Il faut au moins stocker les valeurs les intégrales $\displaystyle\int_\Omega f\Big(\phi_{j_1} \bigotimes \dots \bigotimes \phi_{j_d}\Big)$ pour $1 \leqslant j_1, \dots, j_d \leqslant I$.

Généralement, on ne peut pas séparer les variables spatiales dans la fonction f.

Ce qui nous donne au moins I^d valeurs à stocker.

Question 3

Supposons que $U \in \mathbb{R}^{I\times I}$ vérifie (4)

Soit $v = (v_{i,j}) \in \mathbb{R}^{I\times I}$ et on pose

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}}(v) &= \mathcal{E}\Big(\sum_{i,j=1}^{I} v_{i,j}\phi_i \bigotimes \phi_j\Big)\\ &= -\sum_{i,j=1}^{I} u_{i,j}\int_\Omega f\phi_i \bigotimes \phi_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{I}\sum_{k,l=1}^{I} v_{i,j}v_{k,l}\int_\Omega \nabla(\phi_i \bigotimes \phi_j)\nabla(\phi_k \bigotimes \phi_l)\end{aligned}$$

La fonction $\tilde{\mathcal{E}}$ est de classe C^1 et atteint son minimum en U.
Donc, pour tout $1 \leqslant k \leqslant I$ et $1 \leqslant l \leqslant I$:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial v_{k,l}}(U)\\ &= -\int_\Omega f\phi_k \bigotimes \phi_l + \frac{1}{2}\Big(2\sum_{\substack{(i,j)\in I\times I\\(i,j)\neq(k,l)}} U_{i,j}\int_\Omega \nabla(\phi_i \bigotimes \phi_j)\nabla(\phi_k \bigotimes \phi_l) + 2U_{k,l}\int_\Omega \nabla(\phi_k \bigotimes \phi_l)^2\Big)\\ &= -\int_\Omega f\phi_k \bigotimes \phi_l + \sum_{\substack{(i,j)\in I\times I\\(i,j)\neq(k,l)}} U_{i,j}\int_\Omega \nabla(\phi_i \bigotimes \phi_j)\nabla(\phi_k \bigotimes \phi_l) + U_{k,l}\int_\Omega \nabla(\phi_k \bigotimes \phi_l)^2\\ &= -\int_\Omega f\phi_k \bigotimes \phi_l + \sum_{(i,j)\in I\times I} U_{i,j}\int_\Omega \nabla(\phi_i \bigotimes \phi_j)\nabla(\phi_k \bigotimes \phi_l)\\ &= -\int_\Omega f\phi_k \bigotimes \phi_l + \sum_{(i,j)\in I\times I} U_{i,j}(D_{i,k}M_{j,l} + D_{j,l}M_{i,k})\end{aligned}$$

Donc, U vérifie (3).

Supposons que $U \in \mathbb{R}^{I\times I}$ vérifie (3)

Il suffit de montrer que $\tilde{\mathcal{E}}$ atteint son minimum en U.

En remontant le calcul de la partie précédente, on conclut que le gradient de $\tilde{\mathcal{E}}$ en U. Et sur $V_h \bigotimes V_h$, $\nabla\mathcal{E}(u_h) = 0$.

On écrit

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}q(u,u) - \mathcal{L}(u)$$

où

$$\begin{aligned}q(u,v) &= \int_\Omega \nabla u \nabla v\\ \mathcal{L}(u) &= \int_\Omega fu\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u+v) - \mathcal{E}(u) &= q(u,v) - \mathcal{L}(v) + \frac{1}{2}q(v,v)\\ &= < \nabla\mathcal{E}(u), v > + \frac{1}{2}q(v,v)\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u_h+v)-\mathcal{E}(u_h) &= \frac{1}{2}q(v,v)\\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $v \in V_h \bigotimes V_h$. Le minimum de $\mathcal{E}$ sur $V_h \bigotimes V_h$ existe et est atteint uniquement en u_h (car le point d'annulation du gradient est unique).

Donc, U vérifie (4).

Question 4

- Cet algorithme est appelé algorithme **glouton** car on construit la solution en optimisant le résultat à chaque étape.
  C'est une suite successive d'optimisations locales. Au début, on cherche la solution optimale sur $V_h \times V_h$, après on cherche une solution optimale à deux termes (tout en gardant la première itération comme premier terme) et ainsi de suite. On espère par la fin avoir une solution qui s'approche assez de la solution trouvée à l'aide d'une optimisation globale sur $V_h \bigotimes V_h$.
- La taille des données à stocker est en : @TODO
- Si la fonction f est séparée, on peut utiliser le théorème de Fubini pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_\Omega f\phi_{i1} \bigotimes \ldots \bigotimes \phi_{i_d}$. Le calcul se ramène à un calcul à un produit d'intégrales unidimensionnelles du type $\displaystyle\left(\int_0^1 f\phi_k\right)_{1\leqslant k\leqslant I}$
  On peut donc stocker I intégrales unidimensionnelles (qui sont en l'occurrence plus facile à calculer) au lieu de stocker et calculer I^d intégrales à plusieurs variables.

Question 5

Posons $T_h = \{r \bigotimes s | r, s \in V_h\}$

- Montrons d'abord que T_h est un fermé dans $V_h \bigotimes V_h$.
  Soit $r_n \bigotimes s_n \in T_h$ une suite de fonctions qui tend vers $\phi \in V_h \bigotimes V_h$.
  Pour tout $x, y \in V_h$, $r_n \bigotimes s_n(x,y) = r_n(x)s_n(y)$ tend vers $\phi(x,y)$.
  Montrons que $\phi \in T_h$.
  - Si $\phi \equiv 0$, le résultat est trivial.
  - Sinon :
    On peut trouver $\tilde{x}, \tilde{y}$ tel que $r_n(\tilde{x})s_n(\tilde{y})$ tend vers 0.
    Donc, pour n assez grand $s_n(\tilde{y})$ est non nul.
    <u>Soit $x \in \Omega$ tel qu'il existe $y \in \Omega$, $\phi(x,y) \neq 0$.</u>
    Pour n assez grand, $r_n(x) \neq 0$ (sinon $r_n(x)s_n(y)$ tend vers 0 et $\phi(x,y) = 0$ pour tout $y \in \Omega$)
    Donc pour n assez grand
    $$\frac{r_n(x)s_n(\tilde{y})}{r_n(x)s_n(\tilde{y})} = \frac{s_n(y)}{s_n(\tilde{y})}$$
    tend vers
    $$\frac{\phi(x,y)}{\phi(x,\tilde{y})}$$
    Cette quantité est donc indépendante de x, et donc pour tout $y \in \Omega$ il existe un unique $\psi(y)$ tel que
    $$\phi(x,y) = \phi(x,\tilde{y})\psi(y)$$

Soit $x \in \Omega$ tel que pour tout $y \in \Omega$, $\phi(x, y) = 0$
On a $\phi(x, \tilde{y}) = 0$.
La formule $\phi(x, y) = \phi(x, \tilde{y})\psi(y)$ est donc vérifiée ici.

On pose $\Gamma(x) = \phi(x, \tilde{y})$.
La fonction qui à $x \in \Omega$ associe $\phi(x, \tilde{y})$ appartient à V_h car ϕ appartient à $V_h \bigotimes V_h$ (on écrit ϕ dans la base et on substitue $y = \tilde{y}$).
Donc, $\Gamma \in V_h$.
On peut remplacer ψ par

$$\tilde{\psi} = \sum_{i=1}^{I} \frac{\phi(\tilde{x}, x_i)}{\phi(\tilde{x}, y_0)} \phi_i \in V_h$$

ϕ est entièrement déterminée par ses valeurs aux points (x_i, x_j) (on décompose sur la base de $V_h \bigotimes V_h$. Or ϕ et $\Gamma \bigotimes \tilde{\psi}$ sont égales sur ces points. Donc, $\phi = \Gamma \bigotimes \tilde{\psi} \in T_h$

— Montrons que le problème (5) admet une solution.
On a

$$\min_{(r,s)\in V_h \times V_h} \mathcal{E}(u_{n-1} + r \bigotimes s) = \min_{h \in T_h} \mathcal{E}(u_{n-1} + h)$$

Par les questions précédentes, la fonction $\mathcal{E}$ admet un minimum sur $V_h \bigotimes V_h$.
Donc, $h \in T_h \to \mathcal{E}(u_{n-1} + h)$ admet une borne inférieure.
Cette borne est atteinte en $r_n \bigotimes s_n$ (où $r_n, s_n \in V_h$) car T_h est un fermé.

— Les équations d'Euler.
On définit deux fonction $\hat{\mathcal{E}}$ et $\tilde{\mathcal{E}}$ sur V_h $\begin{cases} \hat{\mathcal{E}}(r) = \mathcal{E}(u_{n-1} + r \bigotimes s_n) \\ \tilde{\mathcal{E}}(r) = \mathcal{E}(u_{n-1} + r_n \bigotimes s) \end{cases}$

Les deux fonctions $\hat{\mathcal{E}}$, $\tilde{\mathcal{E}}$ sont définies sur un espace vectoriel V_h (ouvert) et admettent des minimums en r_n, s_n respectivement.
Donc

$$\begin{cases} \forall \delta s \in V_h,\ \hat{\mathcal{E}}'(r_n)(\delta s) = 0 \\ \forall \delta r \in V_h,\ \hat{\mathcal{E}}'(s_n)(\delta r) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall \delta s \in V_h,\ q(u_{n-1} + r_n \bigotimes s_n, r_n \bigotimes \delta s) - \mathcal{L}(r_n \bigotimes \delta s) = 0 \\ \forall \delta r \in V_h,\ q(u_{n-1} + r_n \bigotimes s_n, \delta r \bigotimes s_n) - \mathcal{L}(\delta r \bigotimes s_n) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall \delta s \in V_h,\ \displaystyle\int_\Omega \nabla(r_n \bigotimes s_n + u_{n-1}) \nabla(r_n \bigotimes \delta s) = \int_\Omega f(r_n \bigotimes \delta s) \\ \\ \forall \delta r \in V_h,\ \displaystyle\int_\Omega \nabla(r_n \bigotimes s_n + u_{n-1}) \nabla(\delta r \bigotimes s_n) = \int_\Omega f(\delta r \bigotimes s_n) \end{cases} \tag{0.1}$$

On somme les deux termes pour trouver

$$\forall \delta r, \delta s \in V_h,\ \int_\Omega \nabla(r_n \bigotimes s_n + u_{n-1}) \nabla(r_n \bigotimes \delta s + \delta r \bigotimes s_n) = \int_\Omega f(r_n \bigotimes \delta s + \delta r \bigotimes s_n)$$

Cette dernière formulation (équation d'Euler) est équivalente à 0.1 en prenant à chaque fois δs ou δr nul.

— Le système couplé :
Trouver s_n, r_n tels que

$$\begin{cases} \Delta(r_n \bigotimes s_n) r_n = -\Delta u_{n-1} r_n + f r_n \\ \Delta(r_n \bigotimes s_n) s_n = -\Delta u_{n-1} s_n + f s_n \end{cases}$$

En multipliant la première (resp. deuxième) équation par δs (resp. δr) et en intégrant par parties, on retombe sur le dernier système 0.1 qui est équivalent à l'équation d'Euler.

Question 6

— Montrons que pour tout $\delta s, \delta s \in V_h$,

$$\int_\Omega \nabla g_n \nabla(\delta r \bigotimes s_n + r_n \bigotimes \delta s) = 0 \tag{0.2}$$

Soit $\delta s, \delta r \in V_h \bigotimes V_h$. On combine $u_n = u_{n-1} + r_n \bigotimes s_n$ et l'équation d'Euler pour trouver

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla(\delta r \bigotimes s_n + r_n \bigotimes \delta s) = \int_\Omega f(\delta r \bigotimes s_n + r_n \bigotimes \delta s) \tag{0.3}$$

u_h vérifie la formule variationnelle initiale sur $V_h \bigotimes V_h$ et $\big(\delta r \bigotimes s_n + r_n \bigotimes \delta s\big) \in V_h \bigotimes V_h$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u_n \nabla(\delta r \bigotimes s_n + r_n \bigotimes \delta s) &= \int_\Omega \nabla(u_h - g_n) \nabla(\delta r \bigotimes s_n + r_n \bigotimes \delta s) \\ &= \int_\Omega \nabla u_h \nabla(\delta r \bigotimes s_n + r_n \bigotimes \delta s) - \int_\Omega \nabla g_n \nabla(\delta r \bigotimes s_n + r_n \bigotimes \delta s) \\ &= \int_\Omega f(\delta r \bigotimes s_n + r_n \bigotimes \delta s) - \int_\Omega \nabla g_n \nabla(\delta r \bigotimes s_n + r_n \bigotimes \delta s) \end{aligned}$$

Donc en remplaçant dans (0.3), on trouve

$$\int_\Omega \nabla g_n \nabla(\delta r \bigotimes s_n + r_n \bigotimes \delta s) = 0$$

— Montrons que

$$\int_\Omega |\nabla g_{n-1}|^2 = \int_\Omega |\nabla g_n|^2 + \int_\Omega |\nabla(r_n \bigotimes s_n)|^2 \tag{0.4}$$

Dans (0.2), on remplace $\delta s = s_n$ et $\delta r = r_n$ pour trouver

$$2 \int_\Omega \nabla g_n \nabla(r_n \bigotimes s_n) = 0$$

On a

$$g_{n-1} = g_n + r_n \bigotimes s_n$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla g_{n-1}|^2 &= \int_\Omega |\nabla g_n|^2 + 2 \int_\Omega \nabla g_n \nabla(r_n \bigotimes s_n) + \int_\Omega |\nabla(r_n \bigotimes s_n)|^2 \\ &= \int_\Omega |\nabla g_n|^2 + \int_\Omega |\nabla(r_n \bigotimes s_n)|^2 \end{aligned}$$

— Montrons que

$$E_n = -\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla(r_n \bigotimes s_n)|^2 \tag{0.5}$$

On a,

$$\begin{aligned}
E_n &= \mathcal{E}(u_n) - \mathcal{E}(u_{n-1}) \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \int_\Omega f u_n - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_{n-1}|^2 + \int_\Omega f u_{n-1} \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla(u_n - u_{n-1})\nabla(u_n + u_{n-1}) - \int_\Omega f(u_n - u_{n-1}) \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla(r_n \bigotimes s_n)\nabla(2u_{n-1} + r_n \bigotimes s_n) - \int_\Omega f(r_n \bigotimes s_n) \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(r_n \bigotimes s_n)|^2 - \int_\Omega f(r_n \bigotimes s_n) + \int_\Omega \nabla u_{n-1}\nabla(r_n \bigotimes s_n)
\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation d'Euler par $\delta s = s_n$ et $\delta r = r_n$ et en divisant partout par 2, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla(r_n \bigotimes s_n)|^2 = \int_\Omega f(r_n \bigotimes s_n) - \int_\Omega \nabla u_{n-1}\nabla(r_n \bigotimes s_n)$$

Donc,

$$E_n = -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(r_n \bigotimes s_n)|^2$$

— Montrons que la séries de terme général E_n est convergente.
On a $E_n = \mathcal{E}(u_n) - \mathcal{E}(u_{n-1})$. Tout revient à montrer que la suite de terme général $\mathcal{E}(u_n)$ est convergente.
  — La suite est minorée par le minimum global de $\mathcal{E}$ sur $V_h \bigotimes V_h$.
  — Montrons que la suite est décroissante. Pour tout $r, s \in V_h$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(u_n) &= \mathcal{E}(u_{n-1} + r_n \bigotimes s_n) \\
&\leqslant \mathcal{E}(u_{n-1} + r \bigotimes s)
\end{aligned}$$

  On trouve le résultat en remplaçant $r, s = 0$.
  — La suite est décroissante minorée et donc convergente. Et la série converge. De plus,

$$\begin{aligned}
-2\sum_{n\geqslant 1} E_n &= -2\sum_{n\geqslant 1}\Big(-\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(r_n \bigotimes s_n)|^2\Big) \\
&= \sum_{n\geqslant 1}\int_\Omega |\nabla(r_n \bigotimes s_n)|^2
\end{aligned}$$

Question 7

— Convergence de g_n à sous-suite-près.
Notons $||.||$ la norme utilisée. On peut écrire l'équation (0.4) comme

$$||g_{n-1}||^2 - ||g_n||^2 = -2E_n$$

Or la série de terme générale E_n converge. Donc, la suite de terme général $||g_n||^2$ converge et est par conséquent bornée. On conclut que la suite g_n est bornée pour la norme choisie sur **l'espace vectoriel de dimension finie** $V_h \bigotimes V_h$. Par le théorème de Bolzano-Weirestrass on peut extraire de g_n une sous-suite convergente dans $V_h \bigotimes V_h$.
— Soit $\delta r, \delta s \in V_h$. Montrons que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(\delta r \bigotimes \delta s)|^2 - \int_\Omega \nabla g_{n-1}\nabla(\delta r \bigotimes \delta s) \geqslant E_n \tag{0.6}$$

Par la définition (5),

$$\mathcal{E}(u_{n-1} + \delta r \bigotimes \delta s) \geqslant \mathcal{E}(u_n)$$
$$\mathcal{E}(u_{n-1} + \delta r \bigotimes \delta s) - \mathcal{E}(u_{n-1}) \geqslant E_n$$

Or,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u_{n-1} + \delta r \bigotimes \delta s) - \mathcal{E}(u_{n-1}) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla(\delta r \bigotimes \delta s)\nabla(2u_{n-1} + \delta r \bigotimes \delta s) - \int_\Omega f(\delta r \bigotimes \delta s)\\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(\delta r \bigotimes \delta s)|^2 - \int_\Omega f(\delta r \bigotimes \delta s) + \int_\Omega \nabla u_{n-1}\nabla(\delta r \bigotimes \delta s)\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}-\int_\Omega f(\delta r \bigotimes \delta s) + \int_\Omega \nabla u_{n-1}\nabla(\delta r \bigotimes \delta s) &= -\int_\Omega f(\delta r \bigotimes \delta s) + \int_\Omega \nabla u_h \nabla(\delta r \bigotimes \delta s) - \int_\Omega \nabla g_{n-1}\nabla(\delta r \bigotimes \delta s)\\ &= -\int_\Omega \nabla g_{n-1}\nabla(\delta r \bigotimes \delta s)\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(\delta r \bigotimes \delta s)|^2 - \int_\Omega \nabla g_{n-1}\nabla(\delta r \bigotimes \delta s) &= \mathcal{E}(u_{n-1} + \delta r \bigotimes \delta s) - \mathcal{E}(u_{n-1})\\ &\geqslant E_n\end{aligned}$$

— Montrons que

$$\int_\Omega \nabla g_\infty \nabla(\delta r \bigotimes \delta s) = 0 \tag{0.7}$$

L'application qui à $u, v \in V_h \bigotimes V_h$ associe

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v$$

est un produit scalaire.
La norme utilisée est la norme associée à ce produit scalaire. Donc, l'application est continue (Cauchy-Schwarz).
Donc

$$\int_\Omega \nabla g_{n-1}\nabla(\delta r \bigotimes \delta s)$$

converge vers

$$\int_\Omega \nabla g_\infty \nabla(\delta r \bigotimes \delta s)$$

.
L'inégalité précédente devient, pour tout $\delta r, \delta s \in V_h$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(\delta r \bigotimes \delta s)|^2 - \int_\Omega \nabla g_\infty \nabla(\delta r \bigotimes \delta s) \geqslant 0$$

Car E_n tend vers 0 (la série de terme général E_n est convergente).
Pour $r, s \in V_h$ et $t \in \mathbb{R}$, on prend $\delta r = tr$ et $\delta s = s$.

$$\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(\delta r \bigotimes \delta s)|^2\right)t^2 - \left(\int_\Omega \nabla g_\infty \nabla(\delta r \bigotimes \delta s)\right)t \geqslant 0$$

C'est une fonction polynomiale de degré 2 qui est positive partout sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, le coefficient de degré 1 est nul. Donc,

$$\int_\Omega \nabla g_\infty \nabla(\delta r \bigotimes \delta s) = 0$$

— Commentaire sur la convergence.
Par simple combinaison linéaire de 0.7, pour tout $g \in V_h \bigotimes V_h$

$$\int_\Omega \nabla g_\infty \nabla g = 0$$

En prenant $g = g_\infty$, on trouve $||g_\infty||^2 = 0$. Donc, $g_\infty = 0$.
On conclut : sous la norme considérée, u_n converge vers u_h.

Question 8

On reprend le système d'Euler

$$\begin{cases} \forall \delta s \in V_h, \ \int_\Omega \nabla(r_n \bigotimes s_n + u_{n-1}) \nabla(r_n \bigotimes \delta s) = \int_\Omega f(r_n \bigotimes \delta s) \\ \forall \delta r \in V_h, \ \int_\Omega \nabla(r_n \bigotimes s_n + u_{n-1}) \nabla(\delta r \bigotimes s_n) = \int_\Omega f(\delta r \bigotimes s_n) \end{cases}$$

Pour la première équation, soit $T \in \mathbb{R}^I$ la décomposition de δs sur la base $(\phi_1, \dots, \phi_I)$.
Les sommes portent sur le domaine $1, \dots, I)$ et par souci de simplicité, on note ici le vecteur R_n (resp. S_n) par R (resp. S)

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla(r_n \bigotimes s_n) \nabla(r_n \bigotimes \delta s) &= \sum_{i,j,k,l} R_i S_j R_k T_l \int_\Omega \nabla(\phi_i \bigotimes \phi_j) \nabla(\phi_k \bigotimes \phi_l) \\
&= \sum_{i,j,k,l} R_i S_j R_k T_l (D_{i,k} M_{j,l} + M_{i,k} D_{j,l}) \\
&= \sum_{i,j,k,l} R_i S_j R_k T_l D_{i,k} M_{j,l} + \sum_{i,j,k,l} R_i S_j R_k T_l M_{i,k} D_{j,l} \\
&= \sum_{i,j,l} R_i S_j T_l M_{j,l} (DR)_i + \sum_{i,j,l} R_i S_j T_l D_{j,l} (MR)_i \\
&= \sum_{i,j} R_i S_j (MT)_j (DR)_i + \sum_{i,j} R_i S_j (DT)_j (MR)_i \\
&= R^\intercal DR \quad S^\intercal MT + R^\intercal MR \quad S^\intercal DT \\
&= S^\intercal (R^\intercal DRM) T + S^\intercal (R^\intercal MRD) T \\
&= S^\intercal (R^\intercal DRM + R^\intercal MRD) T \\
&= S^\intercal \mathcal{M}(R) T
\end{aligned}$$

Or, pour $V \in \mathbb{R}^I$, $V^\intercal DV$ et $V^\intercal MV$ sont des scalaires. Les matrices D et M sont symétriques, donc $\mathcal{M}(V)$ est symétrique.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla(r_n \bigotimes s_n) \nabla(r_n \bigotimes \delta s) &= S^\intercal \mathcal{M}(R) T \\
&= S^\intercal \mathcal{M}(R)^\intercal T \\
&= (\mathcal{M}(R) S)^\intercal T \\
&= (\mathcal{M}(R_n) S_n)^\intercal T \\
&= T^\intercal \mathcal{M}(R_n) S_n
\end{aligned} \tag{0.8}$$

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u_{n-1}\nabla(r_n \bigotimes \delta s) &= \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{i,j,k,l}(R_m)_i(S_m)_j(R_n)_k T_l \int_\Omega \nabla(\phi_i \bigotimes \phi_j)\nabla(\phi_k \bigotimes \phi_l) \\
&= \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{i,j,k,l}(R_m)_i(S_m)_j(R_n)_k T_l (D_{i,k}M_{j,l} + M_{i,k}D_{j,l}) \\
&= \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{i,j,k,l}(R_m)_i(S_m)_j(R_n)_k T_l D_{i,k}M_{j,l} \\
&+ \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{i,j,k,l}(R_m)_i(S_m)_j(R_n)_k T_l M_{i,k}D_{j,l} \\
&= \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{i,j,k}(R_m)_i(S_m)_j(MT)_j(R_n)_k D_{i,k} \\
&+ \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{i,j,k}(R_m)_i(S_m)_j(DT)_j(R_n)_k M_{i,k} \\
&= \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{i,j}(R_m)_i(S_m)_j(MT)_j(DR_n)_i \\
&+ \sum_{m=1}^{n-1}\sum_{i,j}(R_m)_i(S_m)_j(DT)_j(MR_n)_i \\
&= \sum_{m=1}^{n-1}(R_m^\intercal DR_n)S_m^\intercal MT + \sum_{m=1}^{n-1}(R_m^\intercal MR_n)S_m^\intercal DT \\
&= \sum_{m=1}^{n-1}S_m^\intercal(R_m^\intercal DR_n)MT + \sum_{m=1}^{n-1}S_m^\intercal(R_m^\intercal MR_n)DT \\
&= \sum_{m=1}^{n-1}S_m^\intercal(R_m^\intercal DR_n)M^\intercal T + \sum_{m=1}^{n-1}S_m^\intercal(R_m^\intercal MR_n)D^\intercal T \\
&= \sum_{m=1}^{n-1}(R_m^\intercal DR_n MS_m)^\intercal T + \sum_{m=1}^{n-1}(R_m^\intercal MR_n DS_m)^\intercal T \\
&= \left(\sum_{m=1}^{n-1}\Big[R_m^\intercal DR_n MS_m + R_m^\intercal MR_n DS_m\Big]\right)^\intercal T \\
&= T^\intercal \sum_{k=1}^{n-1}\Big(R_k^\intercal DR_n MS_k + R_k^\intercal MR_n DS_k\Big)
\end{aligned}
\tag{0.9}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega f(r_n \bigotimes \delta s) &= \sum_{i,j} (R_n)_i T_j \int_\Omega f(\phi_i \bigotimes \phi_j) \\
&= \sum_{i,j} (R_n)_i T_j \int_\Omega \Big(\sum_{p=1}^{P} f_1^p \bigotimes f_2^p \Big) (\phi_i \bigotimes \phi_j) \\
&= \sum_{i,j} (R_n)_i T_j \sum_{p=1}^{P} \int_\Omega (f_1^p \phi_i) \bigotimes (f_2^p \phi_j) \\
&= \sum_{i,j} (R_n)_i T_j \sum_{p=1}^{P} \bigg(\int_0^1 f_1^p(t) \phi_i(t) \mathrm{d}t \bigg) \bigg(\int_0^1 f_2^p(t) \phi_j(t) \mathrm{d}t \bigg) \\
&= \sum_{i,j} (R_n)_i T_j \sum_{p=1}^{P} (F_1^p)_i (F_2^p)_j \\
&= \sum_{p=1}^{P} \sum_{i,j} (R_n)_i T_j (F_1^p)_i (F_2^p)_j \\
&= \sum_{p=1}^{P} \Big((R_n)^\intercal F_1^p \Big) T^\intercal F_2^p \\
&= T^\intercal \sum_{p=1}^{P} \Big((R_n)^\intercal F_1^p \Big) F_2^p
\end{aligned} \tag{0.10}
$$

En combinant le 0.8, 0.9 et 0.10, la première équation du système d'Euler peut s'écrire

$$
T^\intercal \mathcal{M}(R_n) S_n + T^\intercal \sum_{k=1}^{n-1} \Big(R_k^\intercal D R_n M S_k + R_k^\intercal M R_n D S_k \Big) = T^\intercal \sum_{p=1}^{P} \Big((R_n)^\intercal F_1^p \Big) F_2^p
$$

Ceci étant vrai pour tout vecteur T de dimension I :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}(R_n) S_n + \sum_{k=1}^{n-1} \Big(R_k^\intercal D R_n M S_k + R_k^\intercal M R_n D S_k \Big) &= \sum_{p=1}^{P} \Big((R_n)^\intercal F_1^p \Big) F_2^p \\
\mathcal{M}(R_n) S_n &= \sum_{p=1}^{P} \Big((R_n)^\intercal F_1^p \Big) F_2^p - \sum_{k=1}^{n-1} \Big(R_k^\intercal D R_n M S_k + R_k^\intercal M R_n D S_k \Big)
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\mathcal{M}(R_n) S_n = \mathcal{G}_n(R_n)
$$

De même, on trouve

$$
\mathcal{M}(S_n) R_n = \mathcal{F}_n(S_n)
$$

Question 9

Pour tester le code, on a documenté les fonctions principales (fin du fichier).