Théorie de la Mesure

OULAD ALI Ayoub

$$\mu(E)$$

Table des matières

1 Préliminaires

Cette section a pour but de présenter des notions d'intégrabilité et de théorie des ensembles indispensables pour appréhender la théorie de la mesure.

1.1 Intégrabilité d'une fonction au sens de Riemann

En analyse, l'intégrale de Riemann offre une méthode rigoureuse pour calculer l'aire exacte sous la courbe d'une fonction sur un segment donné.

Soit une fonction f définie sur un intervalle fermé $[a, b] \subset \mathbb{R}$. L'intégrale de Riemann de f entre a et b est notée :

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Géométriquement, cette notation représente l'aire de la surface $\mathcal{A}$ délimitée par :

— la courbe représentative de la fonction f, notée $\mathcal{C}_f$;

— l'axe des abscisses (l'axe des x) ;

— les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

Cette aire est dite **algébrique**, car elle est comptée de manière orientée :

— Positivement lorsque la courbe de f est **au-dessus** de l'axe des abscisses (où $f(x) \geq 0$).

— Négativement lorsque la courbe est **en-dessous** de l'axe (où $f(x) \leq 0$).

Dans la suite, on notera $\mathbf{I} = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ avec $a < b$.

Définition 1: Subdivision

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **subdivision** de $\mathbf{I}$ toute suite finie $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ de points de $\mathbf{I}$ telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.
Le **pas** de la subdivision σ est le réel $|\sigma| = \max_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1})$.

Remarque 1: Union de subdivisions

Soient σ et σ' deux subdivisions de $\mathbf{I}$. L'ensemble $\sigma \cup \sigma'$ est encore une subdivision de $\mathbf{I}$ (après réarrangement des points dans l'ordre croissant). On dit que cette subdivision est plus fine.

Notation 1: Sommes de Darboux

Soit $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ une application bornée et soit $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision de $\mathbf{I}$.
Pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose :

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{et} \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Les **sommes de Darboux** inférieure et supérieure de f associées à σ sont :

$$d_f(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i \quad \text{et} \quad D_f(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i$$

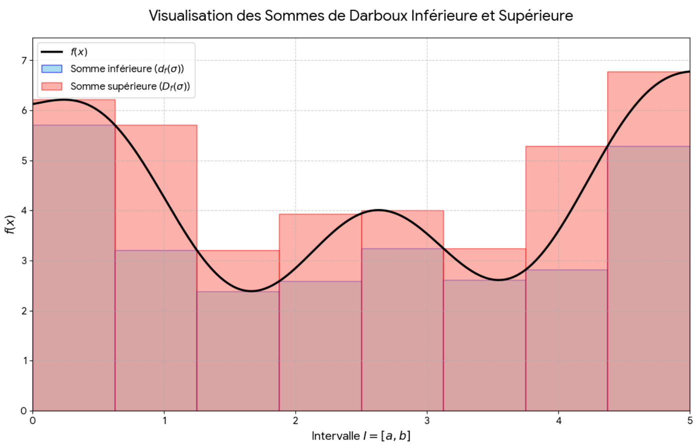

FIGURE 1 – Comparaison des sommes de Darboux et de la fonction f.

Proposition 1: Propriétés des sommes de Darboux

Soit $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ une application bornée et soient σ, σ' deux subdivisions de $\mathbf{I}$. On a alors :

1. Pour toute subdivision σ, on a $d_f(\sigma) \leq D_f(\sigma)$.
2. La somme inférieure est croissante par raffinement : si $\sigma \subset \sigma'$, alors $d_f(\sigma) \leq d_f(\sigma')$.
3. La somme supérieure est décroissante par raffinement : si $\sigma \subset \sigma'$, alors $D_f(\sigma') \leq D_f(\sigma)$.
4. Pour n'importe quelles subdivisions σ et σ', on a $d_f(\sigma) \leq D_f(\sigma')$.

Définition 2: Fonction intégrable au sens de Riemann

Soit $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ une application bornée. On dit que f est **intégrable au sens de Riemann** si l'infimum des sommes de Darboux supérieures coïncide avec le supremum des sommes de Darboux inférieures. Autrement dit, si :

$$\sup_{\sigma} d_f(\sigma) = \inf_{\sigma} D_f(\sigma)$$

Cette valeur commune est appelée l'intégrale de f sur $\mathbf{I}$ et est notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Définition Alternative 1: Via les sommes de Riemann

Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
Pour toute subdivision **marquée** (σ, t), où $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ est une subdivision et $t = (t_1, \ldots, t_n)$ est une suite de points témoins telle que $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, on définit la **somme de Riemann** associée par :

$$S(f, \sigma, t) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i)$$

On dit que la fonction f est **Riemann-intégrable** sur $[a, b]$ s'il existe un réel I tel que les sommes de Riemann convergent vers I lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, et ce, *indépendamment du choix des points témoins* t_i.

Dans ce cas, cette limite I est l'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$ et se note :

$$\int_a^b f(x)\,dx \coloneqq \lim_{|\sigma|\to 0} S(f, \sigma, t)$$

1.2 Théorie des Ensembles : Notions Fondamentales

La **théorie des ensembles**, initiée par Georg Cantor à la fin du XIX[e] siècle, est une branche fondamentale des mathématiques. Elle propose de reconstruire l'intégralité des objets mathématiques (nombres, fonctions, etc.) à partir de deux notions primitives : celle d'**ensemble** (une collection d'objets) et celle d'**appartenance** ($\in$). Cette théorie a non seulement fourni un fondement rigoureux aux mathématiques, mais a aussi introduit l'idée révolutionnaire qu'il existe plusieurs types d'infinis, mesurables et comparables.

Définition 3: Ensemble, Élément et Sous-Ensemble

Un **ensemble** est une collection d'objets distincts, appelés **éléments**. Si un objet x est un élément d'un ensemble E, on note $x \in E$. Dans le cas contraire, on note $x \notin E$.
Un ensemble A est un **sous-ensemble** d'un ensemble B, noté $A \subset B$, si tout élément de A est également un élément de B.

$$A \subset B \iff (\forall x, (x \in A \implies x \in B))$$

L'**ensemble vide**, noté $\emptyset$, est l'ensemble ne contenant aucun élément. Il est un sous-ensemble de tout ensemble.

Remarque 2: Exemples

Soient les ensembles $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ et $C = \{a, b\}$.
- On a $2 \in A$ mais $3 \notin A$.
- On a bien $A \subset B$.

Définition 4: Opérations sur les Ensembles

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble de référence Ω.
- L'**union** $A \cup B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A, à B, ou aux deux.

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

- L'**intersection** $A \cap B$ est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B.

$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

- Le **complémentaire** de A dans Ω, noté A^c, est l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.

$$A^c = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

Définition 5: Image Directe et Réciproque

Soit $f : E \to F$ une application.
- L'**image directe** d'un sous-ensemble $A \subset E$ est $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset F$.
- L'**image réciproque** d'un sous-ensemble $B \subset F$ est $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E$.

Notation 2: Opérations Infinies et Lois de De Morgan

Les opérations ensemblistes se généralisent aux suites d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— **Union dénombrable :** $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \{x \mid \exists n \in \mathbb{N}, x \in A_n\}$

— **Intersection dénombrable :** $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \{x \mid \forall n \in \mathbb{N}, x \in A_n\}$

Ces opérations sont liées au passage au complémentaire par les **lois de De Morgan** :

$$\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n^c \quad \text{et} \quad \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n^c$$

Définition 6: Limite d'une Suite d'Ensembles

Pour étudier la convergence d'une suite d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit :

— La **limite supérieure** ($\limsup$), l'ensemble des éléments appartenant à une *infinité* de A_n.

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

— La **limite inférieure** ($\liminf$), l'ensemble des éléments appartenant à tous les A_n *à partir d'un certain rang.*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

Proposition 2: Convergence d'une suite d'ensembles

Une suite d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers un ensemble A si et seulement si ses limites supérieure et inférieure sont égales à A.

$$(A_n) \text{ converge vers } A \iff \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = A$$

On note alors $A = \lim_{n\to\infty} A_n$.

Remarque 3: Exemple de non-convergence

Pour la suite oscillante définie par $A_n = [0,1]$ si n est pair et $A_n = [1,2]$ si n est impair :

— $\limsup A_n = [0,2]$ (les éléments qui apparaissent une infinité de fois).

— $\liminf A_n = \{1\}$ (l'élément qui est présent dans tous les ensembles à partir du rang $n = 0$).

Les limites étant différentes, la suite ne converge pas.

2 Théorie de la mesure

La **théorie de la mesure** a été développée pour généraliser les notions intuitives de longueur, d'aire ou de volume à des ensembles beaucoup plus complexes que les simples intervalles ou figures géométriques. Elle fournit un cadre rigoureux qui permet de surmonter les limitations de l'intégrale de Riemann.

Son objectif est de construire une fonction, appelée **mesure**, capable d'assigner une "taille" à une vaste collection de sous-ensembles d'un ensemble donné. Pour cela, deux objets fondamentaux sont nécessaires :

— une **tribu** (ou **σ-algèbre**), qui est une collection de sous-ensembles "mesurables", stable par les opérations de complémentaire et d'union dénombrable ;

— une **mesure**, qui est une application définie sur cette tribu, associant à chaque ensemble mesurable un nombre positif représentant sa taille.

Ce formalisme mène directement à une nouvelle théorie de l'intégration, plus puissante et générale : l'intégration au sens de Lebesgue.

2.1 Tribu ou σ-algèbre

Remarque 4: Motivation

Pour définir une mesure, on cherche à assigner une "taille" aux sous-ensembles d'un ensemble de référence E. Il s'avère qu'il est souvent impossible de le faire pour *tous* les sous-ensembles de E de manière cohérente.
On se restreint donc à une collection "raisonnable" de sous-ensembles, que l'on appellera les parties **mesurables**. Cette collection doit être suffisamment riche pour inclure les ensembles qui nous intéressent et être stable par les opérations usuelles (union, intersection, complémentaire). C'est précisément le rôle d'une tribu.

Définition 7: Tribu (ou σ-algèbre)

Soit E un ensemble et soit $\mathcal{A}$ une famille de sous-ensembles de E (c'est-à-dire $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$).
On dit que $\mathcal{A}$ est une **tribu** (ou **σ-algèbre**) sur E si elle vérifie les trois axiomes suivants :

1. L'ensemble total est dans la tribu : $E \in \mathcal{A}$.
2. **Stabilité par passage au complémentaire :** Si un ensemble est dans la tribu, son complémentaire l'est aussi.

$$\forall A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$$

3. **Stabilité par union dénombrable :** L'union de toute famille dénombrable d'ensembles de la tribu reste dans la tribu.

$$\text{Si } (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite d'éléments de } \mathcal{A}, \text{ alors } \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \in \mathcal{A}$$

Le couple $(E, \mathcal{A})$ est alors appelé un **espace mesurable**.

Proposition 3: Propriétés immédiates d'une tribu

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Alors :

1. L'ensemble vide appartient à la tribu : $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Indication : Utiliser le fait que $E \in \mathcal{A}$ et la stabilité par complémentaire.

2. $\mathcal{A}$ est stable par **intersection dénombrable**.
   Indication : Utiliser la stabilité par complémentaire et par union dénombrable, ainsi que les lois de De Morgan généralisées : $\bigcap A_n = (\bigcup A_n^c)^c$.
3. $\mathcal{A}$ est stable par union et intersection **finies**.
   Indication : Une union finie $\bigcup_{k=1}^{N} A_k$ est un cas particulier d'union dénombrable en posant $A_n = \emptyset$ pour $n > N$.

Remarque 5: Exemples et contre-exemples

Soit $E = \{a, b, c\}$.

- **Tribu grossière :** $\mathcal{A} = \{\emptyset, E\}$ est la plus petite tribu possible sur E.
- **Tribu discrète :** $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$ est la plus grande tribu possible.
- **Exemple intermédiaire :** $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, E\}$ est une tribu. Elle contient E, les complémentaires de chaque élément ($\{a\}^c = \{b, c\}$) et toutes les unions possibles.
- **Contre-exemple :** La famille $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, E\}$ n'est **pas** une tribu. Par exemple, l'union $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ n'appartient pas à $\mathcal{F}$, violant l'axiome de stabilité par union.

Proposition 4: Intersection de tribus

Soit $(E, (\mathcal{A}_i)_{i \in I})$ une famille (non vide) de tribus sur E. Alors leur intersection $\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ est encore une tribu sur E.

Remarque 6: Indication pour la preuve

Il suffit de vérifier que $\mathcal{A}$ satisfait les trois axiomes. Par exemple, pour la stabilité par complémentaire : si $A \in \mathcal{A}$, alors par définition de l'intersection, $A \in \mathcal{A}_i$ pour tout $i \in I$. Comme chaque $\mathcal{A}_i$ est une tribu, $A^c \in \mathcal{A}_i$ pour tout i. Donc, $A^c \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}$.

Définition 8: Tribu engendrée

Soit $\mathcal{C}$ une collection de sous-ensembles de E ($\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$).
Il existe une unique plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant $\mathcal{C}$. On la note $\sigma(\mathcal{C})$ et on l'appelle la **tribu engendrée par** $\mathcal{C}$.
Elle est définie comme l'intersection de toutes les tribus sur E qui contiennent $\mathcal{C}$.

Remarque 7: Intuition sur la tribu engendrée

La tribu $\sigma(\mathcal{C})$ est la tribu "la plus économique" que l'on puisse construire à partir de $\mathcal{C}$. Elle contient les ensembles de $\mathcal{C}$, et seulement les autres ensembles qui sont absolument nécessaires pour satisfaire les trois axiomes (leurs complémentaires, leurs unions et intersections dénombrables, et ainsi de suite).

2.2 Mesure et Mesure Extérieure

2.2.1 La notion de mesure

Remarque 8: Motivation

Après avoir défini un cadre stable pour les ensembles (la tribu), l'étape suivante consiste à leur assigner une "taille" (longueur, aire, volume, probabilité...). Une mesure est une fonction qui accomplit cette tâche de manière cohérente, notamment en s'assurant que la taille de la réunion d'ensembles disjoints est bien la somme de leurs tailles respectives.

Définition 9: Mesure positive

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une **mesure** (positive) sur $(E, \mathcal{A})$ est une application $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ qui vérifie les deux axiomes suivants :

1. La mesure de l'ensemble vide est nulle : $\mu(\emptyset) = 0$.
2. **σ-additivité :** Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles de $\mathcal{A}$ qui sont **deux à deux disjoints**, on a :
$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

Le triplet $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est alors appelé un **espace mesuré**.

Définition 10: Propriétés et types de mesures

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.
- Une mesure est dite **finie** si sa masse totale est finie, i.e., $\mu(E) < +\infty$.
- Une mesure est dite **σ-finie** s'il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles de $\mathcal{A}$ telle que $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ et $\mu(E_n) < +\infty$ pour tout n.
- Un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est dit **μ-négligeable** si $\mu(A) = 0$.
- Une propriété est vraie **μ-presque partout** (μ-p.p.) si l'ensemble des points où elle est fausse est μ-négligeable.

Proposition 5: Propriétés fondamentales d'une mesure

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1. **Monotonie :** Si $A, B \in \mathcal{A}$ et $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.
2. **Additivité finie :** Pour toute famille finie $\{A_1, \ldots, A_n\}$ d'ensembles de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.
3. **σ-sous-additivité :** Pour *toute* suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles de $\mathcal{A}$ (pas nécessairement disjoints), on a :
$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$
4. **Continuité par suites croissantes :** Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'ensembles de $\mathcal{A}$ (i.e., $A_n \subset A_{n+1}$), alors :
$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$
5. **Continuité par suites décroissantes :** Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'ensembles de $\mathcal{A}$ (i.e., $A_{n+1} \subset A_n$) et s'il existe au moins un n_0 tel que $\mu(A_{n_0}) <$

$+\infty$, alors :

$$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Remarque 9: Condition pour la continuité décroissante

La condition $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ est cruciale. Considérons $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de la mesure de Lebesgue λ. Soit $A_n = [n, +\infty)$. La suite (A_n) est décroissante, et $\lambda(A_n) = +\infty$ pour tout n. On a $\lim \lambda(A_n) = +\infty$. Cependant, l'intersection $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \emptyset$, dont la mesure est $\lambda(\emptyset) = 0$. L'égalité n'a donc pas lieu.

2.2.2 La notion de mesure extérieure

Remarque 10: Motivation : une étape de construction

Construire une mesure directement sur une tribu compliquée (comme la tribu borélienne) est difficile. La stratégie usuelle consiste à d'abord définir un objet plus simple, une **mesure extérieure**, qui est défini sur *tous* les sous-ensembles $\mathcal{P}(E)$. Ensuite, on utilise cette mesure extérieure pour identifier les "bons" ensembles qui formeront la tribu.

Définition 11: Mesure extérieure

Une **mesure extérieure** sur un ensemble E une application $\mu^* : \mathcal{P}(E) \to [0, +\infty]$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2. **Monotonie :** Si $A \subset B \subset E$, alors $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
3. **σ-sous-additivité :** Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de E, on a :

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

2.3 Fonctions Mesurables

Remarque 11: Motivation

Après avoir défini les espaces mesurés, l'étape suivante consiste à étudier les fonctions entre ces espaces. Pour pouvoir définir une intégrale ou "transporter" la structure de mesure, nous avons besoin de fonctions qui se comportent bien par rapport aux tribus. Ces fonctions, dites **mesurables**, sont celles qui préservent la structure des ensembles mesurables par image réciproque.

Définition 12: Fonction Mesurable

Soient $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux **espaces mesurables**. Une application $f : E \to F$ est dite **mesurable** (ou $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable) si l'image réciproque par f de tout ensemble mesurable de F est un ensemble mesurable de E.
Autrement dit :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \in \mathcal{A}$$

Remarque 12: Notation pour les fonctions à valeurs réelles

Lorsque l'espace d'arrivée est $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ou $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, où $\mathcal{B}$ est la **tribu borélienne**, on parle simplement de **fonction mesurable à valeurs réelles**.

Proposition 6: Critère de mesurabilité

Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B})$ une application, et soit $\mathcal{C}$ une famille de sous-ensembles de F qui **engendre** la tribu $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$).
Alors, f est mesurable si et seulement si :

$$\forall C \in \mathcal{C}, \quad f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$$

Proposition 7: Stabilité des fonctions mesurables

L'ensemble des fonctions mesurables est stable pour de nombreuses opérations. Soient $f, g : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. **Opérations algébriques :** Les fonctions $f + g$, λf, et fg sont mesurables. Si $g(x) \neq 0$ pour tout x, alors f/g est mesurable.
2. **Supremum et Infimum :** Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors les fonctions $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$ et $\liminf_n f_n$ sont mesurables.
3. **Limite simple :** Si la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f, alors f est mesurable.

Remarque 13: Exemples de fonctions mesurables

- **Fonctions continues :** Toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable (pour les tribus boréliennes).
- **Fonction indicatrice :** La fonction indicatrice d'un ensemble $A \subset E$, notée $\mathbf{1}_A$, est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.
- **Fonctions étagées :** Une combinaison linéaire finie de fonctions indicatrices d'ensembles mesurables, $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}$, est mesurable. Ces fonctions sont les briques de base de l'intégrale de Lebesgue.

3 Un exemple : Les probabilités

La théorie des probabilités est l'un des exemples les plus importants et les plus naturels d'application de la théorie de la mesure.

Remarque 14: Notions

Un **espace de probabilité** est simplement un **espace mesuré** $(E, \mathcal{A}, \mu)$ où la mesure de l'ensemble total est égale à 1 :

- L'espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$ devient l'**espace de probabilité** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- L'ensemble de référence E est appelé l'**univers** des possibles, noté Ω.
- La tribu $\mathcal{A}$ est la collection des **événements**, notée $\mathcal{F}$.
- La mesure μ, qui vérifie $\mu(E) = 1$, est appelée une **mesure de probabilité**, notée $\mathbb{P}$. La condition $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ signifie que la probabilité qu'un résultat se produise dans l'univers est de 100%.
- Une **fonction mesurable** $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est appelée une **variable aléatoire**.

Remarque 15: Interprétation

Dans ce cadre, la σ-additivité de la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ a une signification très intuitive : la probabilité de l'union d'une suite d'événements deux à deux incompatibles (disjoints) est la somme de leurs probabilités.

Remarque 16: Normalisation d'une mesure finie

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que la mesure μ est **finie** et non nulle, c'est-à-dire $0 < \mu(E) < +\infty$.
Il est toujours possible de transformer cet espace en un espace de probabilité. On définit pour cela une nouvelle mesure $\mathbb{P}$ sur la même tribu $\mathcal{A}$ par **normalisation** :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(E)}$$

Cette application $\mathbb{P}$ est bien une mesure de probabilité car elle hérite de la σ-additivité de μ et vérifie la condition de masse totale égale à 1 :

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\mu(E)}{\mu(E)} = 1$$

Ainsi, tout espace mesuré par une mesure finie non nulle peut être vu comme un espace de probabilité.

Bibliographie

— Paul Halmos, *Introduction à la théorie des ensembles.* Jacques Gabay, 2011.
— Jean-Pascal Ansel et Yves Ducel, *Exercices corrigés en théorie de la mesure et de l'intégration.* Ellipses, 2015.
— Omar Anza Hafsa, *Mesure et intégration.* Polycopié de cours, Université de Nîmes.