# Des espaces mesurables aux espaces métriques

la métrique de Fréchet-Nikodym

OULAD ALI Ayoub

$$(\mathbf{X}, d) \hookleftarrow (\mathbf{E}, \mathcal{A}, \mu)$$

# Table des matières

# 1 Introduction

## 1.1 Motivation

Les **espaces métriques** et les **espaces mesurables** ont des points communs, notamment parce que tous less deux donnent une structure à un ensemble qui permet de travailler dessus. Il convient parfaitement alors de se demander s'il existe un lien entre mesure et distance. Et comment peut on, à partir d'un espace mesurable, construire un espace métrique. Un concept qui peut être très utile, en probabilité par exemple.
Cependant, le concept de mesure paraît - à première vue - assez différent du concept de distance. Tout au long de ce document, nous essaierons de relier ces deux concepts.

## 1.2 Rappels

**Définition 1: Espace métrique**

Un espace métrique $(\mathbf{E}, d)$ est un ensemble $\mathbf{E}$ muni d'une distance $d : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \mapsto \mathbb{R}_+$ qui vérifie :

— $d(x, y) = 0 \iff x = y, \forall x, y \in \mathbf{E}$
— $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in \mathbf{E}$
— $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in \mathbf{E}$

Son but est de décrire la proximité, la convergence, la continuité, la compacité etc.

**Remarque 1: Exemple**

Exemples :

— L'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, d_2)$ où $d_2(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.
— L'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme de la convergence uniforme, $(\mathcal{C}([0, 1]), d_\infty)$, où $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$.
— L'espace $\mathbb{R}^n$ avec la distance de Manhattan, $(\mathbb{R}^n, d_1)$, où $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.
— N'importe quel ensemble non vide $E$ avec la distance discrète $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$.
— L'ensemble des lettres de l'alphabet $\mathcal{A} = \{A, B, \dots, Z\}$ que l'on identifie à $\{0, 1, \dots, 25\}$. La distance est définie par $d(L_1, L_2) = \min(|n_1 - n_2|, 26 - |n_1 - n_2|)$, où $L_1$ et $L_2$ correspondent aux entiers $n_1$ et $n_2$.
Par exemple, la distance entre C (2) et F (5) est $\min(|2-5|, 26-3) = \min(3, 23) = 3$. La distance entre Y (24) et B (1) est $\min(|24 - 1|, 26 - 23) = \min(23, 3) = 3$. C'est la distance la plus courte sur un cercle.

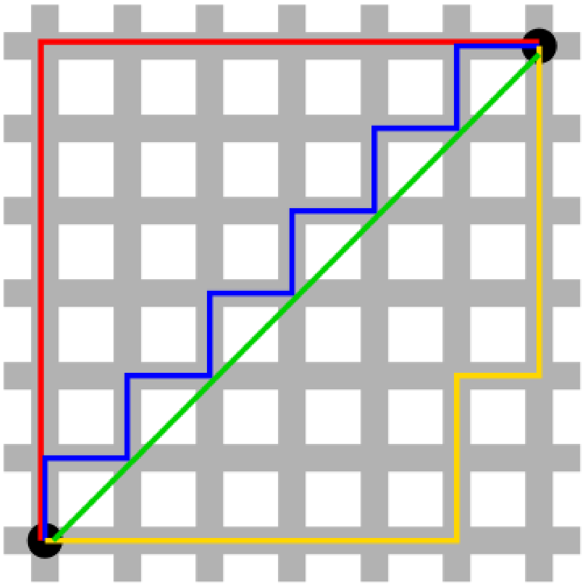

Figure 1 – Distance de Manhattan (chemins rouge, jaune et bleu) contre distance euclidienne en vert.

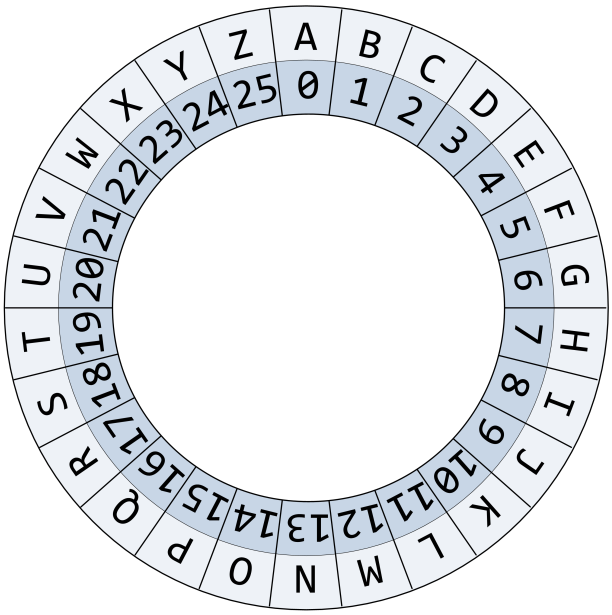


Figure 2 – L'espace des lettres de l'alphabet peut être vu comme une liste doublement chaînée

**Définition 2: Espace mesurable**

Un espace mesurable $(\mathbf{E}, \mathcal{A})$ est un espace muni d'une $\sigma$-algèbre $\mathcal{A}$ qui vérifie :

— $\mathbf{E} \in \mathcal{A}$

— $\forall A \in \mathcal{A},\ A^c \in \mathcal{A}$ (stable par complémentaire)

— $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\},\ \forall \{A_i\}_{i \leq n} \subseteq \mathcal{A},\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ (stable par réunion)

qui muni d'une mesure $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ vérifiant les deux axiomes suivants :

1. La mesure de l'ensemble vide est nulle : $\mu(\emptyset) = 0$.
2. **$\sigma$-additivité :** Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles de $\mathcal{A}$ qui sont **deux à deux disjoints**, on a :
$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

forme $(\mathbf{E}, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

**Remarque 2: Exemples d'espaces mesurables et mesurés**

— **L'espace mesurable de Borel sur $\mathbb{R}$ :** On prend l'ensemble des nombres réels $E = \mathbb{R}$. La $\sigma$-algèbre est la **tribu borélienne** $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, qui est la plus petite $\sigma$-algèbre contenant tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. C'est l'espace mesurable le plus commun en analyse.

  — Si on lui ajoute la **mesure de Lebesgue** $\lambda$, on obtient l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, fondamental en théorie de l'intégration. La mesure $\lambda([a, b])$ d'un intervalle est simplement sa longueur $b - a$.

  — Si on lui ajoute la **mesure de Dirac** $\delta_a$ en un point $a \in \mathbb{R}$, on obtient l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_a)$. Cette mesure vaut 1 pour tout ensemble contenant $a$ et 0 sinon.

— **Le cas d'un ensemble fini ou dénombrable :** Soit un ensemble $E = \{1, 2, \ldots, N\}$ (ou $E = \mathbb{N}$).

  — On peut choisir comme $\sigma$-algèbre l'ensemble de toutes les parties de $E$, noté $\mathcal{P}(E)$. C'est la $\sigma$-algèbre la plus grande possible.

  — On définit alors la **mesure de comptage** (ou de dénombrement) $\mu$, qui à un sous-ensemble $A \subseteq E$ associe son nombre d'éléments (son cardinal). L'espace mesuré $(E, \mathcal{P}(E), \mu)$ est la base des probabilités discrètes.

— **La $\sigma$-algèbre triviale :** Pour n'importe quel ensemble non vide $E$, on peut définir la $\sigma$-algèbre la plus simple possible : $\mathcal{A} = \{\emptyset, E\}$. C'est bien une $\sigma$-algèbre, mais elle est peu utile car on ne peut mesurer que l'ensemble vide ou l'ensemble tout entier.

— **Un exemple simple construit à la main :** Soit $E = \{a, b, c, d\}$. L'ensemble $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, E\}$ est une $\sigma$-algèbre sur $E$.

# 2 Construire un espace métrique à partir d'une mesure

## 2.1 Construire une distance à partir d'une mesure

### 2.1.1 La pseudo-distance

Tout au long on considerera $\mathbf{E}$ un espace muni de sa $\sigma-$algèbre $\mathcal{A}$ et d'une mesure $\sigma$-finie $\mu$ et de masse totale $\mu(\mathbf{E})$ finie.

**Notation 1: Notation : Différence Symétrique**

Pour deux ensembles $A$ et $B$, la **différence symétrique**, notée $A\Delta B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'un des deux ensembles, mais pas aux deux. On peut la définir de plusieurs manières équivalentes :

— En utilisant l'union et l'intersection :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

— En utilisant la différence d'ensembles :

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Visuellement, cela correspond à l'union des deux ensembles, à laquelle on a retiré leur partie commune.

**Définition 3: Pseudo-distance sur E**

Une **pseudo-distance** sur un ensemble $E$ est une fonction $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les axiomes suivants pour tous $x, y, z \in E$ :

— **Séparation faible :** $d(x, y) = 0$ si $x = y$. (La réciproque n'est pas exigée).

— **Symétrie :** $d(x, y) = d(y, x)$.

— **Inégalité triangulaire :** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

La seule différence avec une distance standard est que deux points distincts peuvent avoir une distance nulle. L'espace $(E, d)$ est alors appelé un **espace pseudo-métrique**.

**Proposition 1: Distance sur l'espace des ensembles mesurables**

L'application $d : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$d(A, B) = \mu(A\Delta B)$$

est une pseudo-distance sur l'ensemble $\mathcal{A}$ des parties mesurables de $E$.

**Démonstration 1**

On souhaite prouver que l'application $d : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ définie par $d(A, B) = \mu(A\Delta B)$ est une quasi-distance. Pour cela, vérifions les deux axiomes point par point pour tous $A, B, C \in \mathcal{A}$.

1. **Symétrie :** $d(A, B) = d(B, A)$
   — Par définition, $d(A, B) = \mu(A\Delta B)$.
   — L'opérateur de différence symétrique est **commutatif**, car l'union $\cup$ l'est :

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B\Delta A$$

— Les deux ensembles $A\Delta B$ et $B\Delta A$ étant strictement égaux, leurs mesures sont donc identiques :

$$\mu(A\Delta B) = \mu(B\Delta A)$$

— Or, par définition, $d(B, A) = \mu(B\Delta A)$. On a donc bien montré que $d(A, B) = d(B, A)$. L'axiome de symétrie est respecté.

2. **Inégalité Triangulaire :** $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$

$$\mu(A\Delta C) \leq \mu(A\Delta B) + \mu(B\Delta C)$$

L'inégalité triangulaire est donc vérifiée.

**Conclusion :** Les axiomes étant vérifiés, c'est une **pseudo-distance**.

---

**Contre-exemple (la séparation stricte n'est pas respectée)**
Pour montrer que $d(A, B) = 0$ n'implique pas $A = B$, prenons un cas concret avec la **mesure de Lebesgue** $\lambda$ sur $\mathbb{R}$.

— Soit l'ensemble $A = [0, 1]$ (l'intervalle fermé).
— Soit l'ensemble $B = (0, 1)$ (l'intervalle ouvert).

1. **Les ensembles sont différents :** Clairement, $A \neq B$ car $0 \in A$ et $1 \in A$, mais $0 \notin B$ et $1 \notin B$.
2. **Leur "distance" est nulle :** Calculons leur différence symétrique :

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{0, 1\} \cup \emptyset = \{0, 1\}$$

La mesure de Lebesgue de cet ensemble de deux points est nulle :

$$d(A, B) = \lambda(A\Delta B) = \lambda(\{0, 1\}) = 0$$

On a donc bien deux ensembles **strictement différents** dont la distance est pourtant nulle.

### 2.1.2 la distance

**Définition 4: Classe d'équivalence d'ensembles mesurables**

On définit sur $\mathcal{A}$ la relation d'équivalence $\sim$ par :

$$A \sim B \iff \mu(A\Delta B) = 0$$

Deux ensembles sont donc équivalents s'ils sont égaux **presque partout**.
On appelle **classe d'équivalence** de l'ensemble $A$, notée $[A]$, l'ensemble de tous les ensembles $B \in \mathcal{A}$ tels que $B \sim A$.

$$[A] = \{B \in \mathcal{A} \mid B \sim A\}$$

L'ensemble de toutes ces classes d'équivalence est appelé l'espace quotient, noté $\mathcal{A}/\sim$.

**Proposition 2: Distance sur l'espace quotient**

Soit $\mathcal{A}/\sim$ l'espace des classes d'équivalence. On définit l'application $D : (\mathcal{A}/\sim) \times (\mathcal{A}/\sim) \to \mathbb{R}^+$ par :

$$D([A], [B]) = \mu(A \Delta B)$$

où $A$ et $B$ sont des représentants quelconques des classes $[A]$ et $[B]$.
Cette application est bien définie, car le résultat ne dépend pas du choix des représentants dans les classes.

**Proposition 3: D est une distance**

L'application $D$ définie précédemment est une **distance** sur l'espace $\mathcal{A}/\sim$.

**Démonstration 2**

Nous devons vérifier les trois axiomes d'une distance pour tous $[A], [B], [C] \in \mathcal{A}/\sim$.

1. **Axiome de Séparation :** $D([A], [B]) = 0 \iff [A] = [B]$
   — Par définition, $D([A], [B]) = 0$ si et seulement si $\mu(A \Delta B) = 0$.
   — Or, $\mu(A \Delta B) = 0$ est la condition même pour que $A \sim B$.
   — Et $A \sim B$ signifie, par construction de l'espace quotient, que $A$ et $B$ appartiennent à la même classe d'équivalence, donc $[A] = [B]$.
   — L'axiome est donc vérifié par construction.
2. **Axiome de Symétrie :** $D([A], [B]) = D([B], [A])$
   — $D([A], [B]) = \mu(A \Delta B)$.
   — Comme $A \Delta B = B \Delta A$, on a $\mu(A \Delta B) = \mu(B \Delta A)$.
   — Donc $D([A], [B]) = D([B], [A])$.
3. **Axiome d'Inégalité Triangulaire :** $D([A], [C]) \leq D([A], [B]) + D([B], [C])$
   — On sait que $\mu(A \Delta C) \leq \mu(A \Delta B) + \mu(B \Delta C)$.
   — En termes de $D$, cela se traduit directement par :

$$D([A], [C]) \leq D([A], [B]) + D([B], [C])$$

Les trois axiomes étant vérifiés, $D$ est bien une distance sur $\mathcal{A}/\sim$.

# 3 Prolongement : les probabilités

Nous avions supposées que $\mu$ était de masse totale finie. Il vient alors : $D^* = \frac{D}{\mu(E)}$ est une distance construite à partir d'une probabilité.

**Proposition 4**

Lorsque $\mu$ est une mesure de probabilité $P$, la distance $d(A, B) = P(A \Delta B)$ acquiert une signification concrète : elle mesure la "probabilité de désaccord" entre la réalisation des deux événements $A$ et $B$.
L'événement $A \Delta B$ correspond au cas où exactement un des deux événements se produit.
La distance $d(A, B)$ est donc la probabilité de ce scénario d'incompatibilité.

— **En diagnostic ou prédiction :** Si $A$ est un événement "symptôme/prédiction" et $B$ est un événement "réalité/vérité", alors $d(A, B)$ est la **probabilité d'erreur totale**. Elle additionne la probabilité d'un faux positif ($A \setminus B$) et celle d'un faux négatif ($B \setminus A$). Une faible distance signifie que le symptôme est un excellent indicateur de la réalité.

— **En analyse temporelle :** Si $A$ et $B$ représentent le même phénomène se produisant à des moments différents, $d(A, B)$ mesure la probabilité que ce phénomène se manifeste à un moment *exclusif* de l'autre. Une distance élevée indique que les deux périodes sont temporellement très distinctes en ce qui concerne l'événement.

**Remarque 3: Une distance fondamentale : la métrique de Fréchet-Nikodym**

La méthode que nous avons suivie pour construire une véritable distance à partir de la pseudo-distance $d(A, B) = \mu(A \Delta B)$ est une procédure standard et très importante en théorie de la mesure.
Cette construction n'est pas nouvelle : la distance ainsi définie sur l'espace quotient $\mathcal{A}/\sim$ est une structure bien connue qui porte le nom de **métrique de Fréchet-Nikodym** (souvent appelée simplement métrique de Nikodym).
Elle est d'autant plus fondamentale qu'elle est directement liée à la norme de l'espace $L^1$. En effet, la distance entre les classes $[A]$ et $[B]$ est précisément la norme $L^1$ de la différence de leurs fonctions indicatrices :

$$D([A], [B]) = \int_E |1_A(x) - 1_B(x)| \, d\mu(x) = \|1_A - 1_B\|_{L^1}$$

Cette identité crée un pont essentiel entre la géométrie des ensembles (via la distance) et l'analyse fonctionnelle (via les normes d'espaces vectoriels).

# 4 Bibliographie

## 4.1 Images


— Figure 1 : https ://fr.wikipedia.org/wiki/Distance$_{d}e_{M}anhattanSource : Wikipedia - DistancedeManh$

— Figure 2 : http ://jed.iconus.ch/calculs-cycliques-et-modulo/Source : jed.iconus.ch - Calculs cycliques et modulo


## 4.2 Autres ressources


https ://fr.wikipedia.org/wiki/Espace$_{p}seudo - m$