Introduction à la formalisation en mathématiques

Stage de rentrée 1ère année

S. Meignen, O. Ozenda

2018/2019

Table des matières

Chapitre 1

Propriétes élémentaires des fonctions, des suites et des séries

1.1 Continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}$

Définition 1 *Soit $X \subset \mathbb{R}$ un ensemble, $X \neq \emptyset$, $f : X \to \mathbb{R}$. Soit $a \in X$, on dit que f est continue en a s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)$ tende vers b lorsque x tend vers a.*

En termes mathématiques on écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ |x - a| \leq \eta \Rightarrow\ |f(x) - b| \leq \varepsilon. \tag{1.1}$$

On peut aussi définir la continuité à l'aide des suites :

Définition 2 *f est continue en a s'il existe b tel que quelquesoit la suite x_n tendant vers a, $f(x_n) \to b$.*

Définition 3 *On dit que f est continue en X si elle est continue en tout point de X*

Exercices :

1. Montrer que $f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $E[x]$, où E désigne la partie entière de x est discontinue (considérer la suite $x_n = -\frac{1}{n}$).

1.2 Dérivabilité des fonctions définies sur $\mathbb{R}$

Définition 4 *On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ est dérivable ($X \subset \mathbb{R}$) si pour tout $x \in X$:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe. Dans ce cas, on pose $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$

Remarque 1 *Une fonction peut être dérivable sans que la dérivée soit continue.*

Exemple : Soit $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$.

1. Etudier la continuité de f en 0.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0.
3. Etudier la continuité de la dérivée de f en 0.

Proposition 1

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un réel l tel que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = l$
2. Il existe un réel l et une application φ tel qeu pour tout h $f(x_0+h) = f(x_0) + hl + h\varphi(h)$ avec $\varphi(h) \to 0$ quand $h \to 0$.

Démonstration 1) $\Rightarrow$ 2) On pose $\varphi(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - l$, alors on obtient $\varphi(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$ et

$$f(x+h) = f(x) + hl + \varphi(h),$$

ce qui prouve le résultat.
2) $\Rightarrow$ 1), $f(x+h) = f(x) + hl + \varphi(h)$ implique $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = l + \varphi(h) \underset{h\to 0}{\to} l$.

Exercices :

1. Montrer que toute application dérivable est continue.
2. Démontrer que $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
3. Calculer la dérivée de $u(x) = \frac{1}{v(x)}$.
4. Calculer la dérivée de $u(v(x))$.
5. Calculer la dérivée de $u(x)^n$, pour n dans $\mathbb{Z}$.

Définition 5 *On dit que f est de classe C^1 en x_0 si f est dérivable en x_0 et que la dérivée est continue en x_0. On dit que f est de classe C^n en x_0 si f est n fois dérivable et si sa dérivée nième est continue.*

1.3 Propriétés des fonctions dérivables

Théorème 1 (inégalités des accroissements finis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose qu'il existe m et M tel que $m \leq f'(x) \leq M$ sur I. Alors pour tout a et b dans I, avec $a < b$, on a :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

Démonstration $f(b)-f(a) \leq M(b-a) \Leftrightarrow f(b)-Mb \leq f(a)-Ma$. On pose $g(x)=f(x)-Mx$, alors il s'agit de montrer que $g(b) \leq g(a)$. Il suffit de montrer que g est décroissante sur $[a,b]$, or $g'(x)=f'(x)-M \leq 0$ est décroissante.

Proposition 2

> Soit f dérivable sur I. s'il existe M tel que $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in I$ alors $\forall a,b \in I,\ |f(a)-f(b)| \leq M|b-a|$.

Démonstration D'après de théorème précédent :

$$\begin{aligned} |f'(x)| \leq M \quad &\Leftrightarrow \quad -M \leq f'(x) \leq M \Rightarrow -M(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a) \\ &\Leftrightarrow \quad |f(b)-f(a)| \leq M|b-a| \end{aligned}$$

Application : Soit $f(x)=\sin(x)$ en utilisant le théorème des accroissements finis sur $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$, montrer que $\frac{\sqrt{2}}{12} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\pi} \leq \frac{\sqrt{3}}{12}$.

Proposition 3

> Soirent f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $a<b$. Si $|f'(x)| \leq g'(x),\ \forall x \in I$, alors $|f(b)-f(a)| \leq g(b)-g(a)$.

Démonstration On a $-g'(x) \leq f'(x) \leq g'(x)$. Soit $h(x)=(x)-g(x)$, $h'(x) \leq 0$, h décroissante. $h(b) \leq h(a) \Rightarrow f(b)-g(b) \leq f(a)-g(a) \leq f(b)-f(a) \leq g(b)-g(a)$. Même raisonnement en considérant $\tilde{h}(x)=f(x)+g(x)$.

Théorème 2 (Théorème de Rolle)

> Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors si $f(a)=f(b)$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Démonstration Comme f est continue, l'image de l'intervalle $[a,b]$ est un intervalle $[y,z]$. On pose $y=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $z=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et soit c et d tels que $y=f(c)$ et $z=f(d)$.

— Premier cas : c et d appartiennent à $\{a,b\}$, alors f est constante sur $[a,b]$.

— Deuxième cas : on a $c \in]a,b[$ ou $d \in]a,b[$ (et éventuellement les deux).
On suppose que $c \in]a,b[$ alors $f(c)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Alors $f(c)$ minimum implique ($h>0$) :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c) > 0 \text{ et } \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c-h)-f(c)}{-h} = f'(c) < 0$$

donc $f'(c)=0$

Théorème 3 **(Accroissements finis)**

Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Démonstration $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, on a donc $g(a) = g(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle :

$$\begin{aligned} \exists c \in]a, b[\ \text{ tel que } g'(c) = 0 \\ g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{aligned}$$

1.4 Les différentes formules de Taylor

On présente ici les différentes formules de Taylor en commençant par celles nécessitant le moins d'hypothèses sur f.

Théorème 4 **(Formule de Taylor-Young)**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ n fois dérivables au point a, alors au voisinage de a, on a :

$$f(t) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (t-a)^n \varphi(t-a)$$

avec $\lim_{t \to a} \varphi(t-a) = 0$.

Démonstration Soit f dérivable en a, on a : $f(t) = f(a) + (t-a)f'(a) + (t-a)\varphi(t-a)$, avec $\lim_{t \to a} \varphi(t-a) = 0$.
Supposons que pour toute fonction Ψ, $n-1$ fois dérivables en a on ait :

$$\Psi(t) = \Psi(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} \Psi^{(k)}(a) + (t-a)^{n-1} \varphi(t-a)$$

avec $\lim_{t \to a} \varphi(t-a) = 0$.
Soit f une fonction n fois dérivable en a. On a f', $n-1$ fois dérivable. On a donc :

$$f'(t) = f'(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(t-a)^k f^{(k+1)}(a)}{k!} + (t-a)^{n-1} \varphi(t-a)$$

En intégrant entre 0 et a, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a)+(x-a)f'(a)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(x-a)^{k+1}f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}+\int_a^x (t-a)^{n-1}\varphi(t-a) \\ &= f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(x-a)^{k}f^{(k)}(a)}{k!}+\int_a^x (t-a)^{n-1}\varphi(t-a) \\ &= f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(x-a)^{k}f^{(k)}(a)}{k!}+(x-a)^n\tilde{\varepsilon}(x-a) \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\lim_{x\to a}\tilde{\varepsilon}(x-a)=0$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to a}\frac{\int_a^x (t-a)^{n-1}\varphi(t-a)}{(x-a)^n}=0$.
Or,

$$\forall \nu>0, \quad \exists \eta, \quad |t-a|\le\eta \Rightarrow |\varphi(t-a)|\le n\nu.$$

Ainsi, si :

$$|x-a|\le\eta \Rightarrow |\tilde{\varepsilon}(x-a)| = |\frac{\int_a^x (t-a)^{n-1}\varphi(t-a)}{(x-a)^n}| \le |n\nu\frac{\int_a^x (t-a)^{n-1}}{(x-a)^n}| \le \nu$$

Remarque : $(t-a)^n\varepsilon(t-a)$ peut aussi se noter $o((t-a)^n)$.

On appelle développement limité (DL) à l'ordre n en a son développement de Taylor-Young à l'ordre n en a.
Calcul de développements limités usuels :

1. DL de $\cos(x)$ à l'ordre 4 en 0.
2. DL de $\sin(x)$ à l'ordre 4 en 0.
3. DL de $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 4 en 0.
4. DL de $\tan(x)$ en 0.
5. DL de $\ln(x)$ en 1.

Utilisation des DL pour calculer des limites. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x^2-1}$,
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$,

La formule qui suit est une application directe du théorème de Rolle, on a besoin d'hypothèses un peu plus fortes que pour le théorème de Taylor-Young.

Théorème 5 (Formule de Taylor-Lagrange)

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f de classe C^n et $n+1$ fois dérivables. sur $]a,b[$. Alors :

$$\exists c\in]a,b[\text{ tel que } f(b)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Démonstration On pose $\varphi(t) = f(b) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)(b-t)^k}{k!} - \frac{\lambda(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$. On remarque que $\varphi(b) = 0$. Soit λ tel que $\varphi(a) = 0$. En dérivant φ on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)(b-t)^k}{k!} - \frac{(b-t)^{k-1} f^{(k)}(t)}{(k-1)!} + \frac{\lambda(b-t)^n}{n!} \\ &= -f'(t) - (\frac{f^{(n+1)}(t)(b-t)^n}{n!} - f'(t)) + \frac{\lambda(b-t)^n}{n!} \\ &= \frac{(b-t)^n}{n!}(\lambda - f^{(n+1)}(t)) \end{aligned}$$

On appliquant le théorème de Rolle on peut écrire que :

$$\exists c \in]a, b[, \text{ tel que } \varphi'(c) = 0 \Rightarrow \lambda = f^{(n+1)}(c)$$

On obtient alors

$$\varphi(t) = f(b) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)(b-t)^k}{k!} - \frac{f^{(n+1)}(c)(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Enfin comme $\varphi(a) = 0$.

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} - \frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

1.5 Notion de primitive, formule d'intégration par parties et formule de Taylor avec reste intégral

Rappelons maintenant la notion de primitive d'une fonction continue.

Définition 6 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ pour tout $c \in [a, b]$, on appelle primitive de f qui s'annule en c la fonction :*

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt.$$

On a $F'(x) = f(x)$.

On peut alors énoncer le théorème d'intégration par parties

Théorème 6 Formule d'intégration par parties

Soit f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors, on peut écrire :

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

La démonstration découle directment du fait que $(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$ et que f et g sont de classe C^1 sur $[a, b]$.
On donne alors quelques exemples de l'utilisation de la formule d'intégration par parties :

1. Calcul de l'intégrale $\int_1^x t^2 \; ln(t) \; dt$.
2. Calcul de l'intégrale $\int_0^x arctan(t) \; t \; dt$.
3. En utilisant la formule de la dérivation des fonctions composées, montrer que $arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
4. Montrer que si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t) \cos(nt) dt = 0$$

Une autre application du théorème d'intégration par parties est le théorème de Taylor avec reste intégral.

Théorème 7 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit f de classe C^{n+1} sur I, alors $\forall a, b \in I$:

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Démonstration La démonstration se fait par récurrence, soit f de classe C^1, on a

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$$

On suppose que la formule est vraie au rang $n - 1$:

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$$

On intègre par parties :

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \left[-\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} dt \\ &= f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} dt \end{aligned}$$

.

1.6 Notions d'intégrale impropre

Nous avons déjà vu la notion de primitive, si f est continue sur $]0, b]$, on définit

$$\int_0^b f(t) dt = \lim_{x \to 0} \int_x^b f(t) dt$$

qui peut être finie ou infinie selon les cas. Exemple : $\int_0^1 ln(t)\ dt$.
De la même manière, pour toute fonction f continue sur $[b, +\infty[$, on définit

$$\int_b^\infty f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_b^x f(t)dt$$

qui peut être finie ou infinie selon les cas. Exemple : $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$.
On présente alors les résultats classiques sur les intégrales de Riemann :

Proposition 4

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Soit $\alpha \geq 0$.

1. $b \in \mathbb{R}$, $\int_0^b \frac{dt}{t^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow \alpha < 1$
2. $a > 0$, $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Proposition 5

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}_+$. Si

$$\exists l \in \overline{\mathbb{R}}\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \lim x^\alpha f(x) = l$$

Alors :

1. Si $l \in \mathbb{R}^*$: $\int_a^\infty f(t)dt$ CV $\Leftrightarrow \alpha > 1$
2. Si $l = 0$ et $\alpha > 1$ alors $\int_a^\infty f(t)dt$ CV
3. Si $l = +\infty$ et $\alpha < 1$ alors $\int_a^\infty f(t)dt$ DIV

Exercices :

1. Montrer que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ est bien définie.
2. Pour quelles valeurs de α l'intégrale suivante est-elle définie ?

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

   Calculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1.7 Formule de changement de variables dans les intégrales

Soit

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \to & (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \end{array}$$

Les applications f_i sont appelées applications partielles de f.

Définition 7 *En supposant que les applications partielles sont dérivables, on appelle matrice jacobienne en $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, la matrice définie par :*

$$\tilde{J}_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Alors on peut écrire :

Définition 8 *On appelle jacobien de f et on note J_f le réel $|\tilde{J}_f|$ égal au déterminant de la matrice jacobienne.*

Dans le plan, le changement classique de changement de variables est le passage en coordonnées polaires

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^* \times [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r, \theta) & \to & (x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)) \end{array}$$

On a alors $|\tilde{J}_f| = r$.
On a alors le théorème de changement de variables (dans le plan mais la formule se généralise facilement à la dimension n).

Théorème 8 (changement de variables)

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$. Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (u, v) & \to & (x = \varphi_1(u, v), y = \varphi_2(u, v)) \end{array}$$

tel que φ admette un jacobien J_φ. Le domaine D, où varient x et y est l'image unique par φ d'un domaine Δ où varient u et v. Soit donc $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ tel que $D = \varphi(\Delta)$. Soit f une fonction continue et bornée sur D. Alors :

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int\int_\Delta f(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))|J_\varphi|dudv$$

Exercices :

1. Calcul de l'aire d'un disque de rayon R
2. Calcul de l'aire délimitée par une ellipse d'axes de longueurs a et b
3. Calcul de $\int_1^\infty \frac{1}{xln(x)}dx$, et de $\int_0^x \frac{1}{3+e^{-t}}dt$
4. Calcul de la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}$.

1.8 Intégrales dépendant d'un paramètre

Théorème 9

Soit f continue sur $[a, b] \times [c, d]$ alors

$$F(t) = \int_a^b f(x, t)dx$$

est continue sur $[c, d]$.

Par ailleurs, on a le théorème suivant de dérivation sous le signe intégrale, des intégrales dépendant d'un paramètre.

Théorème 10

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $J = [a, b]$, alors

1. $(x, t) \to f(x, t)$ continue sur $I \times J$.
2. $(x, t) \to \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ continue sur $I \times J$.
3. $F(x) = \int_a^b f(x, t)dt$ classe C^1, et $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt$

1.9 Notions élémentaires sur les suites

Définition 9 *Une suite à valeur dans $\mathbb{R}$ admet une limite l ssi*

$$\forall \varepsilon \geq 0, \ldots \exists N \in \mathbb{N}, \quad tq\ \forall n \geq N,\ |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Quelques exemples de suites convergentes :

Définition 10 *Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes ssi*

— (u_n) *est croissante*
— (v_n) *est décroissante*
— $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$
— $\lim_n v_n - u_n = 0$

Proposition 6 (convergence des suites adjacentes)

Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Ex : montrer que la suite $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. En considérant les termes d'indices impairs et les termes pairs et la définition des suites adjacentes, montrer la convergence de la suite.
Dans la pratique, déterminer la limite d'une suite n'est pas facile et on a recours à certains autres critères :

Définition 11 *La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans R est une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \quad tq\ \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| < \varepsilon$$

Toute suite convergente est évidemment de Cauchy, en revanche pour montrer que dans $\mathbb{R}$ toute suite de Cauchy converge, on procède en deux étapes.
Première étape : toute suite de Cauchy (u_n) est bornée On notera l'analogie avec la démonstration correspondante pour les suites convergentes. On prend $\varepsilon = 1$, il existe $N(1)$ tel que pour tout $n \geq N(1)$, on ait $|u_n - u_{N(1)}| < 1$. Donc $\forall n \mathbb{N}\ |u_n| \leq \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N(1)}|, |u_{N(1)} + 1|) = M$. Donc la suite u_n est bornée.
Deuxième étape : On considère l'ensemble $U_n = \{u_p, p \geq n\}$, alors la suite $v_n = \sup\{u_p, p \geq n\}$ est décroissante et $w_n = \inf\{u_p, p \geq n\}$ est croissante. On a par ailleurs, pour tout n, $w_n \leq u_n \leq v_n$. Pour montrer la convergence de u_n il suffit de montrer que $w_n - v_n$ tend vers 0. Or pour $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\forall n, p \geq N$, $|u_n - u_p| \leq \varepsilon$, donc en particulier $|u_n - w_p| \leq \varepsilon$, et ensuite $|v_n - w_p| \leq \varepsilon$, ce qui prouve le résultat.

Définition 12 — *On dit qu'une suite est géométrique si*

$$u_{n+1} = au_n$$

— *On dit qu'une suite est arithmétique si*

$$u_{n+1} = u_n + a$$

Définition 13 *On appelle série de terme général u_n, la limite : $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n$, quand cette limite est finie on dit que la série converge, et quel diverge sinon.*

Rq : Si u_n ne tend pas vers 0 la série diverge.

Proposition 7 **(série de Riemann)**

La série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Chapitre 2

Algèbre linéaire élémentaire

2.1 Espaces vectoriels

Le but de cette première partie est de définir la notion d'espace vectoriel, ainsi que de construire des espaces vectoriels classiques.

2.1.1 Notions préliminaires

Dans cette sous partie nous définissons des structures algébriques nécessaires à la construction des espaces vectoriels.

Définition 1 *Soit G et H deux ensembles.*
- *Une loi de composition interne à G est une application de $G \times G$ vers G.*
- *Une loi de composition externe de H sur G est une application de $H \times G$ vers G.*

Définition 2 *Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$. On dit que $(G, *)$ est un groupe si la loi $*$*
- *est associative : $\forall\ (x, y, z) \in G^3\ (x * y) * z = x * (y * z)$.*
- *possède un élément neutre e_G : $\exists\ e_G \in G,\ \forall\ x \in G\ x * e_G = e_G * x = x$.*
- *admet un inverse dans G pour tout élément de G : $\forall x \in G,\ \exists x^{-1} \in G,\ x*x^{-1} = x^{-1}*x = e_G$.*

Ex : $(\mathbb{R}, +),\ (\mathbb{Z}, +)$ sont des groupes. Soit E un ensemble et $\mathrm{bij}(E)$ l'ensemble des bijections de E vers E. $(\mathrm{bij}(E), \circ)$ est un groupe.

Proposition 1

Soit G un groupe. Pour tout x dans G, l'inverse de x est unique.

Démonstration On procède par l'absurde : Soit $x \in G$. Si il existe $(x_1, x_2) \in G^2$ tel que $x_1 * x = x * x_1 = e_G$ et $x_2 * x = x * x_2 = e_G$, alors $x_2 = x_2 * e_G = x_2 * (x * x_1) = (x_2 * x) * x_1 = e_G * x_1 = x_1$.

Définition 3 *On dit que le groupe $(G, *)$ est Abélien ou commutatif si $\forall (x, y) \in G^2,\ x * y = y * x$.*

Ex : $(\mathbb{R}, +),\ (\mathbb{Z}, +)$ sont abéliens mais $(\mathrm{bij}(E), \circ)$ ne l'est pas.

Définition 4 *Soit A un ensemble, $+$ et $*$ deux lois de composition internes. On dit que $(A, +, *)$ est un anneau lorsque :*
- *$(A, +)$ est un groupe abélien.*
- *$*$ est associative et possède un élément neutre 1_A.*
- *$*$ est distributive sur $+$: $\forall\ (x, y, z) \in G^3\ x * (y + z) = (x * y) + (x * z)(y + z) * x = (y * x) + (z * x)$*

Ex : $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau.

Définition 5 *On considère un anneau $(A, +, *)$ tel que A ne soit pas réduit à $\{0_A\}$ où 0_A est le neutre de $+$. Si de plus $(A \backslash \{0_A\}, *)$ est un groupe, on dit que $(A, +, *)$ est un corps. Si de plus $(A \backslash \{0_A\}, *)$ est un groupe abélien, on dit que $(A, +, *)$ est un corps commutatif.*

Ex : $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des corps commutatifs.
Dans ce qui suit, on considère que : $(K, +, \times) = (\mathbb{R}, +, \times)$ ou $(\mathbb{C}, +, \times)$.

2.1.2 Espaces vectoriels

Définition 6 *Soit $(E, +_E)$ est un groupe Abélien, si $._E$ est une loi externe de K sur E. $(E, +_E, ._E)$ est un espace vectoriel sur le corps K lorsque $._E$ est distributive par rapport à l'addition dans K et dans E :*
- *$\forall \lambda \in K\ \forall x, y \in E,\ \lambda ._E (x +_E y) = \lambda . x +_E \lambda . y$*
- *$\forall (\lambda, \beta) \in K\ \forall x \in E\ (\lambda + \beta) ._E x = \lambda ._E x +_E \beta ._E x$*

De plus, doit aussi exister un élément 1_K dans K tel que pour tout x dans E, $1_K ._E x = x$ et enfin :

$$\forall (\alpha, \beta) \in K\ \forall x \in E\ (\alpha \times \beta) ._E x = \alpha ._E (\beta ._E x)$$

.

Ex : $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Les propositions suivantes donnent d'autres exemples d'espaces vectoriels.

Proposition 2

Soit E et F deux ensembles, tel que $(F, +_F, ._F)$ soit un K-espace vectoriel. On appelle application de E dans F, une fonction qui à tout élément de E associe un unique élément de F. On note $\mathcal{A}(E, F)$ cet ensemble. On munit $\mathcal{A}(E, F)$, d'une adddition $+_{\mathcal{A}}$ et d'une loi de multiplication externe $._{\mathcal{A}}$ en posant :
- $\forall x \in E, \forall f, g \in \mathcal{A}(E, F) : (f +_{\mathcal{A}} g)(x) = f(x) +_F g(x)$
- $\forall x \in E, \forall g \in \mathcal{A}(E, F) : (\lambda ._{\mathcal{A}} g)(x) = \lambda ._F g(x)$.

$(\mathcal{A}(E, F), +_{\mathcal{A}}, ._{\mathcal{A}})$ est un K-espace vectoriel

Démonstration $(\mathcal{A}(E, F), +_{\mathcal{A}})$ est un groupe Abélien.
$\forall x \in E,\ f, g, h \in \mathcal{A}(E, F)$, $[(f +_{\mathcal{A}} g) +_{\mathcal{A}} h](x) = [f +_{\mathcal{A}} (g +_{\mathcal{A}} h)](x)$.
L'application nulle est l'élément neutre.
Si $f \in \mathcal{A}(E, F)$, $-f$ est l'application inverse. Enfin comme $(F, +)$ est Abélien, $\forall x \in E,\ \forall f, g \in \mathcal{A}(E, F)$, $(h +_{\mathcal{A}} g)(x) = (g +_{\mathcal{A}} h)(x)$.
Vérifions maintenant les propriétés de la multiplication externe :

— $\forall(\lambda,\beta)\in K,\ \forall f\in\mathcal{A}(E,F)(\lambda+\beta).{}_{\mathcal{A}}f=\lambda.{}_{\mathcal{A}}f+_{\mathcal{A}}\beta.{}_{\mathcal{A}}f$
 $\Leftrightarrow \forall x\in E,\ (\lambda+\beta).{}_F f(x)=\lambda.{}_F f(x)+_F\beta.{}_F f(x)$
— $\forall\lambda\in K, \forall(f,g)\in\mathcal{A}(E,F)\ \lambda.{}_{\mathcal{A}}(f+_{\mathcal{A}}g)=\lambda.{}_{\mathcal{A}}f+_{\mathcal{A}}\lambda.{}_{\mathcal{A}}g$
 $\Leftrightarrow \forall x\in E,\ \lambda.{}_F(f(x)+_F g(x))=\lambda.{}_F f(x)+\lambda.g(x)$.

Enfin : $1_K.{}_{\mathcal{A}}f=f$
$\forall(\lambda,\beta)\in K,\ (\lambda\times\beta).{}_{\mathcal{A}}f=\lambda.{}_{\mathcal{A}}(\beta.{}_{\mathcal{A}}f)$.

Applications :
- La suite u_n est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des suites forment donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- De même l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ forme un espace vectoriel.
- L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La loi interne est l'addition de deux matrices. La loi externe est la multiplication d'une matrice par un scalaire. L'élément neutre pour la loi interne est la matrice nulle (tous les coefficients sont nuls). Le symétrique de la matrice $A=(a_{i,j})$ est la matrice $(-a_{i,j})$. De même, l'ensemble $M_{n,p}(K)$ des matrices à coefficients dans K est un K-espace vectoriel.

Proposition 3

Soit E et F deux K-espaces vectoriels, on définit l'espace produit $E\times F$ par :
$\forall(x,y),(x_1,y_1)\in E\times F,(x,y)+_{E\times F}(x_1,y_1)=(x+_E x_1,y+_F y_1)$
$\forall\lambda\in K\lambda.{}_{E\times F}(x,y)=(\lambda.{}_E x,\lambda.{}_F y)$
Alors $(E\times F,+_{E\times F},\cdot_{E\times F})$ est un espace vectoriel.

Ex : $(\mathbb{R}^2,+_{\mathbb{R}^2},\cdot_{\mathbb{R}^2})$ est un espace vectoriel. De façon plus générale, $(\mathbb{R}^n,+_{\mathbb{R}^n},\cdot_{\mathbb{R}^n})$ est un espace vectoriel.

2.2 Sous-espace vectoriel

Définition 7 *Soit E un K-espace vectoriel. Une partie F de E est appelée sous-espace vectoriel de E si :*
- *$F\neq\emptyset$*
- *$u+_E v\in F$ pour tout $u,v\in F$*
- *$\lambda.{}_E u\in F$ pour tout $\lambda\in K$ et tout $u\in F$.*

Proposition 4

Soit E un espace vectoriel et $F\subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $0_E\in F$ et $\forall(\alpha,\beta)\in K,\ \forall x,y\in F,\ \alpha.{}_E x+_E\beta.{}_E y\in F$.

Théorème 1

Soient E un K-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est lui-même un K-espace vectoriel pour les lois induites par E.

Démonstration Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $(E, +, .)$. La stabilité de F pour les deux lois permet de munir cet ensemble d'une loi de composition interne et d'une loi de composition externe, en restreignant à F les opérations définies dans E. Les propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition, ainsi que les quatre axiomes relatifs à la loi externe sont vérifiés, car ils sont satisfaits dans E donc en particulier dans F, qui est inclus dans E . L'existence d'un élément neutre découle de la définition de sous-espace vectoriel. Il reste seulement à justifier que si $u \in F$, alors son symétrique $-u$ appartient à F. Fixons u dans F . Comme on a aussi u dans E et que E est un espace vectoriel alors il existe un élément de E, noté $-u$, tel que $u + (-u) = 0_E$. Comme u est élément de F, $-u = (-1).u$ appartient à F.

Définition 8 *Soit E et F deux espaces vectoriels. On appelle application linéaire, une application f de E dans F telle que : $\forall(\alpha, \beta) \in K\ \forall(x, y) \in E,\ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. L'ensemble des applications linéaires de E dans F noté $L(E, F)$*

Proposition 5

Soit E et F deux espaces vectoriels. $L(E, F)$ est un sous-espace de l'espace des applications de E dans F.

Démonstration L'application nulle est bien linéaire et

$$\forall\ (\alpha, \beta) \in K,\ \forall\ (f, g) \in L(E, F),\ \forall\ (\nu, \mu) \in K,\ \forall\ (x, y) \in E,$$
$$\begin{aligned} (\alpha.f + \beta.g)(\nu.x + \mu.y) &= \nu.[\alpha.f + \beta.g](x) + \mu.[\alpha.f + \beta.g](y) \\ \Rightarrow \alpha.f + \beta.g \in L(E, F) & \end{aligned}$$

Donc $L(E, F)$ est un sous-espace vectoriel des applications de E dans F.

Définition 9 *Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in L(E, F)$.*
- *On appelle l'image de f l'ensemble $Im(f) = \{y \in F, \exists x \in E,\ y = f(x)\}$*
- *On appelle le noyau de f l'ensemble $Ker(f) = \{x \in E,\ f(x) = 0\}$*

Proposition 6

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in L(E, F)$.
- $Im(f)$ est un sous espace vectoriel de F
- $Ker(f)$ est un sous espace vectoriel de E

Démonstration On remarque que $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 0$ donc $0 \in Im(f)$ et $0 \in Ker(f)$.

$$\forall\ (\lambda, \mu) \in K^2,\ \forall\ (y_1, y_2) \in Im(f)^2,$$
$$\exists\ (x_1, x_2) \in E^2,\ \begin{cases} f(x_1) = y_1 \\ f(x_2) = y_2 \end{cases} \Longrightarrow \lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2) \Longrightarrow \lambda y_1 + \mu y_2 \in Im(f)$$

$\forall\ (\lambda,\mu)\in K^2,\ \forall\ (x_1,x_2)\in Ker(f)^2,\ f(\lambda x_1+\mu x_2)=\lambda f(x_1)+\mu f(x_2)=0 \Longrightarrow \lambda x_1+\mu x_2\in\ Ker(f)$

Autres exemples :

1. L'ensemble F des suites arithmétiques est un sous-espace de l'espace des suites.
   $(u_n)=0$ suite arithmétique de raison $0 \Rightarrow\ F\neq\emptyset$.
   (u_n) et (v_n) deux suites arithmétiques, la suite $(\alpha u_n+\beta v_n)$ est-elle arithmétique ? Soit $u_{n+1}=u_n+a$ et $v_{n+1}=v_n+b$. Alors $\alpha u_{n+1}+\beta v_{n+1}=\alpha u_n+\beta v_n+\alpha a+\beta b$ donc $(\alpha u_n+\beta v_n)$ est une suite arithmétiques de raison $\alpha a+\beta b$, donc F est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites.
2. Soit F, l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}$, est un sous-espace de l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet, F contient l'application nulle et si P et Q appartiennent à F, et sont respectivement de degré p et q alors $\alpha P+\beta Q$ est un polynôme de degré $\max(p,q)$.
3. Tout plan F passant par l'origine dans $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Le plan admet une équation de la forme :
   $$ax+by+cz=0 \tag{2.1}$$
   où a,b et c sont des réels non tous nuls (a,b,c) est le vecteur normal au plan. L'ensemble des vecteurs vérifiant (2.1) est le noyau de l'application linéaire $f:(x,y,z)\mapsto ax+by+cz$.

Exrcices : Parmi les ensembles suivant lesquels sont des espaces vectoriels ?

a) L'ensemble des fonctions réelles sur $[0,1]$, continues, positives ou nulles, pour l'addition et le produit par un réel.
b) L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ pour les mêmes opérations.
c) L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ telles que $f(3)=7$.
d) L'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ pour les opérations $x\oplus y=xy$ et $\lambda.x=x^\lambda$ $(\lambda\in\mathbb{R})$.
e) L'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\sin(x+y)=0$.
f) L'ensemble des vecteurs (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1,3,-2)$.
g) Pour $p\in[1,+\infty[$, l'ensemble
$$l^p(\mathbb{R})=\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \exists\ M\in\ \mathbb{R},\ \forall\ n\in\ \mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{n}|u_i|^p\leq M\right\}$$
h) L'ensemble des suites réelles bornées.

2.3 Construction de sous espaces vectoriels

Proposition 7

Soient F,G deux sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E. L'intersection $F\bigcap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E : $0_E\in F$ et $0_E\in G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, donc $0_E\in F\bigcap G$. Soient u et v deux vecteurs de $F\bigcap G$. Comme F est un sous-espace vectoriel, alors $u,v\in F$ implique $u+v\in F$. De même $u,v\in G$

implique $u+v \in G$. Donc $u+v \in F\bigcap G$. Soient $u \in F\bigcap G$ et $\lambda \in K$. Comme F est un sous-espace vectoriel, alors $u \in F$ implique $\lambda.u \in F$. Comme G est un sous-espace vectoriel, alors $u \in G$ implique $\lambda.u \in G$, donc $u \in F\bigcap G$. Ainsi, $F\bigcap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Ex : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+3y+z=0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x-y+2z=0\}$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ donc $F\bigcap G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{array}{l} x+3y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{array}\right.$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Remarque 1 *La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E. Prenons par exemple $E = \mathbb{R}^2$. Considérons les sous-espaces vectoriels $F = \{(x,y),\ x=0\}$ et $G = \{(x,y),\ y=0\}$. Alors $F\bigcup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Par exemple, $(0,1)+(1,0)=(1,1)$ est la somme d'un élément de F et d'un élément de G, mais n'est pas dans $F\bigcup G$.*

Définition 10 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E. L'ensemble de tous les éléments $u+v$, où u est un élément de F et v un élément de G, est appelé somme des sous-espaces vectoriels F et G. Cette somme est notée $F+G$. On a donc $F+G = \{u+v, u \in F, v \in G\}$.*

Proposition 8

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels du K-espace vectoriel E.

1. $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois F et G.

Démonstration 1. Montrons que $F+G$ est un sous-espace vectoriel.

- $0 \in F$, $0 \in G$, donc $0 = 0+0 \in F+G$.

- Soient w et w' des éléments de $F+G$. Comme w est dans $F+G$, il existe u dans F et v dans G tels que $w = u+v$. Comme w' est dans $F+G$, il existe u' dans F et v' dans G tels que $w' = u'+v'$. Alors $w+w' = (u+v)+(u'+v') = (u+u')+(v+v') \in F+G$, car $u+u' \in F$ et $v+v' \in G$.
- Soit w un élément de $F+G$ et $\lambda \in K$. Il existe u dans F et v dans G tels que $w = u+v$. Alors $\lambda.w = \lambda.(u+v) = \lambda.u+\lambda.v \in F+G$, car $\lambda.u \in F$ et $\lambda.v \in G$.

2.

- L'ensemble $F+G$ contient F et contient G : en effet tout élément u de F s'écrit $u = u+0$ avec u appartenant à F et 0 appartenant à G (puisque G est un sous-espace vectoriel), donc u appartient à $F+G$. De même, pour un élément de G.
- Si H est un sous-espace vectoriel contenant F et G, alors montrons que $F+G \subset H$. C'est clair : si $u \in F$ alors en particulier $u \in H$ (car $F \subset H$), de même si $v \in G$ alors $v \in H$. Comme H est un sous-espace vectoriel, alors $u+v \in H$.

Exemples :

1. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ y=z=0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x=z=0\}$, $F+G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z=0\}$.

2. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y = 0\}$. $F + G = \mathbb{R}^3$ et $F \bigcap G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = y = 0\}$. Montrer qu'un élément de $\mathbb{R}^3$ ne se décompose pas de manière unique sur $F + G$.

Définition 11 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont en somme directe dans E si :*
- $F \bigcap G = 0$
- $F + G = E$

On note alors $F \oplus G = E$ et on dit que F et G sont supplémentaires dans E

Proposition 9

F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout élément de E s'écrit d'une manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Démonstration -Supposons $E = F \oplus G$ et montrons que tout élément $u \in E$ se décompose de manière unique. Soient donc $u = v + w$ et $u = v' + w'$ avec $v, v' \in F$ et $w, w' \in G$. On a alors $v + w = v' + w'$, donc $v - v' = w' - w$. Comme F est un sous-espace vectoriel alors $v - v' \in F$, mais d'autre part G est aussi un sous-espace vectoriel donc $w' - w \in G$. Conclusion : $v - v' = w' - w \in F \bigcap G$. Mais par définition d'espaces supplémentaires $F \bigcap G = 0$, donc $v - v' = 0$ et aussi $w' - w = 0_E$. On en déduit $v = v'$ et $w = w'$, ce qu'il fallait démontrer.
-Supposons que tout $u \in E$ se décompose de manière unique et montrons $E = F \oplus G$.
- Montrons $F \bigcap G = 0_E$. Si $u \in F \bigcap G$, il peut s'écrire de deux manières suivantes comme somme d'un élément de F et d'un élément de G : $u = 0_E + u$ et $u = u + 0_E$. Par unicité de la décomposition, $u = 0$.
- Montrons $F + G = E$. Il n'y rien à prouver, car par hypothèse tout élément u se décompose en $u = v + w$, avec $v \in F$ et $w \in G$.

Ex :

1. Soient $F = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}\}$. Montrer $F \oplus G = \mathbb{R}^3$
2. $F = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\}$. idem

Définition 12 *Soit v un vecteur de E. l'espace engendré par v est défini par $Vect(v) = \{\lambda v,\ \lambda \in K\}$.*

Proposition 10

Pour tout vecteur v de E, $Vect(v)$ est un sous espace vectoriel de E.

Définition 13 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u $(v_1, v_2, \cdots, v_n) \in E^n$. L'espace engendré par $(v_1, \cdots, v_n)$ est défini par $Vect(v_1, \cdots, v_n) = Vect(v_1) + \cdots + Vect(v_n)$*

Proposition 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u $(v_1, v_2, \cdots, v_n) \in E^n$.

$$\forall\ u \in\ Vect(v_1, \cdots, v_n),\ \exists\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in\ K^n,\ u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

Définition 14 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(v_1, v_2, \cdots, v_n) \in\ E^n$ $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in\ K^n$ et $u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. On dit que u est combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \cdots, v_n$. Les scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont appelés coefficients de la combinaison linéaire.*

Théorème 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{v_1, \cdots, v_n\}$ un ensemble fini de vecteurs d'un K-espace vectoriel E. Alors :

1. $Vect(v_1, \cdots, v_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs $v_1, \cdots, v_n$.

Démonstration Par récurrance sur n,

— pour $n = 1$ c'est trivial

— Soit $n \geq 1$, si $Vect(v_1, \cdots,\ v_n)$ est le plus petit sous espace vectoriel de E contenant $v_1, \cdots, v_n$ alors $Vect(v_1, \cdots,\ v_n,\ v_{n+1}) = Vect(v_1, \cdots,\ v_n) + Vect(v_{n+1})$ est un sous espace vectoriel de E et c'est le plus petit sous espace vectoriel de E contenant $Vect(v_1, \cdots,\ v_n) \bigcup Vect(v_{n+1})$ donc $Vect(v_1, \cdots,\ v_n,\ v_{n+1})$ est le plus petit sous espace vectoriel de E contenant $\{v_1, \cdots,\ v_n\} \bigcup \{v_{n+1}\}$

Définition 15 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{v_1, \cdots,\ v_n\} \subset E$. Si de plus $E = Vect(v_1, \cdots,\ v_n)$ on dit que $\{v_1, \cdots, v_n\}$ est une partie génératrice de E. On dit aussi dans ce cas que E est un espace vectoriel de dimension finie.*

Définition 16 *Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0; 1\}$ et $\{v_1, \cdots,\ v_n\} \subset E$.*

— *On dit que $\{v_1, \cdots,\ v_n\}$ est une famille liée lorsque celle-ci contient un vecteur pouvant s'exprimer comme combinaison lin'eaire des $n-1$ autres c'est à dire*

$$\exists\ i \in\ \{1, \cdots,\ n\}, v_i \in\ Vect(v_1, \cdots,\ v_{i-1},\ v_{i+1}, \cdots,\ v_n)$$

— *Dans le cas contraire, c'est à dire*

$$\forall\ i \in\ \{1, \cdots,\ n\}, v_i \notin\ Vect(v_1, \cdots,\ v_{i-1},\ v_{i+1}, \cdots,\ v_n)$$

on dit que $\{v_1, \cdots,\ v_n\}$ est libre

Proposition 12

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ et $\{v_1, \cdots, v_n\} \subset E$. Les assertions suivantes sont équavalentes :

1. La famille $\{v_1, \cdots, v_n\}$ est libre.
2. La somme des espaces engendrés par les $v_1, \cdots, v_n$ est directe : $Vect(v_1, \cdots, v_n) = Vect(v_1) \oplus \cdots \oplus Vect(v_n)$.
3. $$\forall\, u \in Vect(v_1, \cdots, v_n),\ \exists!(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in K^n,\ u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$
4. $$\forall\, (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in K^n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Longrightarrow \forall\, i \in \{1, \cdots, n\},\ \lambda_i = 0$$

Démonstration

$1 \Rightarrow 2$ d'après la définition

$$\forall,\ i \in \{1, \cdots, n\},\ Vect(v_i) \bigcap Vect(v_1, \cdots, v_{i-1}, v_{i+1}, \cdots, v_n) = \{0\}$$

$2 \Rightarrow 3$ par unicité de la décomposition en somme directe

$3 \Rightarrow 4$ par unicité, des coéfficients de la combinaison linéaire.

$4 \Rightarrow 1$ Par contrapposée, si

$$\exists\, (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in K^n,\ \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \\ (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0) \end{cases}$$

alors on peut trouver λ_k non nul tel que $v_k = \lambda_k^{-1} \left(\sum\limits_{i \neq k} \lambda_i v_i \right)$, c'est à dire $\{v_1, \cdots, v_n\}$ est liée.

Exemples :

- Si u et v sont deux vecteurs de E, alors $Vect(u, v) = \{\lambda u + \mu v, \lambda, \mu \in K\}$. Si u et v ne sont pas colinéaires, alors $Vect(u, v)$ est un plan vectoriel.
- Soient $u = (1, 1, 1)$ et $v = (1, 2, 3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Déterminons $P = Vect(u, v)$.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in Vect(u, v) &\Leftrightarrow (x, y, z) = \lambda u + \mu v \text{ pour certains } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = \lambda + 3\mu \end{cases} \end{aligned}$$

Nous obtenons bien une équation paramétrique du plan P passant par l'origine et contenant les vecteurs u et v.

- Montrer que $u_1 = (2, 3, -1)$ et $u_2 = (1, -1, -2)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que $v_1 = (3, 7, 0)$ et $v_2 = (5, 0, -7)$.

2.4 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 17 *Soit E un espace vectoriel et $B = (e_i)_{i\in I}$ une famille finie d'éléments de E. On dit que B est une base de E si :*
- *X est génératrice.*
- *X est libre.*

En d'autres termes :

$$\forall\ u \in\ E,\ \exists!(\lambda_i)_{i\in I},\ u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

Remarque 2 *On aurait aussi pu définir les notions de familles libre, liées et de bases dans le cas où I est un ensemble infini.*

Définition 18 *Pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on note $\delta_{i,j}$ le symbole de* Kronecker *vérifiant*
- $\delta_{i,j} = 1$ *si* $i = j$
- $\delta_{i,j} = 0$ *si* $i \neq j$

Proposition 13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le K espace vectoriel K^n. La famille $B = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ définie par $\forall\ i,\ e_i = (\delta_{i,j})_{1\leq i\leq n}$ est une base de K^n on la nomme base canonique de K^n.

Proposition 14

Soit E un K espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. E admet une base de cardinal n
2. L'ensemble des applications linéaires de K^n vers E, $L(K^n, E)$ contient une bijection.

Démonstration Si E admet une base $B = (e_1, \cdots,\ e_n)$ alors l'application linénaire f vérifiant $f(e_i) = (\delta_{i,j})_j$ est bien définie car B est génératrice. f est surjective car la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est génératrice. f est injective car B est libre.

Proposition 15

Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même nombre d'éléments.

Proposition 16

Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E et $\{l_1, \cdots, l_p\}$ une famille libre de E, alors $p \leq n$

Définition 19 *Soit E un K espace vectoriel de dimension finie admettant une base B. La dimension de E est définie comme le cardinal de B.*

- Soient les vecteurs $v_1 = (1 - i, i)$ et $v_2 = (2, -1 + i)$ dans $\mathbb{C}^2$. Montrer que la famille est libre dans le $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{C}^2$ et li\^ee dans le $\mathbb{C}$-espace $\mathbb{C}^2$.

- Vérifier que le système $S = \{(1,0),(i,0),(0,i),(0,1)\}$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ et donner les composantes de v_1 et v_2 dans cette base.
- Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ avec $e_1 = (1,-1,7), e_2 = (-5,2,3)$ et $e_3 = (0,0,1)$. Montrons que cette famille est libre. Soit α, β et γ des réels tels que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$. Alors

$$\begin{cases} \alpha - 5\beta = 0 \\ -\alpha + 2\beta = 0 \\ 7\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Par utilisation du pivot de Gauss, ce système équivaut à

$$\begin{cases} \alpha - 5\beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

On a donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est libre. Montrons ensuite que la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ engendre $\mathbb{R}^3$. Etant donné un vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, il s'agit de trouver trois réels α, β et γ tels que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = (x, y, z)$. Cette équation est équivalente au système :

$$\begin{cases} \alpha - 5\beta = x \\ -\alpha + 2\beta = y \\ 7\alpha + 3\beta + \gamma = z. \end{cases}$$

En appliquant de nouveau le pivot de Gauss, ce système équivaut à :

$$\begin{cases} \alpha - 5\beta = 0 \\ \beta = -\frac{1}{3}(x+y) \\ \gamma = \frac{1}{3}(17x + 38y + 3z) \end{cases}$$

La solution est $(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{3}(-2x - 5y, -x - y, 17x + 38y + 3z)$. Le système a au moins une solution. La famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est donc génératrice de $\mathbb{R}^3$. Puisqu'on a aussi montré qu'elle est libre, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 17

Soit E un espace vectoriel sur K de dimension $n \geq 1$. Soit $\mathcal{E}$ une famille de n vecteurs de E. Alors :
- si $\mathcal{E}$ est libre, c'est une base de E
- si $\mathcal{E}$ engendre E, c'est une base de E.

Proposition 18

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Soit $\{e_1, \cdots, e_p\}$ une base de F_1 et $\{e_{p+1}, \cdots, e_{p+q}\}$ une base de F_2. Les sous-espaces F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si $\{e_1, \cdots, e_{p+q}\}$ est une base de E.

Proposition 19

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Si $E = F_1 \oplus F_2$ alors $dim(E) = dim(F_1) + dim(F_2)$.

2.5 Matrice de changement de bases

Définition 20 *Soit $\mathcal{B}$ une base d'un espace de dimension n et $\mathcal{B}'$ une famille à n vecteurs de cet espace. La matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ s'appelle la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. On la note $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.*

Remarque 3 *: On peut montrer que la matrice de passage d'une base à une autre est inversible. De plus une famille est une base si et seulement si la matrice de passage de cette famille à n'importe quelle base est inversible.*

Théorème 3

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E. Soit x un vecteur de E. On note X le vecteur colonne formé des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et X' le vecteur colonne formée des coordonnées de x dans $\mathcal{B}'$. Alors $X = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')X'$ ou encore $X' = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1}X$.

Démonstration On note $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}, \mathcal{B}' = \{b'_1, \cdots, b'_n\}$ et $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On a alors :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i b'_i$$

Or

$$\begin{array}{rcl} b'_1 & = & p_{11}b_1 + p_{21}b_2 + \cdots + p_{n1}b_n \\ b'_2 & = & p_{12}b_1 + p_{22}b_2 + \cdots + p_{n2}b_n \\ \vdots & = & \vdots \\ b'_n & = & p_{1n}b_1 + p_{2n}b_2 + \cdots + p_{nn}b_n \end{array}$$

On a donc,

$$x = x'_1(p_{11}b_1 + p_{21}b_2 + \cdots + p_{n1}b_n) + x'_2(p_{12}b_1 + p_{22}b_2 + \cdots + p_{n2}b_n) + \cdots + x'_n(p_{1n}b_1 + p_{2n}b_2 + \cdots + p_{nn}b_n)$$

qu'on peut réécrire

$$x = (p_{11}x'_1 + p_{12}x'_2 + \cdots + p_{1n}x'_n)b_1 + (p_{21}x'_1 + p_{22}x'_2 + \cdots + p_{2n}x'_n)b_2 + \cdots + (p_{n1}x'_1 + p_{n2}x'_2 + \cdots + p_{nn}x'_n)b_n.$$

On en déduit

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & p_{11}x'_1 + p_{12}x'_2 + \cdots + p_{1n}x'_n \\ x_2 & = & p_{21}x'_1 + p_{22}x'_2 + \cdots + p_{2n}x'_n \\ \vdots & = & \vdots \\ x_n & = & p_{n1}x'_1 + p_{n2}x'_2 + \cdots + p_{nn}x'_n \end{array}$$

ce qui se réécrit matriciellement $X = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')X'$.

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}^2$ la base $(\cos(\theta), \sin(\theta)),\ (-\sin(\theta), \cos(\theta))$, calculer la matrice de passage de la base canonique dans cette base, calculer les coordonnées dans la base canonique du vecteur de coordonnées $(2, 3)$ dans cette base.
2. Dans $M_2(\mathbb{R})$ on considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Calculer la matrice de passage de la base canonique à cette famille de matrices. Montrer que c'est une base.

Chapitre 3

Espaces vectoriels normés et applications

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

3.1 Définitions et exemples

3.1.1 Normes

Définition 1 *On dit que l'application* $\|.\|$ *de* E *dans* $\mathbb{R}$ *est une norme si*

- $\forall\ x \in E,\ \|x\| \geq 0$
- $\forall\ x \in E,\ (\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0)$
- $\forall\ (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E,\ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
- $\forall\ (x, y) \in E^2,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Définition 2 *On dit que l'application* d *de* E^2 *dans* $\mathbb{R}$ *est une distance si*

- $\forall\ (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = d(y, x).$
- $\forall\ (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$
- $\forall\ (x, y, z) \in E^3,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$

Proposition 1

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E. L'application d de E^2 dans $\mathbb{R}$ $d : (x, y) \mapsto \|x + (-1)y\|$ est une distance.

Démonstration

- $\forall\ (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = \|x + (-1)y\| = \|(-1)((-1)x + y)\| = |-1|d(y, x).$
- $\forall\ (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = 0 \Rightarrow \|x + (-1)y\| = 0 \Rightarrow x = y.$
- $\forall\ (x, y) \in E^2,\ x = y \Rightarrow \forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda(x + (-1)y) = x + (-1)y$
  donc $x = y \Rightarrow \forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ |\lambda|\ \|(x + (-1)y)\| = \|x + (-1)y\|$
  donc $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0.$
- $\forall\ (x, y, z) \in E^3,\ d(x, z) = \|x + (-1)y + y + (-1)z\| \leq \|x + (-1)y\| + \|y + (-1)z\|$
  donc $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$

3.1.2 Produits scalaires

Définition 3 *On dit que l'application b de E^2 dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire si*

- $\forall\ (x,y) \in E^2,\ b(x,y) = b(y,x)$.
- $\forall\ (x,y,z) \in E^3,\ \forall\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} b(\lambda x + \mu y, z) = \lambda b(x,z) + \mu b(y,z) \\ b(x, \lambda y + \mu z) = \lambda b(x,y) + \mu b(x,z) \end{cases}$.
- $\forall\ x \in E^2,\ b(x,x) \geq 0$.
- $\forall\ x \in E^2,\ b(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Théorème 1

Soit b un produit scalaire sur E l'inégalité suivante est vérifiée

$$\forall\ (x,y) \in E,\ b(x,y)^2 \leq b(x,x)\, b(y,y)$$

Démonstration Soient $(x,y) \in E^2$. Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors $b(x,y) = 0$ donc le théorème est vérifié. Sinon, on définit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f : t \mapsto b(x+ty, x+ty)$, f est à valeurs positives et $\forall\ t \in \mathbb{R},\ f(t) = b(x,x) + t^2\, b(y,y) + 2t\, b(x,y))$.
En particulier pour $t = \dfrac{-b(x,y)}{b(y,y)}$, on a $b(x,x) - \dfrac{b(x,y)^2}{b(y,y)} \leq 0$.
Donc $b(x,x)b(y,y) \geq b(x,y)^2$.

Proposition 2

Soit b un produit scalaire sur E l'application N de E dans $\mathbb{R}$ définie par $N : x \mapsto b(x,x)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur E.

Démonstration

- $\forall\ x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow b(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
- $\forall\ (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E,\ N(\lambda x) = (\lambda^2 b(x,x))^{\frac{1}{2}} = |\lambda| N(x)$
- $\forall\ (x,y) \in E^2,\ b(x+y, x+y) = b(x, x+y) + b(y, x+y) \leq (\sqrt{b(x,x)} + \sqrt{b(y,y)})\sqrt{b(x+y, b(x+y)}$.
  On déduit que $\forall\ (x,y) \in E^2,\ \sqrt{b(x+y, x+y)} \leq \sqrt{b(x,x)} + \sqrt{b(y,y)}$.

3.1.3 Exemples :

Exemples en dimension finie :

1. $(\mathbb{R}, |.|)$
2. $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty),\ \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$
3. $(\mathbb{R}^n, \|.\|_1),\ \|x\|_1 = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$
4. $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2),\ \|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|^2}$

Exercice : Montrer que $\|x\|_\infty$, $\|x\|_1$ et $\|x\|_2$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.
Exemples en dimension infinie :
Soit $E = C^0[0,1]$, l'ensemble des applications continues sur $[0,1]$. Comme l'ensemble des applications continues est stable par combinaison linéaire et que l'application nulle est continue, cet ensemble forme un sous espace des vectoriels des application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On peut définir sur cet espace plusieurs types de normes :

1. $\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$
2. $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$
3. $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$

Exercice : Montrer que ces différentes applications définissent bien des normes sur E.

Définition 4 *Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites équivalentes ssi il existe $c, C > 0$ telles que pour tout x dans E,*

$$cN_1(x) \leq N_2(x) \leq CN_1(x)$$

Définition 5 *Soit (u_k) une suite dans E et $l \in E$. On dit que la suite (u_k) converge vers l pour la norme N si et seulement si $\lim\limits_{k\to+\infty} N(u_k - l) = 0$.*

Théorème 2

Soit E un espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes sur E. Alors si N_1 et N_2 sont équivalentes, pour toute suite (u_k) de E et pour tout $l \in E$,

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = l \text{ pour } N_1 \Leftrightarrow \lim_{k\to+\infty} u_k = l \text{ pour } N_2$$

Démonstration Montrons que, si u_k tend vers l pour N_1 alors u_k tend vers l pour N_2 (la preuve dans l'autre sens est identique). Puisque N_1 et N_2 sont équivalentes, en particulier : $\exists C > 0,\ \forall x \in E,\ N2(x) \leq CN1(x)$.
Or la convergence, $u_k \to l$ pour N_1 signifie que :

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists N > 0,\ \forall k \geq N, \Rightarrow N_1(u_k - l) \leq \varepsilon'.$$

Nous en déduisons la convergence pour N_2 : $\forall \varepsilon > 0$, soit $\varepsilon' = \varepsilon/C$, alors

$$N_2(u_k - l) \leq CN_1(u_k - l) \leq C\varepsilon' = \varepsilon$$

Donc $u_k \to l$ pour N_2.

Théorème 3

Sur $\mathbb{R}^n$ les trois normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes.

Démonstration On montre que pour tout x dans E,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

Plus généralement, on a le résultat suivant (difficile à démontrer)

Théorème 4

Si E est de dimension finie alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Contre-exemple en dimension infinie :
$\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. On introduit à présent les normes N_1, N_2 et N sur l'espace $\mathbb{R}[X]$ définies pour $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX_n$ appartenant à $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\begin{aligned} N_1(P) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|. \\ N_2(P) &= \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2}. \\ N_\infty(P) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \end{aligned}$$

Montrer que ce sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
Considèrons à présent la famille de polynômes $(P_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ définie par la relation :

$$P_q = 1 + X + ... + X^{q-1}.$$

On a : $N_1(P_q) = q$, $N_2(P_q) = \sqrt{q}$ et $N_\infty(P_q) = 1$. Remarquons de plus que : $\frac{N_1(P_q)}{N_2(P_q)} = \sqrt{q}$ et $\frac{N2(P_q)}{N_\infty(P_q)} = \sqrt{q}$. Il suffit de faire tendre q vers $+\infty$ pour comprendre que les quotients ci-dessus ne sont pas bornés, ce qui contredit l'équivalence des trois normes.

3.2 Norme induite

Dans ce qui suit, on considère E et F deux espaces vectoriels normés et on note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Définition 6 *On appelle norme induite, l'application de $L(E, F)$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout u dans $L(E, F)$ par :*

$$\begin{aligned} |||u||| &= \sup_{x\in E, \|x\|_E=1} \|u(x)\|_F \\ &= \sup_{x\in E} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \\ &= \sup_{x\in E, \|x\|_E\leq 1} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \end{aligned}$$

Exercice : Montrer qu'il s'agit bien d'une norme et que les trois expressions la définissant sont bien égales.
Exemple : Applications linéaires en dimension finie
Ecriture sous forme matricielle d'une application linéaire. Supposons E de dimension n, et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$

une base E. Soit $(e_j)_{1\leq j\leq m}$ une base de F et f une application linéaire de E dans F. Alors, si on pose $y = f(x)$, on peut écrire :

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i),$$

d'où l'on déduit $y = Ax$ avec la matrice $m \times n$ égale à $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$.
Trouver la norme d'un application linéaire revient à étudier la norme des matrices. Elle dépend à la fois du choix des bases sur E et F et du choix de la norme.
Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$, on définit les normes (induites) de matrice suivantes :

— $|||A|||_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$
— $|||A|||_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1$
— $|||A|||_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$

Exercice :

1. Démontrer que $|||A|||_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$
2. Démontrer que $|||A|||_\infty = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$