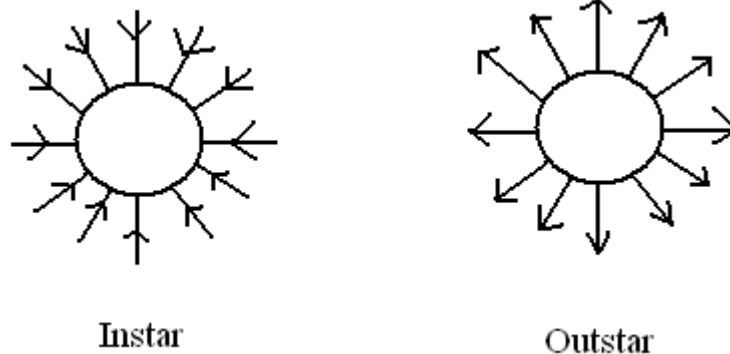


Mais exemplos de modelos redes neurais aplicáveis em modelos conexionistas

Vamos apresentar aqui, a título de exemplo, alguns modelos de redes neurais aplicáveis em modelos conexionistas. Os exemplos mostrados são adaptados de trabalhos desenvolvidos nos anos 60 e 70 do século passado pelo pesquisador norte-americano Stephen Grossberg para modelar processos cognitivos (vejam sua página em <http://cns.bu.edu/Profiles/Grossberg/>).

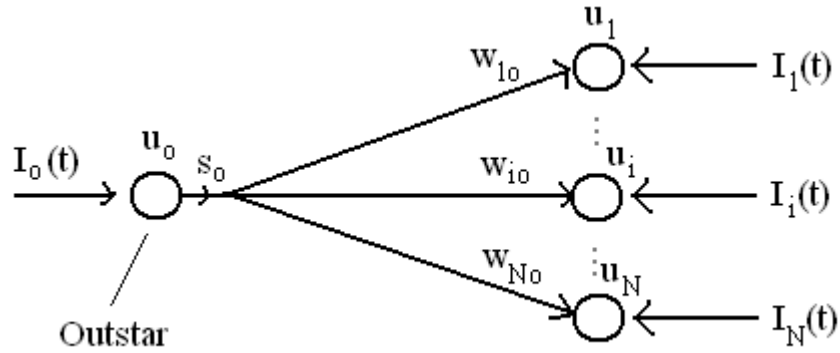
Segundo Grossberg, um neurônio pode ser visto, por um lado, como um centro de convergência de sinais vindos de outros neurônios e, por outro lado, como um centro de divergência de sinais que são enviados a outros neurônios. No primeiro caso, um neurônio seria chamado de *instar*; no segundo caso, ele seria chamado de *outstar*¹ (veja o desenho abaixo).



Segundo Grossberg, uma rede neural pode ser vista como um emaranhado de instars e outstars conectados por sinapses ponderadas por pesos sinápticos. As atividades dos instars e dos outstars e os valores dos pesos das suas conexões obedeceriam a complexos sistemas de equações matemáticas que nem sempre são fáceis de ser estudados.

Por exemplo, seja a rede mostrada na figura abaixo, formada por um único outstar e N instars:

¹ É comum entre os pesquisadores em redes neurais dar nomes aos seus modelos (*perceptron*, *adaline*, etc), talvez para tentar “vendê-los” mais facilmente para a comunidade.



As variáveis mostradas na figura têm os seguintes significados:

- u_o : nível de ativação do outstar;
- u_i : níveis de ativação dos instars;
- s_o : saída (atividade) do outstar;
- w_{io} : pesos das conexões entre o outstar e os instars;
- $I_o(t)$: entrada (sinal) recebido pelo outstar no tempo t ;
- $I_i(t)$: entradas externas recebidas pelos instars no tempo t .

As equações propostas por Grossberg para descrever o funcionamento dessa rede são:

$$\frac{du_o}{dt} = -\alpha u_o + I_o(t) \quad (\text{nível de ativação do outstar}),$$

$$s_o = s_o(u_o) \quad (\text{atividade, ou saída, do outstar}),$$

$$\frac{du_i}{dt} = -\alpha u_i + w_{io}s_o + I_i(t), i = 1, \dots, N \quad (\text{níveis de ativação dos instars}),$$

$$\frac{dw_{io}}{dt} = -\beta w_{io} + s_o[u_i]^+, \quad (\text{pesos sinápticos}),$$

onde

$$[u_i]^+ = \begin{cases} u_i & \text{se } u_i \geq 0 \\ 0 & \text{se } u_i < 0 \end{cases},$$

e

$$\beta \ll \alpha.$$

Note que as equações usadas para modelar as variações nos pesos das sinapses entre o neurônio outstar e os neurônios instar são versões da lei de Hebb: o peso da sinapse varia proporcionalmente ao produto entre a saída do outstar e a saída do instar (tomada como linear quando o nível de ativação do neurônio é positivo e zero quando o nível de ativação é negativo).

Note também que, na ausência de estímulos, tanto os níveis de ativação dos neurônios como os pesos sinapses decaem exponencialmente no tempo, só que a taxa de decaimento dos pesos sinápticos é muito menor que a dos níveis de ativação, implicando que as *memórias* (que, supostamente, estariam armazenadas nos pesos sinápticos) decaem mais lentamente que as atividades dos neurônios.

Vamos supor que o sinal de entrada $I_o(t)$ aplicado ao outstar é uma função degrau:

$$I_o(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_0 \\ I_o & \text{se } t \geq t_0 \end{cases}.$$

Então, para $t < t_0$:

$$\frac{du_o}{dt} = -\alpha u_o \Rightarrow u_o(t) = u_o(0)e^{-\alpha t}, \quad (1)$$

e, para $t \geq t_0$:

$$\frac{du_o}{dt} = -\alpha u_o + I_o. \quad (2)$$

A equação (2) pode ser resolvida com o uso de uma variável auxiliar,

$$\begin{aligned} a &= -\alpha u_o + I_o \Rightarrow \\ \Rightarrow u_o(t) &= \frac{I_o}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha(t-t_0)}\right) + u_o(t_0)e^{-\alpha(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (3)$$

No instante $t = t_0$ as equações (2) e (3) devem dar o mesmo resultado. De (2), temos que:

$$u_o(t_0) = u_o(0)e^{-\alpha t_0}.$$

Substituindo em (3):

$$\begin{aligned}
u_o(t) &= \frac{I_o}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha(t-t_0)}\right) + u_o(0)e^{-\alpha t_0} e^{-\alpha(t-t_0)} \Rightarrow \\
\Rightarrow u_o(t) &= \frac{I_o}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha(t-t_0)}\right) + u_o(0)e^{-\alpha t}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Esta equação diz que o nível de ativação do outstar, $u_o(t)$, tende assintoticamente para I_o / α quando $t \gg t_0$, variando de forma exponencial com uma constante temporal $\tau = 1 / \alpha$.

Vamos agora considerar as equações para os níveis de ativação dos neurônios instar no caso em que eles não recebem o sinal s_o vindo do outstar. Neste caso, o nível de ativação do i -ésimo instar é descrito por,

$$\frac{du_i}{dt} = -\alpha u_i + I_i(t).$$

Supondo que os sinais de entrada $I_i(t)$ recebidos pelos N instars variam tão lentamente no tempo em relação às variações temporais dos níveis de ativação $u_i(t)$ para que possam ser considerados como constantes, obtemos:

$$\frac{du_i}{dt} = -\alpha u_i + I_i \Rightarrow u_i(t) = \frac{I_i}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha t}\right) + u_i(0)e^{-\alpha t}. \tag{5}$$

Esta equação implica que, para $t \gg 0$,

$$u_i(t) \approx \frac{I_i}{\alpha}.$$

Vamos escrever os sinais de entrada na forma $I_i(t) = \theta_i I(t)$, onde $I(t)$ é a intensidade total dos sinais ($I(t) = \sum_{i=1}^N I_i(t)$) e θ_i é o chamado “coeficiente de refletância” (satisfazendo

$\sum_{i=1}^N \theta_i = 1$). Note que $I(t)$ pode variar no tempo, mas as magnitudes relativas $\{\theta_i\}$ permanecem fixas. Os coeficientes de refletância definem um *padrão espacial* de entrada recebido pelos N neurônios instar (eles dão a *fração* da intensidade total dos sinais de entrada que cabe a cada instar).

Em termos dos coeficientes de refletância, os valores assintóticos dos níveis de ativação u_i são escritos como,

$$u_i(t) = \frac{\theta_i I(t)}{\alpha}, \quad t \gg 0. \quad (6)$$

Consideremos agora os pesos sinápticos. Suponhamos que em $t = t_1$ o outstar emita um sinal s_o pelo seu axônio em direção aos N instars. Então,

$$\frac{dw_{io}}{dt} = -\beta w_{io} + s_o [u_i]^+.$$

Para $t_1 \gg 0$, a equação (6) nos diz que $u_i(t) = \theta_i I(t)/\alpha$ (supondo que os neurônios instar já estejam recebendo os sinais de entrada). Desta forma, para $t < t_1$:

$$\frac{dw_{io}}{dt} = -\beta w_{io} \quad (s_o = 0),$$

mas, para $t \geq t_1$:

$$\frac{dw_{io}}{dt} = -\beta w_{io} + \frac{s_o \theta_i I(t)}{\alpha}.$$

Resolvendo as duas equações acima e igualando $w_{io}(t_1)$ nas duas (como feito acima para u_o), obtemos:

$$w_{io}(t) = \frac{s_o \theta_i I(t)}{\alpha \beta} (1 - e^{-\beta(t-t_1)}) + w_{io}(0) e^{-\beta t}. \quad (7)$$

Esta equação implica que, para $t \gg t_1$:

$$w_{io}(t) = \frac{s_o I(t)}{\alpha \beta} \theta_i.$$

Portanto, o peso sináptico w_{io} da conexão entre o outstar e o i -ésimo instar torna-se *proporcional* ao coeficiente de refletância θ_i do i -ésimo instar, isto é, os valores relativos dos N pesos sinápticos reproduzem os valores relativos das entradas externas recebidas pelos N neurônios instar.

O fator de proporcionalidade entre w_{io} e θ_i na equação acima depende de $I(t)$, o que implica que quanto maior a intensidade do sinal externo aplicado sobre os N neurônios instar, maior o efeito de θ_i sobre w_{io} .

Interpretando os pesos w_{io} como sendo memórias de longa duração (por decaírem lentamente no tempo), podemos dizer que o padrão espacial $\{\theta_i\}$ ficou armazenado nos pesos em decorrência da apresentação conjunta de dois sinais aos N neurônios instar: o sinal externo $I(t)$ e o sinal vindo do outstar.

Como o decaimento dos pesos w_{io} é muito lento, o valor $w_{io} \approx (s_o I / \alpha \beta) \theta_i$ permanecerá por um bom tempo, mesmo depois que os estímulos $I(t)$ e s_o tenham desaparecido. Se, num instante de tempo futuro, o mesmo estímulo s_o for aplicado pelo outstar aos N instars na ausência de estímulos externos $I_i(t)$, as equações para os níveis de ativação u_i nos darão:

$$\frac{du_i}{dt} = -\alpha u_i + w_{io} s_o \Rightarrow u_i(t) = \frac{s_o}{\alpha} w_{io} (1 - e^{-\alpha t}) + u_i(0) e^{-\alpha t}.$$

Fazendo $w_{io} = (s_o I / \alpha \beta) \theta_i$, a equação acima nos dá,

$$u_i(t) = \frac{s_o}{\alpha} \frac{s_o I}{\alpha \beta} \theta_i (1 - e^{-\alpha t}) + u_i(0) e^{-\alpha t},$$

o que implica que, para $t \gg 0$,

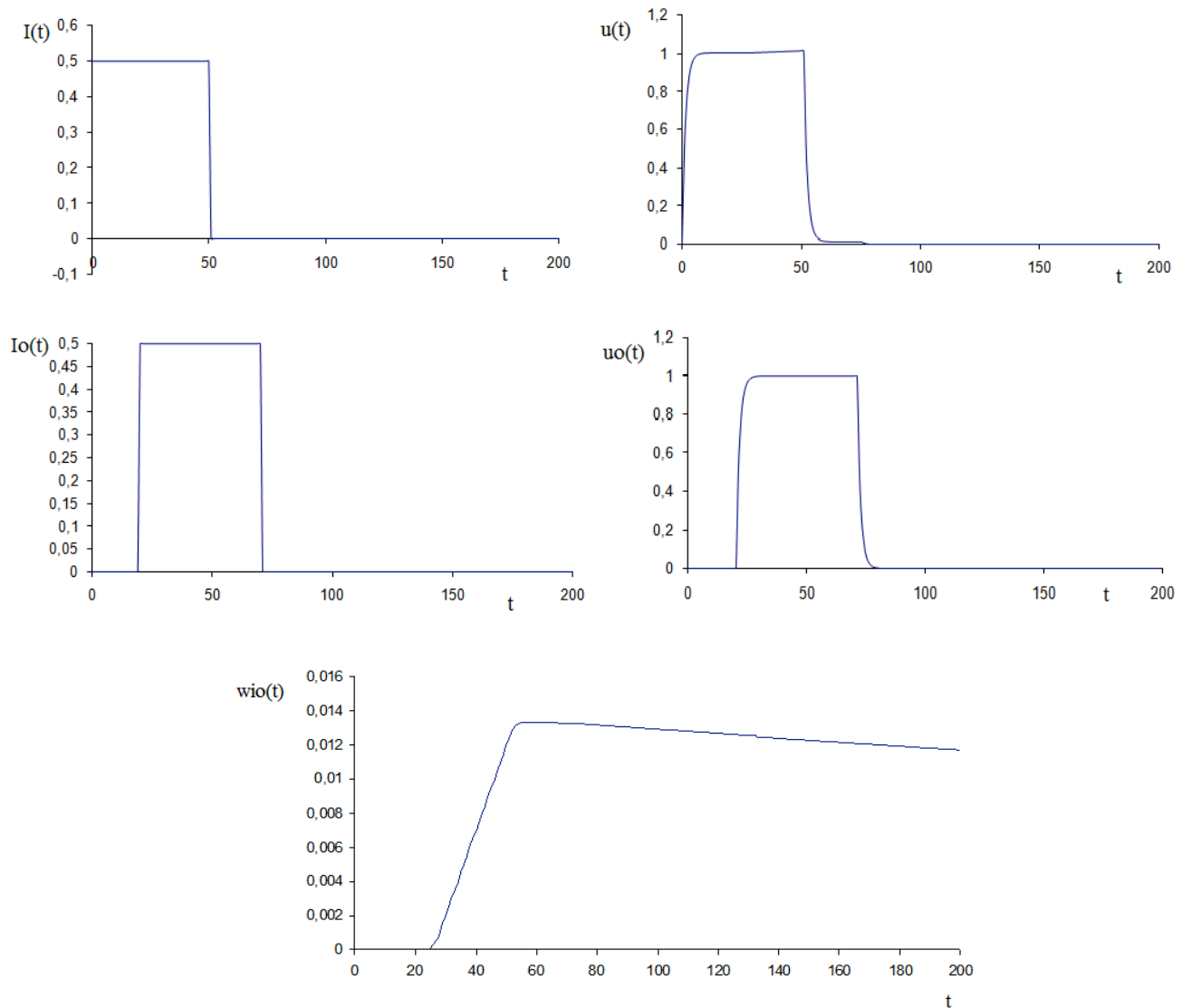
$$u_i(t) = \frac{s_o^2}{\alpha^2 \beta} I \theta_i,$$

ou seja, independentemente dos estados iniciais $u_i(0)$ dos N neurônios instar, seus níveis de ativação tornam-se proporcionais ao produto $I \theta_i$ e este é aproximadamente o mesmo valor dos seus níveis de ativação quando o estímulo externo $I(t)$ foi apresentado anteriormente (veja a equação (6)).

Note que agora, porém, o estímulo externo $I(t)$ não está sendo apresentado. A interpretação dada por Grossberg a esse fenômeno é a de que o estímulo s_o vindo do outstar produziu nos N neurônios instar uma “lembrança” do padrão gerado anteriormente quando o estímulo externo $I(t)$ tinha sido aplicado em conjunto com o sinal s_o .

Em analogia com o experimento de condicionamento clássico de Pavlov, pode-se chamar o estímulo $I(t)$ de estímulo não-condicionado e o estímulo s_o vindo do outstar de estímulo condicionado.

As figuras a seguir (geradas no Excel) fornecem uma visão temporal da evolução dos acontecimentos em uma rede com apenas um neurônio instar.



O sinal de entrada $I(t)$ é aplicado ao neurônio instar em $t = 0$ e retirado em $t = 50$ (unidades arbitrárias). O nível de ativação $u(t)$ do instar cresce exponencialmente até um valor máximo e depois decai exponencialmente para zero após a retirada do estímulo $I(t)$. O neurônio outstar recebe uma entrada constante I_o que dura de $t = 20$ a $t = 70$. Em função disso, o nível de ativação do outstar cresce exponencialmente até um valor máximo e, depois que I_o é desligado, decai exponencialmente para zero. O resultado disso é que o valor do peso sináptico (memória) entre o outstar e o instar cresce exponencialmente até um valor máximo e se mantém por um longo período próximo a esse valor (embora decaia no tempo).

As equações implementadas no Excel são um pouco diferentes das equações diferenciais mostradas acima. Elas foram implementadas como equações de diferenças em que o intervalo de tempo Δt foi feito igual a 1. Elas estão dadas abaixo. Note que foram introduzidas as seguintes diferenças entre as equações simuladas e as mostradas acima: (i) um atraso temporal igual a τ na chegada do sinal do outstar ao neurônio instar, modelando a separação espacial entre os dois neurônios e a velocidade finita de propagação do sinal; (ii) um limiar igual a L na saída do neurônio outstar; e (iii) uma “constante de aprendizagem” η multiplicando o produto das atividades pré- e pós-sináptica na equação para a mudança do peso sináptico.

$$u_o(t+1) - u_o(t) = -\alpha u_o(t) + I_o(t) \quad (\text{outstar}), \quad (8)$$

$$u(t+1) - u(t) = -\alpha u(t) + I(t) + w_{io}(t)[u_o(t-\tau) - L] \quad (\text{instar}), \quad (9)$$

$$w_{io}(t+1) - w_{io}(t) = -\beta w_{io}(t) + \eta u(t)[u_o(t-\tau) - L] \quad (\text{peso sináptico}). \quad (10)$$

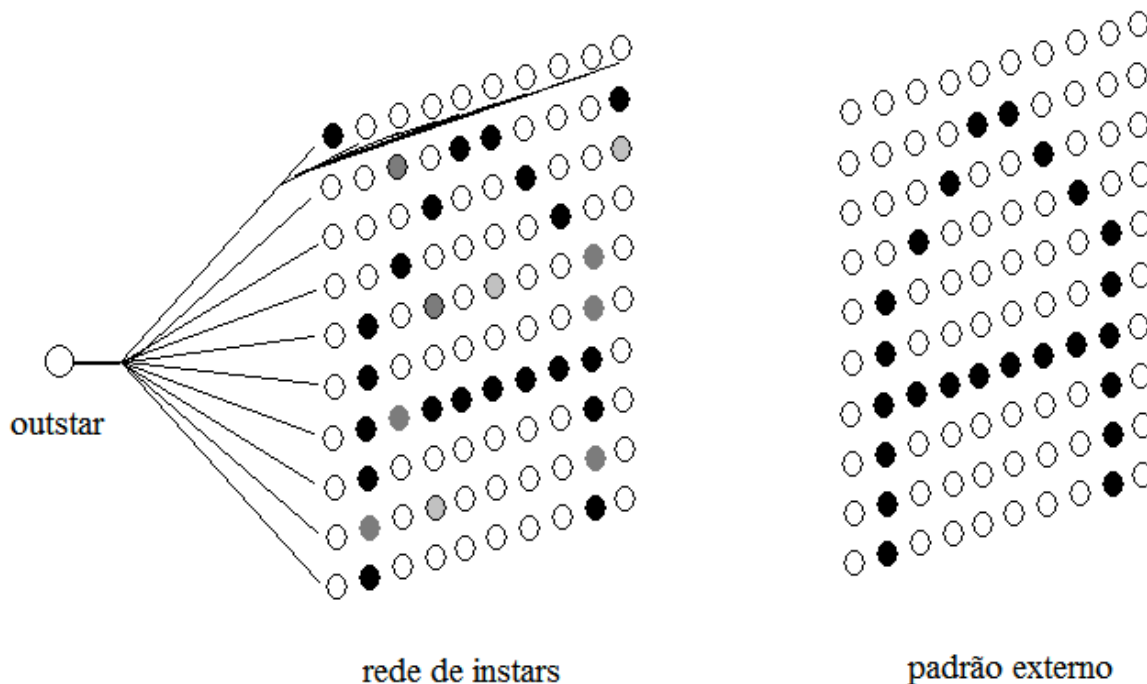
As constantes usadas para gerar os gráficos do Excel mostrados acima são:

$$\alpha = 0,5; \beta = 0,001; I = I_o = 0,5; \eta = 0,001; \tau = 1; \text{ e } L = 0,5.$$

Exercício 1: tente reproduzir os gráficos acima, com os valores das constantes dados (faça seu programa no Excel ou no MATLAB). Explore diferentes combinações dos valores das constantes acima e gere outros gráficos para o comportamento do sistema. O comportamento do sistema sempre é do tipo descrito nos parágrafos acima (e ilustrado pelos gráficos)?

Exercício 2: tente generalizar e implementar as equações mostradas acima para uma rede neural formada por 1 outstar e $N \times N$ neurônios instar. Suponha que o padrão externo (o estímulo não-condicionado) também vem de uma rede de $N \times N$ neurônios. Tente reproduzir uma situação como a da figura abaixo, em que o padrão externo é a letra “A”.

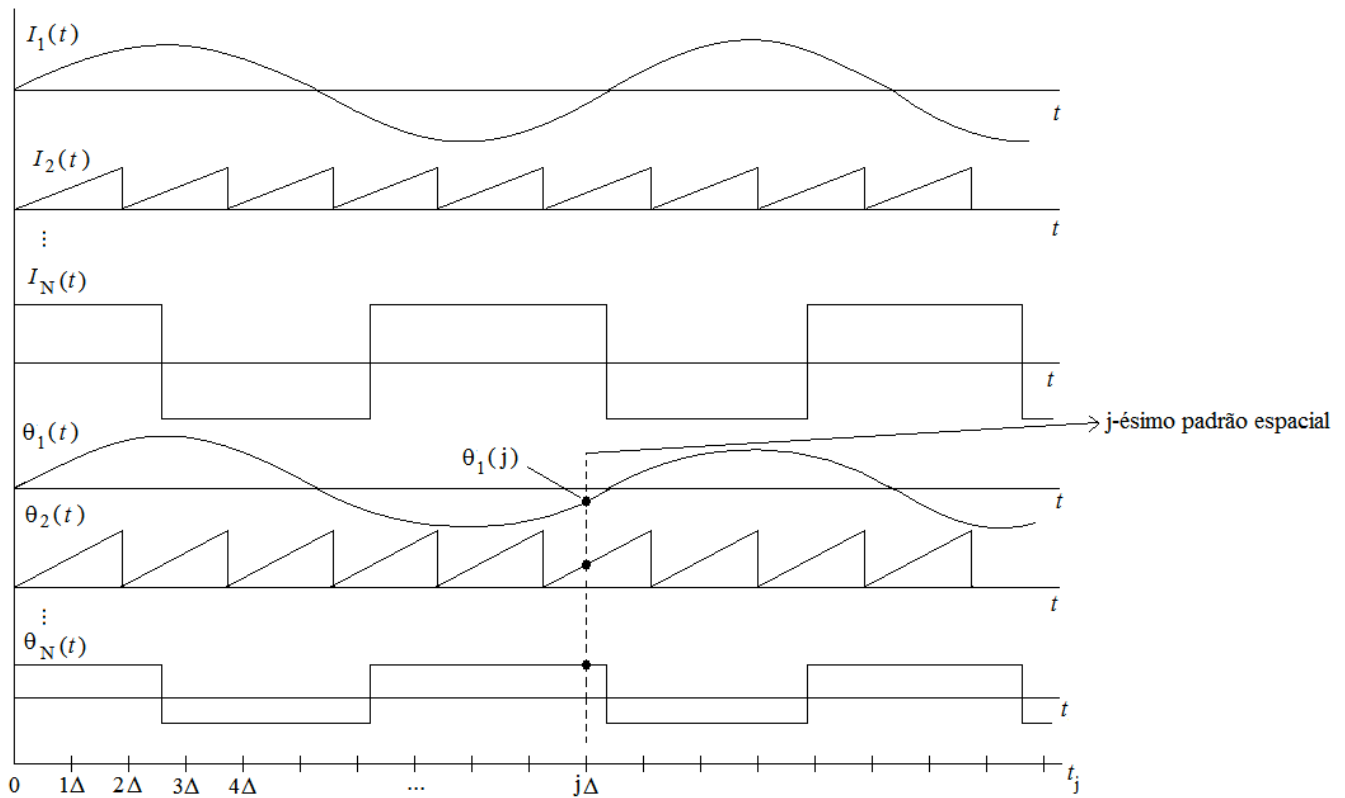
Suponha que este padrão seja aplicado inicialmente por algum tempo em conjunto com um sinal vindo do neurônio outstar. Depois, suponha que o sinal externo é “desligado” e que, um tempo não muito grande depois, apenas o sinal s_0 vindo do outstar é aplicado. Tente fazer com que a rede de $N \times N$ neurônios instar recupere o padrão inicial (a letra A) durante a segunda aplicação do sinal vindo do outstar. Observe a figura; existem alguns erros no padrão recuperado em relação ao original. Isso indica que a recuperação não é perfeita, mas ainda assim suficientemente boa para que se possa dizer que o padrão lembrado é o da letra A.



Baseado neste modelo inicial, Grossberg elaborou outro tipo de rede neural que ele chamou de “avalanche”. Uma avalanche seria uma rede capaz de aprender e se lembrar de padrões espaciais. A figura abaixo mostra como um padrão espaço-temporal projetado numa rede de N neurônios sensoriais pode ser visto como um conjunto de padrões espaciais variando no tempo. A intervalos de tempo discretos, $t_j, j = 1, \dots, T$, mede-se os valores dos coeficientes de refletância $\{\theta_i(j), i = 1, \dots, N\}$ de maneira que o padrão espacial nos N neurônios no tempo t_j seja representado por N valores,

$$I_i(t_j) = \theta_i(t_j)I(t_j), \quad i = 1, \dots, N,$$

e o padrão espaço-temporal seja representado pela seqüência de valores $I_i(t_j)$, para $j = 0, \dots, T$.

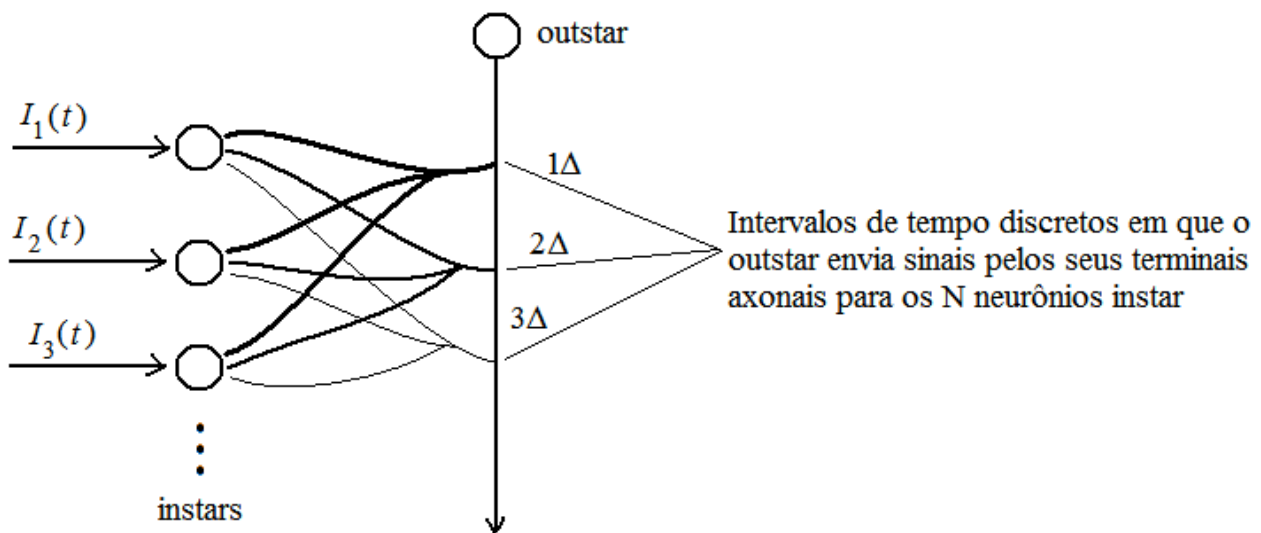


Na figura acima, as primeiras N linhas mostram os padrões de entrada $I_1(t), I_2(t), \dots, I_N(t)$ recebidos pelos N neurônios instar e as últimas N linhas mostram os coeficientes de refletância $\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_N(t)$. Os coeficientes de refletância são amostrados a intervalos discretos de tempo dados por múltiplos de Δ , $t_j = j\Delta$, gerando, para cada tempo t_j , um conjunto de N coeficientes de refletância $\{\theta_i(j), i = 1, \dots, N\}$.

O exemplo mais simples de uma rede avalanche seria uma rede com um único outstar, como a mostrada anteriormente, em que este outstar faz sinapses modificáveis com todos os N neurônios sensoriais. Agora, porém, o outstar envia seus sinais para os N neurônios a intervalos de tempo discretos, $t_1, t_2, \dots, t_j, \dots, t_T$ e o número de sinapses feitas entre o neurônio outstar e cada um dos N neurônios é maior que um.

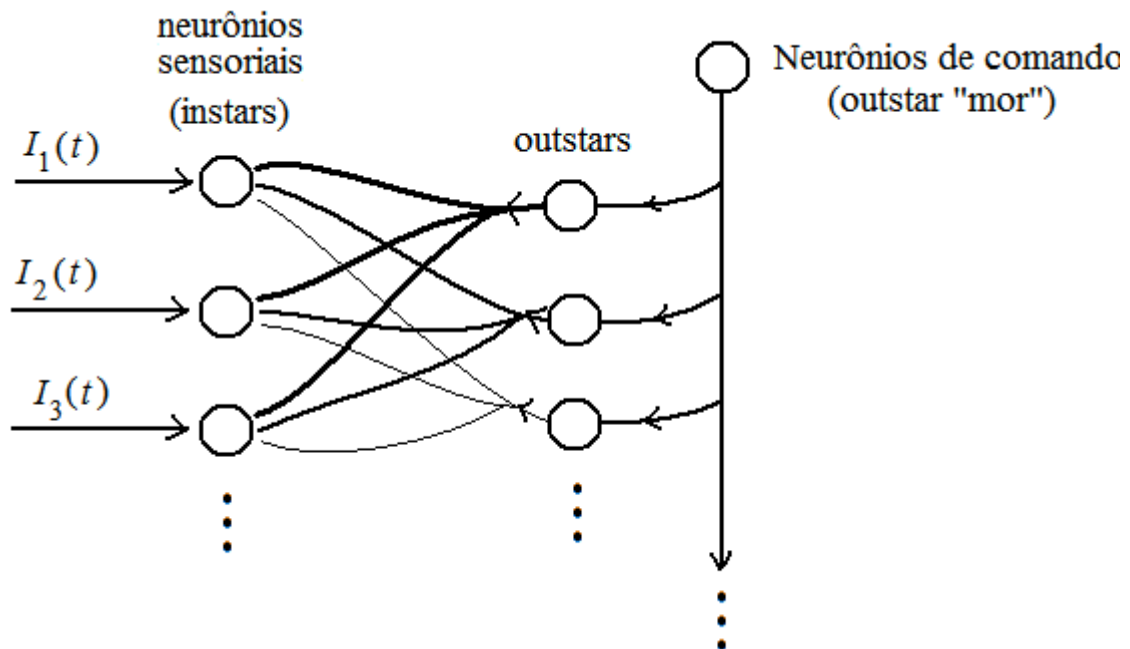
Um exemplo de uma rede avalanche com um único outstar está dado na figura abaixo. Um padrão espaço-temporal $I_i(t)$ é aplicado aos N neurônios sensoriais (instars). Devido ao rápido relaxamento das atividades desses neurônios para valores estacionários (pois α é grande), um padrão espacial $\theta_i I$ é formado por um breve período na rede (até que $I_i(t)$ varie significativamente para que outro padrão espacial seja formado).

Vamos supor que os intervalos temporais entre as formações desses padrões espaciais sejam constantes e iguais a Δ . Se, no instante $t_1 = \Delta$ (supondo $t_0 = 0$) o outstar envia um sinal s_0 ao longo dos terminais axonais indicados pelas linhas mais grossas na figura abaixo (um para cada um dos N neurônios sensoriais), o mesmo processo já descrito anteriormente ocorrerá com os pesos dessas sinapses: os pesos adquirirão valores proporcionais aos $\theta_i(t_1)$. A rede terá “aprendido” este padrão espacial. Se, num instante posterior $t_2 = 2\Delta$, o outstar enviar um sinal, só que agora ao longo dos terminais axonais indicados pela segunda linha mais grossa na figura, os pesos dessas conexões armazenarão o padrão espacial $\theta_i(t_2)$. Se, para tempos posteriores, $t_3 = 3\Delta$, $t_4 = 4\Delta$, ..., $t_T = T\Delta$, este processo se repetir com terminais sinápticos diferentes, um para cada instante de tempo, a rede “aprenderá” a sequência espaço-temporal $I_i(t_j)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, T$. Essa sequência poderá, então, ser “lembrada” caso o outstar envie, no futuro, a mesma sequência de sinais usada durante o “aprendizado”, ou seja, um sinal em $t_1 = t_0 + \Delta$ pelos terminais axonais indicados pela linha mais grossa, um sinal em $t_2 = t_0 + \Delta$ pelos terminais axonais indicados pela segunda linha mais grossa, etc.



Em uma rede avalanche, o número N de neurônios sensoriais determina a resolução espacial da rede e o número de intervalos temporais T (ou a duração Δ de cada intervalo) determina a sua resolução temporal. Uma avalanche pode, portanto, pelo menos em princípio, aprender um padrão espaço-temporal com um grau arbitrário de precisão.

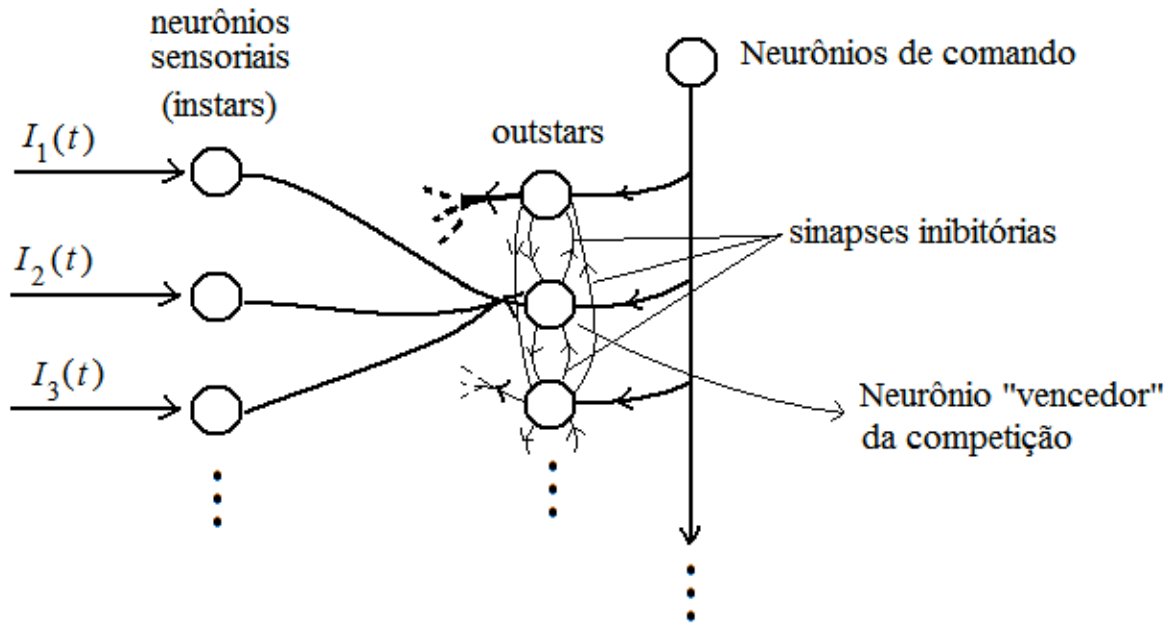
Pode-se construir variações do esquema básico da rede avalanche apresentada acima. Por exemplo, pode-se introduzir um neurônio outstar para cada padrão espacial $\theta_i(t_j)$, ao invés de se ter um único outstar com um conjunto de N sinapses para cada padrão. Uma rede desse tipo está esquematizada abaixo.



Na figura acima, um único neurônio de comando (o outstar “mor”) ativa seqüencialmente os disparos dos outstars. Nesta versão da rede avalanche deve haver um outstar para cada padrão $\theta_i(t_j)$.

Uma outra maneira de se implementar uma rede avalanche, baseada na versão acima, seria introduzir sinapses laterais inibitórias entre os neurônios da camada de outstars. Assim, quando um sinal chegasse do neurônio de comando a todos os outstars, haveria uma “competição” entre os outstars (pois um inibiria o outro) de maneira que apenas um outstar, ou um grupo reduzido deles, tivesse nível de ativação suficiente para superar o limiar de ativação e enviar um sinal, ou sinais, aos neurônios sensoriais. Desta forma, apenas as sinapses feitas por esse neurônio vencedor, ou esses neurônios vencedores, seriam modificadas e armazenariam o padrão espacial existente na camada sensorial.

A figura abaixo ilustra esta versão da rede avalanche.



Note que, neste caso, o neurônio de comando não precisa ser “programado” para ativar os outstars seqüencialmente. Ele envia sinais não específicos, ativando a cada instante um ou poucos outstars de uma maneira não pré-definida, mas dependendo do estado instantâneo dos pesos das sinapses laterais. O sinal do neurônio de comando definiria, portanto, o “contexto” em que a situação de aprendizado se dá.

Exercício: tente implementar a versão da rede avalanche com uma camada de neurônios outstar com inibições laterais entre eles.

A partir dos esquemas simples apresentados acima, pode-se construir redes neurais mais complexas, compostas de avalanches de avalanches, etc.

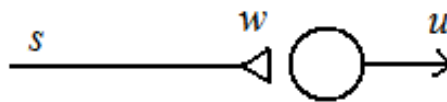
A capacidade de memória de uma rede avalanche em que cada outstar aprende um padrão espacial $\theta_i(t_j)$ é dada pelo número de neurônios outstar N_o . É claro que a maneira como o cérebro aprende padrões espaço-temporais é bem mais complexa do que a descrita por uma rede avalanche, mas pode-se perguntar se o número N_o de neurônios necessário para que uma rede avalanche aprenda um número de padrões da ordem dos padrões memorizados pelo cérebro é compatível com o número de neurônios no cérebro.

Como um limite superior, vamos supor que um ser humano é capaz de memorizar um padrão espacial por segundo durante 100 anos (uma estimativa exagerada). O número de segundos em 100 anos é aproximadamente igual a $3,15 \times 10^9$. Como o número de neurônios no cérebro é da ordem de 10^{11} (100 bilhões), o modelo de redes avalanches é, pelo menos, consistente com o tamanho do cérebro (para sermos rigorosos, deveríamos adicionar a N_o o número de neurônios sensoriais que registram os padrões espaço-temporais e o número dos neurônios de comando, mas isto não faria o número total crescer muito).

Além dos instars e outstars, Grossberg propôs outros modelos de redes neurais nas décadas de 60 e 70 do século passado que vêm sendo usados até hoje por ele e colaboradores. Um dos mais influentes é o modelo conhecido como “dipolo chaveado” (*gated dipole*). Na construção desse modelo, Grossberg introduziu um novo modelo de modificação sináptica um pouco diferente do hebbiano. Nesse modelo, há duas variáveis sinápticas modificáveis para uma sinapse entre um neurônio pré-sináptico j e um neurônio pós-sináptico i :

- w_{ij} = nível instantâneo de neurotransmissores excitatórios disponíveis;
- M_{ij} = nível máximo de neurotransmissores excitatórios disponíveis.

Vamos supor que o neurônio pós-sináptico recebe um estímulo s vindo do neurônio pré-sináptico e que o seu nível de atividade é u , como na figura abaixo.



Então, as equações para o nível de atividade u do neurônio e de w e M são:

$$\frac{du}{dt} = -\alpha u + \gamma w s, \quad \alpha \gg \gamma, \quad (11)$$

$$\frac{dw}{dt} = k(M - w) - c w s, \quad k \geq c, \quad (12)$$

$$\frac{dM}{dt} = -\beta M + \delta s [u]^+, \quad \alpha \gg k \gg \delta > \beta. \quad (13)$$

O nível de ativação do neurônio obedece à equação usual, decaindo exponencialmente na ausência de estímulo (de acordo com α) e com taxa de crescimento proporcional ao produto da magnitude do estímulo pela quantidade de neurotransmissores pré-sinápticos disponíveis para excitação (o fator de proporcionalidade é γ).

Já o número de neurotransmissores disponíveis aumenta no tempo a uma taxa proporcional à diferença entre o número máximo M e o número atual w (com constante de proporcionalidade k) e diminui no tempo a uma taxa proporcional ao produto entre a quantidade de neurotransmissores w e o estímulo pré-sináptico s (com constante de proporcionalidade c). Quando não há estímulo ($s = 0$), w cresce exponencialmente em direção ao valor máximo M a uma taxa k , mas quando $s \neq 0$ os neurotransmissores são liberados pelo neurônio pré-sináptico e seu número diminui proporcionalmente ao produto entre a quantidade existente e a magnitude do estímulo pré-sináptico. Experimentalmente, k é um pouco maior que c .

A variável que obedece a uma equação parecida com a lei de Hebb é M , com uma taxa de crescimento proporcional ao produto das atividades pré- e pós-sináptica (com constante de proporcionalidade δ) e decaindo exponencialmente na ausência de estímulo (com constante de proporcionalidade β). A dinâmica temporal de M é bem mais lenta que as das outras duas variáveis, pois β e δ são os parâmetros de valores mais baixos. Segundo este modelo, a variável que deve ser associada à memória de longa duração é o número máximo de neurotransmissores. Pode-se imaginar que a equação (13) representa um modelo em que novos neurotransmissores são sintetizados em proporção ao produto das atividades conjuntas dos dois neurônios.

Para entender o funcionamento dessas equações, vamos supor que o sinal s é um pulso quadrado, como na figura abaixo. Como a taxa de variação da atividade neuronal $u(t)$ é a maior de todas, logo após o início do pulso u cresce rapidamente. Em seguida, o efeito de s sobre w começa a ser sentido (a uma taxa c) e o número de neurotransmissores disponíveis começa a cair. Isto causa também uma diminuição exponencial em u , a partir do valor máximo atingido.

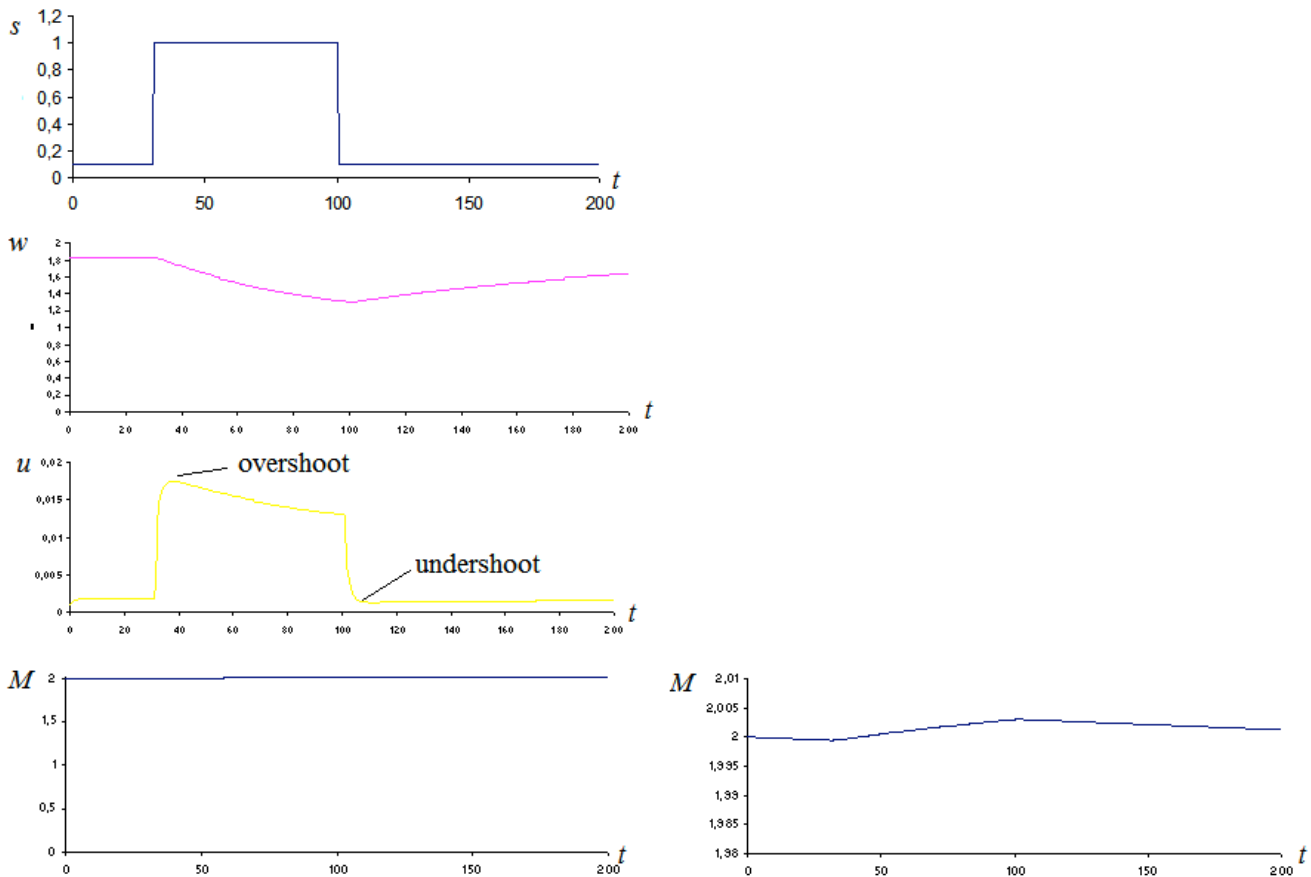
Enquanto o pulso quadrado dura, M cresce muito lentamente por causa dos baixos valores relativos de β e δ . Quando o pulso termina, u decai rapidamente em direção a $w_{\min}s_0$ e w recomeça a crescer um pouco mais lentamente (a uma taxa k). Isso faz com que u volte a crescer um pouco até o seu valor anterior ao início do pulso.

Note que, para $s = s_0$, o valor assintótico de w é (faça $dw/dt = 0$ em (12))

$$w_{\max} = \frac{kM}{k + cs_0},$$

e, para $s = s_1 > s_0$ (veja a figura abaixo), o valor assintótico de w é

$$w_{\min} = \frac{kM}{k + cs_1}.$$



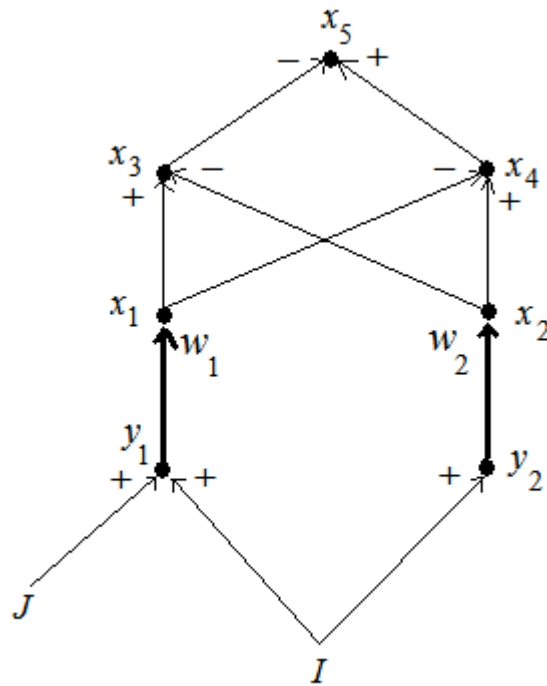
Para a obtenção dos gráficos acima foram usados os seguintes valores para os parâmetros e constantes:

$$s_0 = 0,1; s_1 = 1; \alpha = 0,5; k = 0,009; c = 0,008; \beta = 0,00001; \gamma = \delta = 0,005.$$

Observe a mudança de escala no gráfico da direita para $M(t)$, indicando a sua lenta variação temporal.

Exercício: Implemente as equações do modelo sináptico de Grossberg mostrado acima e estude o comportamento das variáveis u , w e M em função dos parâmetros do modelo. Quão robusto você acha que é o comportamento genérico dessas variáveis, mostrado nos gráficos acima, em relação a variações nos parâmetros?

O modelo de dipolo chaveado de Grossberg está ilustrado na figura abaixo.



As equações que descrevem o modelo são as seguintes:

$$\frac{dy_1}{dt} = -ay_1 + I + J; \quad (14)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -ay_2 + I; \quad (15)$$

$$\frac{dw_1}{dt} = b(M - w_1) - cy_1 w_1; \quad (16)$$

$$\frac{dw_2}{dt} = b(M - w_2) - cy_2w_2; \quad (17)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -kx_1 + my_1w_1; \quad (18)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -kx_2 + my_2w_2; \quad (19)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -nx_3 + p(x_1 - x_2); \quad (20)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = -nx_4 + p(x_2 - x_1); \quad (21)$$

$$\frac{dx_5}{dt} = -qx_5 + (x_4 - x_3). \quad (22)$$

Nestas equações, a, b, c, k, m, n, p e q são todas constantes positivas.

O modelo de dipolo chaveado foi introduzido por Grossberg para modelar o seguinte problema: suponha que um animal esteja em uma jaula recebendo um choque elétrico de intensidade constante (estímulo negativo) e ele abaixe uma alavanca que desliga o choque. Posteriormente, num mesmo contexto, a tendência do animal em abaixar a alavanca é aumentada. Como uma resposta motora associada com a *ausência* de um estímulo punitivo (choque) pode ter ficado positivamente reforçada? A ausência de choque, por si só, não representa um estímulo positivo. Por exemplo, se o animal estiver em uma jaula sem receber choque e abaixar a alavanca e continuar não recebendo choque, a ação de abaixar a alavanca não se torna mais atrativa para ele, isto é, ela não trás qualquer recompensa positiva. Porém, num contexto em que o animal está recebendo o choque, a súbita ausência dele pelo abaixar da alavanca torna-se um estímulo positivo, pelo menos de forma transitória.

No modelo de Grossberg, as sinapses modificáveis são as indicadas por w_1 e w_2 no desenho, que obedecem as equações (16) e (17). Elas modelam a diminuição da quantidade de neurotransmissor em função da atividade pré-sináptica, através dos termos $-cy_iw_i$. Já os termos $b(M-w_i)$ modelam a síntese de novos neurotransmissores quando o nível de neurotransmissores w_i fica abaixo do valor máximo M .

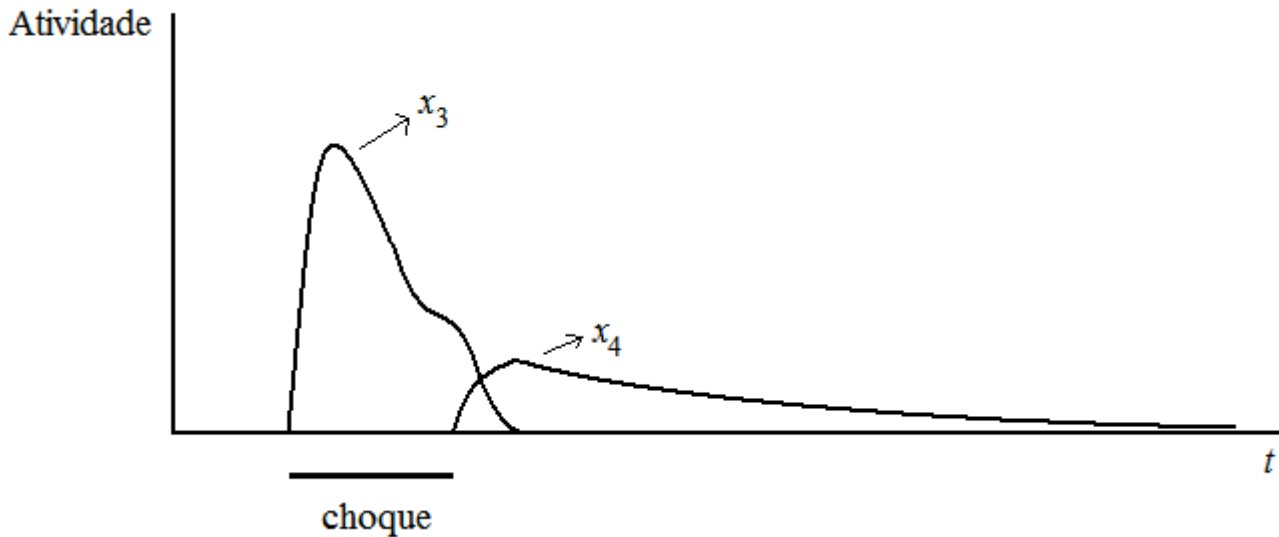
A entrada J representa o choque e a entrada I é uma entrada excitatória não específica aplicada aos dois canais, $y_1 \rightarrow x_1 \rightarrow x_3$ e $y_2 \rightarrow x_2 \rightarrow x_4$. Enquanto o choque estiver “ligado”, o canal da esquerda recebe uma entrada maior que a do canal da direita, de maneira que o nível de neurotransmissores da sinapse w_1 sofre uma redução maior que o da sinapse w_2 . No entanto, o fato de que a entrada por y_1 é maior do que a por y_2 é suficiente para fazer com que a ativação de x_1 seja maior que a de x_2 . Portanto, como a saída de x_1 é maior que a de x_2 , x_1 inibe x_4 mais fortemente do que x_2 inibe x_3 . Isso faz com que a atividade de x_3 seja maior que a de x_4 e, portanto, que x_5 seja estimulado negativamente (correspondendo ao efeito do choque J).

Logo depois que o choque é “desligado”, ambos os canais passam a receber apenas o estímulo I . Porém, o nível de neurotransmissores em w_1 está mais baixo que em w_2 (temporariamente), fazendo com que x_2 torne-se maior que x_1 até que os níveis de neurotransmissores em w_1 e w_2 se igualem. Enquanto isso não ocorre, x_2 será maior que x_1 , x_4 será maior que x_3 e x_5 será estimulado positivamente (correspondendo ao alívio causado pela supressão do choque). Essa sensação de alívio será temporária, pois quando w_2 se igualar a w_1 x_5 receberá estímulos positivos e negativos iguais e não terá atividade (correspondendo à sensação de se estar em um ambiente neutro).

Este modelo foi chamado de *dipolo chaveado* por Grossberg por causa dos dois canais, que são como pólos opostos (positivo e negativo), e do sinal J , que atua como uma chave cuja posição (“ligada” ou “desligada”) determina qual canal será vencedor.

As formas características das atividades dos dois neurônios do dipolo, x_3 e x_4 , ao longo do tempo estão mostradas no diagrama abaixo. Uma análise mais detalhada das condições para que essas curvas tenham essas formas (dependendo dos sinais J e I e dos parâmetros do modelo) pode ser encontrada no artigo de Grossberg (que pode ser baixado do seu site):

Grossberg, S., A neural theory of punishment and avoidance: I. Quantitative theory. *Mathematical Biosciences*, **15**:253-285, 1972.



O modelo de dipolo chaveado tem sido usado por Grossberg e seus colaboradores para modelar uma série de efeitos observados em psicologia e em neurofisiologia.

Por exemplo, se o estímulo “chaveador” J for aplicado ao canal “positivo” do dipolo (o da direita), tem-se um modelo para a frustração que aparece quando uma situação avaliada positivamente desaparece, ou não aparece quando esperada.

O modelo de dipolo chaveado implementa um tipo de arquitetura denominada em inglês de *opponent processing*, que significa o processamento de estímulos opostos feito em paralelo. O uso de modelos baseados nesse tipo de processamento é bastante antigo e comum em neurociência, e talvez deva a sua origem aos estudos sobre processamento visual. Por exemplo, a retina possui pares de receptores para cores opostas, como verde e vermelho, e uma das duas cores opostas é percebida transitoriamente após a remoção da outra. Grossberg usou seu modelo de dipolo chaveado como base para a modelagem desse efeito. Ele chamou um tipo de célula de “on” e o outro tipo de “off” e construiu um modelo em que várias delas estão conectadas em uma rede, que ele denominou de “campo de dipolo”. Ativações transientes das células on e off desse campo de dipolo foram usadas para modelar vários fenômenos e ilusões visuais. Veja, por exemplo:

Grossberg, S., How does a brain build a cognitive code? *Psychological review*, **87**:1-51, 1980.