# Отчёта по лабораторной работе №8

**дисциплина: Математическое моделирование**

Шапошникова Айталина Степановна НПИбд-02-18

# Содержание

# List of Tables

# List of Figures

# 1 Цель работы

Изучить модель конкуренции двух фирм и построить графики.

# 2 Задание

**Модель конкуренции двух фирм**

Вариант 7

**Случай 1.** Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом). Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases}$$

где

$$a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 Nq}, a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2}, c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2}$$

Также введена нормировка $t = c_1 \theta$.

**Случай 2.** Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед $M_1 M_2$ будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - (\frac{b}{c_1} + 0.0016) M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases}$$

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами:

$M_{1.0} = 2.4, M_{2.0} = 1.7, p_{cr} = 19, N = 22, q = 1, \tau_1 = 15, \tau_2 = 18, \tilde{p}_1 = 12, \tilde{p}_2 = 10$

**Замечание:** Значения $p_{cr}, \tilde{p}_{1,2}, N$ указаны в тысячах единиц, а значения $M_{1,2}$ указаны в млн единиц.

**Обозначения:**

$N$ – число потребителей производимого продукта;

$\tau$ – длительность производственного цикла;

$p$ – рыночная цена товара;

$\tilde{p}$ – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции;

$q$ – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени;

$\theta = \frac{t}{c_1}$ – безразмерное время.

1. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 1.

2. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 2.

3. Найдите стационарное состояние системы для первого случая.

# 3 Выполнение лабораторной работы

**Постановка задачи**

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме:

$$Q = q - k\frac{P}{S} = q(1 - \frac{p}{p_{cr}}), \tag{1}$$

где $q$ – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при $p = p_{cr}$ (критическая стоимость продукта)потребители отказываются от приобретения товара. Величина $p_{cr} = \frac{Sq}{k}$. Параметр $k$ – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (1) является пороговой (то есть $Q(S/p) = 0$ при $p \geq p_{cr}$) и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - \kappa = -\frac{M\delta}{\tau} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - \kappa \tag{2}$$

Уравнение для рыночной цены p представим в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \gamma(-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}}) \tag{3}$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть предложению), а второй член – спросу.

Параметр $\gamma$ зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла $\tau$. При заданном $M$ уравнение (3) описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение (3) можно заменить алгебраическим соотношением

$$-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}}) = 0 \tag{4}$$

Из (4) следует, что равновесное значение цены р равно

$$p = p_{cr}(1 - \frac{M\delta}{\tau\tilde{p}Nq}) \tag{5}$$

Уравнение (2) с учетом (5) приобретает вид

$$\frac{\partial M}{\partial t} = M\frac{\delta}{\tau}(\frac{p_{cr}}{\tilde{p}} - 1) - M^2(\frac{\delta}{\tau\delta p})^2\frac{p_{cr}}{Nq} - \kappa \tag{6}$$

Уравнение (6) имеет два стационарных решения, соответствующих условию $\frac{\partial M}{\partial t} = 0$

$$\tilde{M}_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \tag{7}$$

где

$$a = Nq(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}})\tilde{p}\frac{\tau}{\delta}, b = \kappa Nq\frac{(\tau\tilde{p})^2}{p_{cr}\delta^2} \tag{8}$$

Из (7) следует, что при больших постоянных издержках (в случае $a^2 < 4b$) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть, $b \ll a^2$) и играют роль только в случае, когда оборотные средства малы. При $b \ll a$ стационарные значения М равны

$$\tilde{M}_+ = Nq\frac{\tau}{\delta}(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}})\tilde{p}, \tilde{M}_- = \kappa\tilde{p}\frac{\tau}{\delta(p_{cr} - \tilde{p})} \tag{9}$$

Первое состояние $\tilde{M}_+$ устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние $\tilde{M}_-$ неустойчиво, так что при $M < \tilde{M}_-$ оборотные средства падают ($\partial M/\partial t < 0$), то есть, фирма идет к банкротству. По смыслу $\tilde{M}_-$ соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр $\delta$ всюду входит в сочетании с $\tau$. Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим: $\delta$ = 1, а параметр $\tau$ будем считать временем цикла с учётом сказанного.

**Случай 1.** Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы.

В этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей какимлибо иным способом).

Уравнения динамики оборотных средств запишем по аналогии с (2) в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = -\frac{M_1}{\tau_1} + N_1 q(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = -\frac{M_2}{\tau_2} + N_2 q(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - \kappa_2 \end{cases} \tag{10}$$

где использованы те же обозначения, а индексы 1 и 2 относятся к первой и второй фирме соответственно. Величины $N_1$ и $N_2$ – числа потребителей, приобревших товар первой и второй фирмы.

Учтем, что товарный баланс устанавливается быстро, то есть, произведенный каждой фирмой товар не накапливается, а реализуется по цене $p$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} = -N_1 q(1 - \frac{p}{p_{cr}}) \\ \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} = -N_2 q(1 - \frac{p}{p_{cr}}) \end{cases} \tag{11}$$

где $\tilde{p}_1$ и $\tilde{p}_2$ – себестоимости товаров в первой и второй фирме.

С учетом (10) представим (11) в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = -\frac{M_1}{\tau_1}(1 - \frac{p}{\tilde{p}_1}) - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = -\frac{M_2}{\tau_2}(1 - \frac{p}{\tilde{p}_2}) - \kappa_2 \end{cases} \tag{12}$$

Уравнение для цены по аналогии с (3)

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\gamma(\frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} - Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}}) \tag{13}$$

Считая, как и выше, что ценовое равновесие устанавливается быстро, получим:

$$p = p_{cr}(1 - \frac{1}{Nq}(\frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2})) \tag{14}$$

Подставив (14) в (12) имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = c_1 M_1 - b M_1 M_2 - a_1 M_1^2 - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = c_2 M_2 - b M_1 M_2 - a_2 M_2^2 - \kappa_2 \end{cases} \tag{15}$$

где

$$a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 N q}, a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 N q}, b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 N q}, c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2}, c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2} \tag{16}$$

Исследуем систему (15) в случае, когда постоянные издержки ($\kappa_1, \kappa_2$) пренебрежимо малы. И введем нормировку $t = c_1\theta$. Получим следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases} \tag{17}$$

Чтобы решить систему (17) необходимо знать начальные условия. Зададим начальные значения и известные параметры: $M_{1.0} = 2.4, M_{2.0} = 1.7, p_{cr} = 19, N = 22, q = 1, \tau_1 = 15, \tau_2 = 18, \tilde{p}_1 = 12, \tilde{p}_2 = 10$

**Случай 2.** Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед $M_1 M_2$ будет отличаться.

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - (\frac{b}{c_1} + 0.0016) M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases} \tag{18}$$

Начальные условия и известные параметры остаются прежними.

**Построение графиков**

Написали прогрмму на Python и получили два графика:

```
#Программа
import math
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
```

M10 = 2.4

M20 = 1.7

x0=[M10, M20] #начальное значение объема оборотных средств x1 и x2

p_cr = 19 #критическая стоимость продукта

tau1 = 15 #длительность производственного цикла фирмы 1

p1 = 12 #себестоимость продукта у фирмы 1

tau2 = 18 #длительность производственного цикла фирмы 2

p2 = 10 #себестоимость продукта у фирмы 2

N = 22 #число потребителей производимого продукта

q = 1 #максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени

#Время

t0 = 0

tmax = 30

dt = 0.01

t = np.arange(t0, tmax, dt)

a1 = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q)

a2 = p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q)

b = p_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q)

c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1)

c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2)

#вычисление функции для первого случая

def syst1(x, t):

```
dx_1 = (c1/c1)*x[0] - (a1/c1)*x[0]*x[0] - (b/c1)*x[0]*x[1]

dx_2 = (c2/c1)*x[1] - (a2/c1)*x[1]*x[1] - (b/c1)*x[0]*x[1]

return dx_1, dx_2
```

#вычисление функции для второго случая

def syst2(x, t):

```
dx_1 = x[0] - (b/c1 + 0.0016)*x[0]*x[1] - (a1/c1)*x[0]*x[0]

dx_2 = (c2/c1)*x[1] - (b/c1)*x[0]*x[1] - (a2/c1)*x[1]*x[1]

return dx_1, dx_2
```

#решение уравнений

y1 = odeint(syst1, x0, t)

y2 = odeint(syst2, x0, t)

#подсчет стационарного состояния

M1 = (a2*c1*-*b*c2)/(a1*a2*-*b*b)

M2 = (a1*c2*-*b*c1)/(a1*a2*-*b*b)

print(M1, “;”, M2)

#построение динамики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 для первого случая

plt.plot(t, y1[:,0], label=‘Фирма 1’)

plt.plot(t, y1[:,1], label=‘Фирма 2’)

plt.hlines(M1, t0, tmax, colors=“darkgrey”, linestyles=‘dashed’, label=‘M1’)

plt.hlines(M2, t0, tmax, colors=“dimgrey”, linestyles=‘dashed’, label=‘M2’)

plt.legend(loc=4)

plt.grid()

#построение динамики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 для второго случая

plt.plot(t, y2[:,0], label=‘Фирма 1’)

plt.plot(t, y2[:,1], label=‘Фирма 2’)

plt.legend()

plt.grid()

**Графики и значения**

Получили значение стационарного состояния для первого случая:

$M_1 = 1458.8894750739469, M_2 = 1875.7444462312765$

Получили график динамики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 для первого случая (см. рис. 3.1):

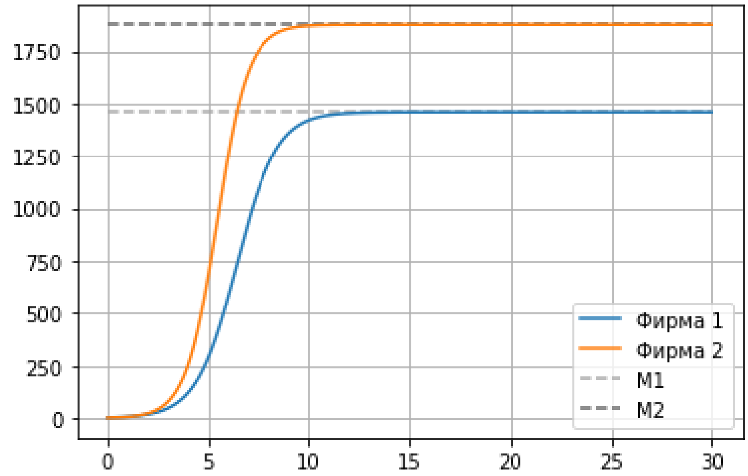


Figure 3.1: График для первого случая

И график динамики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 для второго случая (см. рис. 3.2):

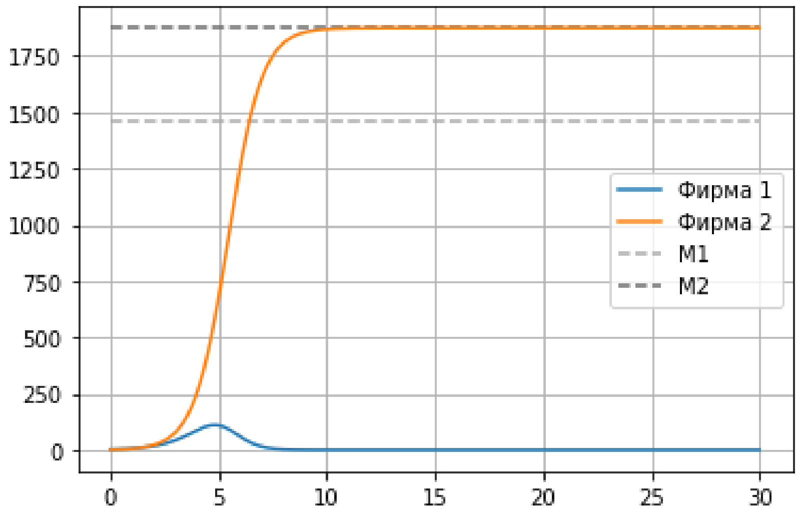


Figure 3.2: График для второго случая

# 4 Выводы

После выполнения Лабораторной работы №8 мы изучили модель конкуренции двух фирм и построили графики.