

Отчёта по лабораторной работе №2

дисциплина: Математическое моделирование

Шапошникова Айталига Степановна НПИбд-02-18

Содержание

1	Цель работы	5
2	Задание	6
3	Выполнение лабораторной работы	7
4	Выводы	14

List of Tables

List of Figures

3.1	Положение катера и лодки в начальный момент времени	8
3.2	Разложение скорости катера на тангенциальную и радиальную составляющие	9
3.3	График траектории движения катера и лодки в полярных координатах для первого случая	12
3.4	График траектории движения катера и лодки в полярных координатах для второго случая	13

1 Цель работы

Разобраться как основываются задачи о погоне и как ее решать, а также вывести траекторию на графике.

2 Задание

Решить задачу о погоне, сделать постановку задачи, вывести дифференциальные уравнения. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев. Определить по графику точку пересечения катера и лодки.

3 Выполнение лабораторной работы

Задача о погоне

Вариант 7

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 6,4 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 2,4 раза больше скорости браконьерской лодки. 1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени). 2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев. 3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки

Постановка задачи

1. Принимаем за $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $x_0 = 6,4$ км - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.
2. Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_0(\theta = x_0 = 0)$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны (см.Рис. 3.1).

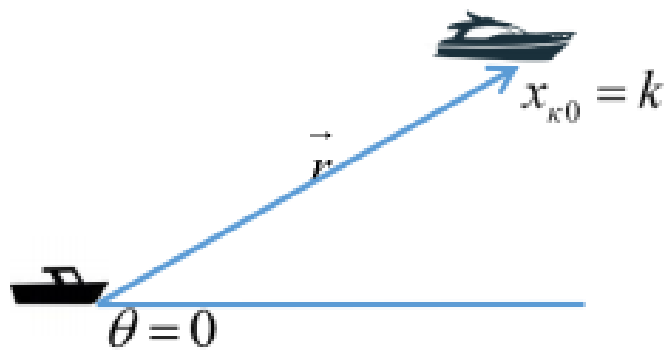


Figure 3.1: Положение катера и лодки в начальный момент времени

3. Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.
4. Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как x/v или $k - x/2,4v$ (во втором случае $k + x/2,4v$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние x можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{k - x}{2,4v} \quad \frac{x}{v} = \frac{k + x}{2,4v}$$

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = 1,88$ и $x_2 = 4,57$, задачу будем решать

для двух случаев.

- После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v . Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_τ - тангенциальная скорость (см.Рис. 3.2).

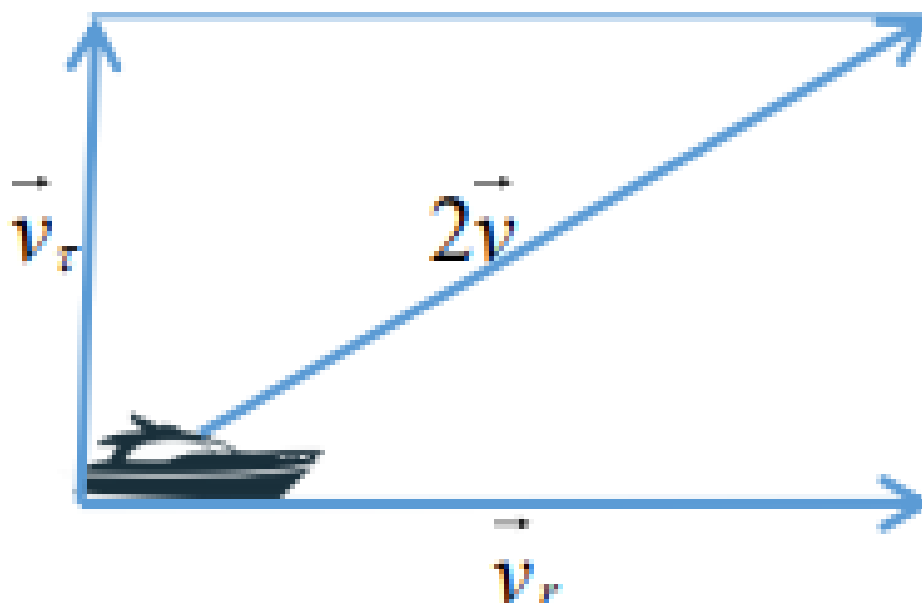


Figure 3.2: Разложение скорости катера на тангенциальную и радиальную составляющие

Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{\partial r}{\partial t}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $v_r = \frac{\partial r}{\partial t} = v$.

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости на радиус, $v_\tau = r \frac{\partial \theta}{\partial t}$.

Из рисунка видно, что по Теореме Пифагора: $v_\tau = \sqrt{5,76v^2 - v^2} = \sqrt{4,76}v = \frac{\sqrt{119}}{5}v$. Тогда получаем $r \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\sqrt{119}}{5}v$.

6. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial t} &= v \\ r \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\sqrt{119}}{5} v\end{aligned}$$

Исключая из полученной системы производную по t , можно перейти к следующему уравнению:

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = \frac{5r}{\sqrt{119}}$$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах. Начальные условия:

Для первого случая:

$$\theta_0 = 0$$

$$r_0 = x_1 = \frac{32}{17}$$

Для второго случая:

$$\theta_0 = 0$$

$$r_0 = x_2 = \frac{32}{7}$$

Построение траекторий движения катера и лодки

Написали программу на Python и получили два графика:

```
import math
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

k = 6.4 #начальное расстояние от лодки до катера
fi = 3*math.pi/4
#функция, описывающая движение катера береговой охраны
def dr(tetha, r):
    dr = r/math.sqrt(4.76)
    return dr
#начальные условия
```

```

r01 = 1.88
r02 = 4.57
te = np.arange(0, 2*math.pi, 0.01)
r1 = odeint(dr, r01, te)
r2 = odeint(dr, r02, te)
#функция, описывающая движение лодки браконьеров
def xt(t):
    xt = math.tan(fi) * t
    return xt
t = np.arange(0, 10, 1)
#полярные координаты
polar_te = (np.tan(xt(t)/t))**2-1
polar_r = np.sqrt(tt + xt(t)xt(t))
#построение траектории движения катера и лодки в полярных координатах
для первого случая plt.polar(te, r1, 'g')
plt.polar(polar_te, polar_r, 'r')
#нахождение точки пересечения траектории катера и лодки для первого случая
idx = np.argwhere(np.diff(np.sign(polar_r - r1))).flatten()
print (polar_te[-1])
print (polar_r[idx[-1]])
#построение траектории движения катера и лодки в полярных координатах
для второго случая
plt.polar(te, r2, 'g')
plt.polar(polar_te, polar_r, 'r')
#нахождение точки пересечения траектории катера и лодки для второго случая
idx = np.argwhere(np.diff(np.sign(polar_r - r2))).flatten()
print (polar_te[-1])
print (polar_r[idx[-1]])
В итоге получили график траектории движения катера и лодки

```

в полярных координатах для первого случая (см.Рис. 3.3) и для второго случая (см.Рис. 3.4).

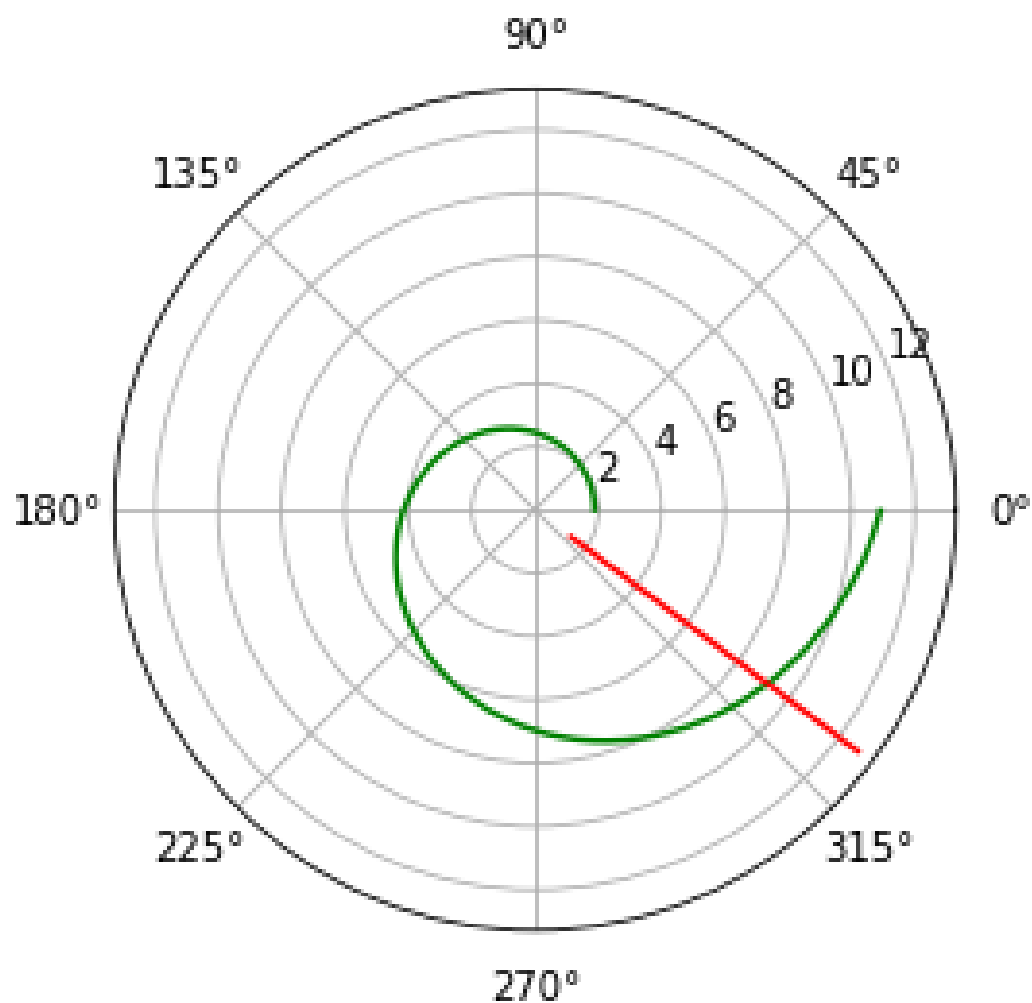


Figure 3.3: График траектории движения катера и лодки в полярных координатах для первого случая

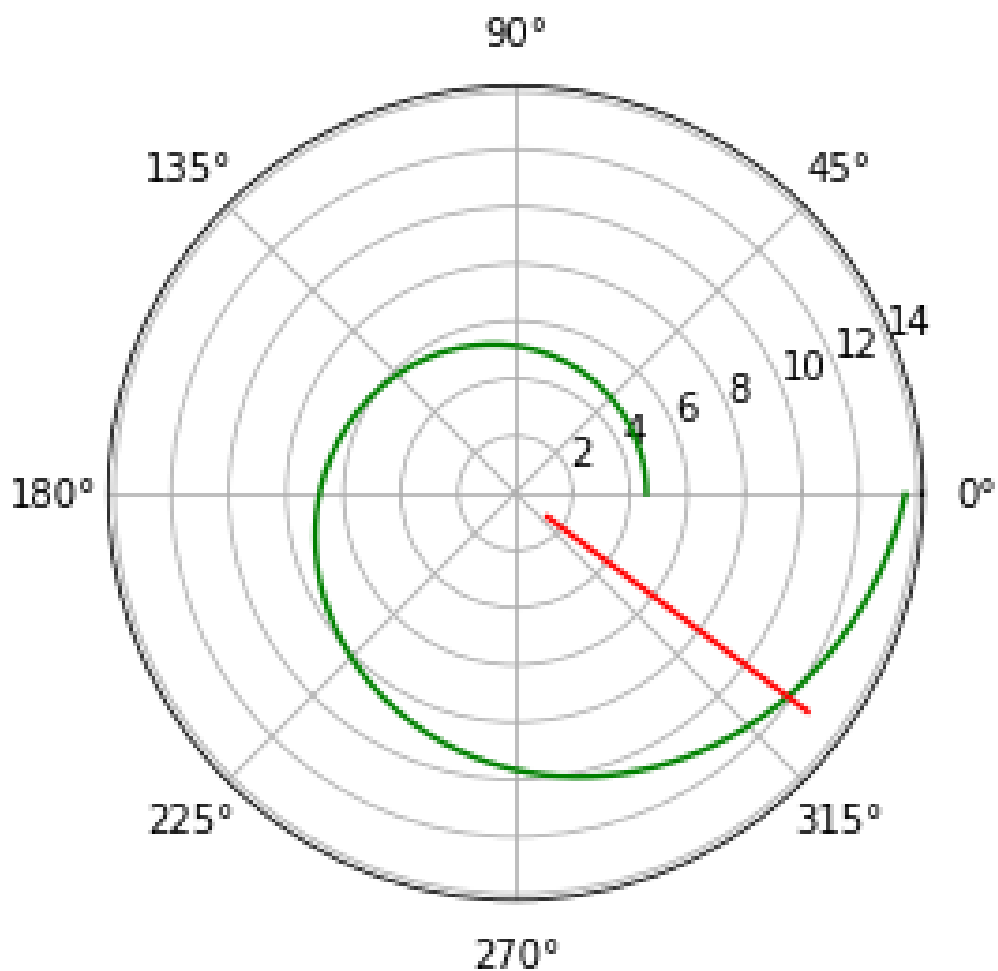


Figure 3.4: График траектории движения катера и лодки в полярных координатах для оторого случая

Нахождение точки пересечения траектории катера и лодки

Точка пересечения траектории катера и лодки для первого случая:

-0.6420926159343304

9.899494936611667

Точка пересечения траектории катера и лодки для второго случая:

-0.6420926159343304

11.313708498984761

4 Выводы

После выполнения Лабораторной работы №2 мы разобрались как основываются задачи о погоне и как ее решать, а также вывели траекторию на графике.