Бабушкин А.

1 Домашнее задание

1.

l) $\log(n^{\log n}) = \log n * \log\log n < \log^2 n < n = \log_2 1.1 \cdot \log(1.1^n) \to$ True.
m) $\frac{n^3}{n^2+n\log n} = \frac{n^3}{n^2+o(n^2)} = \frac{n^3}{\Theta(n^2)} = \Theta(\frac{n^3}{n^2}) = \Theta(n) < O(n\log n) \to$ True.
n) Пусть $f(n) = 2^n$. Тогда $f(n) = (f(\frac{n}{2}))^2, x \neq O(x^2) \to$ False.
o) $f(n) - o(f(n)) \leq f(n) \to f(n) - 0(f(n)) = O(f(n))$
$f(n) - o(f(n)) \geq f(n) - \frac{f(n)}{C} = \frac{1-C}{C}f(n) \to \frac{C}{1-C}(f(n) - o(f(n)) \geq f(n) \to f(n) - o(f(n)) = \Omega(f(n)) \to$ True. Для $f(n) + o(f(n))$ аналогично.
p) $2^{\log n!} = n! < n^n = 2^{n\log n} \to \log n! < n\log n \to \log n! = O(n\log n)$.
Теперь докажем Ω. $\log n! = \sum \log i : i \leq n$. Возьмём первые $\frac{n}{2}$ из них. Каждое из слагаемых не меньше $\log\frac{n}{2} = \log(n-1)$, то есть их сумма $\geq \frac{n}{2}(\log n - 1) = \Theta(n\log n) \to$ True.

2.

g) Докажем, что $T(n) = \Theta(n)$ по индукции. База очевидна, теперь переход. Пусть это верно $\forall i < n$. Сначала докажем O. $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{3}) + n \leq C\frac{n}{2} + C\frac{n}{3} + n = \frac{(5C+6)}{6}n$. Если $\exists C : \frac{5C+6}{6} \leq C$, то мы победили. Это равенство верно для $C \geq 6 \to$ True. Ω доказывается точно так же, только там нужно будет $\exists C : \frac{5C+6}{6} \geq C \to C \leq 6$.
h) $T(n) = \Theta(n^2)$ по мастер-теореме $(a = 4, b = 2, c = 1, d = 2)$.
i) $T(n) = \Theta(n^{\log_3 2})$ по мастер-теореме $(a = 2, b = 3, c = 0, d = 0)$.
Если без обобщённой мастер-теоремы, то можно так:
$\Theta(n^2) = 4T(\frac{n}{2}) + n < 4T(\frac{n}{2}) + n\log^2 n \to T(n) = \Omega(n^2)$. Докажем O.
$T(n) < 4T(\frac{n}{2}) + n^{\frac{3}{2}} = \Theta(n^2)$, (последнее равенство – по обычной мастер-теореме).
$\to T(n) = O(n^2)$, #.
j) $T(n) = \Theta(n^{\frac{\sqrt{5}+1}{2}})$, т.к. это числа Фибоначчи.
k) $T(n) = T(n-1) + n \to T(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$.

3.

A	B	O	o	Θ	ω	Ω
n	n^2	+	+	−	−	−
$\log^k n$	n^ϵ	+	+	−	−	−
n^k	c^n	+	+	−	−	−
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$	−	−	−	−	−
2^n	$2^{n/2}$	−	−	−	+	+
$n^{\log m}$	$m^{\log n}$	+	−	+	−	+
$\log(n!)$	$\log(n^n)$	+	−	−	−	+

4. Разобьём на классы эквивалентности (если функции вместе, то они Θ друг от друга) и упорядочим по возрастанию.

   (a) $1, n^{1/\log n}$

   (b) $\log(\log^* n)$

(c) $\log^* n, \log^* \log n$

(d) $2^{\log^* n}$

(e) $\ln \ln n$

(f) $\sqrt{\log n}$

(g) $\ln n$

(h) $\log^2 n$

(i) $2^{\sqrt{2 \log n}}$

(j) $2^{\ln n}$

(k) n

(l) $n \log n, \log n!$

(m) $n^2, 4^{\log n}$

(n) n^3

(o) $(\log n)!$

(p) $n^{\log \log n}, \log n^{\log n}$

(q) $(\sqrt{n})^{\log n}$

(r) $(\frac{3}{2})^n$

(s) 2^n

(t) $n \cdot 2^n$

(u) e^n

(v) $n!$

(w) $(n+1)!$

(x) 2^{2^n}

(y) $2^{2^{n+1}}$

5. Сумма бесконечной геометрической прогрессии $= \frac{b}{1-q}$.
a) $b = 1, q = \frac{1}{2} \to$ ответ $= 2$.
b) Это сумма двух прогрессий. У одной $b = 1, q = \frac{1}{4}$, у другой $b = -\frac{1}{2}, q = \frac{1}{4} \to$ ответ $= \frac{2}{3}$.

2 Дополнительные задачи

1.
q) False. Докажем о/п. Пусть $\exists C : \forall n > N n^n \leq Cn!$. Подставим в качестве $nX = max([C] + 1, N)$.
$X^X < CX!$, поделим на X слева и на C справа. $X > C \to$ если после этого левая часть будет $\geq$ правой, то до такого деления она была $>$.
$X^{X-1} < X!$, в правой части можно убрать из произведения 1, тогда останется $X - 1$ множителей $\leq X$, а слева $X - 1$ множителей X. Значит, левая часть $>$ правой. Противоречие. #

2.
l) Докажем, что $\forall T(n) = 2F_n - 1$, где F_n – n-ое число Фибоначчи. Очевидно, для $n = 0, n = 1$ выполняется $(1 = 2 \cdot 1 - 1)$, теперь переход.
$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1 = 2F_{n-1} - 1 + 2F_{n-2} - 1 + 1 = 2F_n - 1 \to$ True.
Тогда $T(n) = \Theta((\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n)$.
m) По теореме об эксп. рек. соотн. $T(n) = \Theta(\alpha^n)$, где α – корень уравнения $1 = \alpha^{-1} + \alpha^{-3} \Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha^2 - 1 = 0$. Можно взять формулы Кардано, можно бинпоиск на отрезке $[1, +\infty)$, ответ будет ≈ 1.4656.