Бабушкин А.

1. Сначала оценим. В каждом квадрате 2×2 может стоять не больше одного короля, а доска разбивается на 16 таких квадратов. Тогда ответ ≤ 16. Приведём пример на 16. Для этого просто поставим королей во все клетки, чей столбец нечётный, как и порядковый номер буквы, бить они друг друга не будут. Ответ – 16.

2. Поделим единичный квадрат на 9 квадратов со сторой 0.(3). Точек десять, поэтому хотя бы две попадут в один квадрат, тогда расстояние между ними будет $\leq$ диагонали квадрата, которая равна $\frac{\sqrt(2)}{3} \approx 0.4714 < 0.48$, #, первый пункт есть. Второй пункт: поделим исходный квадрат на 4 со стороной 0.5, каждый из них можно покрыть кругом радиуса 0.5, потому что диагональ квадрата $= \frac{1}{\sqrt(2)} < 1 =$ радиус круга. Если есть 10 точек и 4 круга, то по обобщённому принципу Дирихле хотя бы в один круг попадёт 3 точки, #. Доказано всё.

3. Разобьём первые $2n$ чисел на n пар вида $2i+1, 2i+2$, где $i : 0 \leq i < n$. Тогда хотя бы из одной пары оба числа будут взяты, а $\forall x\ (x, x+1) = 1$, #.

4.

   а) Так как все числа различные и $\in [1, 15]$, то различных разностей между ними может 14. Если чисел 8, то всего попарных разностей $\frac{8 \cdot (8-1)}{2} = 28$, то есть если каждая из 14 разностей встречается не больше двух раз, то каждая встречается ровно два раза. Но тогда разность 14 встречается дважды, а такое невозможно, ведь только одна пара чисел порождает такую разность – 15 и 1. Значит, хотя бы одна встречается трижды, #.
   б) Нет, не является. Четвёрка чисел $1, 3, 6, 7$ даёт шесть различных разностей.

5. Рассмотрим три горизонтальных прямых и их пересечения с девятью вертикальными. Каждое пересечение трёх горизонтальных с одной вертикальной – это три точки, вариантов их раскраски 8, то есть найдётся хотя бы одна пара вертикальных, дающих в пересечении с горизонтальными одинаковую раскраску. Среди трёх точек хотя бы две будут одного цвета, например, первая и третья. Тогда именно эти четыре точки (первая и третья на этих двух вертикальных) дадут прямоугольник с вершинами одного цвета. #.

6. Рассмотрим префиксные суммы по модулю n. Если они все различны, то среди них есть 0, ведь различных остатков по модулю n тоже n. Тогда сумма на префиксе будет делиться на n и мы победили. Если же нуля нет, то по принципу Дирихле есть две одинаковых префиксных суммы по модулю. Пусть это i-ая и j-ая префиксные суммы. Но тогда сумма на отрезке $(i, j]$ равна 0 по модулю n, то есть делится на n, и мы снова победили. #.