Бабушкин А.

1. Сначала посчитаем f(x):
   x: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
   f(x): 1 2 3 3 4 5 5 6 7 7
   а) Если $gf = f$, то для $x \in E_f, g(x) = x$, а для остальных – любое значение. Таких остальных 3, следовательно, ответ $10^3 = 1000$.
   б) $g(f(x)) = g(x) \rightarrow$ все x образуют классы эквивалентности по $g(x)$, причём x и $f(x)$ точно лежат в одном. Таких классов $3:$ $(1), (2), (3...10)$, что следует из f $(f(4) = 3, f(5) = 4$, и т.д.), и у каждого класса своё значение $g(x)$, которое может быть любым. Тогда ответ снова $10^3 = 1000$.
   в) $fg = f \rightarrow$ те x, которые имеют равные значения $f(x)$, могут переходить друг в друга в g. $f(x)$ имеет четыре значения, имеющих только один прообраз $(1, 2, 4, 6)$, и три значения, имеющих два прообраза $(3, 5, 7)$. Внутри классов прообразов отображения могут быть какими угодно. Первые четыре класса прообразов состоят из одного элемента, который должен переходить в себя $(g(1) = 1, g(2) = 2, g(5) = 5, g(8) = 8)$, а оставшиеся три дают четыре варианта каждая, например, $g(3) = 3$ или $g(3) = 4$, и аналогично для $4, 6, 7, 9, 10$. Ответ $2^6 = 64$.
   г) $fg = g \rightarrow \forall x \in E_g$ $f(x) = x \rightarrow E_g \subset \{1, 2, 3\}$, т.к. только в $1, 2, 3$ $f(x)$ имеет петли. Ответ $3^{10} = 59049$.
2.
   а) Пусть $f(x) = i$, тогда давайте в ориентированном пути вершина под номером x будет $i-$ой по порядку (рёбра идут от $i-$ой к $i+1-$ой вершине). Тогда, очевидно, разным перестановкам соотвествуют разные пути (если пути различны, то они отличаются хотя бы в одной позиции) $\rightarrow$ инъекция есть, и для каждого пути будет перестановка $\rightarrow$ сюръекция есть. #
   б)
   в) Кол-во отображений $f : M \rightarrow M = n^n$. Если оно равно количеству деревьев с двумя фиксированными вершинами, то количество деревьев без фиксирования вершин равно $\frac{n^n}{C_n^2} = n^{n-2}$.

3. Если $f : M \rightarrow M$ – биекция, то она состоит из набора непересекающихся циклов. По условию все циклы нечётной длины. Пусть x лежит на цикле длины l. Тогда назначим $g(x) = f^{\frac{l+1}{2}}(x)$. Тогда $g^2(x) = f^{l+1}(x) = f(x)$. #

4. Пусть в f существует цикл длины k. Докажем, что при применении g он полностью переходит в цикл (тоже находящийся в f) длины k. $g(f(x)) = f(g(x))$, то есть $g(x)$ и $g(f(x))$ лежат на одном цикле по f. Докажем, что $f^k(g(x)) = g(f^k(x))$. Для $k = 1$ это верно. Пусть верно для k, докажем для $k+1$. $f^{k+1}(g(x)) = f(f^k(g(x)) = f(g(f^k(x))) = g(f(f^k(x))) = g(f^{k+1}(x))$. $\#$ Теперь можно увидеть, что если мы будем увеличивать k, то мы как раз пойдём параллельно по двум циклам в f – один до применения g, другой после. Таким образом, все циклы переходят в циклы той же длины. $\#$
   Осталось только научиться считать ответ. Пусть у нас есть x циклов длины y. Тогда они должны переходить друг в друга, таких вариантов x. Но для каждого цикла, переходящего в цикл, надо ещё выбрать сдвиг $((1,2,3) \to (1,2,3), \to (2,3,1)$, или $\to (3,2,1))$. Для каждого цикла y вариантов циклических сдвигов, всего вариантов $x! * y^x$, и это надо перемножить по всем y.
   а) Здесь есть один цикл длины 16, ответ $1! * 16 = 16$.
   б) Табличка для $f(x)$:
   x: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
   f(x): 0 3 6 9 12 15 2 5 8 11 14 1 4 7 10 13 Здесь есть такие циклы:
   Длины 1: $(0 \to 0), (8 \to 8)$
   Длины 2: $(10 \to 14 \to 10), (2 \to 6 \to 2), (4 \to 12 \to 4)$
   Длины 4: $(1 \to 3 \to 9 \to 11 \to 1), (5 \to 15 \to 13 \to 7 \to 5)$
   Значит, ответ $(2! * 1^2) * (3! * 2^3) * (2! * 4^2) = 3 * 2^10 = 3072$.
   в) Здесь 4 цикла длиной 4, ответ $4! * 4^4 = 6144$.