Бабушкин А.

1 Обязательные задачи

1.
   a) Как в практике, но пускаем из каждой вершины Дейкстру, а не бфс.
   b) Пусть мы хотим найти гамильтонов цикл в графе. Назначим всем рёбрам в нём вес -1 и решим нашу задачу. Тогда если через вершину проходит цикл веса n, то гамильтонов цикл есть. То есть мы свели hamcycle к нашей, то есть она NPh.

2. Ребро a $\to$ b, стало веса w. Для всех пар вершин i, j обновим d[i][j] min= d[i][a] + w + d[b][j].

3. По индукции. Для одной вершины x_0 это правда. Почему мы максимизируем значение для вершины, взятой на k-ом шаге? Потому что мы Дейкстрой выберем самое строгое их ограничений на значение этой вершины и реализуем его, то есть больше никак нельзя. Но если мы максимизируем каждую вершину в отдельности, то и сумму тоже.

4. Полный (и с петлями тоже) граф на n вершинах, где все рёбра имеют вес -1. Если мы бдует делать Флойда не в одной табличке, а на каждой итерации заводя новую, то на k-ой у нас будут значения -2^k, а когда мы делаем Флойда без создания новых массивов, то наш результат никогда не хуже, чем с созданием их.

5.
   a) Пусть X – минимальный вес среди этих отрицательных рёбер. Вычтем из всех рёбер вообще X, найдём путь, прибавим к его весу 2X. Всё хорошо, потому что оптимальный путь содержит ровно два ребра из таких: одно около s и одно около t (исключая случай, когда путь из одного ребра – обработаем отдельно, и ещё случай, когда есть отрицательный цикл, содержащий a – тоже отдельно, тогда ответа нет). b) Переберём случаи – или вершина x не участвует в пути, тогда выкинем её из графа и как в прошлом пункте, или участвует, и тогда найдём пути s $\to$ x и x $\to$ t как в прошлом пункте.

6. Пусть есть отрицательное ребро. Тогда надо полечить или первую вершину, или вторую. Тогда по условию у нас есть две вершины, которые покрывают все отрицательные рёбра. Переберём одну вершину и тип лечения: увеличим её мы или уменьшим. Когда мы это перебрали, то выкинем из рассмотрения все рёбра, которые мы так порадуем (если мы себя увеличиваем, то мы радуем все исходящие, и наоборот). Тогда все оставшиеся рёбра должны иметь одну общую вершину одного типа (то есть все или выходят из одной, или входят в одну). Как проверить, что это правда? Давайте поддерживать hashtable: in[v] == количество неудовлетворённых рёбер, которые идут в v, out[v] аналогично. Их легко поддерживать. Тогда после перебора вершины давайте посмотрим,

что у хоть одной из хэш-таблиц размер 1 (нулевые элементы удаляем). Успех.

2 Дополнительные задачи

1. $VE \log$: бинпоиск по ответу, затем у нас есть известная задача про неравенства $(x_i - x_j \le d_{ij})$ с отрицательными рёбрами, давайте проверим, что нет отрицательного цикла Фордом-Беллманом.