Бабушкин А.

1.

l) $\log(n^{\log n}) = \log n * \log\log n < \log^2 n < n = \log(1.1^n) \to \text{True}.$

m) $\frac{n^3}{n^2+n\log n} = \frac{n^3}{n^2+o(n^2)} = \frac{n^3}{\Theta(n^2)} = \Theta(\frac{n^3}{n^2}) = \Theta(n) < O(n\log n) \to \text{True}.$

n) Пусть $f(n) = 2^n$. Тогда $f(n) = (f(\frac{n}{2}))^2, x \neq O(x^2) \to \text{False}.$

o) $f(n) - o(f(n)) \le f(n) \to f(n) - 0(f(n)) = O(f(n))$

$f(n) - o(f(n)) \ge f(n) - \frac{f(n)}{C} = \frac{1-C}{C} f(n) \to \frac{C}{1-C}(f(n) - o(f(n)) \ge f(n) \to f(n) - o(f(n)) = \Omega(f(n)) \to \text{True}.$ Для $f(n) + o(f(n))$ аналогично.

p) $2^{\log n!} = n! < n^n = 2^{n\log n} \to \log n! < n\log n \to \log n! = O(n\log n).$

Теперь докажем Ω. $\log n! = \sum \log i : i \le n$. Возьмём первые $\frac{n}{2}$ из них. Каждое из слагаемых не меньше $\log\frac{n}{2} = \log(n-1)$, то есть их сумма $\ge \frac{n}{2}(\log n - 1) = \Theta(n\log n) \to \text{True}.$

2.

g) Докажем, что $T(n) = \Theta(n)$ по индукции. База очевидна, теперь переход. Пусть это верно $\forall i < n$. Сначала докажем O. $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{3}) + n \le C\frac{n}{2} + C\frac{n}{3} + n = \frac{(5C+6)}{6}n$. Если $\exists C : \frac{5C+6}{6} \le C$, то мы победили. Это равенство верно для $C \ge 6 \to \text{True}$. Ω доказывается точно так же, только там нужно будет $\exists C : \frac{5C+6}{6} \ge C \to C \le 6$.

h) $T(n) = \Theta(n^2)$ по мастер-теореме $(a = 4, b = 2, c = 1, d = 2)$.

i) $T(n) = \Theta(n^{\log_3 2})$ по мастер-теореме $(a = 2, b = 3, c = 0, d = 0)$.

j) $T(n) = \Theta(n^{\frac{\sqrt{5}+1}{2}})$, т.к. это числа Фибоначчи.

k) $T(n) = T(n-1) + n \to T(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$.

3.

A	B	O	o	Θ	ω	Ω
n	n^2	+	+	−	−	−
$\log^k n$	n^ϵ	+	+	−	−	−
n^k	c^n	+	+	−	−	−
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$	−	−	−	−	−
2^n	$2^{n/2}$	−	−	−	+	+
$n^{\log m}$	$m^{\log n}$	+	−	+	−	+
$\log(n!)$	$\log(n^n)$	+	−	−	−	+

4. Разобьём на классы эквивалентности (если функции вместе, то они Θ друг от друга) и упорядочим по возрастанию.

(a) $1, n^{1/\log n}$

(b) $\log(\log^* n)$

(c) $\log^* n, \log^* \log n$

(d) $2^{\log^* n}$

(e) $\ln\ln n$

(f) $\sqrt{\log n}$

(g) $\ln n$

(h) $\log^2 n$

(i) $2^{\sqrt{2\log n}}$

(j) $n, 2^{\ln n}$

(k) $n \log n, \log n!$

(l) $n^2, 4^{\log n}$

(m) n^3

(n) $(\log n)!$

(o) $n^{\log\log n}, \log n^{\log n}$

(p) $(\sqrt{n})^{\log n}$

(q) $(\frac{3}{2})^n$

(r) 2^n

(s) $n * 2^n$

(t) e^n

(u) $n!$

(v) $(n+1)!$

(w) 2^{2^n}

(x) $2^{2^{n+1}}$

5. Сумма бесконечной геометрической прогрессии $= \frac{b}{1-q}$.
a) $b = 1, q = \frac{1}{2} \rightarrow$ ответ $= 2$.
b) Это сумма двух прогрессий. У одной $b = 1, q = \frac{1}{4}$, у другой $b = -\frac{1}{2}, q = \frac{1}{4} \rightarrow$ ответ $= \frac{2}{3}$.