1　準備

$\langle$*decimal constant*$\rangle\langle$*unit of measure*$\rangle$ の計算方法。

- $\langle$*decimal constant*$\rangle$ の表す実数に 2^{16} を乗じて四捨五入した値を A とする。
- $\langle$*unit of measure*$\rangle$ の換算整数を B とする。
- $(A \times B)/2^{16}$ を切り捨てた値を結果とする。

切り捨て（$\lfloor x \rfloor$）、四捨五入（$[x]$）に関する性質。

- $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$
- $x - 1/2 \leq [x] \leq x + 1/2$
  （四捨五入の定義によって片方の $\leq$ は $<$ になりうる。）

1.1　表記

「TeX 上のアルゴリズムを記述する数式」で、$+$、$\times$、$\div$ は各々 TeX の `\advance`、`\multiply`、`\divide` を表し、$*$ は倍数表記（$\langle$*factor*$\rangle\langle$*unit of measure*$\rangle$）を表す。また小文字の変数は TeX 上の整数値を表すが、大文字の変数は必ずしもそうでないものも表すものとする。

2　本論

2.1　問題

X を整数、Y を実数とする。TeX で許される精度の限りで X/Y をできるだけ精確に求めたい。すなわち

$$z = \max\{z' \mid Y * z' \leq X\} \tag{1}$$

を求めたい。

2.2　方針

予め、$l < z < r$ でありかつ $r - l$ がなるべく小さい l, r を求めておいてから、$Y * z' \leq X$ のテストを用いて二分探索を行う。

2.2.1　上限・下限を得る

$y = [Y \cdot 2^{16}]$ とする（この y は TeX では $Y * 2^{16}$ として求められる）。z の定義より

$$Y * z \leq X < Y * (z + 1)$$

が成立するので

$$\frac{y\cdot z}{2^{16}}-1<\left\lfloor\frac{y\cdot z}{2^{16}}\right\rfloor\le X<\left\lfloor\frac{y\cdot(z+1)}{2^{16}}\right\rfloor\le\frac{y\cdot(z+1)}{2^{16}}+1$$
$$\iff \frac{2^{16}\cdot X}{y}-\frac{2^{16}}{y}-1<z<\frac{2^{16}\cdot X}{y}+\frac{2^{16}}{y} \tag{2}$$

$2^{16}\cdot X/y$ と $2^{16}/y$ を次の手順で求める。

1. $t_1 = X \times 2^8 \div y$
2. $t_2 = t_1 \times 2^8$
3. $t_3 = 2^{16} \div y$

$t_1 = \lfloor 2^8\cdot X/y\rfloor$、$t_2 = 2^8\cdot t_1$、$t_3 = \lfloor 2^{16}/y\rfloor$ より次が成立。

$$\frac{2^8\cdot X}{y}-1<t_1\le\frac{2^8\cdot X}{y}$$
$$\iff \frac{2^{16}\cdot X}{y}-2^8<t_2\le\frac{2^{16}\cdot X}{y} \tag{3}$$
$$\frac{2^{16}}{y}-1<t_3\le\frac{2^{16}}{y} \tag{4}$$

(2), (3), (4) より以下が成立。

$$t_2-(t_3+1)-1<z<t_2+2^8+(t_3+1)$$
$$\iff t_2-t_3-2<z<t_2+t_3+(2^8+1) \tag{5}$$

以上より、$l=t_2-t_3-2$、$r=t_2+t_3+(2^8+1)$ とおけばよいことになる。

2.2.2　二分探索

$[l,r]$ の範囲の二分探索で z を求める手順は以下のようになる。

1. $l<u$ である間、以下を反復する。
   (a) $m := (l+u+1)\div 2$
   (b) $v := Y * m$
   (c) もし $v\le X$ ならば $l := m$ とする。
   そうでなければ $u := m-1$ とする。
2. $z = l\ (=u)$ とする。

ここで中点を求める時に切り上げ（$\lceil (l+r)/2\rceil$）にしているのは $l<m$ を保証するためである。

3　アルゴリズム

全体のアルゴリズムは以下のようになる。

1. $x = X; y = Y * 2^{16}$
2. $t_1 = X\times 2^8\div y; t_2 = t_1\times 2^8; t_3 = 2^{16}\div y$

3. $l := t_2 - t_3 - 2; u := t_2 + t_3 + (2^8 + 1)$
4. $l < u$ である間、以下を反復する。
   （a）$m := (l + u + 1) \div 2$
   （b）$v := Y * m$
   （c）もし $v \leq X$ ならば $l := m$ とする。
   そうでなければ $u := m - 1$ とする。
5. $z = l \ (= u)$ とする。