УДК 330.46

Юхименко Г.К.

здобувач вищої освіти факультету менеджменту і маркетингу,

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Моделювання інвестиційного фонду акцій із застосуванням стратегій керування фінансовими деривативами та хеджування

Modeling an equity investment fund using financial derivative management and hedging strategies

Анотація

В умовах економічної нестабільності для інвесторів ключовою метою є зменшення ризику втрати прибутку. Перед тим, як створити свій інвестиційний портфель, необхідно визначити конкретні цілі та мету стратегії керування ним, пріоритети при виборі фондових активів для вкладень та сформувати пропорції інвестиційних ресурсів у різних видах портфелів.

Найбільш використані портфельні стратегії вже не здатні враховувати різні фактори мінливості ринку, отже, доцільним є модифікація існуючих моделей та використання більш новітніх методів для формування стратегії керування інвестиційним портфелем з метою зменшення ризику.

Мета дослідження полягає у визначенні дієвого методу моделювання інвестиційного та опціонного портфелів, а також створення програмного продукту, який зможе автоматизувати процес виконання таких цілей.

Під час виконання роботи було досліджено різні методи прогнозування ринкових цін акцій, було розроблено модель для визначення оптимального інвестиційного портфелю та його вартість. Після цього даний алгоритм було автоматизовано у вигляді розробленого програмного додатку.

Результатом дослідження є створення комбінованої моделі керування портфелем, яка прогнозує розвиток використаних фондових активів та створює стратегію керування ними на основні отриманих прогнозованих даних. Також модель розраховує очікуваний прибуток та інвестиційну стратегію при неочікуваних змінах на ринку. Ефективність моделі перевіряється на прогнозованих та фактичних історичних даних за розглянутий часовий період.

У ході проведення дослідження було розглянуто 7 акцій, зокрема, Tesla, Netflix, Amazon, Alphabet Inc., Facebook, Restoration Hardware Holdings та EPAM. Модель адаптується до типів акцій, що розглядаються та коригує свої передбачення з метою отримання мінімальної похибки від фактичних. На виході модель видає стратегію керування портфелем на протязі наступного місяця, побудовану на основні прогнозованих даних.

Ключові слова: акція, фондовий ринок, інвестиційний портфель, опціон, хеджування, модель Марковіца, модель Хуанга-Літценбергера, модель Блека-Літтермана, модель Блека-Шоулза, нейронні мережі, метод Бокса-Дженкінса, метод Метрополіса-Хастінгса.

Annotation

In times of economic instability, the key goal for investors is to reduce the risk of losing profits. Before creating your investment portfolio, you need to determine the specific goals and objectives of its management strategy, priorities in choosing stock assets for investment and to form the proportions of investment resources in different types of portfolios.

The most used portfolio strategies factors of market volatility, therefore, it is advisable to modify existing models and use newer methods to form a strategy for managing the investment portfolio in order to reduce risk.

The purpose of the study is to determine an effective method of modeling investment and option portfolios, as well as to create a software product that can automate the process of achieving such goals.

During the work, various methods of forecasting market stock prices were investigated, a model was developed to determine the optimal investment portfolio and its value. After that, this algorithm was automated in the form of a developed software application.

The result of the study is the creation of a combined model of portfolio management, which predicts the development of used stock assets and creates a strategy for managing them on the basis of the obtained forecast data. The model also calculates the expected profit and investment strategy in case of unexpected changes in the market.The effectiveness of the model is tested on forecast and actual historical data for the period under review.

The study examined 7 stocks, including Tesla, Netflix, Amazon, Alphabet Inc., Facebook, Restoration Hardware Holdings and EPAM. The model adapts to the types of stocks under consideration and adjusts its forecasts in order to obtain a minimum error from the actual ones. At the output, the model issues a portfolio management strategy for the next month, based on basic forecast data.

Keywords: stock, stock market, investment portfolio, option, hedging, Markowitz model, Huang-Litzenberger model, Black-Litterman model, Black-Scholes model, neural networks, Box-Jenkins method, Metropolis-Hastings method.

Постановка проблеми. В умовах економічної нестабільності для інвесторів ключовою метою є зменшення ризику втрати прибутку. Найбільш використані портфельні стратегії не завжди здатні враховувати різні фактори мінливості ринку, отже, доцільним є модифікація існуючих моделей та використання більш новітніх методів для формування стратегії керування інвестиційним портфелем з метою зменшення ризику. Актуальність досліджуваних питань полягає у складності визначення оптимальної інвестиційної стратегії через нестабільність фондового ринку акцій у період пандемії, тому ключовим є визначення портфелю із найменшим ризиком, який враховує не тільки волатильність портфельних активів, а і особисті погляди інвестора.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідженням даної проблеми займалися Г. Марковіц, Ф. Блек, Р. Літтерман, Чі-Фу Хуанг, Р. Літценбергер, Дж. Бокс, Г. Дженкінс, Т. Ідзорек, Н. Талеб.

Формулювання цілей статті. Аналіз становища фондового ринку; визначення потенційних прибуткових акцій у якості портфельних активів; прогнозування майбутніх ринкових цін на акції; автоматизація процесу розробки довгострокової портфельної стратегії; передбачення можливих позитивних/негативних трендів розвитку базових активів портфелю на ринку; адаптація портфельної стратегії до змін на фондовому ринку;

Виклад основного матеріалу. Інвестиції складають значну частину нашого життя. У макромасштабі вони допомагають нам досягти економічного зростання нації, в яку ми інвестуємо. У мікромасштабі вони допомагають збільшити наше багатство та жити комфортніше. Багато акціонерів розглядають інвестиції як можливість швидкого зростання багатства. Якщо все зробити правильно, інвестор може заробити основну суму грошей завдяки своїй рентабельності інвестицій.

Щоб якомога більше параметрів, що впливають на прибутковість інвестицій, математики та статистики розробили багато моделей, які могли б найкращим чином вирішити проблему розподілу активів. Важливо мати на увазі, що кожна представлена модель чи теорія має свої припущення. З цієї причини кожне окреме припущення повинно бути враховано перед тим, як переходити до використання запропонованої моделі. Крім того, інвестор повинен мати можливість оцінити власну несхильність до ризику. Управління ризиками не слід розглядати як тривіальну справу, оскільки це важливий критерій належного аналізу розподілу активів. Інвестування в дуже нестабільні акції може бути поганим для потенційно небезпечного акціонера з високим рівнем ризику [18].

Вибір портфеля – одна з найпоширеніших проблем, з якою стикаються різні інвестори з різним рівнем капіталу, і разом з тим одна з найскладніших у фінансовому світі. Питання вибору портфеля є моделлю балансування ризику та прибутковості. Це включає набір цінних паперів, які намагаються визначити частку інвестицій у кожному з них, щоб мінімізувати інвестиційний ризик та максимізувати рентабельність інвестицій. Існують різні моделі формування інвестиційного портфелю, які мають свої та слабкі сторони [19].

1) Модель Марковіца

У сучасних математичних фінансах оптимізація портфеля була основною та центральною темою для розуміння фондового ринку та прийняття рішень. Теорія Гаррі Марковіца є широко відомою як сучасна портфельна теорія (MPT). Теорія дає відповідь на фундаментальне питання про те, як повинен інвестор розподілити кошти між усіма можливими комбінаціями активів. Всі теорії перед теорією Марковіца перешкоджали компромісу між дохідністю та ризиком інвестицій. Марковіц кількісно визначив дохідність та ризик за допомогою середнього значення та дисперсії, і далі показав, що як дохідність, так і ризик слід розглядати разом, щоб зробити оптимальний вибір [6].

Портфель інвестора складається з певної кількості видів цінних паперів. Кожен цінний папір характеризується певною очікуваним прибутком (return - r_i) за період n (1):

$$r_i = \frac{C_{in} - C_{io}}{C_{io}}, \tag{1}$$

де C_{io} – вартість активу у початковий часовий період.

Очікувана доходність активу розраховується як (2):

$$r^* = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} r_i\,, \tag{2}$$

де t - кількість минулих спостережень дохідності активу.

Ризик активу розраховується через середнє квадратичне відхилення (дисперсію) його дохідності (3):

$$\mathrm{\sigma_i} = var(r_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2}\,, \tag{3}$$

де $\bar{r}$ – середнє арифметичне ринкової вартості активу.

Для того щоб визначити залежність дохідності між активами необхідно розрахувати коефіцієнт коваріації (4):

$$cov(r_i, r_j) = \sigma_{ij} = \frac{1}{t-1}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{k}(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)\,. \tag{4}$$

Для постановки задачі оптимізації позначимо i=1..n типів портфельних активів, долі активів (ваги) як w_i, а цільова функція буде виражатись через формулу дохідності портфелю, яку ми будемо максимізувати (5):

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} w_i * r_i \to max, \tag{5}$$

де w_i – доля активу у інвестиційному портфелі.

Обов’язковим обмеженням у задачі є умова (6):

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1\,. \tag{6}$$

Якщо модель Марковіца вважається без урахування можливості коротких продаж (значення ваги є від’ємним), то додаються такі обмеження як (7):

$$w_i \geq 0. \tag{7}$$

Під короткими продажами мається на увазі ситуація, коли актив купується в борг за визначеною ціною, потім продається коли його ринкова вартість падає і через деякий час купується за нижчою ціною, що дає змогу отримати прибуток при зниженні вартості активу [3].

2) Метод Хуанга-Літценбергера

Якщо в задачі оптимізації немає обмежень на ваги активів (тобто немає заборони на короткі продажі), то ефективну множину можна отримати математичним способом. Хуанг і Літценбергер описали, як знайти дві точки ефективної множини і потім отримати з цих точок всю ефективну множину. В цьому розділі такий математичний підхід взятий за основу і послідовність обчислень показана в матричному вигляді, щоб вивести загальний розв’язок для портфеля з будь-якою кількістю активів.

Вектор очікуваних дохідностей назвемо e, ваговий вектор – w, а одиничний вектор – u. Коваріаційну матрицю назвемо V. Дисперсія портфеля в матричній формі обчислюється як $w^T V w$.

У методі Хуанга і Літценбергера для пошуку ефективних портфелів потрібно обчислити матрицю V^{-1}, обернену до коваріаційної матриці. Щоб знайти два ефективних портфеля (позначимо їх g і $g + h$), Хуанг і Літценбергер обчислюють чотири скалярні величини (A, B, C і D). Перші три є добутками векторів і матриць, а четверта залежить від трьох попередніх (8):

$$A = u^t V^{-1} e;\ B = e^t V^{-1} e;\ C = u^t V^{-1} u; D = BC - A^2. \tag{8}$$

Якщо визначити два проміжних вектора-стовпця $l = V^{-1}e$ і $m = V^{-1}u$, то матричні вирази зводяться до такого вигляду (9):

$$A = u^t l; B = e^t l; C = u^t m. \tag{9}$$

Нижче наведені формули для обчислення ваг активів, що представляють дві точки на кривій ефективної множини рішень – портфель g (з очікуваною прибутковістю 0%) і портфель $g + h$ (з очікуваною прибутковістю 100%), які мають такий вигляд (10):

$$g = \frac{Bm - Al}{D}; h = \frac{Cm - Al}{D}. \tag{10}$$

Таким чином, g з вагами для акцій відповідно повертає портфель на ефективної кордоні з нульовою очікуваною прибутковістю. Аналогічно: ваги вектора $g + h$ повертають другий ефективний портфель з очікуваною прибутковістю 100%. Для отримання вагового вектору ефективного портфеля з будь-якої заданої очікуваною прибутковістю T можна використовувати лінійну комбінацію $g + h *T$ відомих векторів g і h. Таким чином, портфель з мінімальним ризиком для очікуваної прибутковості складається з комбінації різних акцій, що є результатом, отриманим за методом Хуанга і Літценбергера [4-5, 40].

3) Модель Блека-Літтермана

Модель розподілу активів Блека-Літтермана використовує байєсівський підхід до виведення очікуваних дій активів. З байєсівським підходом очікувані прибутки є випадковими змінними, вони не спостерігаються, можна лише зробити висновок про їх розподіл вірогідності. Такий висновок складається з попередніх припущень. Додаткова інформація використовується разом з попереднім висновком заднього розподілу. Особливість моделі розподілу активів Блека-Літтермана полягає у здатності автоматичного калібрування вагового вектору відповідно до відображень лише частини очікуваного вектора дохідності. [7, 8].

Якщо ми припустимо, що ринки є повністю ефективними, і всі активи мають справедливу вартість, у нас немає ніяких причин відхилятися від ринку портфеля у нашому розподілі активів. У такому випадку ми навіть не повинні знати ринкові дохідності активів, а також не портібно оптимізувати портфель, оскільки оптимізація на основі ринкової дохідності активу призведе до того ж портфеля.

Інша ситуація виникає тоді, коли інвестор вважає, що ринок в цілому є ефективним, але має занепокоєння щодо виконання конкретних активів або класів активів через володіння непублічною інформацією, яка викликає, наприклад, необхідність фундаментального аналізу портфелю.

Якщо інвестор з певними поглядами на доцільність використання конкретних цінних паперів не хоче повністю відмовлятися від оптимізації за Марковіцем, він все ще може використовувати кількісний підхід до включення такого погляду в модель Марковіца, тобто, використати модель Блека-Літтермана [39].

Кожен актив в портфелі викликає певний відсоток ризику у ньому. Класична теорія припускає, що інвестори повинні бути компенсовані за ризик, який вони приймають, тому ми можемо приписувати кожному активу очікувану компенсацію (тобто попередню оцінку дохідності), яка кількісно визначається через визначену ринком премією за ризик, що дорівнює дохідності ринку відносно її дисперсії (11):

$$\delta = \frac{R - R_f}{\sigma^2}. \tag{11}$$

Для розрахунку ринкових дохідностей, ми використовуємо наступну формулу (1.12):

$$\Pi = \delta S w_{mkt}. \tag{12}$$

Тут w_{mkt} позначає ринкові ваги. Ця формула розраховується через загальну суму ризику, викликану активом, помножену на ринкову ціну ризику, що дає у результаті вектор ринкових дохідностей П.

Через попередньо визначені матриці представлення Q ($Kx1$, K – кількість абсолютних/відносних передбачень) та зв'язків P (KxN) розраховується скоригована відповідно до представлення дохідність E(R) (13):

$$E(\, R\,) = [(\tau S)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau S)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1} Q], \tag{13}$$

де τ – показник масштабування (0…1);

Ω – матриця невизначеності;

S – матриця коваріації активів у портфелі.

Матриця невизначеності – це діагональна матриця коваріації, що містить відхилення кожного представлення та розраховується як (14):

$$\Omega = \tau * PSP^T. \tag{14}$$

Ваги активів розраховуються як (15):

$$w = (\delta S)^{-1} E(\, R\,). \tag{15}$$

У результаті отримаємо інвестиційний портфель, який враховує не тільки історичні дані (дохідність, ціна активу тощо), але і особисті передчуття інвестора, який може краще передбачити розвиток подій, ніж будь-який алгоритм [9, 10].

Теоретичні засади хеджування опціонами, опис опціонної моделі та стратегії хеджування

Суб'єкти міжнародних фінансів постійно взаємодіють між собою з метою отримання максимально можливого прибутку та продуктивності, тим самим беручи участь у русі світового фінансового капіталу. Це викликає появу певних закономірностей, які визначають розподіл фінансових активів між ними. За перерозподілом фінансового капіталу можливо оцінювати успішність діяльності суб’єкту на усіх рівнях фінансового ринку. З цього можна виокремити дві основні функції міжнародних фінансів – розподільчу та контрольну (рис. 1.1).

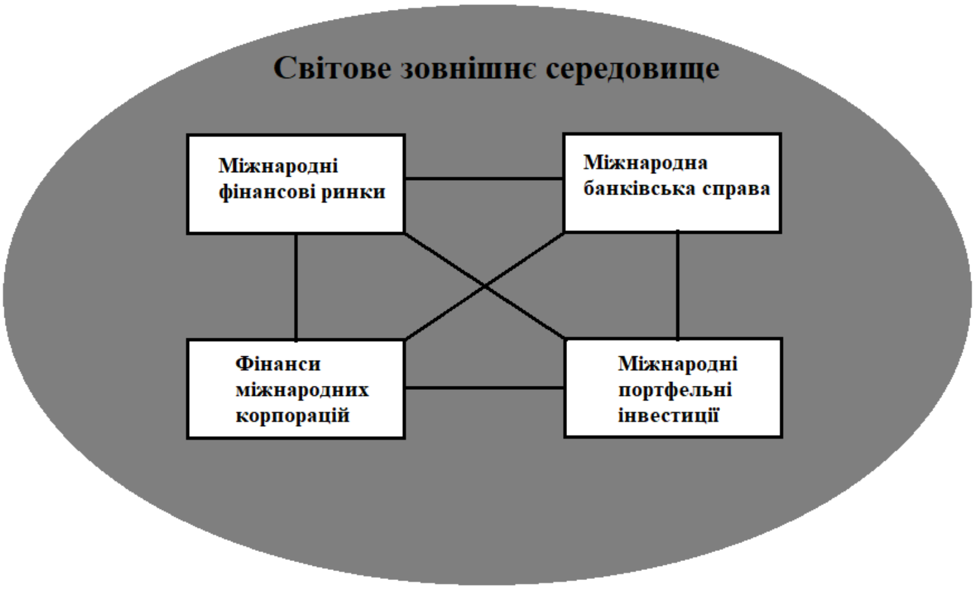

Рис.1. Світове фінансове середовище

Ринок фінансових операцій можна поділити на два менші ринки: ринки спот та строкових операцій. Останньому належать ринки, на яких фінансовими інструменти є угоди з визначеним строком виконання, які називаються деривативами (або похідними інструментами). До них відносять:

- угоди «своп» (swap);
- форварди (forwards);
- опціони (options).
- ф’ючерси (futures).

Структуру ринку міжнародних фінансів можна відобразити за допомогою розподілу вищезазначених типів договорів (рис. 2):

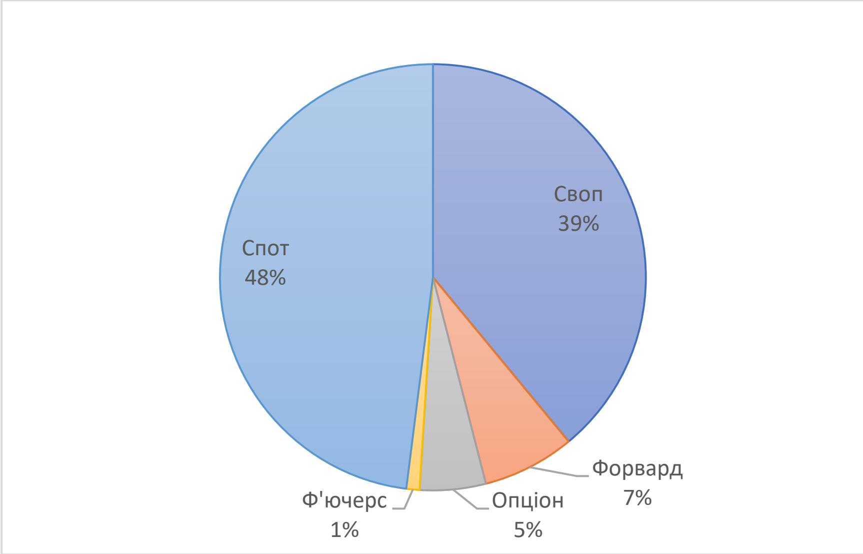

Рис.2. Структура сучасного валютного ринку

Опціон дає право на купівлю/продаж у певний день зазначеної за контрактом кількості базового активу (акції/валюти) за зафіксованою вартістю (або курсом) на момент укладання договору, але не зобов'язує здійснювати продаж у цей день. Вартість такого права називається опціонною премією, яка визначається багатьма факторами, наприклад, строк опціону, вартість базового активу, процентні витрати тощо.

Виділяють три основні типи опціонів:

- Пут-опціон – надає право на продаж активу у визначений день за ціною, яка була на момент укладання договору;
- Кол-опціон – надає право на купівлю активу у визначений день за ціною, яка була на момент укладання договору;
- Опціон «стелаж» – опціон пут-кол [1, 38].

При плануванні стратегії торгівлі на ринку насамперед необхідно визначити ціну опціону. Основною моделлю для її розрахунку є модель Блека-Шоулза.

Модель Блека-Шоулза для розрахунку цін на опціони має кілька припущень. Найбільш значущим є те, що волатильність, міра того, наскільки можна очікувати руху акцій у найближчій перспективі, є постійною у часі.

Формула Блека-Шоулза визначається як (16–18):

$$C(S_0, T) = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2), \tag{16}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{17}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}, \tag{18}$$

де $C(S_0, T)$ – поточна вартість опціону call в момент часу t до кінця терміну дії опціону (до експірації) T;

S_0 – поточна ціна базового активу;

$N(x)$ – функція стандартного нормального розподілу;

K – ціна виконання опціону (страйк-ціна);

r – безризикова відсоткова ставка;

T – час до кінця терміну дії опціону;

σ – волатильність/нестабільність дохідності базисного активу.

Математичні характеристики моделі Блека-Шоулза названі на честь грецьких букв, що використовуються для їх подання у рівняннях. У даній роботі було застосовано стратегію дельта-гамма-хеджування, тому розглянемо ці показники детальніше:

- Дельта

Дельта вимірює чутливість ціни опціону до зміни ціни базової акції. Вона повідомляє вам, на скільки грошей опціон збільшиться або зменшиться у вартості при збільшенні або падінні базового активу на 1$.

Опціонні дельти можуть бути як позитивними, так і негативними. Кол-опціон має позитивне дельта-значення, що свідчить про те, що він набирає вагу пропорційну до збільшення вартості базової акції. Пут-опціони мають від'ємні дельта-значення, що свідчить про те, що їх вартість падатиме в міру зростання базової акції. Крім того, дельта математично визначається як (19):

$$\Delta = \frac{\delta C}{\delta S}, \qquad (19)$$

де δC – зміна ціни опціону;

δS – зміна ціни базового активу опціону.

- Гамма

Гамма – це швидкість зміни дельти опціонів щодо невеликого зростання ціни базового активу. Вона відображає, наскільки змінюється дельта опціону, коли змінюється ціна базової акції. Більше того, гамма математично визначається як (20):

$$\Gamma = \frac{\delta^2 C}{(\delta S)^2}, \qquad (20)$$

де δC – зміна ціни опціону;

δS – зміна ціни базового активу опціону [12, 37].

Хеджування – це стратегія, що використовується інвесторами для зменшення або усунення ризику утримання однієї інвестиційної позиції шляхом зайняття іншої інвестиційної позиції на фондовому ринку.

Хеджування захищає портфель інвестора від втрат. Однак хеджування призводить до нижчих прибутків для інвесторів. Тому хеджування – це не стратегія, яку слід використовувати для заробляння грошей, а стратегія, яку слід використовувати для менших потенційних грошових витрат [13, 14].

Інвестори, як правило, застосовують хеджування лише тоді, коли вартість цього виправдовується зниженим ризиком. Багато інвесторів, особливо ті, що зосереджені на довгостроковій перспективі, насправді повністю ігнорують хеджування через пов'язані з цим витрати.

Однак для трейдерів, які прагнуть заробляти гроші на середньо- та довгострокових коливаннях цін і мають багато відкритих позицій одночасно, хеджування є чудовим інструментом управління ризиками. Наприклад, інвестор може обрати особливу спекулятивну позицію, яка має потенціал для високих прибутків, але також може призвести до великих втрат. Якщо інвестор не хоче піддаватися такому високому ризику, він може пожертвувати деякими потенційними збитками, захистивши позицію іншою торгівлею чи інвестицією.

Ідея полягає в тому, що якби початкова позиція виявилася дуже вигідною, тоді ви могли б легко покрити витрати на хеджування і все одно отримати прибуток. Якби початкова позиція закінчилася програшем, ви могли б відновити частину втрат [33-36].

Отже, розглянуті моделі пропонують різні сценарії керування портфелем та враховують різні фактори ринку. Модель Блека-Шоулза є основною моделлю для хеджування опціонами і даний момент є також найбільш популярною серед хеджерів. Комбінування вище зазначених моделей закриває можливі їх недоліки, наприклад, в моделі Марковіца не використовується область оптимальних портфелей з різною очікуваною доходністю, модель Хуанга-Літценбергера не враховує особисті погляди інвестора тощо.

Постановка завдання

На портфель фондових акцій інвестор виділяє грошовий фонд у розмірі 150 000$, а список активів у портфелі містить у собі 7 акцій:

1) TSLA – Tesla;
2) NFLX – Netflix;
3) AMZN – Amazon;
4) GOOG – Google/Alphabet Inc;
5) FB – Facebook;
6) RH – Restoration Hardware Holdings, Inc;

7) EPAM – EPAM Systems, Inc.

Необхідно розрахувати початковий портфель для основних вкладень, а також оптимізувати його на наступні 30 днів. Далі калібрувати портфель відповідно до персональної оцінки ситуації на фондовому ринку від інвестора.

На першому етапі виконання завдання буде використана модель Марковіца з обмеженням на від'ємні значення вагів. Цільовою функцією в оптимізаційній задачі буде показник дохідності портфелю. Також розрахуємо коефіцієнт Шарпа для перевірки адекватності розв'язку.

Коефіцієнт Шарпа являє собою відносний показник дохідність-ризик інвестиційного фонду і відображає у скільки разів рівень надлишкової дохідності вище рівня ризику інвестиції (21).

$$\gamma_{sharp} = \frac{\left(P_i(t) - R_f\right)}{\sigma^2}, \tag{21}$$

де $P_i(t)$ – очікуваний дохід портфелю;

R_f – безризикова ставка дохідності;

σ^2 – стандартне відхилення портфелю (міра ризику) [31, 35].

Таким чином, основна концепція коефіцієнта Шарпа, полягає в тому щоб оцінити обсяг додаткового доходу в разі підвищеної волатильності в разі покупки активу з високим рівнем ризику замість активу з низьким рівнем - чим вище коефіцієнт, тим краще [32].

Для створення оптимального хедж-фонду потрібно виконати симуляції моделі Блека-Шоулза із заданими параметрами (початкова основна ціна, ціна-страйк, волатильність, час до погашення та безризикова процентна ставка), враховуючи прогнозовані дані, такі як ринкова ціна акції. Необхідно змоделювати ситуацію, коли на початку торгівлі хеджується позиція через покупку кол- та пут-опціонів. Отже, при зміні ціни базового активу, тобто, на кожному часовому проміжку, необхідно змінювати стратегію хеджування кожного разу при торгівлі опціонами. Обсяг грошей, виділений на хедж-фонд для кожного опціонного активу береться на основі вагів активів за початковою моделлю Марковіца у обсязі 20% від загальної кількості грошей, виділених на актив.

Визначимо параметри моделі:

- Час до погашення/кінця дії контракту = 1 місяць;
- Кількість часових проміжків = 22;
- Початкова ціна акції – останній показник вартості опціонного активу за розглядаємий у роботі період (29.03.2021);
- Безризикова процентна ставка = 1%;
- Волатильність/нестабільність = 20%;
- Коефіцієнт транзакційних витрат = 0,2;
- Ціна-страйк = прогнозована вартість опціонного активу через 22 робочі дні, тобто, у день використання опціонного контракту.

Розрахунки виконуються на основі прогнозованих даних, які отримуються методом об’єднання прогнозів з 3 методів – МКМЛ (Монте-Карло з марківськими ланцюгами, Бокса-Дженкінса (ARIMA) та LSTM (Long short-term memory).

Дослідження методів прогнозування вартості акцій

Оскільки модель робить прогноз на певний часовий період, то вважаємо, що модель буде прогнозувати часовий ряд.

Часовий ряд – це послідовний набір точок даних, що вимірюється, як правило, протягом послідовних часів. Це математично визначається як набір векторів $x(t)$, $t = 0,1,...$ де t являє собою час, що минув. Змінна $x(t)$ розглядається як випадкова величина. Вимірювання, проведені під час події в часовому ряді, розташовані у відповідному хронологічному порядку.

Основною метою моделювання часових рядів є ретельний збір та ретельне вивчення минулих спостережень за тимчасовими рядами для розробки відповідної моделі, яка описує властиву структуру серії. Потім ця модель використовується для формування майбутніх значень для серії, тобто для складання прогнозів. Таким чином, прогнозування часових рядів можна назвати актом передбачення майбутнього шляхом розуміння минулого [20].

При виборі методу прогнозування даних було розглянуто 4 варіанти: модель ARIMA, нейронні мережі LSTM, метод Монте-Карло та метод Монте-Карло для марковських ланцюгів (Метрополіса-Хастінгса). Перші два методи здатні генерувати близькі до фактичних значення, але не уловлюють різкі зміни у цінах. Інші два методи мають більшу вірогідність цього, але через випадкове генерування параметрів різниця між фактичними та прогнозованими даними може бути занадто високою.

- Метод Монте-Карло з марковськими ланцюгами

Метод Монте-Карло з марковськими ланцюгами буде циклічно задавати функції, що містять випадкові змінні, так що кожен цикл представляє унікальну подію.

Для вибору між Монте-Карло та Метрополіса-Хастінгса було проведено тестове прогнозування даних та їх порівняння з фактичними. Проаналізувавши дані, які буде використано, ми бачимо різкі скачки у динаміці цін, тому моделі з лінійними регресіями відкидаються. Спробуємо спрогнозувати ціни акцій Tesla та отримаємо такі результати (табл. 1, рис. 3):

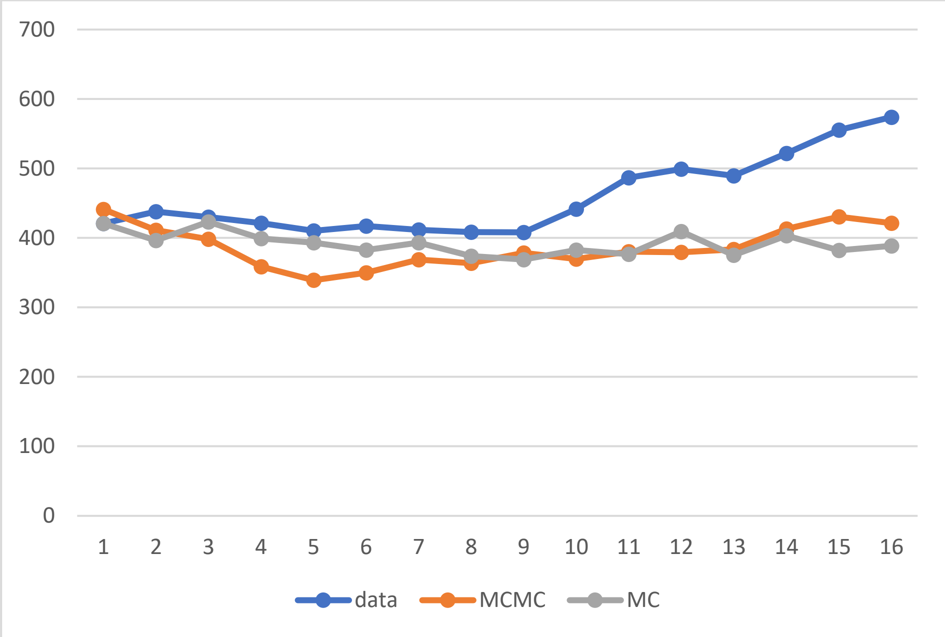

Рис.3. Порівняння отриманих прогнозів розглянутих методів

З цього ми бачимо, що більш доцільним та надійним є використання методу Монте-Карло для марковських ланцюгів (Метрополіса-Хастінгса).

Метод отримав назву Монте-Карло для марковських ланцюгів (МКМЛ), тому що, використовуючи попередні значення вибірки для генерування випадкового наступного значення вибірки, генерується марковський ланцюг. Оскільки ймовірності переходу між значеннями вибірки є функцією лише попереднього значення, тобто виконується умова відсутності післядії, то при заданому теперішньому стані майбутній не залежить від минулих.

При застосуванні методу Монте-Карло виникає проблема отримання вибірки з деякого багатовимірного розподілу ймовірностей *p(x)*. Вирішення цієї проблеми лежить в основі методів МКМЛ. Зокрема, були спроби інтегрувати дуже складні функції випадковим моделюванням. Результатом цих спроб є алгоритм Метрополіса—Хастінгса [2, 17].

Цей алгоритм потребує використання простого розподілу, який називається допоміжною функцією розподілу (або перехідною функцією) $Q(\theta'/\theta)$, щоб виділити підходящі значення з апостеріорного розподілу $P(\Theta = \theta\ /\ D)$.

Алгоритм Метрополіса—Хастінгса витягує випадкову вибірку з розподілу, приймаючи або відкидаючи перехід до нового значення залежно від того, наскільки вірогідною є вибірка. Така випадкова прогулянка "без пам’яті" є частиною "марковських ланцюгів" МКМЛ.

Ймовірність кожного нового зразка визначається функцією f. Функція f має бути пропорційна заданому розподілу, з якого ми хочемо взяти зразки. Функція f зазвичай вибирається як функція щільності ймовірності, яка виражає цю пропорційність.

Щоб отримати нове значення зразка, необхідно запропонувати нову θ', яка є випадковою вибіркою з функції розподілу $Q(\theta'/\theta)$, яка зазвичай є симетричною, наприклад, нормальний розподіл із середнім значенням θ та деяким стандартним відхиленням σ: $Q\left(\frac{\theta'}{\theta}\right) = N(\theta, \sigma)$. Критерієм прийняття зразка θ' є формула (рис. 4):

$$P(\text{accept}) = \begin{cases} \dfrac{\prod_i^n f(d_i / \Theta = \theta')P(\theta')}{\prod_i^n f(d_i / \Theta = \theta)P(\theta)}, & \prod_i^n f(d_i / \Theta = \theta)P(\theta) > \prod_i^n f(d_i / \Theta = \theta')P(\theta') \\ 1, & \prod_i^n f(d_i / \Theta = \theta)P(\theta) \le \prod_i^n f(d_i / \Theta = \theta')P(\theta') \end{cases}$$

Рис. 4. Формула критерію прийняття зразка за МКМЛ

Це означає, що якщо θ' має більшу ймовірність за θ, то ми завжди приймаємо θ' та навпаки.

Псевдокод алгоритму Метрополіса—Хастінгса:

Дано:

- f – функція розподілу, з якої робиться вибірка, у нашому випадку це буде функція рівномірного розподілу (рис. 5):

$$F_X(x) \equiv \mathbb{P}(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1, & x \ge b \end{cases}.$$

Рис. 5. Функція рівномірного розподілу

- q – функція переходу – формула (22):

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; \qquad (22)$$

- $\sigma = 1, \mu = 0;$
- N – кількість симуляцій = 1 000 000;
- $\theta_0 = q(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}399.$

Для N ітерацій:

- $p = f(D / \theta = \theta')P(\theta);$
- $\theta' = Q(\theta_i);$
- $p' = f(D / \theta = \theta')P(\theta');$
- $ratio = \frac{p'}{p};$
- Генеруємо за рівновірним розподілом число *r* у проміжку [0, 1];
- Якщо *r* < *ratio*, то визначаємо $\theta_i = \theta'$.

Визначимо формулу розрахунку ринкової ціни активу як (23):

$$S_t = S_0 e^{(r-0{,}5\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} z_t}, \qquad (23)$$

де z_t – коефіцієнт зміни вартості базисного активу опціону на ринку, який генерується за допомогою алгоритму Метрополіса-Хастінгса.

Після виконання алгоритму отримуємо прогнозовані дані для подальших розрахунків [15-16, 25-27].

- ARIMA (метод Бокса-Дженкінса)

Однією з найпопулярніших і часто використовуваних стохастичних моделей часових рядів є модель (ARIMA). У моделі пропонується, що розглянутий часовий ряд є лінійним і слідує певному відомому статистичному розподілу, такому як нормальний розподіл.

Для сезонного прогнозування часових рядів Бокс та Дженкінс запропонували досить вдалий варіант моделі ARIMA, а саме. сезонна ARIMA

(SARIMA). Популярність моделі ARIMA обумовлена, головним чином тим, що вона здатна легко представити декілька видів часових рядів у поєднанні із простотою виконання, а також пов'язаною з цим методологією Бокса-Дженкінса для оптимального процесу побудови моделі [20].

При проведенні дослідження модель приймає на вхід історичні дані вартості акцій за рік/252 дні (з 30-03-2020 по 26-03-2021), а прогнозована вартість на наступний часовий період розраховується як (24):

$$\hat{Y}_t = \varphi_0 + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varphi_3 Y_{t-3} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}. \tag{24}$$

Сама модель має такий вигляд (25):

$$\begin{gathered} Y_t = \varphi_0 + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \cdots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \\ -\theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \end{gathered} \tag{25}$$

де Y_t – фактичне значення;

ε_t – випадкова похибка при t;

φ_i та θ_j – коефіцієнти моделі;

p та q – показники авторегресії та ковзаної середньої відповідно [11, 28-29].

- Модель нейронної мережі LSTM

Фінанси створюють дані часових рядів. Часовий ряд – це ряд точок даних, що індексуються у часі. Зазвичай, часовий ряд - це послідовність, яка береться в послідовні, однаково віддалені моменти часу: послідовність даних з дискретним часом. Дані часових рядів тут стосуються показників, які відстежують волатильність цін на акції в будь-який конкретний день. Ці показники ефективності – це ціна акцій на відкриття ('Open'), ціна на закриття ('Close'), мінімальна ціна протягом дня ('Low'), найвища ціна протягом дня ('High') та загальний обсяг акцій, якими торгується протягом день ('Volume') [21].

Рекурентна нейронна мережа (RNN) – це будь-яка штучна нейронна мережа, нейрони якої посилають сигнали зворотного зв'язку один одному. Ідея RNN полягає у використанні послідовної інформації. RNN називаються рекурентними, оскільки вони виконують одне і те ж завдання для кожного елемента послідовності, при цьому вихідні дані залежать від попередніх обчислень. Інший спосіб думати про RNN – це те, що вони мають пам'ять, яка фіксує інформацію про те, що було нараховано до цього часу.

Довгострокові мережі короткочасної пам'яті – зазвичай їх просто називають "LSTM" – це особливий тип RNN, оснащений спеціальним механізмом затвора, який контролює доступ до комірок пам'яті. В основному, блок LSTM складається з вхідного вектору, вектору забувального вентиля та вихідного вектору [23, 24].

LSTM добре підходить для класифікації, обробки та прогнозування часових рядів з урахуванням часових лагів невідомої тривалості та тренує модель за допомогою зворотного розповсюдження.

Припустимо, що x_t є входом, а h_{t-1} – прихованим результатом останнього часового кроку t-1, вхідний вектор вирішує, скільки нової інформації буде додано до стану комірки c_t, і генерує кандидат стану $\widetilde{c_t}$ за допомогою (26–27):

$$i_t = \sigma(W_{xi}x_t + W_{hi}h_{t-1} + b_i), \tag{26}$$

$$\widetilde{c_t} = \varphi(W_{xc}x_t + W_{hc}h_{t-1} + b_c), \tag{27}$$

де i_t можна сприймати як ручку, яку LSTM навчається вибірково розглядати $\widetilde{c_t}$ для поточного кроку часу, σ – логістична сигмоїдна функція, а φ - *tanh*.

Як правило, терміном W позначають вагові матриці (наприклад, W_{xi} – матриця ваг від входу до вхідного затвора), а b – вектори зсуву.

Вектор забувного вентилю вирішує, як попередня інформація зберігатиметься в новий крок часу і визначається як (28):

$$f_t = \sigma\big(W_{xf}x_t + W_{hf}h_{t-1} + b_f\big). \tag{28}$$

Потім вектор стану комірки c_t оновлюється за допомогою (29):

$$c_t = f_t * c_{t-1} + i_t * \widetilde{c_t}, \tag{29}$$

де $*$ елементним добутком векторів. Потім вихідний вектор використовує вихідний o_t для управління тим, що потім зчитується з нового стану комірки c_t на прихований вектор h_t наступним чином (30–31):

$$o_t = \sigma(W_{xo}x_t + W_{ho}h_{t-1} + b_o), \tag{30}$$

$$h_t = o_t * \varphi(c_t), \tag{31}$$

де W та b включають вагові матриці та вектори зміщення. Значення W і b визначаються на етапі тренування моделі.

В даній роботі функціональна модель LSTM використовується у вигляді (32):

$$(h_t, c_t) = LSTM(x_t, h_{t-1}, c_{t-1}, W, b). \tag{32}$$

На виході моделі отримуємо ваги, за якими потім виконується прогноз даних [22, 30].

Об'єднання прогнозованих даних метою оптимізації моделі

Оптимізація прогнозу виконується шляхом створення оптимізаційної задачі, яка має вигляд (33):

$$\begin{cases} RMSE\big(S, \hat{S}\big) \to min, \\ w_{MCMC} * S_{MCMC} + w_{ARIMA} * S_{ARIMA} + w_{LSTM} * S_{LSTM} = \hat{S}, \\ w_{MCMC} + w_{ARIMA} + w_{LSTM} = 1, \end{cases} \tag{33}$$

де *S* – фактичні дані за прогнозований період (01.04.2021-04.05.2021);

$\hat{S}$ – прогнозовані дані за розглянутий період;

W – ваги для прогнозів кожної моделі;

RMSE – корінь від середньоквадратичної похибки між прогнозованими та фактичними даними, або показник точності моделі.

На виході отримуємо зважені прогнозовані дані, що є наближеними до фактичних даних.

Подальша оптимізація інвестиційного портфелю

На основі отриманих прогнозів кожен часовий період ваговий вектор портфелю буде коригуватись за методом Хуанга-Літценбергера, відповідно будуть перераховані вартості куплених активів та портфелю.

В динаміці вартість та відповідно модель портфелю будуть мати вигляд (34):

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} V'_i(t); \quad \sum_{i=1}^{n} w'_i(t) * r'_i(t) \to max, \tag{34}$$

де $V'_i(t)$ – об'єми вкладень в n активів на момент часу *t* (i = 1,...,*n*);

$r'_i(t)$ – дохідність і-ого активу в момент часу *t*.

Доля *i*-ого активу в момент часу *t* буде становити (35):

$$w'_i(t) = \frac{V'_i(t)}{V(t)}. \tag{35}$$

Після оптимізації портфелю протягом певного часового періоду врахуємо особисті погляди інвестора на доцільність використання певних активів. Інвестор припускає, що вартість акцій RH будуть вигіднішими за акції NFLX на 3%, TSLA > GOOG на 1% та AMZN>FB на 25%. Використаємо модель Блека-Літтермана для перерахунку інвестиційного портфелю відповідно до інформації, яку має інвестор.

Створення програмного додатку для оцінки адекватності моделі та розв'язку економічної задачі

Розрахунки були виконані у розробленому програмному додатку на мові програмування Python у середовищі Jupyter Notebook (точні результати прогнозування даних наведені у Додатку 1). На вхід подаються дані про початковий обсяг грошового фонду портфелю та типи акцій, що розглядаються. На вихід алгоритм подає сформований початковий портфель та подальшу стратегію керування ним.

Розглянемо приклад тренування моделі та прогнозування нових даних на прикладі акцій TSLA, де історичні дані за рік до цього мають вигляд (рис. 6):

Рис. 6. Історичні дані вартості акцій TSLA за минулий рік

Після тренування моделі отримали такі прогнози від LSTM (рис. 7):

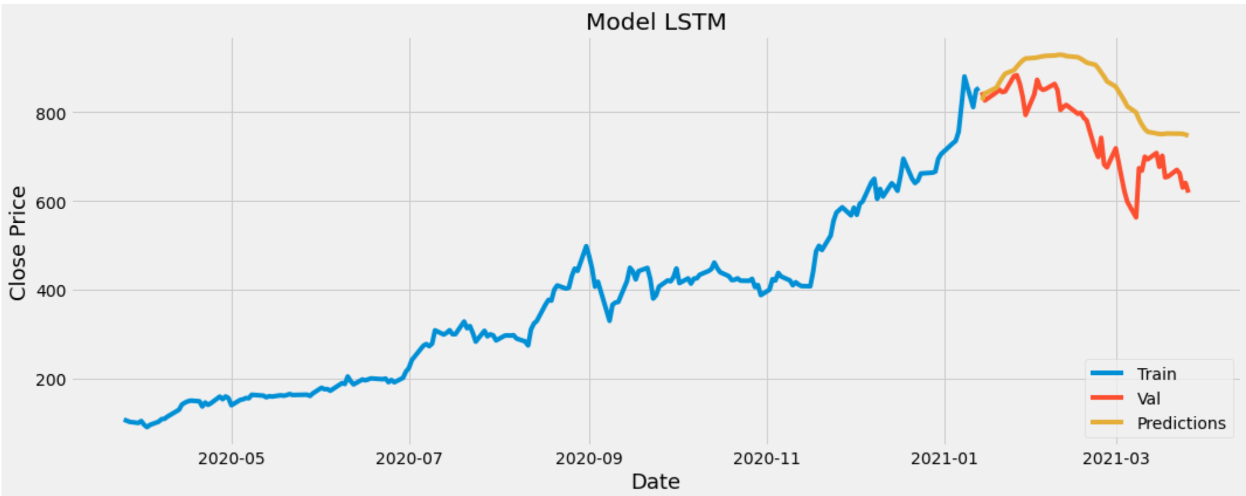

Рис. 7. Прогнозована вартість акцій TSLA (модель LSTM)

Після оптимізації моделі було отримано такі прогнозовані дані (рис. 8):

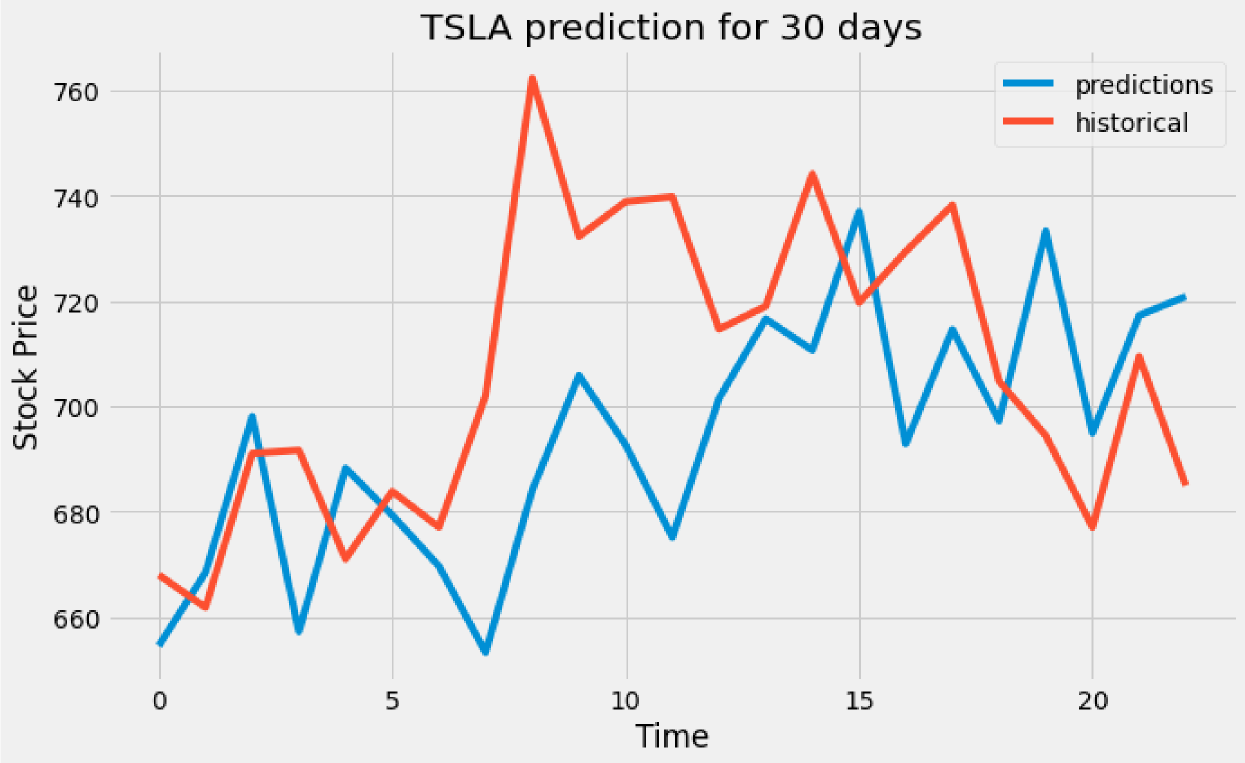

Рис. 8. Оптимізовані прогнозні дані акцій TSLA на

В результаті виконання алгоритму отримуємо значення вагів для початкового портфелю, за якими можна розрахувати скільки активів необхідно спочатку закупити, а коефіцієнт Шарпа=3,32% (рис. 8-9):

```
weights: [0.02 0.04 0.3  0.3  0.02 0.3  0.02]
sharpe ratio = 3.3194294423878037%
```

Рис. 8. Результати алгоритму з методом Марковіца

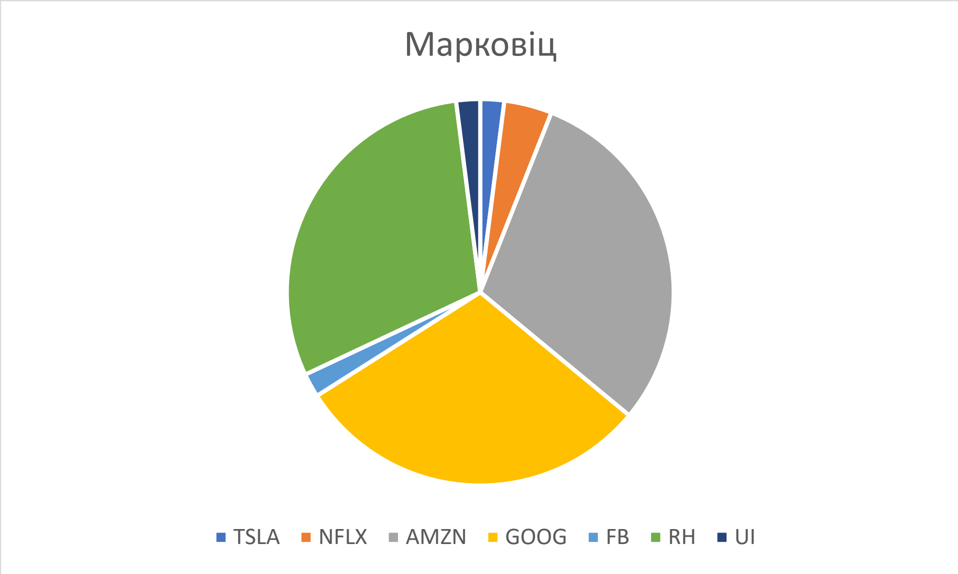

Рис. 9. Ваги за методом Марковіца

Далі після калібрування вагів на основі прогнозованих даних в останньому часовому періоді отримали такий ваговий вектор з очікуваною дохідністю = 3% (табл. 1, рис. 10):

Таблиця 1

Ваги активів за методом Хуанга-Літценбергера

Акція	Частка
TSLA	-1,06%
NFLX	25,60%
AMZN	16,31%
GOOG	-6,57%
FB	33,24%
RH	10,54%
EPAM	21,93%

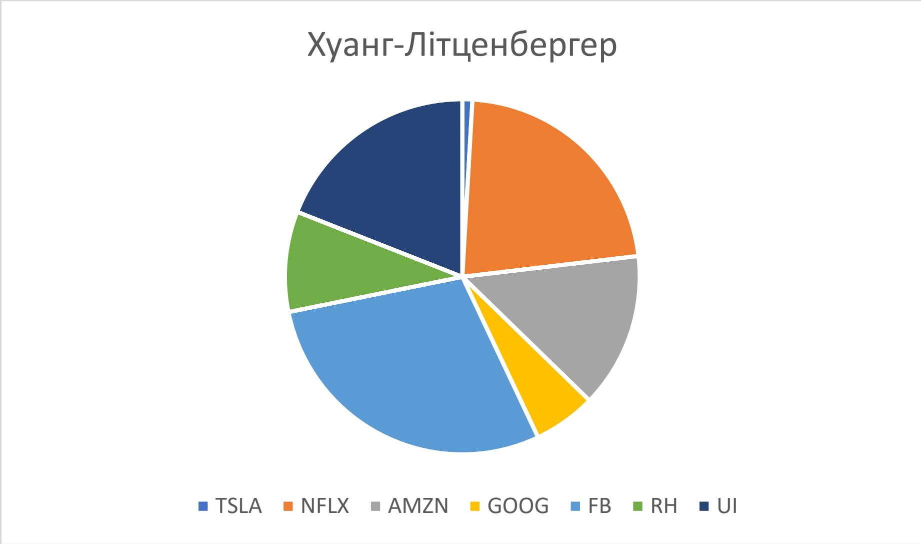

Рис. 10. Ваги за методом Хуанга-Літценбергера

Потім на основі особистих передбачень інвестора розрахували ваги оновленого портфелю за моделлю Блека-Літтермана із очікуваною дохідністю 8,75% (табл. 2, рис. 11-12):

Таблиця 2

Ваги активів за методом Блека-Літтермана

TSLA	12,87%
NFLX	4,78%
AMZN	35,28%
GOOG	30,10%
FB	16,04%
RH	0,40%
EPAM	0,54%

Рис. 11. Результати алгоритму з методом Блека-Літтермана

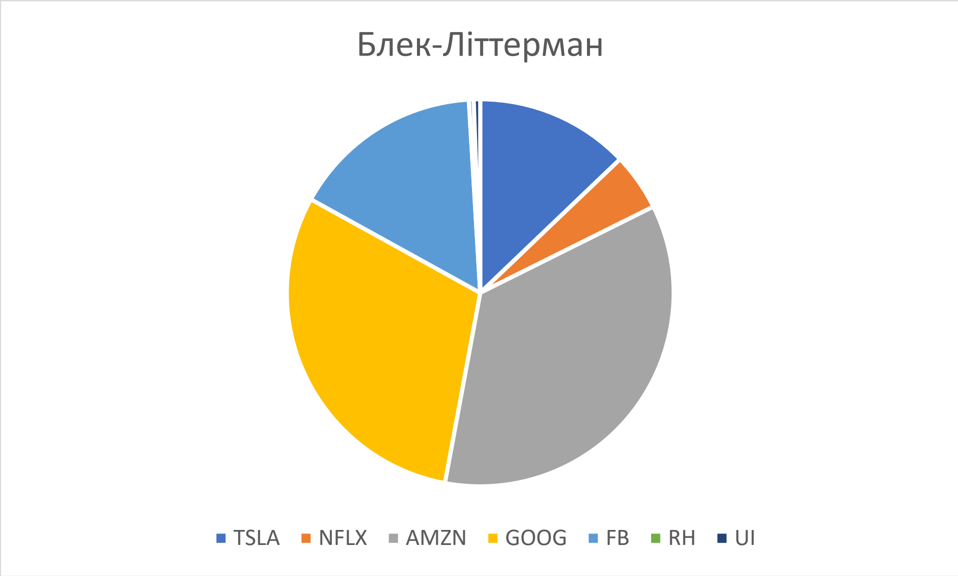

Рис. 12. Ваги за методом Блека-Літтермана

В результаті проведеної роботи було розроблено комбіновану модель керування портфелем, яка прогнозує розвиток використаних фондових активів та створює стратегію керування ними на основні отриманих прогнозованих даних. Також модель розраховує очікуваний прибуток та інвестиційну стратегію при неочікуваних змінах на ринку. Ефективність моделі перевіряється на прогнозованих та фактичних історичних даних за розглянутий часовий період.

Висновки. В ході виконання роботи було досліджено різні методи прогнозування ринкових цін акцій, було розроблено модель для визначення оптимального інвестиційного портфелю та його вартість. Після цього даний алгоритм було автоматизовано у вигляді розробленого програмного додатку. Сама модель дає позитивні результати, оскільки помітна гнучкість стратегії під час зміни вартості базисних активів, що після коротких операцій приносить прибуток. У даному випадку були отримані портфелі з очікуваною дохідністю 1%, 3% та 8,74%.

Список використаних джерел

1. Портфельні теорії інвестування. Методичні рекомендації для самостійної підготовки до практичних занять з дисципліни магістрів

спеціальності 072 Фінанси, банківська справа та страхування / О.І. Замковий; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т. – Дніпро: НТУ«ДП», 2020. – 70 с.

2. Коновалюк М. М. БАЙЄСІВСЬКИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛІ СТОХАСТИЧНОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ В СЕРЕДОВИЩІ OPENBUGS / Коновалюк. // НТУУ "КПІ". – 2011. – С. 8.

3. Гальперин В.А. Динамическое управление инвестиционным портфелем с учетом скачкообразного изменения цен финансовых активов / В.А. Гальперин, В.В. Домбровский // Вестник ТГУ. – 2003. – № 280. – С.112–117.

4. Гонтарь Н. Оптимизация инвестионного портфеля методом Марковица / Н. Гонтарь. – 2017.

5. Ефимова К. Статистический анализ риска и доходности портфельных инвестиций / К. Ефимова. – 2016.

6. Meng Xiang. DYNAMIC MEAN-VARIANCE PORTFOLIO OPTIMISATION / Meng Xiang., 2018.

7. Olsson S. The Black Litterman Asset Allocation Model / Olsson., 2018. – 76 с.

8. Guangliang H. THE INTUITION BEHIND BLACK-LITTERMAN MODEL PORTFOLIOS / H. Guangliang. – С. 5–11.

9. Martinsky O. Portfolio Optimization II : Black-Litterman model [Електронний ресурс] / Martinsky. – 2013. – Режим доступу до ресурсу: https://www.quantandfinancial.com/2013/08/black-litterman.html

10. Idzorek T. A step-by-step guide to the Black-Litterman model: Incorporating user-specified confidence levels. In: Forecasting Expected Returns in the Financial Markets. Elsevier Ltd; 2007. p. 17–38.

11. Ayodele A. Stock Price Prediction Using the ARIMA Model / Ayodele A.. – 2014.

12. Arreola Hernandez. Monte-Carlo simulation with Black-Scholes / Arreola Hernandez. // Malardalen University. – 2010. – C. 13. Режим доступу до ресурсу: http://janroman.dhis.org/stud/I2010/MCBS/AFI.pdf.

13. Delta Hedging [Електронний ресурс] // CFI – Режим доступу до ресурсу: https://corporatefinanceinstitute.com/resources/knowledge/trading-investing/delta-hedging/.

14. Using Hedging in Options Trading [Електронний ресурс] // OptionsTrading – Режим доступу до ресурсу: https://www.optionstrading.org/improving-skills/advanced-terms/hedging/.

15. Monte Carlo Markov Chain algorithm [Електронний ресурс]. – 2019. – Режим доступу до ресурсу: https://github.com/Joseph94m/MCMC/blob/master/MCMC.ipynb.

16. UNDERSTANDING DELTA HEDGING OPTIONS USING MONTE CARLO SIMULATION [Електронний ресурс] // Finance training course. – 2012. – Режим доступу до ресурсу: https://financetrainingcourse.com/education/2012/10/understanding-delta-hedging-for-options-using-monte-carlo-simulation/.

17. COMPUTATIONAL FINANCE: MONTE CARLO (MC) SIMULATION METHOD: UNDERSTANDING DRIFT, DIFFUSION AND VOLATILITY DRAG [Електронний ресурс] // Finance training course. – 2010. – Режим доступу до ресурсу: https://financetrainingcourse.com/education/2010/08/computational-finance-monte-carlo-mc-simulation-method-understanding-drift-diffusion-and-volatility-drag/.

18. Oumaima Asmama. INVESTMENT STRATEGIES: PORTFOLIO OPTIMIZATION & RISK MANAGEMENT WITH R LANGUAGE / Oumaima Asmama. – 2019. – C. 56.

19. Michaud R. EFFICIENT ASSET MANAGEMENT / R. Michaud, R. Michaud. – New York: Oxford University Press, 2008. – 145 с.

20. Adhikari R. An Introductory Study on Time Series Modeling and Forecasting / Ratnadip Adhikari. – 2010. – C. 67.

21. Agarwal H. Analysis and Prediction of Stock Market Trends Using Deep Learning / Harshit Agarwal. – 2020. – C. 11.

22. Ganegedara T. Stock Market Predictions with LSTM in Python [Електронний ресурс] / Thushan Ganegedara. – 2020. – Режим доступу до ресурсу: https://www.datacamp.com/community/tutorials/lstm-python-stock-market.

23. Zexin H. A Survey of Forex and Stock Price Prediction Using Deep Learning / H. Zexin. // MDPI. – 2021. Idzorek T. A step-by-step guide to the Black-Litterman model: Incorporating user-specified confidence levels. In: Forecasting Expected Returns in the Financial Markets. Elsevier Ltd; 2007. p. 17–38.

24. Moghar A. Stock Market Prediction Using LSTM Recurrent Neural Network / Adil Moghar. – 2020. – C. 5.

25. Brood T. Monte Carlo Simulations of Stock Prices / Tobias Brood. – 2018. – C. 33.

26. Sonono M. Prediction of Stock Price Movement Using Continuous Time Models / Masimba Sonono. – 2015. – C. 15.

27. Arnaut-Berilo A. EFFECTIVENESS OF MONTE CARLO SIMULATION AND ARIMA MODEL IN PREDICTING STOCK PRICES / A. Arnaut-Berilo, A. Zaimović, N. Turbo. – 2015. – C. 12.

28. Stock Prediction using Hybrid ARIMA and GRU Models / R.Mangalampalli, V. Pandey, P. Khetre, M. Vaibhav. – 2020. – C. 5.

29. Khan S. ARIMA Model for Accurate Time Series Stocks Forecasting / S. Khan, H. Alghulaiakh. – 2020. – C. 5.

30. Zou Z. Using LSTM in Stock prediction and Quantitative Trading / Z. Zou, Z. Qu. – 2020. – C. 6.

31. Pav S. Notes on the Sharpe ratio / Steven Pav. – 2020. – C. 50.

32. Duran F. On the Use of Sharpe's Index in Evolutionary Portfolio Optimization Under Markowitz's Model / F. Duran, C. Cotta, A. Fernandez. – 2009. – C. 6.

33. Lazibat T. OPTIONS HEDGING AS A MEAN OF PRICE RISK ELIMINATION / T. Lazibat, T. Baković. – 2007. – C. 16.

34. Hedging With a Put Option / A.Carl, J. Smith, D. McCorkle, D. O'Brien. – 1999. – C. 3.

35. Sharpe W.F. Capital Asset Price: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk / W.F. Sharpe // Journal of Finance – 1964. – Vol. 19, №3.

36. Taleb N. Dynamic Hedging: Managing Vanilla and Exotic Options / Nassim Taleb. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1997. – 506 с.

37. Garner C. Commodity Options: Trading and Hedging Volatility in the World's Most Lucrative Market / C. Garner, P. Brittain., 2009. – 260 с.

38. Understanding Options Trading [Електронний ресурс] // ASX. – 2018. – Режим доступу до ресурсу: https://www.asx.com.au/documents/resources/UnderstandingOptions.pdf.

39. Walters J. The Black-Litterman Model In Detail / Jay Walters. – 2009. – C. 50.

40. Huang C. Foundations for Financial Economics / C. Huang, R. Litzenberger., 1988. – 365 c.

References

1. Zamkovyy O. I. (2020) *Portfolio theories of investment. Methodical recommendations for independent preparation for practical classes in the discipline of masters of specialty 072 Finance, banking and insurance* , Dnipro: Ministry of Education and Science of Ukraine.

2. Konovalyuk M.M. (2011) *BAYESIAN MODEL ANALYSIS OF STOCHASTIC VOLATILITY IN THE OPENBUGS ENVIRONMENT*, NTUU "KPI".

3. Halperin V.A. (2003) *Dynamic management of the investment portfolio taking into account the abrupt change in the prices of financial assets*, TSU.

4. Gontar N. (2017) *Optimization of the investment portfolio by the Markovic method*.

5. Efimova K. (2019) *Statistical analysis of risk and return of portfolio investments*.

6. Xiang M. (2018) *DYNAMIC MEAN-VARIANCE PORTFOLIO OPTIMISATION*.

7. Olsson S. (2018) *The Black Litterman Asset Allocation Model*.

8. Guangliang H. (n.d.) *THE INTUITION BEHIND BLACK-LITTERMAN MODEL PORTFOLIOS*.

9. Martinsky O. (n.d.) *Portfolio Optimization II: Black-Litterman model*

10. Idzorek T. (2007) *A step-by-step guide to the Black-Litterman model: Incorporating user-specified confidence levels. In: Forecasting Expected Returns in the Financial Markets*.

11. Ayodele A. (2014) *Stock Price Prediction Using the ARIMA Model*.

12. Hernandez A. (2010) *Monte-Carlo simulation with Black-Scholes*, : Malardalen University.

13. CFI (n.d.) 'Delta Hedging', [Online]. Available at: *https://corporatefinanceinstitute.com/resources/knowledge/trading-investing/delta-hedging/*

14. OptionsTrading (n.d.) 'Using Hedging in Options Trading ', [Online]. Available at: *https://www.optionstrading.org/improving-skills/advanced-terms/hedging/* .

15. Moukarzel J. (2019) 'Monte Carlo Markov Chain algorithm ', [Online]. Available at: *https://github.com/Joseph94m/MCMC/blob/master/MCMC.ipynb* (Accessed: 2019).

16. Finance training course (2012) 'UNDERSTANDING DELTA HEDGING OPTIONS USING MONTE CARLO SIMULATION', [Online]. Available at: *https://financetrainingcourse.com/education/2012/10/understanding-delta-hedging-for-options-using-monte-carlo-simulation* (Accessed: 2012).

17. Finance training course (2010) 'COMPUTATIONAL FINANCE: MONTE CARLO (MC) SIMULATION METHOD: UNDERSTANDING DRIFT, DIFFUSION AND VOLATILITY DRAG ', [Online]. Available at: *https://financetrainingcourse.com/education/2010/08/computational-finance-monte-carlo-mc-simulation-method-understanding-drift-diffusion-and-volatility-drag/* (Accessed: 2010).

18. Asmama O. (2019) 'INVESTMENT STRATEGIES: PORTFOLIO OPTIMIZATION & RISK MANAGEMENT WITH R LANGUAGE ', 56.

19. Michaud R. (2008) *EFFICIENT ASSET MANAGEMENT* , New York: Oxford University Press.

20. Adhikari R. (2010) 'An Introductory Study on Time Series Modeling and Forecasting ', 67.

21. Agarwal H. (2020) 'Analysis and Prediction of Stock Market Trends Using Deep Learning', 11.

22. Ganegedara T. (2020) 'Stock Market Predictions with LSTM in Python ', [Online]. Available at: *https://www.datacamp.com/community/tutorials/lstm-python-stock-market* (Accessed: 2020).

23. Zexin H. (2021) *A Survey of Forex and Stock Price Prediction Using Deep Learning*, MDPI.

24. Moghar A. (2020) 'Stock Market Prediction Using LSTM Recurrent Neural Network', 5.

25. Brood T. (2018) 'Monte Carlo Simulations of Stock Prices', 33.

26. Sonono M. (2015) 'Prediction of Stock Price Movement Using Continuous Time Models', *1*5.

27. Arnaut-Berilo A. (2015) 'EFFECTIVENESS OF MONTE CARLO SIMULATION AND ARIMA MODEL IN PREDICTING STOCK PRICES ', 12.

28. R. Mangalampalli, V. Pandey, P. Khetre, M. Vaibhav. (2020) 'EFFECTIVENESS OF MONTE CARLO SIMULATION AND ARIMA MODEL IN PREDICTING STOCK PRICES ', 5.

29. Khan S., Alghulaiakh H. (2020) 'EFFECTIVENESS OF MONTE CARLO SIMULATION AND ARIMA MODEL IN PREDICTING STOCK PRICES ', 5.

30. Zou Z. (2020) 'Using LSTM in Stock prediction and Quantitative Trading', 6.

31. Pav S. (2020) 'Notes on the Sharpe ratio', 50.

32. Duran F., Cotta C., Fernandez A. (2009) 'On the Use of Sharpe's Index in Evolutionary Portfolio Optimization Under Markowitz's Model ', 6.

33. Lazibat T., Baković T. (2007) 'OPTIONS HEDGING AS A MEAN OF PRICE RISK ELIMINATION ', 16.

34. Carl A., Smith J., McCorkle D. and O'Brien D. (1999) 'Hedging With a Put Option ', 3.

35. Sharpe W.F. (1964) *Capital Asset Price: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk* , 3rd edn., Journal of Finance .

36. Taleb N. (1997) *Dynamic Hedging: Managing Vanilla and Exotic Options*, 3rd edn., New York: John Wiley & Sons, Inc.

37. Garner C., Brittain P. (2009) 'Commodity Options: Trading and Hedging Volatility in the World's Most Lucrative Market ', 260.

38. ASX (2018) 'Understanding Options Trading', [Online]. Available at: *https://www.asx.com.au/documents/resources/UnderstandingOptions.pdf* (Accessed: 2018).

39. Walters J. (2009) 'The Black-Litterman Model In Detail ', 50.

40. Huang C., Litzenberger R. (1988) 'Foundations for Financial Economics ', 365.