

# TEORI HIMPUNAN

## A. Penyajian Himpunan

### Definisi 1

Himpunan (set) adalah kumpulan objek-objek yang berbeda. Objek yang dimaksud biasa disebut dengan elemen-elemen atau anggota-anggota dari himpunan. ■

Dalam setiap pemakaian teori himpunan, semua himpunan yang ditinjau merupakan subhimpunan dari sebuah himpunan tertentu. Himpunan tersebut dinamakan himpunan semesta atau himpunan universal dan dinyatakan dengan **U**.

Suatu himpunan biasanya dinyatakan dengan huruf kapital seperti A, B, D, dsb. Sementara untuk menyatakan setiap elemennya digunakan huruf kecil seperti a, b, c, dsb. Himpunan biasanya disajikan dengan beberapa cara sebagai berikut:

### 1. Enumerasi

Setiap anggota himpunan didaftarkan secara rinci. Setiap elemen dipisahkan dengan tanda koma dan ditutup dengan tanda  $\{ \}$ . Perhatikan Contoh 1 berikut:

#### Contoh 1.

- ▶ Himpunan empat bilangan asli pertama;  $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- ▶ Himpunan lima bilangan genap positif pertama;  $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ .
- ▶  $R = \{a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\}\}$
- ▶  $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$  ■

Metode enumerasi pada dasarnya digunakan untuk himpunan yang terbatas dan tidak terlalu besar. Namun demikian, untuk himpunan yang besar dan jumlah elemennya tidak terbatas dapat digunakan tanda ellipsis "...". Perhatikan Contoh 2 berikut:

Contoh 2.

- ▶ Himpunan alfabet ditulis dengan  $\{a, b, c, \dots, z\}$ .
- ▶ Himpunan 100 bilangan asli pertama  $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ .
- ▶ Himpunan bilangan bulat  $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ . ■

## 2. Simbol-Simbol baku

Beberapa himpunan khusus dituliskan dengan simbol-simbol yang sudah baku. Diantaranya:

**P** = himpunan bilangan bulat positif =  $\{1, 2, 3, \dots\}$

**N** = himpunan bilangan asli =  $\{1, 2, 3, \dots\}$

**Z** = himpunan bilangan bulat =  $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

**Q** = himpunan bilangan rasional

**R** = himpunan bilangan riil

**C** = himpunan bilangan kompleks

## 3. Notasi pembentuk himpunan

Himpunan dinyatakan dengan menulis syarat yang harus dipenuhi oleh setiap anggotanya.

Notasi:  $\{x \mid \text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x\}$

Contoh 3.

- ▶ A adalah himpunan bilangan bulat positif yang lebih kecil dari 5.  
 $A = \{x \mid x \text{ bilangan bulat positif yang lebih kecil dari } 5\}$  atau  $A = \{x \mid x \in P, x < 5\}$
- ▶  $M = \{x \mid x \text{ adalah mahasiswa yang mengambil matakuliah Matematika Diskrit}\}$  ■

#### 4. Diagram venn

Diagram venn menyajikan himpunan secara grafis. Cara ini dikenalkan oleh matematikawan inggris bernama John Venn pada tahun 1881. Perhatikan Contoh 4 berikut:

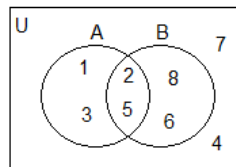
Contoh 4.

Misalkan  $U = \{1, 2, \dots, 8\}$

$A = \{1, 2, 3, 5\}$

$B = \{2, 5, 6, 8\}$

Diagram venn-nya adalah



Gambar 1.

## B. Kardinalitas dan Jenis-Jenis Himpunan

Definisi 2.

Sebuah himpunan dikatakan berhingga (finite set) jika terdapat  $n$  elemen berbeda, dengan  $n$  bilangan bulat positif. Sebaliknya himpunan tersebut dinamakan tak-berhingga (infinite set). ■

Misalkan  $A$  merupakan himpunan berhingga, maka jumlah elemen berbeda di dalam  $A$  disebut kardinal dari himpunan  $A$ , dinotasikan dengan  $n(A)$  atau  $|A|$ . Perhatikan kembali Contoh 1.

- ▶  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Maka  $n(A) = 4$ , dengan elemen-elemen  $A$  (yang berbeda) adalah 1, 2, 3, 4.
- ▶  $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ . Maka  $n(B) = 5$ , dengan elemen-elemen (yang berbeda) adalah 2, 4, 5, 8, 10.
- ▶  $R = \{a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\}\}$ . Maka  $n(R) = 4$ , dengan elemen-elemen (yang berbeda) adalah  $a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\}$ .

- ▶  $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$ . Maka  $n(C) = 3$ , dengan elemen-elemen (yang berbeda) adalah  $a, \{a\}, \{\{a\}\}$ . ■

Himpunan tak berhingga mempunyai kardinal tak berhingga pula. Sebagai contoh himpunan bilangan riil mempunyai jumlah anggota tak berhingga maka  $n(R) = \infty$ .

Beberapa istilah yang ditemukan dalam konsep himpunan diantaranya:

### 1. Himpunan kosong

Definisi 3.

himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memiliki elemen, atau dengan kata lain kardinalitasnya sama dengan 0. ■

Himpunan kosong biasa dinotasikan dengan  $\{ \}$  atau  $\emptyset$ . Perhatikan Contoh 5 berikut:

Contoh 5.

- ▶  $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$
- ▶  $\emptyset = \{\text{orang indonesia yang pernah ke bulan}\}$  ■

### 2. Himpunan bagian (Subset)

Definisi 4.

Himpunan A dikatakan himpunan bagian (subset) dari himpunan B,  $A \subseteq B$ , jika dan hanya jika setiap elemen di A merupakan elemen di B. ■

Pada Definisi 4, A disebut subset dari B atau B adalah superset dari A.

Contoh 6.

Misalkan  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , maka  $A \subseteq B$ .

Misalkan  $K = \{a, b, c\}$ ,  $L = \{b, c, a\}$ , maka  $K \subseteq L$  dan  $L \subseteq K$ . Atau dengan kata lain  $A = B$ . ■

Perhatikan bahwa  $A \subseteq B$  tidak sama dengan  $A \subset B$ .  $A \subseteq B$  berarti bahwa  $A$  adalah subset dari  $B$  dan memungkinkan  $A = B$ . Sedangkan  $A \subset B$  berarti bahwa  $A$  adalah subset dari  $B$  tetapi  $A \neq B$ .

Jika  $A \subseteq B$  maka  $A \subset B$  dan  $A = B$

Jika  $A \subset B$  maka  $A \subseteq B$  dan  $A \neq B$

Contoh 7.

Misalkan  $X = \{4, 5, 6\}$  dan  $Z = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ . Tentukan semua kemungkinan himpunan  $Y$  sedemikian sehingga  $X \subset Y$  dan  $Y \subset Z$ .

Penyelesaian:

Karena  $X \subset Y$  dan  $Y \subset Z$ , berarti  $Y$  harus mengandung semua elemen  $X$  dan sekurang-kurangnya satu elemen dari  $Z$ . Dengan demikian:  $Y = \{Y_1, Y_2\}$  dengan  $Y_1 = \{4, 5, 6, 7\}$  dan  $Y_2 = \{4, 5, 6, 8\}$ . ■

### 3. Himpunan yang sama

Definisi 5.

Dua buah himpunan  $A$  dan  $B$  dikatakan sama jika dan hanya jika setiap elemen di  $A$  juga elemen di  $B$  dan setiap elemen di  $B$  juga elemen di  $A$ . Atau dengan kata lain  $A = B$  jika dan hanya jika  $A \subseteq B$  dan  $B \subseteq A$ . ■

Contoh 8.

- ▶ Jika  $A = \{0, 1\}$  dan  $B = \{x \mid x(x - 1) = 0\}$ , maka  $A = B$
- ▶ Jika  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  dan  $B = \{3, 1, 4, 2\}$ , maka  $A \subseteq B$  dan  $B \subseteq A$  sehingga  $A = B = \{1, 2, 3, 4\}$ . ■

### 4. Himpunan yang ekuivalen

Definisi 6.

Himpunan  $A$  dikatakan ekuivalen dengan himpunan  $B$  jika dan hanya jika *kardinal* dari kedua himpunan tersebut sama. Notasi:  $A \approx B \Leftrightarrow n(A) = n(B)$ . ■

Contoh 9.

Misalkan  $A = \{1, 3, 5, 7\}$  dan  $B = \{a, b, c, d\}$ . Maka  $A \approx B$  karena  $n(A) = n(B) = 4$ . ■

#### 5. Himpunan saling lepas (disjoint)

Definisi 7.

Dua himpunan  $A$  dan  $B$  dikatakan saling lepas atau disjoint (notasi:  $A // B$ ) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama. ■

Contoh 10.

Jika  $A = \{x \mid x \in P, x < 8\}$  dan  $B = \{10, 20, 30, \dots\}$ , maka  $A // B$ . ■

#### 6. Himpunan kuasa (power set)

Definisi 8.

Himpunan kuasa atau power set dari himpunan  $A$  adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian  $A$  termasuk himpunan kosong dan himpunan  $A$  sendiri. Notasi:  $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ . ■

Contoh 11.

- ▶ Misalkan  $A = \{a\}$ , maka  $P(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$ .
- ▶ Misalkan  $B = \{a, b\}$ , maka  $P(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Secara umum, jika  $n(A) = x$ , dengan  $A$  suatu himpunan, maka  $n(P(A)) = 2^x$ .

#### **Latihan 1.**

1. Misalkan  $A = \{x \mid 2x = 6\}$ . Misalkan pula  $b = 3$ . Apakah  $b \in A$ ?
2. Misalkan  $A = \{x, y, z\}$ . Daftarkan semua himpunan bagian dari  $A$ .
3. Diberikan sebarang himpunan  $A$ . Tunjukkan bahwa:
  - a.  $A \subseteq A$
  - b.  $\emptyset \subseteq A$
  - c. Untuk suatu himpunan  $B$  dan  $C$ , jika  $A \subseteq B$  dan  $B \subseteq C$  maka  $A \subseteq C$

### C. Operasi Himpunan

Operasi terhadap himpunan akan menghasilkan suatu himpunan baru. Operasi dasar yang biasa digunakan adalah operasi irisan (intersection), gabungan (union), komplemen, selisih (difference), perkalian kartesian (cartesian product), dan beda-setangkup (symmetric difference).

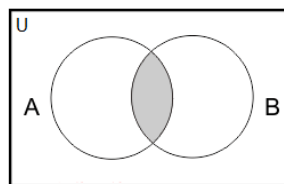
#### a. Irisan (intersection)

Definisi 9.

Irisan (intersection) dari himpunan A dan B adalah sebuah himpunan yang setiap elemennya merupakan elemen dari himpunan A *dan* himpunan B.

Notasi :  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$ . ■

Diagram Venn:



Gambar 2.

Contoh 12.

$A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{f, b, d, g\}$  maka  $A \cap B = \{b, d\}$ . ■

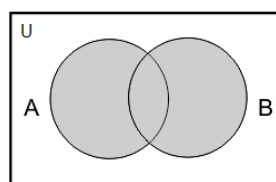
#### b. Gabungan (union)

Definisi 10.

Gabungan (union) dari himpunan A dan B adalah sebuah himpunan yang setiap elemennya merupakan elemen dari himpunan A *atau* himpunan B.

Notasi :  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$ . ■

Diagram Venn:



Gambar 3.

Contoh 13.

$A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{f, b, d, g\}$ , maka  $A \cup B = \{a, b, c, d, f, g\}$  ■

c. Komplemen (complement)

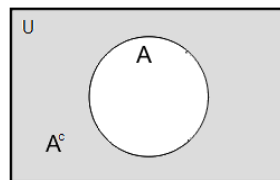
Definisi 11.

Komplemen dari suatu himpunan  $A$  terhadap suatu himpunan semesta  $U$  adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen  $U$  yang bukan elemen  $A$ .

Notasi :  $\bar{A} = \{x \mid x \in U \text{ dan } x \notin A\}$ . ■

Komplemen  $A$  biasa juga dinotasikan dengan  $A^c$  atau  $A'$ .

Diagram Venn:



Gambar 4.

Contoh 14.

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ ,  $A = \{a, b, c, d\}$ , maka  $A^c = \{e, f, g, h, i\}$ . ■

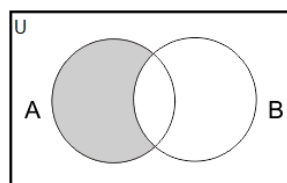
d. Selisih (difference)

Definisi 12.

Selisih dari dua himpunan  $A$  dan  $B$  adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen dari  $A$  tetapi bukan elemen dari  $B$ .

Notasi:  $A - B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\} = A \cap \bar{B}$  ■

Diagram Venn:



Gambar 5.



Contoh 15.

$A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{f, b, d, g\}$ , maka  $A - B = \{a, c\}$  ■

e. Perkalian Kartesian (cartesian product)

Definisi 13.

Perkalian kartesian dari himpunan A dan B adalah himpunan yang elemennya semua pasangan berurutan (ordered pairs) yang dibentuk dari komponen pertama dari himpunan A dan komponen kedua dari himpunan B.

Notasi:  $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$ . ■

Contoh 16.

$P = \{1, 2, 3\}$  dan  $Q = \{a, b\}$ . maka  $P \times Q = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$ . ■

Perhatikan bahwa:

- Jika A dan B berhingga maka  $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$ .
- Pasangan berurutan  $(a, b) \neq (b, a)$ . Dengan kata lain  $A \times B \neq B \times A$ , asalkan A atau B tidak kosong.
- Jika  $A = \emptyset$  atau  $B = \emptyset$  maka  $A \times B = B \times A = \emptyset$ .

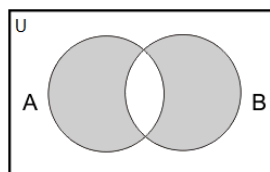
f. Beda-Setangkup (symmetric difference)

Definisi 14.

Beda setangkup dari himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang elemennya ada pada himpunan A atau B tetapi tidak pada keduanya.

Notasi:  $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$ . ■

Diagram Venn:



Gambar 6.

Contoh 17.

$A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{f, b, d, g\}$ , maka  $A \oplus B = \{a, c, f, g\}$ . ■

Perhatikan bahwa:

$A \oplus B = B \oplus A$  dan  $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

#### D. Hukum-Hukum Aljabar Himpunan

Hukum-hukum aljabar yang berlaku pada himpunan adalah sebagai berikut:

1. Hukum idempoten
  - a.  $A \cup A = A$
  - b.  $A \cap A = A$
2. Hukum komutatif
  - a.  $A \cup B = B \cup A$
  - b.  $A \cap B = B \cap A$
3. Hukum asosiatif
  - a.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - b.  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. Hukum distributif
  - a.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - b.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. Hukum identitas
  - a.  $A \cup \emptyset = A$
  - b.  $A \cup U = A$
  - c.  $A \cap \emptyset = \emptyset$
  - d.  $A \cap U = A$
6. Hukum komplemen
  - a.  $A \cup A^c = U$
  - b.  $(A^c)^c = A$
  - c.  $A \cap A^c = \emptyset$
  - d.  $U^c = \emptyset, \emptyset^c = U$

## 7. Hukum De Morgan

- a.  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- b.  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$  ■

### Definisi 15. (Prinsip Dualitas pada himpunan)

Misalkan  $S$  adalah suatu kesamaan yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi  $\cup$ ,  $\cap$ , dan komplemen. Jika  $S^*$  diperoleh dengan mengganti  $\cup$  menjadi  $\cap$ ,  $\cap$  menjadi  $\cup$ ,  $\emptyset$  menjadi  $U$ , dan  $U$  menjadi  $\emptyset$ , sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka kesamaan  $S^*$  juga benar dan disebut dual dari kesamaan  $S$ . ■

### Contoh 18.

Dualitas dari  $(U \cup B) \cap (A \cup \emptyset) = A$  adalah  $(\emptyset \cap B) \cup (A \cap U) = A$ . ■

### Latihan 2.

1. Misalkan  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ , dan  $C = \{3, 4, 5, 6\}$ .

Tentukanlah:

- a.  $A \cup B$
- b.  $B \cap C$
- c.  $B \cup B$
- d.  $(A \cup B) \cap C$
- e.  $(A - B)$
- f.  $(C - A)$
- g.  $(C - C)$
- h.  $(A \cap C) - B$

2. Misalkan  $U = \{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$ ,  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ , dan  $C = \{3, 4, 5, 6\}$ .

Tentukan:

- a.  $A^c$
- b.  $(A \cap C)^c$
- c.  $A \cup B^c$

3. Buktikan

- a.  $B - A \subseteq A^c$ .
- b.  $B - A^c = B \cap A$ .

4. Tuliskan dual dari

- a.  $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$

b.  $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$

5. Buktikan

a.  $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$

b.  $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$  ■