DISTRIBUSI BINOMIAL

Distribusi binomial berasal dari percobaan binomial yaitu suatu proses Bernoulli yang diulang sebanyak n kali dan saling bebas. Distribusi Binomial merupakan distribusi peubah acak diskrit. Secara langsung, percobaan binomial memiliki ciri-ciri sebagai berikut:

- percobaan tersebut dilakukan berulang-ulang sebanyak n kali
- setiap percobaan menghasilkan keluaran yang dapat dikategorikan sebagai gagal dan sukses
- probabilitas sukses p tetap konstan dari satu percobaan ke percobaan lain
- percobaan yang berulang adalah saling bebas

Ruang sampel A untuk percobaan E yang terdiri dari himpunan tak hingga tetapi masih terhitung dari titik – titik sampel:

Jika S = Sukses dan G = Gagal

E_1: S (sukses pada percobaan pertama)

E_2: GS (gagal pada percobaan pertama dan sukses pada percobaan kedua)

E_3: SG (sukses pada percobaan pertama, gagal pada percobaan kedua)

E_4: GGS (gagal pada percobaan 1 dan 2, sukses pada percobaan ketiga)

E_5: GSG (gagal pada percobaan 1 dan 3, sukses pada percobaan kedua)

E_6: SGG (gagal pada percobaan 2 dan 3, sukses pada percobaan pertama)

$\vdots$

$E_n : \underbrace{SSS...S}_{x}\underbrace{GGG...G}_{n-x}$ (sukses sebanyak x kali, gagal sebanyak $n-x$ kali)

Jika peluang sukses dinotasikan dengan p maka peluang gagal adalah $q = 1 - p$.

Peubah acak X menyatakan banyaknya sukses dari n percobaan yang saling bebas.

Maka peluang X pada masing – masing percobaan E adalah:

$P(X) = p$ untuk E_1

$P(X) = qp = pq$ untuk E_2

$P(X) = pq$ untuk E_3

$P(X) = q^2 p = pq^2$ untuk E_4

$P(X) = qpq = pq^2$ untuk E_5

$P(X) = pqq = pq^2$ untuk E_6

$\vdots$

$P(X) = p^x q^{n-x}$ untuk E_n

Dapat dilihat bahwa E_2 dan E_3 memberikan hasil yang sama. Jumlahnya $\binom{2}{1}$, yaitu jumlah semua titik sampel yang mungkin menghasilkan $x = 1$ yang sukses dan $n - x = 2 - 1 = 1$ yang gagal dari 2 percobaan. Begitupun untuk E_4, E_5, dan E_6 juga memberikan hasil yang sama. Jumlahnya $\binom{3}{1}$, yaitu jumlah semua titik sampel yang mungkin yang menghasilkan $x = 1$ yang sukses dan $n - x = 3 - 1 = 2$ yang gagal dari 3 percobaan.

Secara umum, jumlah titik sampel yang mungkin untuk menghasilkan x sukses dan $n - x$ gagal dalam n percobaan adalah banyaknya cara yang berbeda dalam mendistribusikan x sukses dalam barisan n percobaan, sehingga terdapat $\binom{n}{x}$ cara.

Dan distribusi peluang atau *Probability Mass Function* (*PMF*) X dinyatakan pada definisi berikut:

$$P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

untuk $x = 1, 2, ..., n$ dan $0 \leq p \leq 1$.

Pembuktian distribusi Binomial merupakan suatu *PMF*.

Bukti:

Untuk membuktikan suatu peubah acak adalah PMF, maka harus ditunjukan:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$

Akan ditunjukkan distribusi binomial memenuhi kedua syarat di atas:

1. $f(x) \geq 0$

   Karena $0 \leq p \leq 1$ dan nilai kombinasi pasti positif maka *f*(*x*) pasti positif.

2. $\sum_x f(x) = 1$

   Menggunakan persamaan binomial Newton pada $\sum_x f(x)$, akan diperoleh:

$$\sum_x f(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1 \qquad (1)$$

Dari 1 dan 2 dapat dikatakan bahwa distribusi binomial merupakan PMF.

Mean

Jika $X \sim B(n, p)$ (X variabel random berdistribusi Binomial), maka nilai ekspektasi dari X adalah

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_x x.P(x) \\
&= \sum_{x=0}^{n} x.P(X = x) \\
&= \sum_{x=0}^{n} x.\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} x.\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} x.\frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} x.\frac{n.(n-1)!}{x.(x-1)!(n-x)!}.p.p^{x-1}(1-p)^{n-x} \\
&= np\sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1}(1-p)^{n-x}
\end{aligned}$$

Misalkan m = n – 1 dan s = x – 1, maka persamaan di atas menjadi

$$E(X) = np\sum_{s=0}^{m} \frac{m!}{s!(m-s)!} p^s (1-p)^{m-s}$$

Berdasarkan (1), $\sum_{s=0}^{m} \frac{m!}{s!(m-s)!} p^s (1-p)^{m-s} = 1$, maka

$$E(X) = np\sum_{s=0}^{m} \frac{m!}{s!(m-s)!} p^s (1-p)^{m-s}$$
$$= np.1$$
$$= np$$

Sehingga didapat mean dari X, $E(X) = np$

Variansi

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Dalam meencari Var(X), kita harus tahu nilai ekspektasi dari X^2:

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2.P(X = x) = \sum_{x=0}^{n} x^2. \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{x} x^2.P(x) \\
&= \sum_{x=0}^{n} x^2.P(X = x) \\
&= \sum_{x=0}^{n} x^2. \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} x^2. \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} x^2. \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} x^2. \frac{n.(n-1)!}{x.(x-1)!(n-x)!}.p.p^{x-1} (1-p)^{n-x} \\
&= np\sum_{x=1}^{n} x. \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x}
\end{aligned}$$

Misalkan m = n – 1 dan s = x – 1, maka persamaan di atas menjadi

$$E(X^2) = np\sum_{s=0}^{m} (s+1) \frac{m!}{s!(m-s)!} p^s (1-p)^{m-s} = np\sum_{s=0}^{m} (s+1) \binom{m}{s} p^s (1-p)^{m-s}$$

$$E(X^2) = np\sum_{s=0}^{m}(s+1)\frac{m!}{s!(m-s)!}p^s(1-p)^{m-s}$$

$$= np\sum_{s=0}^{m}(s+1)\binom{m}{s}p^s(1-p)^{m-s}$$

$$= np.\left[\sum_{s=0}^{m}s.\binom{m}{s}p^s(1-p)^{m-s} + \sum_{s=0}^{m}1.\binom{m}{s}p^s(1-p)^{m-s}\right]$$

$$= np[mp+1]$$

$$= np[(n-1)p+1]$$

$$= np[np-p+1]$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= np[np-p+1] - (np)^2$$

$$= (np)^2 - np^2 + np - (np)^2$$

$$= np - np^2$$

$$= np(1-p)$$

Sehingga didapat variansi dari X, $Var(X) = np(1-p)$

Contoh:

1. Probabilitas bahwa sejenis komponen tertentu yang lolos uji kelayakan adalah ¾. Tentukan probabilitas dimana 2 dari 4 komponen yang selanjutnya diuji akan dinyatakan layak!

   $$\mathrm{P(X} = x) = f(x) = \binom{n}{x}p^x q^{n-x} = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

   p = ¾, q = 1 – ¾ = ¼

   untuk x = 2

   $$P(X=2) = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^{4-2} = 6.\frac{9}{16}.\frac{1}{16} = \frac{27}{128}$$

2. Berdasarkan data biro perjalanan PT Sentosa, yang khusus menangani perjalanan wisata turis mancanegara, 20% dari turis menyatakan sangat puas berkunjung ke Indonesia, 40% menyatakan puas, 25% menyatakan biasa saja, dan sisanya menyatakan kurang puas. Apabila kita bertemu dengan 5 orang dari peserta wisata turis mancanegara yang pernah menggunakan jasa biro perjalanan tersebut.

   Tentukan probabilitas:

   a. Tepat 2 diantaranya menyatakan biasa saja

b. Paling banyak 2 diantaranya menyatakan sangat puas

Jawab:

$n = 5$

a. $p = 0.25$, $q = 1 - 0.25 = 0.75$

$$P(X = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{5-2} = 0.2637$$

b. $p = 0.2$, $q = 1 - 0.2 = 0.8$

$$\begin{aligned} P(X \le 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \binom{5}{0}(0.2)^0(0.8)^5 + \binom{5}{1}(0.2)^1(0.8)^{5-1} + \binom{5}{2}(0.2)^2(0.8)^{5-2} \\ &= 0.32768 + 0.40960 + 0.20480 \\ &= 0.94208 \end{aligned}$$