

CES 型選好: Yeaple (2008) の Model

田中鮎夢

平成 23 年 5 月 24 日

1 需要の導出

Step.1

まず、選好は以下のように与えられる。

$$U = \frac{\beta}{\alpha} \ln \left(\int_{\omega \in \Omega} x(\omega)^\alpha d\omega \right) + (1 - \beta) \ln Y, \quad (1)$$

ここで、 $\alpha = (\sigma - 1)/(\sigma)$, $\sigma > 1$ である。 Y 財は同質財であり、差別財 $x(\omega)$ に関する選好は CES 型である。

効用関数を書き直す。

$$\begin{aligned} U &= \frac{\beta}{\alpha} \ln \left(\int x(\omega)^\alpha d\omega \right) + (1 - \beta) \ln Y \\ &= \beta \ln \left(\int x(\omega)^\alpha d\omega \right)^{\frac{1}{\alpha}} + (1 - \beta) \ln Y \\ &\equiv \beta \ln X + (1 - \beta) \ln Y \end{aligned} \quad (2)$$

この書き直した効用関数は、コブ = ダグラス型効用関数である。まず X と Y の最適消費量を求める。

$$\max_{X, Y} U(X, Y) \quad \text{s.t.} \quad E = P_1 X + P_2 Y \quad (3)$$

ラグランジェアン L を設定すると

$$L = \beta \ln X + (1 - \beta) \ln Y + \lambda(E - P_1 X + P_2 Y) \quad (4)$$

ラグランジェアン L を X 、 Y 、 λ で微分してゼロとおけば、最適消費量が次のように求められる。

$$X = \frac{\beta E}{P_1} \equiv \frac{E_1}{P_1}, \quad Y = \frac{(1 - \beta)E}{P_2} \quad (5)$$

Step.2

次に、差別財 X の各バラエティ $x(\omega)$ の最適消費量を求める。

$$\max_{x(\omega)} X = \left(\int x(\omega)^\alpha d\omega \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{s.t. } E_1 = \int p(\omega)x(\omega)d\omega \quad (6)$$

ラグランジェアン H を設定すると、

$$H = \left(\int x(\omega)^\alpha d\omega \right)^{\frac{1}{\alpha}} + h \left(E_1 - \int p(\omega)x(\omega)d\omega \right) \quad (7)$$

ラグランジェアン H を $x(s)$ で微分すると、

$$\frac{\partial H}{\partial x(s)} = \frac{1}{\alpha} \left(\int x(\omega)^\alpha d\omega \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \alpha x(s)^{\alpha-1} - hp(s) \quad (8)$$

$$\Longleftrightarrow hp(s) = x(s)^{\alpha-1} \left(\int x(\omega)^\alpha d\omega \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad (9)$$

同様にして、

$$hp(t) = x(t)^{\alpha-1} \left(\int x(\omega)^\alpha d\omega \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad (10)$$

上の2式から、

$$\frac{p(s)}{p(t)} = \left(\frac{x(s)}{x(t)} \right)^{\alpha-1} \quad (11)$$

$$\Longleftrightarrow x(s) = \left(\frac{p(s)}{p(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} x(t) \quad (12)$$

支出 E_1 に代入すると、

$$\begin{aligned} E_1 &= \int p(s)x(s)ds = \int p(s) \left[\left(\frac{p(s)}{p(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} x(t) \right] ds \\ &= \frac{x(t)}{p(t)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \int p(s)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} ds = \frac{x(t)}{p(t)^{-\sigma}} \int p(s)^{1-\sigma} ds \\ &= x(t)p(t)^\sigma P_1^{1-\sigma} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 P_1 は、

$$P_1 \equiv \left(\int p(s)^{1-\sigma} ds \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \quad (14)$$

であり、差別財 X の価格指標である。

よって、

$$x(t) = p(t)^{-\sigma} P_1^{\sigma-1} E_1 \quad (15)$$

また、 $E_1 = \beta E$ であるので、

$$x(t) = p(t)^{-\sigma} P_1^{\sigma-1} \beta E \quad (16)$$

よって、バラエティ $x(\omega)$ の最適消費量は、

$$x(\omega) = p(\omega)^{-\sigma} P_1^{\sigma-1} \beta E \quad (17)$$

参考文献

- [1] Yeaple, Stephen Ross. 2008. "Firm Heterogeneity and The Structure of U.S. Multinational Activity: An Empirical Analysis," NBER Working Paper Series, 14072.