

CES 型選好の需要の導出 Yeaple(2008)の Model

田中鮎夢

May 11, 2025

はじめに

クルーグマンの新貿易理論、メリッツの新々貿易理論と、現代の国際貿易理論では、独占的競争モデルが仮定されていることが多い。そのとき、CES 型選好が多用されている。本資料では、典型的な CES 型選好を使っている Yeaple(2008)を例にして、CES 型選好から需要を導出する過程を説明する。

Step.1

まず、選好は以下のように与えられる。

$$U = \frac{\beta}{\alpha} \ln \left(\int_{\omega \in \Omega} x(\omega)^\alpha d\omega \right) + (1 - \beta) \ln Y \quad (1)$$

ここで、各バラエティ ω の消費量が $x(\omega)$ である。この差別財 $x(\omega)$ に関する選好は CES 型である。 Y 財は同質財と仮定している。

- $x(\omega)$: 差別財。連続的に定義された財のバラエティの消費量 (例えば、区間 $[0, 1]$ 上のメジャーゼロでない集合)
- Y : もう一つの財 (例えば、他の消費財や残余所得)。同質財。
- $\alpha \in (0, 1)$: 代替の弾力性 σ を決めるパラメータ。 $\alpha = (\sigma - 1)/(\sigma)$ であり、 $\sigma > 1$ である。
- $\beta \in (0, 1)$: 差別財と同質財のどちらを好むかの効用における重み。

効用関数を書き直す。

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{\beta}{\alpha} \ln \left(\int x(\omega)^\alpha d\omega \right) + (1 - \beta) \ln Y \\
 &= \beta \ln \underbrace{\left(\int x(\omega)^\alpha d\omega \right)^{\frac{1}{\alpha}}}_X + (1 - \beta) \ln Y \\
 &\equiv \beta \ln X + (1 - \beta) \ln Y
 \end{aligned} \tag{2}$$

この書き直した効用関数は、効用関数は $(X^\beta)(Y^{1-\beta})$ の対数形であり、コブ＝ダグラス型効用関数である。

- X : 各バラエティの消費 $\{x(\omega)\}$ を集約した合成財
- 効用関数は $\ln X$ と $\ln Y$ の加重和

まず X と Y の最適消費量を求める。

$$\max_{X,Y} U(X,Y) \quad \text{s.t.} \quad E = P_1 X + P_2 Y \tag{3}$$

ラグランジェアン L を設定すると

$$L = \beta \ln X + (1 - \beta) \ln Y + \lambda (E - P_1 X + P_2 Y) \tag{4}$$

ラグランジェアン L を X, Y, λ で微分してゼロとおけば、最適消費量が次のように求められる。

$$X = \frac{\beta E}{P_1} \equiv \frac{E_1}{P_1}, \quad Y = \frac{(1 - \beta)E}{P_2} \tag{5}$$

Step.2

次に、差別財 X の各バラエティ $x(\omega)$ の最適消費量を求める。

$$\max_{x(\omega)} X = \left(\int x(\omega)^\alpha d\omega \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{s.t.} \quad E_1 = \int p(\omega) x(\omega) d\omega \tag{6}$$

ラグランジェアン H を設定すると、

$$H = \left(\int x(\omega)^\alpha d\omega \right)^{\frac{1}{\alpha}} + h \left(E_1 - \int p(\omega) x(\omega) d\omega \right) \tag{7}$$

ラグランジアン H を $x(s)$ で微分して、ゼロとおく：

$$\frac{\partial H}{\partial x(s)} = \frac{1}{\alpha} \left(\int x(\omega)^\alpha d\omega \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \alpha x(s)^{\alpha-1} - hp(s) = 0 \quad (8)$$

$$\Longleftrightarrow hp(s) = x(s)^{\alpha-1} \left(\int x(\omega)^\alpha d\omega \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad (9)$$

同様にして、

$$hp(t) = x(t)^{\alpha-1} \left(\int x(\omega)^\alpha d\omega \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad (10)$$

上の 2 式から、

$$\frac{p(s)}{p(t)} = \left(\frac{x(s)}{x(t)} \right)^{\alpha-1} \quad (11)$$

$$\Longleftrightarrow x(s) = \left(\frac{p(s)}{p(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} x(t) \quad (12)$$

支出 E_1 に代入すると、

$$\begin{aligned} E_1 &= \int p(s)x(s)ds = \int p(s) \left[\left(\frac{p(s)}{p(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} x(t) \right] ds \\ &= \frac{x(t)}{p(t)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \int p(s)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} ds = \frac{x(t)}{p(t)^{-\sigma}} \underbrace{\int p(s)^{1-\sigma} ds}_{\equiv P_1} \\ &= x(t)p(t)^\sigma P_1^{1-\sigma} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 P_1 は、

$$P_1 \equiv \left(\int p(s)^{1-\sigma} ds \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \quad (14)$$

であり、差別財 X の価格指標である。

よって、

$$x(t) = p(t)^{-\sigma} P_1^{\sigma-1} E_1 \quad (15)$$

また、 $E_1 = \beta E$ であるので、

$$x(t) = p(t)^{-\sigma} P_1^{\sigma-1} \beta E \quad (16)$$

よって、バラエティ $x(\omega)$ の最適消費量は、

$$x(\omega) = p(\omega)^{-\sigma} P_1^{\sigma-1} \beta E \quad (17)$$

参考文献

- Yeaple, S. R. (2008). Firm Heterogeneity and the Structure of US Multinational Activity: An Empirical Analysis. NBER Working Paper, No.w14072. <https://ssrn.com/abstract=1143983>.
- Yeaple, S. R. (2009). Firm Heterogeneity and the Structure of US Multinational Activity. *Journal of International Economics*, 78(2), 206-215. <https://doi.org/10.1016/j.jinteco.2009.03.002>.