CES 型選好の需要の導出
Yeaple（2008）の Model

田中鮎夢

May 11, 2025

Step.1

まず、選好は以下のように与えられる。

$$U = \frac{\beta}{\alpha}\ln\left(\int_{\omega\in\Omega} x(\omega)^{\alpha} d\omega\right) + (1-\beta)\ln Y \tag{1}$$

ここで、Y 財は同質財であり、差別財 $x(\omega)$ に関する選好は CES 型である。

- $x(\omega)$：差別財。連続的に定義された財の消費量（例えば、区間 $[0,1]$ 上のメジャーゼロでない集合）
- Y：もう一つの財（例えば、他の消費財や残余所得）。同質財。
- $\alpha \in (0,1)$：代替の弾力性 σ を決めるパラメータ。$\alpha = (\sigma-1)/(\sigma)$ であり、$\sigma > 1$ である。
- $\beta \in (0,1)$：差別財と同質財のどちらを好むかの効用における重み。

効用関数を書き直す。

$$\begin{aligned} U &= \frac{\beta}{\alpha}\ln\left(\int x(\omega)^{\alpha} d\omega\right) + (1-\beta)\ln Y \qquad (2)\\ &= \beta\ln\underbrace{\left(\int x(\omega)^{\alpha} d\omega\right)^{\frac{1}{\alpha}}}_{X} + (1-\beta)\ln Y \\ &\equiv \beta\ln X + (1-\beta)\ln Y \end{aligned}$$

この書き直した効用関数は、コブ＝ダグラス型効用関数である。

- X：消費束 $\{x(\omega)\}$ を CES 的に集約したコンポジット財
- 効用関数は $\ln X$ と $\ln Y$ の加重和

- 効用関数は $(X^{\beta})(Y^{1-\beta})$ の対数形であり、コブ＝ダグラス型効用関数

まず X と Y の最適消費量を求める。

$$\max_{X,Y} U(X,Y) \quad \text{s.t.} \quad E = P_1 X + P_2 Y \tag{3}$$

ラグランジェアン L を設定すると

$$L = \beta \ln X + (1-\beta)\ln Y + \lambda\left(E - P_1 X + P_2 Y\right) \tag{4}$$

ラグランジェアン L を X、Y、λ で微分してゼロとおけば、最適消費量が次のように求められる。

$$X = \frac{\beta E}{P_1} \equiv \frac{E_1}{P_1}, \quad Y = \frac{(1-\beta)E}{P_2} \tag{5}$$

Step.2

次に、差別財 X の各バラエティ $x(\omega)$ の最適消費量を求める。

$$\max_{x(\omega)} X = \left(\int x(\omega)^{\alpha} d\omega\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{s.t. } E_1 = \int p(\omega)x(\omega)d\omega \tag{6}$$

ラグランジェアン H を設定すると、

$$H = \left(\int x(\omega)^{\alpha} d\omega\right)^{\frac{1}{\alpha}} + h\left(E_1 - \int p(\omega)x(\omega)d\omega\right) \tag{7}$$

ラグランジェアン H を $x(s)$ で微分して、ゼロとおく:

$$\frac{\partial H}{\partial x(s)} = \frac{1}{\alpha}\left(\int x(\omega)^{\alpha} d\omega\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \alpha x(s)^{\alpha-1} - hp(s) = 0 \tag{8}$$

$$\Longleftrightarrow hp(s) = x(s)^{\alpha-1}\left(\int x(\omega)^{\alpha} d\omega\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \tag{9}$$

同様にして、

$$hp(t) = x(t)^{\alpha-1}\left(\int x(\omega)^{\alpha} d\omega\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \tag{10}$$

上の 2 式から、

$$\frac{p(s)}{p(t)} = \left(\frac{x(s)}{x(t)}\right)^{\alpha-1} \tag{11}$$

$$\Longleftrightarrow x(s) = \left(\frac{p(s)}{p(t)}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} x(t) \tag{12}$$

支出 E_1 に代入すると、

$$E_1 = \int p(s)x(s)ds = \int p(s)\left[\left(\frac{p(s)}{p(t)}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} x(t)\right] ds \tag{13}$$

$$= \frac{x(t)}{p(t)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \int p(s)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} ds = \frac{x(t)}{p(t)^{-\sigma}} \underbrace{\int p(s)^{1-\sigma} ds}_{\equiv P_1}$$

$$= x(t)p(t)^{\sigma} P_1^{1-\sigma}$$

ここで、P_1 は、

$$P_1 \equiv \left(\int p(s)^{1-\sigma} ds\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{14}$$

であり、差別財 X の価格指標である。

よって、

$$x(t) = p(t)^{-\sigma} P_1^{\sigma-1} E_1 \tag{15}$$

また、$E_1 = \beta E$ であるので、

$$x(t) = p(t)^{-\sigma} P_1^{\sigma-1} \beta E \tag{16}$$

よって、バラエティ $x(\omega)$ の最適消費量は、

$$x(\omega) = p(\omega)^{-\sigma} P_1^{\sigma-1} \beta E \tag{17}$$

参考文献

- Yeaple､S. R. (2008). Firm Heterogeneity and the Structure of US Multinational Activity: An Empirical Analysis. NBER Working Paper, No.w14072. `https://ssrn.com/abstract=1143983`.
- Yeaple, S. R. (2009). Firm heterogeneity and the Structure of US Multinational Activity. Journal of International Economics, 78(2), 206-215. `https://doi.org/10.1016/j.jinteco.2009.03.002`.