BİLGİSAYAR BİLİMLERİNDE GÜNCEL KONULAR II

Hafta 6

. Graflarda Matrisler

GRAFLAR VE MATRİSLER

Tepe Ayrıt Bağlantı Matrisi:

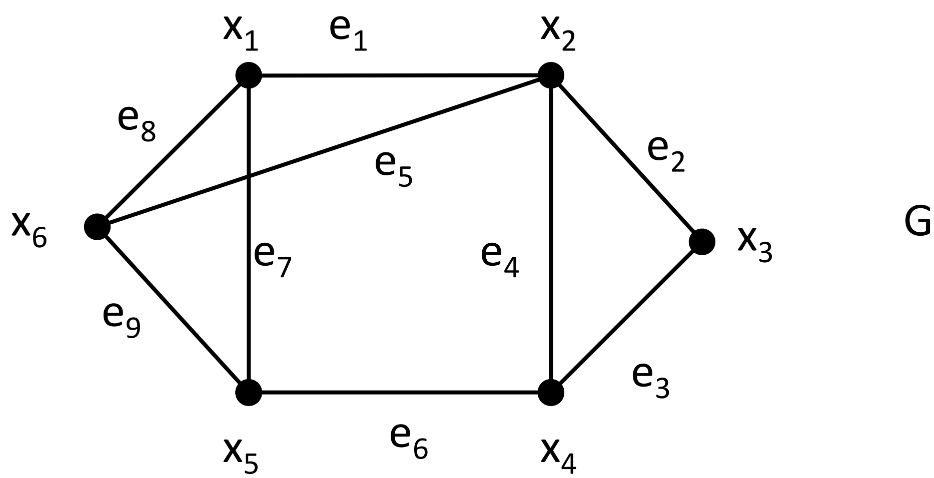
$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & q\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\.\\.\\.\\p\end{matrix} & \left[\begin{matrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{matrix}\right] \end{array}$$

p- tepeli, q-ayrıtlı birleştirilmiş bir G grafının tepe ayrıt bağlantı matrisi $p\times q$ boyutundadır. Burada tepeler satırları, ayrıtlar ise sütunları oluştururlar. Tepe ayrıt bağlantı matrisi A_a şeklinde gösterilir. A_a nın herhangi bir elemanı a_{ij} olmak üzere

aij=1, i-tepesi, j-ayrıtı ile bitişik ise

aij=0, i tepesi, j ayrıtı ile bitişik değil ise

Örnek:



$$
Aa = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Not: Verilen bir tepe ayrıt bağlantı matrisini kullanarak, bu matrise ait grafı çizebiliriz.

Not: Verilen iki grafın tepe ayrıt bağlantı matrislerini kullanarak bu grafların izomorf olup olmadıklarını söyleyebiliriz.

Teorem: G_1 ve G_2 graflarının izomorf olmaları için gerek ve yeter koşul G_2 grafının tepe ayrıt bağlantı matrisinin, G_1 in tepe ayrıt bağlantı matrisinin satır ve sütunlarının bir permütasyonundan (yer değiştirmesinden) elde edilmesidir.

Not: Tepe ayrıt bağlantı matrisinin her sütununda mutlaka iki tane 1 vardır. Niçin?

Teorem: p-tepeli, q-ayrıtlı birleştirilmiş bir grafın Aa tepe-ayrıt bağlantı matrisinin rankı en fazla p-1 dir.

Kanıt: Tepe ayrıt bağlantı matrisinin satırlarını üstüste (mod2 ye göre) son satıra ekliyelim. Her sütunda 2 tane 1 olduğu için son satırın tüm elemanları 0 dır. Bu durumda matris p-1 tane 0 dan farklı satır içerir ve Aa matrisinin rankı en fazla p-1 olur. Yani $r(Aa) \leq p-1$dir.

Teorem: p-tepeli, q-ayrıtlı birleştirilmiş bir grafın Aa tepe-ayrıt bağlantı matrisinin rankı p-1 dir.

Bu teoremin kanıtı verilmeyecektir.

Teorem: Birleştirilmiş bir G grafı için r<p olmak üzere, Aa nın herhangi r-satırının toplamı en az bir tane 0 olmayan eleman içerir.

Kanıt: Olmayana ergi yöntemiyle r<p iken Aa nın r satırının toplamı tümü 0 elemanlı bir satır olsun. Aa nın satırları, bu r satır başa gelecek şekilde (ilk r satır başa gelecek şekilde) alt alta sıralansın. Bu r satırın toplamı tümü 0 elemanlı bir satır olduğundan bu r satırın her bir sütunu ya sıfır olmayan iki eleman içerir ya da sıfır olmayan hiçbir eleman içermez. Aa nın sütunları, ilk r satırda sıfır içermeyenler sona gelecek biçimde sıralansınlar. Böylece son p-r satır yalnız sıfır

.

eleman içermek zorunda olacaktır. Fakat G, izole tepe içermediğinden son durum olanaksızdır. Şimdi ilk r satırı iki tane 1, son p-r satırı tümüyle sıfır içeren ilk sütunlar kümesini göz önüne alalım. Bu şekilde bir parçalanmayla Aa matrisi

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

biçimine girer. Böylece, ilk r tepenin diğer p-r tepeyle hiçbir bağlantısı olmadığı görülür. O zaman graf birleştirilmiş olamaz ki bu durum hipoteze aykırıdır.

Çevre matrisi:

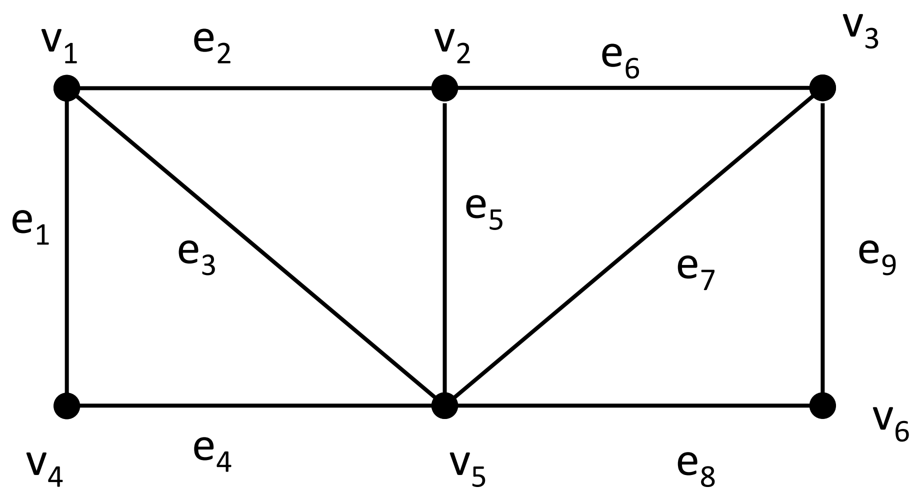
k çevreye ve e ayrıta sahip olan bir G grafının çevre matrisi B_a ile gösterilir. Grafın çevreleri matrisin satırlarına ayrıtları ise sütunlarına karşılık gelir. B_a çevre matrisi

b_{ij}=1, j ayrıtı i-çevresinde ise

b_{ij}=0, j-ayrıtı i çevresinde değil ise

şeklinde tanımlanmıştır.

Örnek:



Grafının çevre matrisini yazınız.

$Ç_1=\{e_1, e_3, e_4\}$

$Ç_2=\{e_2, e_3, e_5\}$

$Ç_3=\{e_5, e_6, e_7\}$

$Ç_4=\{e_7, e_8, e_9\}$

$Ç_5=\{e_5, e_6, e_8, e_9\}$

$Ç_6=\{e_1, e_2, e_4, e_5\}$

$Ç_7=\{e_2, e_3, e_6, e_7\}$

$Ç_8=\{e_2, e_6, e_7, e_4, e_1\}$

$Ç_9=\{e_2, e_6, e_9, e_8, e_3\}$

$Ç_{10}=\{e_1, e_2, e_6, e_9, e_8, e_4\}$

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array} \\
Ba= \begin{array}{c} Ç_1 \\ Ç_2 \\ Ç_3 \\ Ç_4 \\ Ç_5 \\ Ç_6 \\ Ç_7 \\ Ç_8 \\ Ç_9 \\ Ç_{10} \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

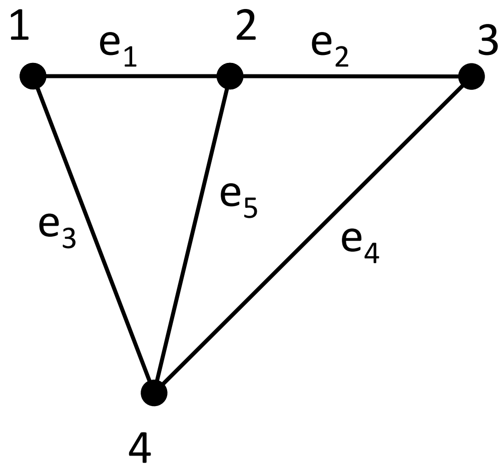
Temel çevreler ve matrisi:

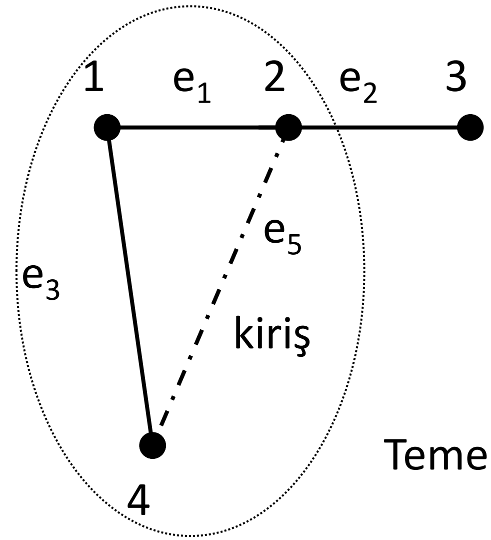
Tanım:(Kiriş) Bir ağaca eklendiğinde çevre oluşturan ayrıta kiriş denir.

Dal: Bir ağacın her bir ayrıtına verilen addır.

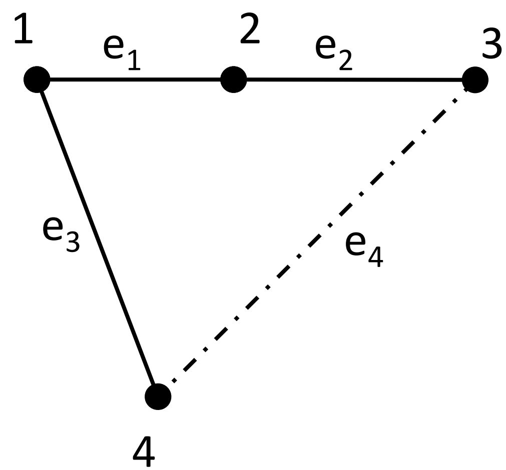
Temel çevre: Birleştirilmiş bir G grafında bir dallanmış ağacına göre her bir kiriş ve bu kirişin tepelerini birleştiren ağaçtaki yol ile oluşan çevreye G nin temel çevresi denir (f çevresi de denir).

Ör:





Temel çevre 1



Temel çevre 2

Teorem: p-tepeli ve q- ayrıtlı bir G grafındaki temel çevrelerin sayısı q-p+1'e yani kirişlerin sayına eşittir.

Temel Çevre Matrisi: Bir G grafının temel çevrelerini ele alalım. Seçilen herhangi bir dallanmış ağaca göre oluşturulan bu temel çevreler 1,2,…,q-(p-1) şeklinde numaralandırılsın. $1 \leq i \leq q-(p-1)$ olmak üzere her bir i temel çevresinde bulunan kirişlerde i ile numaralandırılsın. Bu durumda satırları temel çevreler, sütunları ise ayrıtlar olan matrise temel çevre matrisi denir ve Bf ile gösterilir. Bf nin elemanlarını belirlerken bir k ayrıtı j temel çevre matrisinde ise matrisin k.satır ve j. sütununa 1, aksi halde 0 yazalım.

Son örnekteki grafın temel çevre matrislerini oluşturalım.

$$
Bf= \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow Bf= \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_4 & e_5 & e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}
$$

Bf Matrisindeki, 2x2 lik birim alt matristen r(Bf)=2 olduğu kolayca görülür. Aslında, p tepeli, q ayrıtlı bir G grafı için

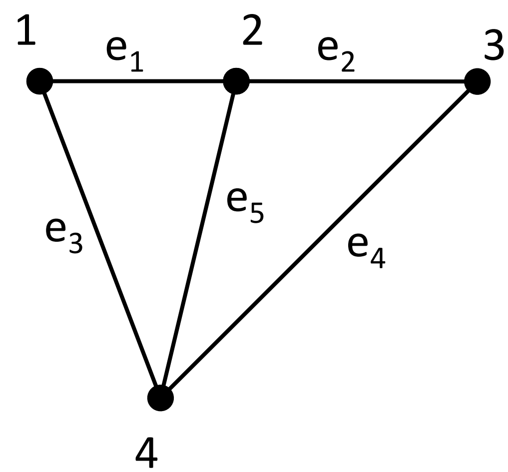
r(Bf)=[I | B12]=q-(p-1)

dir. Yani kirişlerin sayısı kadardır.Ayrıca her Ba matrisi, Bf matrisini kapsadığından r(Ba)≥r(Bf)=q-(p-1) yazabiliriz.

Teorem: $A_a . B_a{}' = 0$ ve $B_a . A_a{}' = 0$ dır.

Bu teoremi önce bir örnek üzerinde görelim.

Örnek:



´

$$
Aa.Ba^{\prime} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Ç_1 & Ç_2 & Ç_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = 0
$$

Şimdi, örneği göz önüne alarak teoremin kanıtını yapalım.

Kanıt: A_a nın i. satırı ile B_a ´ nün r. sütununu yani B_a nın r. satırını ele alalım. A_a nın i. satırı ile B_a nın r. satırında sıfır olmayan karşılıklı durumda elemanların varlığı sadece, bir elemanın hem i tepesi ile bağlantılı hem de r çevresinde olmasıyla mümkündür. i tepesi r çevresinde ise o zaman r çevresinde i tepesi ile bağlantılı 2 eleman varolacağından A_a nın i. satırı ile B_a ´ nün r. sütunu çarpımı 1+1=0 olur (mod 2 ye göre). Kanıt tamamlanmıştır

Teorem(Sylvester Sıfırlama Kuralı):

$P_{m\times n}$ ve $Q_{n\times p}$ matrislerinin elemanları bir cisimden alınmış ve $P.Q=0$ ise $r(P)+r(Q)\leq n$ dir.

Kanıt: P matrisinin rankı r olsun($r(P)=r$). $r(Q)\leq n-r$ olduğunu gösterirsek ispat biter.

P nin satır ve sütunlarını en başa r mertebeden tekil olmayan bir matris gelecek şekilde düzenleyelim. (0 dan farklı satırları üste aldık.) ve yeni matrise P_1 diyelim. P_1 Matrisi

$$\begin{array}{c} \qquad\quad n-r \\ \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

Şeklinde gösterelim.

P_{11} r mertebede tekil olmayan bir matris olur. P_{12} matrisi n-r sütunlu olur.

Q matrisinin satırlarını da P nin sütunlarına karşılık gelince şekilde yeniden düzenleyelim. Bu durumda

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix}$$ şeklinde olsun. Hipotezden

PQ=P1Q=0 ise

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Buradan

$P_{11}.Q_{11}+P_{12}.Q_{21}=0$ (***)

$P_{21}.Q_{11}+P_{22}.Q_{21}=0$ (*)

YAZILABİLİR.

Diğer yandan bir matris tekil olmayan herhangi bir matrisle çarpıldığında rankı değişmez.

$Q=\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix}$ Marisini tekil olmayan $\begin{bmatrix} I & P_{11}^{-1}P_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix}$

İle çarpalım.

$$\begin{bmatrix} I & P_{11}^{-1}P_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}+P_{11}^{-1}P_{12}.Q_{21} \\ Q_{21} \end{bmatrix}$$

n-r satır

Elde edilir.(**)

(***) de $P_{11}^{-1}P_{11}Q_{11}+P_{11}^{-1}P_{12}Q_{21}=P_{11}^{-1}0$

$Q_{11}+P_{11}^{-1}P_{12}Q_{21}=0$

(**) de $\begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix}$ elde edilir. $\Rightarrow$ $r(Q) \leq n\text{-}r$

$r(P)$

$r(Q) \leq n- r(P)$

$r(P)+r(Q) \leq n$

Bu durumda Q_{21} n-r tane 0 olmayan eleman içerir.

Şimdi, Sylvester'ın sıfırlama kuralını kullanarak Ba çevre matrisinin rankını bulalım.

$$r(B_a) \geq q-(p-1) \ (*)$$

olduğunu biliyoruz.

Sylvester'ın sıfırlama kuralını uygularsak,

$r(Aa) + r(Ba) \leq q$ yazabiliriz. Herhangi bir A matrisi için $r(A)=r(A')$ olduğundan $r(Aa) + r(Ba') \leq q$ yazılabilir. Ayrıca $r(Aa) = p-1$ olduğundan;

$$r(Ba) \leq q-(p-1) \ (**)$$

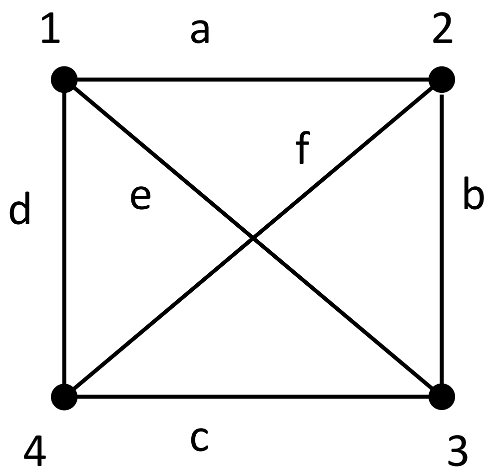
elde ederiz. O halde (*) ve (**) dan $r(Ba)=q-(p-1)$ dir

Kesim Küme:

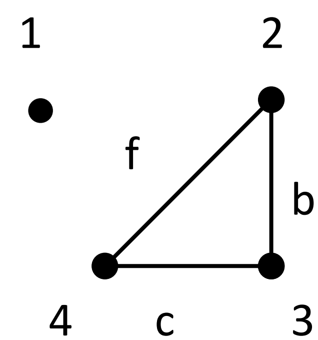
Bir G grafının ayrıtlarının kümesi E(G) ve $S \subseteq E(G)$ olsun. S kümesini graftan sildiğimizde geriye birleştirilmemiş bir graf kalıyorsa, bu kümeye kesim küme adı verilir.

Bir G grafının kesim küme matrisi Q_a ile gösterilir. Qa nın herhangi bir elemanı qij olmak üzere Q_a matrisinin herbir satırı bir kesim kümeye, herbir sütunu ise bir ayrıta karşılık gelir. Bu durumda $q_{ij}=1$, j ayrıtı i kesim kümesindedir; $q_{ij}=0$, numaralı ayrıt kesim kümesinde değildir.

Örnek:



K_1=S={a,e,d} ise geriye kalan graf



G-S grafı birleştirilmemiştir.

S kesim kümedir.

K_2=S={a,f,b} bir kesim kümedir.

K_3=S={b,c,e} bir kesim kümedir.

K_4=S={c,d,f} bir kesim kümedir.

K_5=S={a,e,f,c} bir kesim kümedir.

K_6=S={b,d,e,f} bir kesim kümedir.

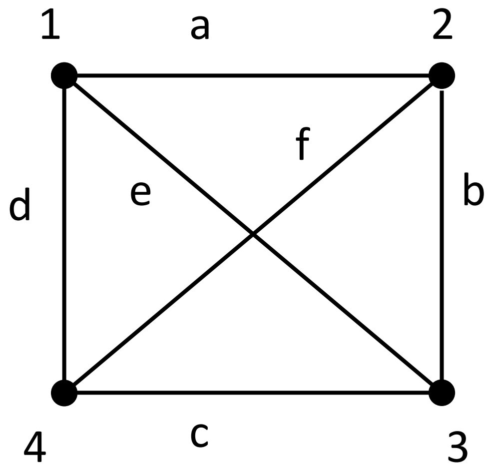
K_7=S={a,b,c,d} bir kesim kümedir.

$$
Qa= \begin{array}{c} \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \\ K_7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

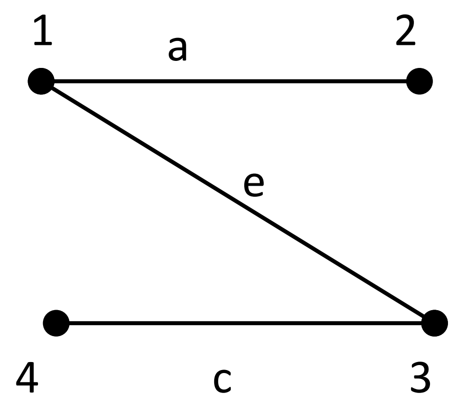
Temel Kesim Kümesi ve Matrisi:

Bir G grafının temel kesim kümelerini elde etmek için bir T ağacını seçmeliyiz. Seçilen ağacın her bir kirişini kapsayan, içeren kesim kümeye temel kesim küme denir. Buna göre satırları temel kesim kümelerden, sütunları ise ayrıtlardan oluşan matrise temel kesim küme matrisi denir ve Q_f ile gösterilir.

Örnek:



Temel kesim
kümeyi bulmak
için



d, b, f kirişleri vardır.

$TK_1=\{a, b, f\}$

$TK_2=\{c, d, f\}$

$TK_3=\{e, d, b, f\}$

Kirişlerin dışında kalan ayrıt sayısı 1 olmalıdır.

$$Q_f = \begin{array}{c} \\ TK_1 \\ TK_2 \\ TK_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc:ccc} b & d & f & a & c & e \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{I}$$

- Komşuluk Matrisi
- Derece Matrisi
- Laplacian Matrisi
- İşaretsiz Laplacian Matrisi

KAYNAKLAR

[1] Chartrand, G.-Lesniak, L., (1986) : *Graphs and Digraphs*, Wadsworth & Brooks, California

[2] West D.B. (2001) : *Introduction to Graph Theory*, *Prentice Hall*, USA.

[3] Graf Teoriye Giriş, Şerife Büyükköse ve Gülistan Kaya Gök, Nobel Yayıncılık

[4] Discrete Mathematical Structures for Computer Science, Ronald E. Prather, Houghton Mifflin Company, (1976).

[5] Christofides, N., 1986. Graph Theory an Algorithmic Approach, Academic Press, London