Markov Bağımlılık:

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olasılık uzayında $X_1, X_2, \dots, X_n$'ler kesikli rasgele değişkenler olsun. Eğer bu rasgele değişkenler arasında aşağıdaki eşitlik geçerliyse, bu rasgele değişkenler "Markov bağımlıdır" denir: $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için;

$$P\{\underbrace{X_n = x_n}_{B_n} \mid \overbrace{\underbrace{X_1 = x_1}_{B_1 \cap}, \underbrace{X_2 = x_2}_{B_2 \cap \dots \cap}, \dots, \underbrace{X_{n-1} = x_{n-1}}_{B_{n-1}}}^{\text{koşul}}\} = P\{\underbrace{X_n = x_n}_{B_n} \mid \overbrace{\underbrace{X_{n-1} = x_{n-1}}_{B_{n-1}}}^{\text{koşul}}\}.$$

$$\rightarrow \boxed{P(\underbrace{B_n}_{\text{Gelecek}} \mid \underbrace{B_1 \cap B_2 \cap \dots}_{\text{Geçmiş}} \cap \underbrace{B_{n-1}}_{\text{Şu an}}) = P(\underbrace{B_n}_{\text{Gelecek}} \mid \underbrace{B_{n-1}}_{\text{Şu an}})} \neq P(B_n).$$

"Gelecek; sadece şu ana bağlı, geçmişe değil."

MARKOV ZİNCİRİ

E ve T'si kesikli, rasgele değişkenleri Markov bağımlı olan stokastik süreçlere Markov Zinciri adı verilir.

Tek-adım geçiş olasılığı: $\boxed{i, j \in E}$; $\boxed{n \in T}$ olsun. i'den j'ye tek-adım geçiş olasılığı;

i ve j iki durum olsun. n: indis

$$P(X_2 = j \mid X_1 = i) = P(X_3 = j \mid X_2 = i) = \quad \underline{p_{i,j}^{(1)}} := P(\underbrace{X_n = j}_{\text{bir sonraki}} \mid \underbrace{X_{n-1} = i}_{\text{şu an}}) \longrightarrow$$

n ne olursa olsun bu koşullu olasılık sabit.

şeklinde tanımlanır. Örneğin; $E = \{10, 20, 30\}$, $T = \{1, 2, 3, \dots\}$ şeklinde durum ve parametre uzayına sahip bir markov zincirinde toplam 9 (dokuz) adet tek-adım geçiş olasılığı vardır:

$p_{10,10}^{(1)}$ $\quad p_{10,20}^{(1)}$ $\quad p_{10,30}^{(1)}$ $\quad p_{20,10}^{(1)}$ $\quad p_{20,20}^{(1)}$ $\quad p_{20,30}^{(1)}$

$p_{30,10}^{(1)}$ $\quad p_{30,20}^{(1)}$ $\quad p_{30,30}^{(1)}$

$$\underline{p_{30,20}^{(1)}} = P(\underbrace{X_n = 20}_{\text{bir sonra}} \mid \underbrace{X_{n-1} = 30}_{\text{şimdi}})$$

Not: Bir markov zincirinin tüm tek-adım geçiş olasılıkları verildiği zaman, bu stokastik sürecin rasgele değişkenlerinin ortak dağılımı verilmiş olur.

Tek-adım Geçiş Olasılık Matrisi:

Örneğin $E=\{10,20,30\}$ ve $T=\{1,2,3,\dots\}$ için

$$\mathbb{P}^{(1)} = \begin{array}{c c} & \overbrace{\begin{array}{ccc} 10 & 20 & 30 \end{array}}^{\text{bir sonraki } (j)} \\ \text{şu an } (i) \begin{array}{c} 10 \\ 20 \\ 30 \end{array} & \begin{bmatrix} p^{(1)}_{10,10} & p^{(1)}_{10,20} & p^{(1)}_{10,30} \\ p^{(1)}_{20,10} & p^{(1)}_{20,20} & p^{(1)}_{20,30} \\ p^{(1)}_{30,10} & p^{(1)}_{30,20} & p^{(1)}_{30,30} \end{bmatrix} \end{array}$$

P{şu an 10 ise bir sonrakinde 10, 20 ya da 30 gözlenmesi}

$$= P(\Omega) = \underbrace{p^{(1)}_{10,10} + p^{(1)}_{10,20} + p^{(1)}_{10,30}}_{} = 1$$

$$\rightarrow \sum_{j\in\{10,20,30\}} p^{(1)}_{10,j} = 1$$

Not: Tek-adım geçiş olasılık matrisinin satır toplamları 1'i verir: $\sum_{j\in E} p^{(1)}_{i,j} = 1 \quad \forall i\in E$ için

Not:

$$\underbrace{P(X_2=j \mid X_1=i)}_{=p^{(1)}_{i,j}} = \underbrace{P(X_3=j \mid X_2=i)}_{=p^{(1)}_{i,j}} = \underbrace{P(X_{502}=j \mid X_{501}=i)}_{=p^{(1)}_{i,j}} = p^{(1)}_{i,j}$$

Markov Zincirlerinde basit Olasılık hesabı:

Örn: $E=\{0,1,2\}$, $T=\{0,1,2,3,\dots\}$

$$\mathbb{P}^{(1)} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array}$$

verilmiş olsun.

$p^{(1)}_{0,2}$, $p^{(1)}_{1,0}$, $p^{(1)}_{2,0}$

tek-adım tek-adım tek-adım

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \end{array} \dots$$

a) $p_1 = P(X_3=0, X_1=0, X_2=2 \mid \underbrace{X_0=1}_{\text{Başlangıç durumu}}) = ?$

Başlangıcın "1" olduğu bilindiğinde ilk gözlemin "0", ikinci gözlemin "2" ve üçüncü gözlemin "0" olması koşullu olasılığı

$$\Rightarrow p_1 = \underbrace{P(X_1=0 \mid X_0=1)}_{p^{(1)}_{1,0} \to 1} \cdot \underbrace{P(X_2=2 \mid X_1=0)}_{p^{(1)}_{0,2} \to 0.1} \cdot \underbrace{P(X_3=0 \mid X_2=2)}_{p^{(1)}_{2,0} \to 0.3} = 0.03 = \%3$$

b) $p_2 = P(X_3=0, X_1=0 \mid X_0=1) = ?$

Başlangıcın "1" olduğu bilindiğinde ilk gözlemin "0" ve üçüncü gözlemin "0" olması koşullu olasılığı

$$\Rightarrow p_2 = \sum_{k\in E} P(X_3=0, X_1=0, X_2=k \mid X_0=1) = \sum_{k=0}^{2} p^{(1)}_{1,0}\cdot p^{(1)}_{0,k}\cdot p^{(1)}_{k,0}$$

$$= \underbrace{\boxed{\underset{1}{p^{(1)}_{1,0}} \cdot \underset{(0.2)}{p^{(1)}_{0,0}} \cdot \underset{(0.2)}{p^{(1)}_{0,0}}}}_{k=0} + \underbrace{\boxed{\underset{1}{p^{(1)}_{1,0}} \cdot \underset{(0.7)}{p^{(1)}_{0,1}} \cdot \underset{1}{p^{(1)}_{1,0}}}}_{k=1} + \underbrace{\boxed{\underset{1}{p^{(1)}_{1,0}} \cdot \underset{(0.1)}{p^{(1)}_{0,2}} \cdot \underset{(0.3)}{p^{(1)}_{2,0}}}}_{k=2} = 0.77$$

"a" şıkkının cevabı

c) $P(X_3=0 \mid X_0=1) = \sum_{k=0}^{2}\sum_{\ell=0}^{2} P(X_3=0, X_2=k, X_1=\ell \mid X_0=1)$

$p^{(3)}_{1,0}$

Şu an "1" durumunda olduğu biliniyorsa, 3-adım sonra "0" durumunda olma koşullu olasılığı

$$= \sum_{k=0}^{2}\sum_{\ell=0}^{2} p^{(1)}_{1,\ell}\cdot p^{(1)}_{\ell,k}\cdot p^{(1)}_{k,0}$$

k-adım Geçiş Olasılık Matrisi:

$i,j\in E$; $n,k\in T$ olmak üzere "i'den j'ye k-adım geçiş olasılığı

$$p^{(k)}_{i,j} := P(X_{n+k}=j \mid X_n=i)$$

şeklinde tanımlanır. Bu türden olasılıkları topluca verdiğimiz matrise "k-adım Geçiş Olasılık Matrisi" adı verilir:

k-adım sonrası (j)

$$\mathbb{P}^{(k)} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} p^{(k)}_{0,0} & p^{(k)}_{0,1} & p^{(k)}_{0,2} \\ p^{(k)}_{1,0} & p^{(k)}_{1,1} & p^{(k)}_{1,2} \\ p^{(k)}_{2,0} & p^{(k)}_{2,1} & p^{(k)}_{2,2} \end{bmatrix} \end{array}$$

şu an (i)

$\Rightarrow$ Satır toplamları 1'e eşit.

$\mathbb{P}^{(8)} = \mathbb{P}^{(2)}\times\mathbb{P}^{(6)}$

Teorem: $k>n\geq 1$ için

$$\mathbb{P}^{(k)} = \mathbb{P}^{(n)}\times\mathbb{P}^{(k-n)} = \underbrace{\mathbb{P}^{(1)}\times\mathbb{P}^{(1)}\times\cdots\times\mathbb{P}^{(1)}}_{k \text{ tane}}.$$

$\mathbb{P}^{(15)} = \mathbb{P}^{(8)}\times\mathbb{P}^{(7)}$

Örnek: $\mathbb{P}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{P}^{(3)} = ?$ $\quad \mathbb{P}^{(3)} = \underbrace{\mathbb{P}^{(1)}\times\mathbb{P}^{(1)}}_{\mathbb{P}^{(2)}}\times\mathbb{P}^{(1)}$

$$\mathbb{P}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.2)(0.2)+(0.8)(0.5) & (0.2)(0.8)+(0.8)(0.5) \\ (0.5)(0.2)+(0.5)(0.5) & (0.5)(0.8)+(0.5)(0.5) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^{(3)} = \mathbb{P}^{(2)}\times\mathbb{P}^{(1)}$$

Örnek Soru: Bir markov zincirinin tek-adım geçiş olasılık matrisi verilmiş olsun. 67-adım geçiş olasılık matrisi en kısa yoldan nasıl hesaplanır?

işlem

1. $\mathbb{P}^{(2)} = \mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(1)}$
2. $\mathbb{P}^{(4)} = \mathbb{P}^{(2)} \times \mathbb{P}^{(2)}$
3. $\mathbb{P}^{(8)} = \mathbb{P}^{(4)} \times \mathbb{P}^{(4)}$
4. $\mathbb{P}^{(16)} = \mathbb{P}^{(8)} \times \mathbb{P}^{(8)}$
5. $\mathbb{P}^{(32)} = \mathbb{P}^{(16)} \times \mathbb{P}^{(16)}$
6. $\mathbb{P}^{(64)} = \mathbb{P}^{(32)} \times \mathbb{P}^{(32)}$
7. $\mathbb{P}^{(66)} = \mathbb{P}^{(64)} \times \mathbb{P}^{(2)}$
8. $\mathbb{P}^{(67)} = \mathbb{P}^{(66)} \times \mathbb{P}^{(1)}$

elemanları $P_{i,j}^{(67)} = P\left(X_{n+67} = j \mid X_n = i\right)$