ORTALAMA YUTULMA SÜRESİ :

Varsayalım ki: $E=\{10,15,20\}$, $T=\{\underbrace{0,2}_{2},\underbrace{4}_{2},\underbrace{6}_{2},\underbrace{8}_{2},\dots\}$, ($2 \to$ dk. $\to$ tek-adım uzunluğu)

$\boxed{\alpha+\beta+\gamma=1}$, $\boxed{\alpha>0}$, $\boxed{\beta>0}$, $\boxed{\gamma>0}$ olmak üzere markov zincirinin tek-adım geçiş olasılık matrisi;

$$\mathbb{P}^{(1)} = \begin{array}{c} \\ 10 \\ 15 \\ 20 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 10 & 15 & 20 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} \end{array}$$

Not: $0<\gamma<1$

verilmiş olsun. Bu durumda 10 ve 15 durumları YUTAN durumlar, 20 ise geçici durumdur. Parametre uzayı olan T, iki dakikada bir gözlem yapılacağı bilindiği için $\{0,2,4,6,\dots\}$ şeklinde oluşturulmuştur.

Bu örnekte yutulma süresi;

$$N := \min\{n\in T : X_n=10 \text{ veya } X_n=15\}$$

şeklinde tanımlıdır.

$i\in E$ için v_i; i ile başlandığı bilindiğinde ortalama yutulma süresini göstersin. O zaman v_i aşağıdaki şekilde tanımlanacaktır:

$$v_i := E(N \mid \underbrace{X_0=i}_{\text{başlangıç}}) = \sum_{n\in T} n\cdot P(N=n \mid X_0=i)$$

$$= \sum_{n\in T} n\cdot P(X_2=20, X_4=20, X_6=20,\dots,X_{n-2}=20, X_n\neq 20 \mid \underbrace{X_0=i}_{\text{başlangıç}}) .$$

$$v_{10} = \sum_{n\in T} n\, P(X_2=20, X_4=20,\dots,X_{n-2}=20, X_n\neq 20 \mid \underbrace{X_0=10}_{\text{başlangıç}})$$

$$= \sum_{n\in T} n\cdot \underset{\substack{\downarrow\\0}}{p^{(1)}_{10,20}}\cdot \underset{\downarrow}{p^{(1)}_{20,20}}\cdot p^{(1)}_{20,20}\cdots\left(p^{(1)}_{20,10}+p^{(1)}_{20,15}\right) = \sum_{n\in T} n\cdot 0 = 0 \;//$$

$$v_{15} = \dots = 0 \;//$$

$$v_{20} = \;?\; >0$$

a) Klasik yol ile v_{20}'yi bulalım:

$$v_{20} = \sum_{n\in T} n \cdot \underbrace{\overset{2}{p^{(1)}_{20,20}} \cdot \overset{4}{p^{(1)}_{20,20}} \cdots \overset{n-2}{p^{(1)}_{20,20}}}_{\frac{n-2}{2} \text{ tane}} \overset{n}{\left(\underbrace{p^{(1)}_{20,10} + p^{(1)}_{20,15}}\right)}$$

((n−2) dk boyunca yutulmamana)   (n'inci dk.da yutulma)

$$= \sum_{n\in T=\{0,2,4,6,\dots\}} n \cdot \gamma^{\frac{n-2}{2}} (\alpha+\beta) = \underline{\underline{2}} \cdot \gamma^0 (\alpha+\beta) + \underline{\underline{4}} \cdot \gamma^1 (\alpha+\beta)$$

$$+ 6 \cdot \gamma^2 (\alpha+\beta) + 8 \cdot \gamma^3 (\alpha+\beta) + \dots$$

$$= (\alpha+\beta) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} 2(i+1) \cdot \gamma^i$$

$$= 2(\alpha+\beta) \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{(i+1)\gamma^i}_{\frac{d\gamma^{i+1}}{d\gamma}} = 2(\alpha+\beta) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d\gamma^{i+1}}{d\gamma} = 2(\alpha+\beta) \frac{d}{d\gamma} \Big(\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \gamma^{i+1}}_{A=?} \Big)$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\gamma + \gamma^2 + \gamma^3 + \gamma^4 + \dots}_{\gamma \cdot B} = \gamma \big(\underbrace{1 + \gamma + \gamma^2 + \gamma^3 + \dots}_{B=?} \big)$$

Geometrik seri toplamı

$$\Rightarrow \gamma \cdot B = B - 1$$

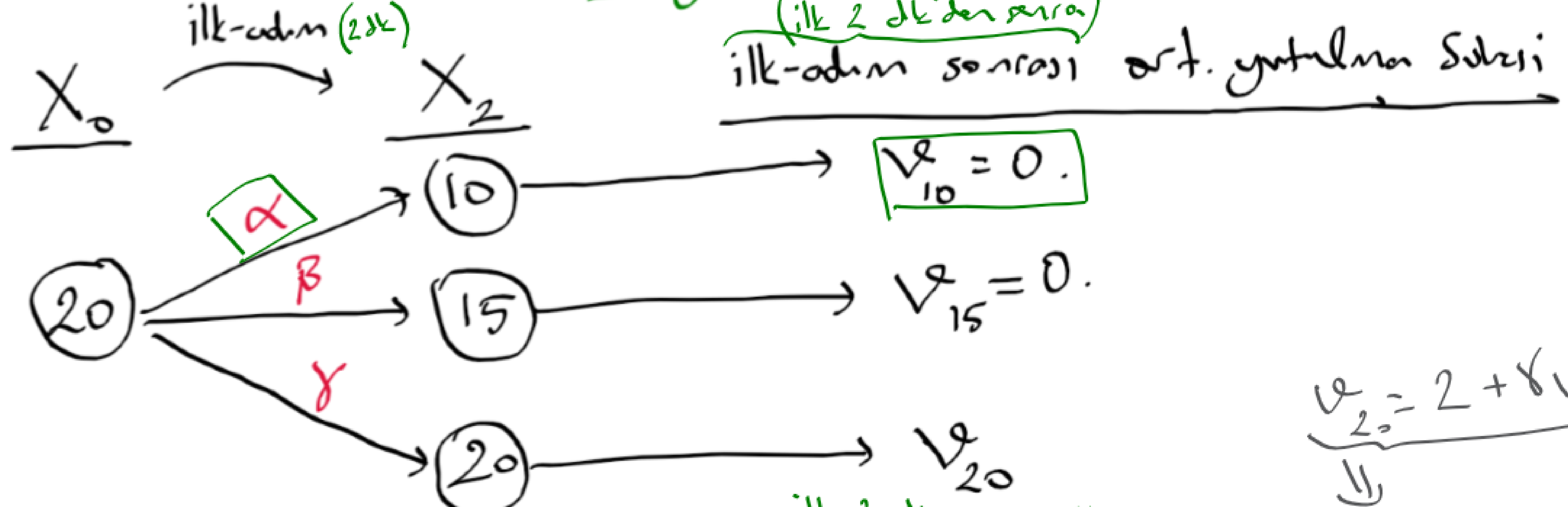
$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{1-\gamma}}$$

$$\Rightarrow A = \gamma \cdot B = \frac{\gamma}{1-\gamma}$$

$$\Rightarrow v_{20} = 2(\alpha+\beta) \cdot \frac{d}{d\gamma} \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right) = 2(\alpha+\beta) \cdot \frac{1\cdot(1-\gamma) - (-1)\cdot\gamma}{(1-\gamma)^2}$$

$$= 2(\alpha+\beta) \frac{1-\gamma+\gamma}{(1-\gamma)^2} = 2(\alpha+\beta) \frac{1}{(1-\gamma)^2} = \frac{2(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{2}{\alpha+\beta} \text{ dk.}$$

b) İlk-adım Gözlemlemesi ile v_{20}'yi bulalım:



$$v_{20} = 2 + \gamma v_{20}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{dk.}}{v_{20}} = \underbrace{(\text{ilk-adım uzunluğu})}_{2 \text{ dk.}} + \overbrace{\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot v_{20}}^{\text{ilk 2 dk sonrası}} \Rightarrow v_{20} = \frac{2}{1-\gamma} = \frac{2}{\alpha+\beta} \text{ dk.}$$

Not:

$T=\{\overset{1}{\frown}0,1,2,3,\dots\} \Rightarrow$ ilk-adım uzunluğu (tek-adım uzunluğu): 1

$T=\{0,5,10,15,\dots\} \Rightarrow 5$

$T=\{0,3,6,9,\dots\} \Rightarrow 3$

kurulacak denklem

$\Rightarrow v_i = (\text{ilk adım uzunluğu}) + \dots$

Problem: Bir önceki problemde (A ve B oyuncuları), ortalama kaç oyun sonra masadan kalkacaklarını sorulsaydı, bu soru v_{20}'ye karşılık gelirdi.

$E=\{0,10,20,30,40\}$, $T=\{0,1,2,3,4,\dots\}$ → tek-adım uzunluğu 1

X_t: t'inci oyun sonrası A oyuncusunun cebindeki para miktarı

$X_0 = 20$ ₺

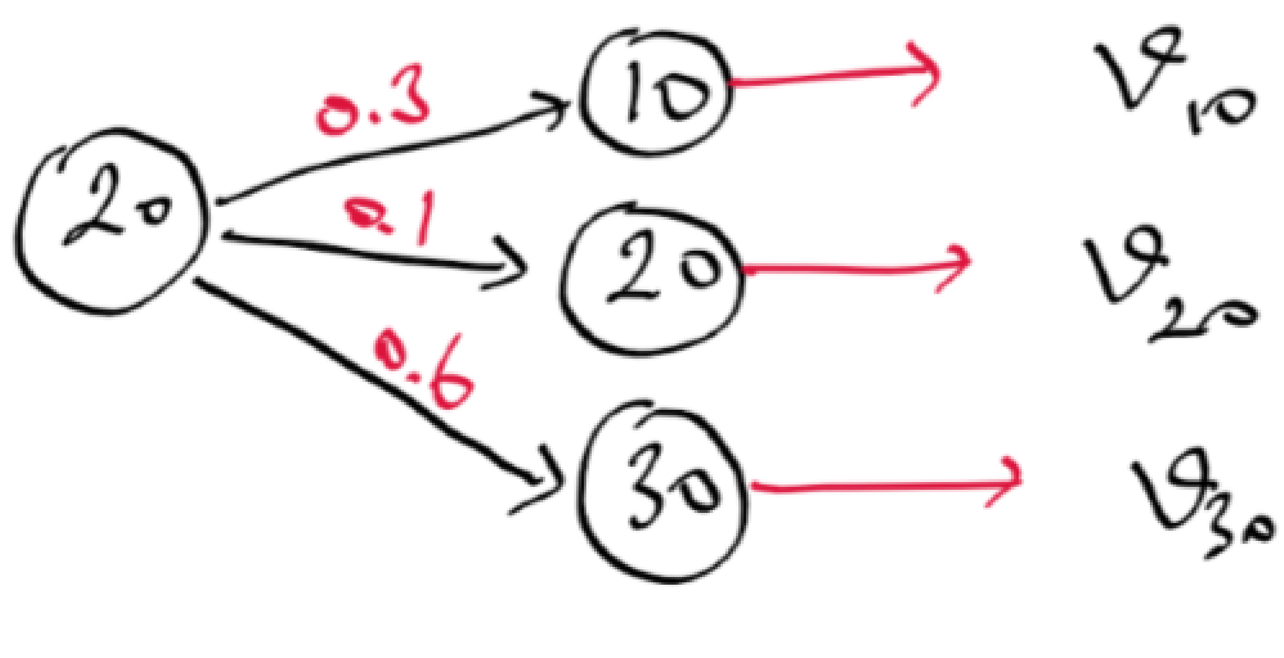
YUTAN → 0 ve 40

Geçici → 10, 20, 30

$$\mathbb{P}^{(1)} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 10 & 20 & 30 & 40 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.1 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

v_{20} için ilk-adım çözümlemesi

$X_0 \xrightarrow{\text{ilk-oyun}} X_1$ — ilk-oyun / ilk-adım sonrası ort. yut. sür. — ort. oyun sayısı

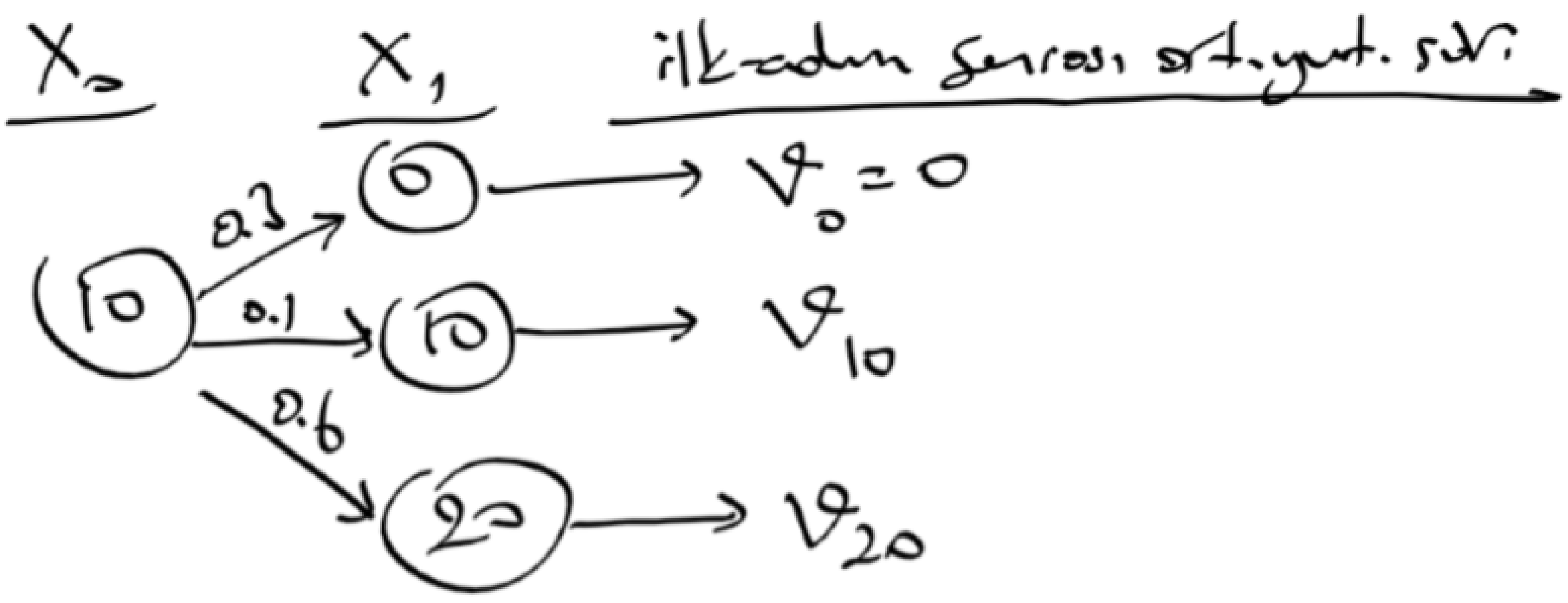


$\Rightarrow v_{20} = 1 + 0.3\,v_{10} + 0.1\,v_{20} + 0.6\,v_{30}$

ilk-adım uzunluğu

$\Rightarrow \boxed{-3v_{10} + 9v_{20} - 6v_{30} = 10}$ ... (I)

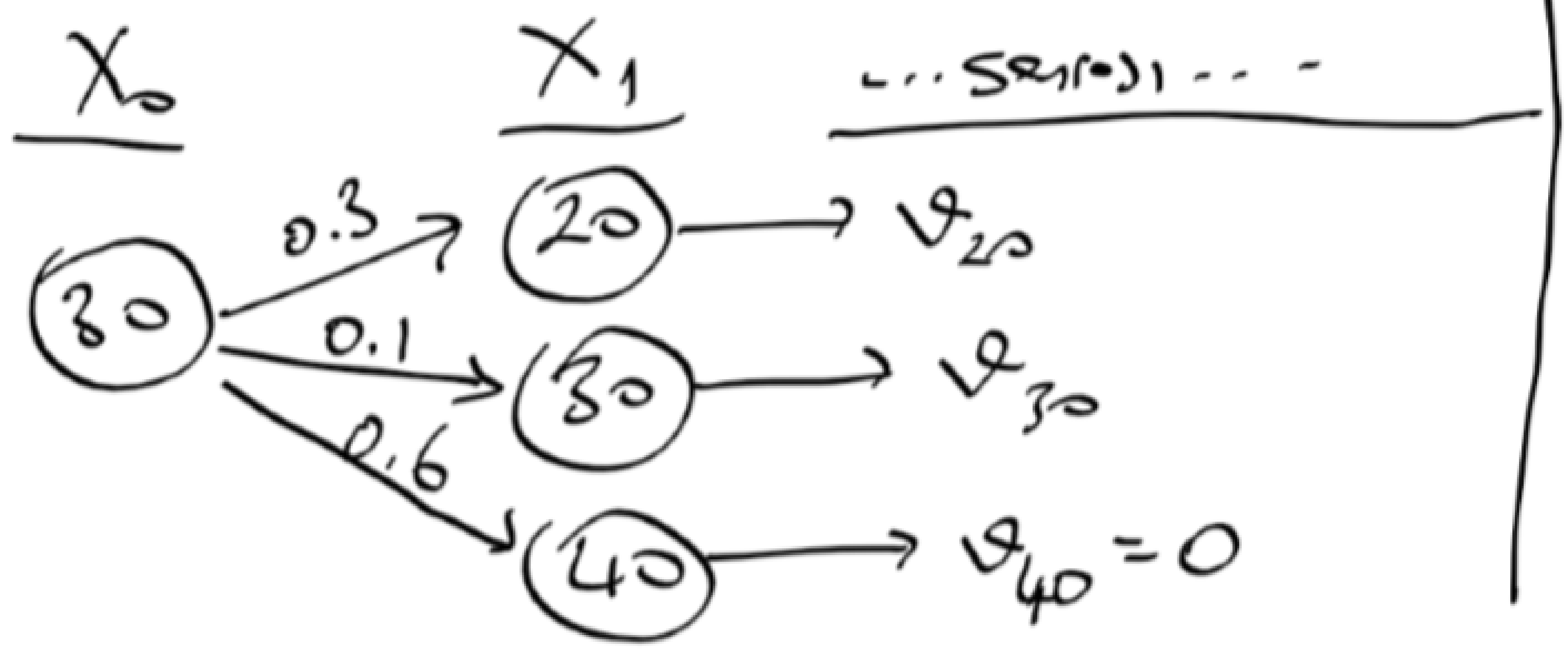
v_{10} için ilk-adım çözümlemesi



$$\Rightarrow v_{10} = 1 + (0.3)\,0 + 0.1\,v_{10} + 0.6\,v_{20}$$

$$\Rightarrow \boxed{9v_{10} - 6v_{20} = 10} \quad \ldots (\mathrm{II})$$

v_{30} için ilk-adım çözümlemesi



$$\Rightarrow v_{30} = 1 + 0.3\,v_{20} + 0.1\,v_{30} + (0.6)\,0$$

$$\Rightarrow \boxed{9v_{30} - 3v_{20} = 10} \quad \ldots (\mathrm{III})$$

II'den $v_{10} = \dfrac{10 + 6v_{20}}{9}$; III'ten $v_{30} = \dfrac{10 + 3v_{20}}{9}$

Bunlar I'de yerine yazılsın.

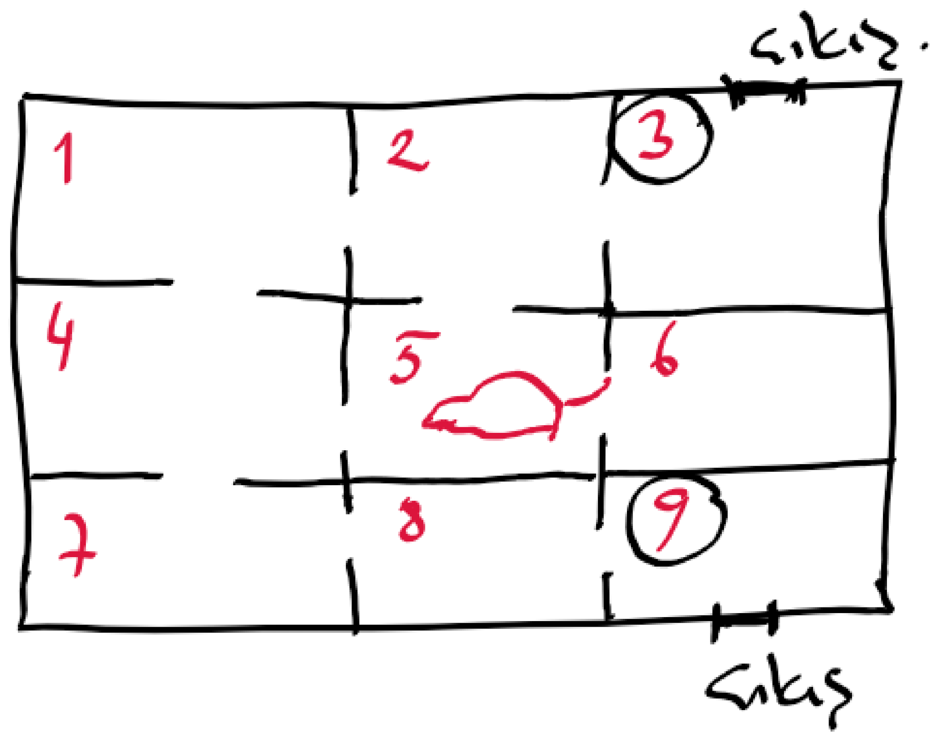
$$-3\,\overbrace{\frac{10+6v_{20}}{9}}^{v_{10}} + 9v_{20} - 6\,\overbrace{\frac{10+3v_{20}}{9}}^{v_{30}} = 10$$

$$-10 - 6v_{20} + 27v_{20} - 20 - 6v_{20} = 30$$

$$15v_{20} = 60 \Rightarrow v_{20} = 4 \text{ oyun}$$

Yani; oyuncuların ortalama 4 oyun serisi masada kalmaları beklenir.

Örnek:



Yandaki labirentin 5 nolu odacığına dijital bir fare bırakılacak olsun. Bu farenin odacıklar arasında rasgele geçiş yapacak şekilde tasarlandığı varsayılsın.

3 veya 9 nolu odacığa ulaştığında fare hedefe ulaşmış sayılacaktır.

a) Farenin ortalama kaç geçiş sonra hedefe ulaşması beklenir?

b) Farenin 9 nolu hedefe ulaşma olasılığı kaçtır?

Çözüm: X_t : Farenin t'inci geçiş sonrası bulunacağı odacığın numarası.

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ Yutan durum , $T = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

* hedef odacık numaraları Yutan durum olmalı

Farenin bir sonrasında hangi odacıkta olacağı, şu anda hangi odacıkta olduğuna bağlı, oraya nereden geldiğinden bağımsız → Markov bağımlılık

$\boxed{X_0 = 5}$

$$\mathbb{P}^{(1)} = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \end{array}$$

a) $v_5 = E(N \mid X_0 = 5) = ?$ (ÖDEV)

$N := \min\{n \in T : X_n = 3 \text{ veya } X_n = 9\}$

↳ yutulma süresi

↳ hedefe ulaşana dek yapılacak geçiş sayısı

b) $u_{5,9} = P\{X_N = 9 \mid X_0 = 5\} = ?$ (ÖDEV)

Çözüm:

a) v_5 ilk-adım çözümlemesi

$X_0 \xrightarrow{\text{ilk-geçiş}} X_1$ — ilk-geçiş sonrası ort. yut. süresi

$5 \xrightarrow{1/3} 2 \longrightarrow v_2$

$5 \xrightarrow{1/3} 4 \longrightarrow v_4$

$5 \xrightarrow{1/3} 6 \longrightarrow v_6$

$\Rightarrow v_5 = 1 + \frac{1}{3} v_2 + \frac{1}{3} v_4 + \frac{1}{3} v_6$ (I)

$\Rightarrow \boxed{v_2 + v_4 - 3 v_5 + v_6 = -3}$