

BİLGİSAYAR BİLİMLERİNDE GÜNCEL KONULAR II

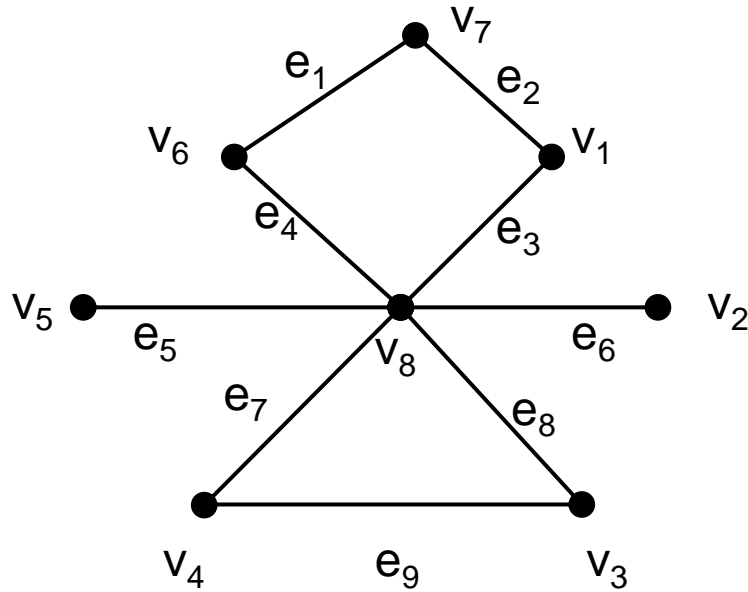
Hafta 10

. Eşlemeler

EŞLEMELER (Matchings)

Bir G grafının ayrıtlarının bir alt kümesi M olsun. M deki hiçbir ayrıt çifti ortak bir tepeye sahip değil ise M kümesine, grafın eşleme kümesi denir.

Örnek:



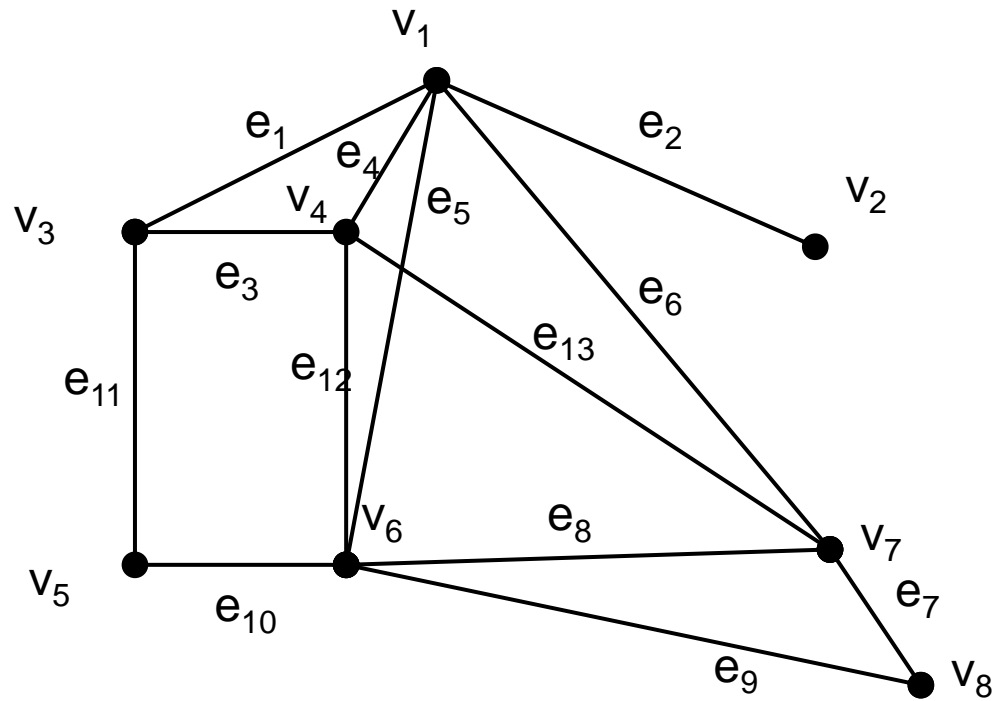
$$E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_9\}$$

$M = \{e_1, e_2, e_8\}$ Eşleme değildir.

$M = \{e_1, e_3\}$ Eşleme kümesidir.

$M = \{e_1, e_3, e_9\}$ Eşleme (hiçbir ortak tepe yoktur.)

Örnek 2



$$E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_{12}\}$$

$$M = \{e_2, e_7\}$$

Eşlemedir

$$M = \{e_2, e_7, e_{11}, e_{12}\}$$

Eşlemedir.

$$M = \{e_2, e_7, e_{11}\}$$

Eşlemedir.

$$M = \{e_2, e_7, e_3, e_{10}\}$$

Eşlemedir.

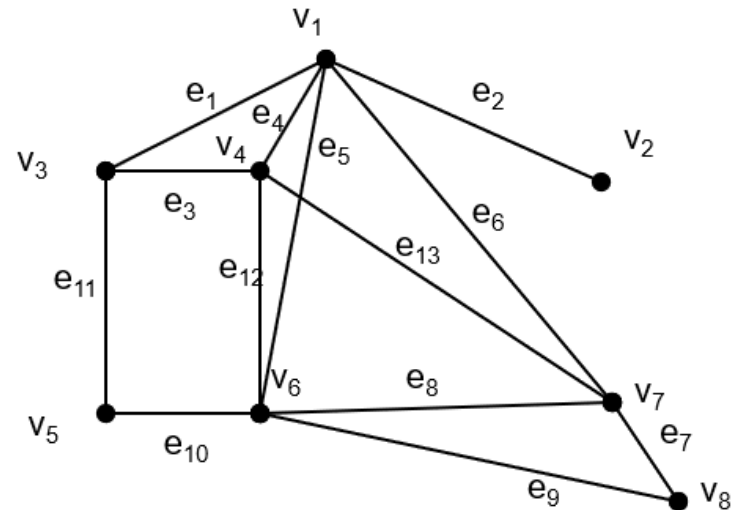
Tanım: G grafının herhangi bir v tepesi grafın bir eşlemesindeki ayrıtlarının en az birinin uç noktası ise bu tepeye doyurulmuş tepe denir.

1. örnekteki, $M=\{e_1, e_3, e_9\}$ eşlemesine göre v_2 tepesi doyurulmamış tepe v_1 tepesi doyurulmuş tepedir.

2. örnekteki, $M=\{e_2, e_7, e_3, e_{10}\}$ eşlemesine göre v_1 tepesi doyurulmuştur bu eşlemeye göre G de doyurulmamış tepe yoktur.

1. örneğe göre, $M=\{e_1, e_3, e_9\}$ ve 2. örneğe göre $M=\{e_2, e_7, e_3, e_{10}\}$ en büyük eşlemedir

2. örnekteki $M=\{e_2, e_7, e_3, e_{10}\}$ mükemmel eşleme



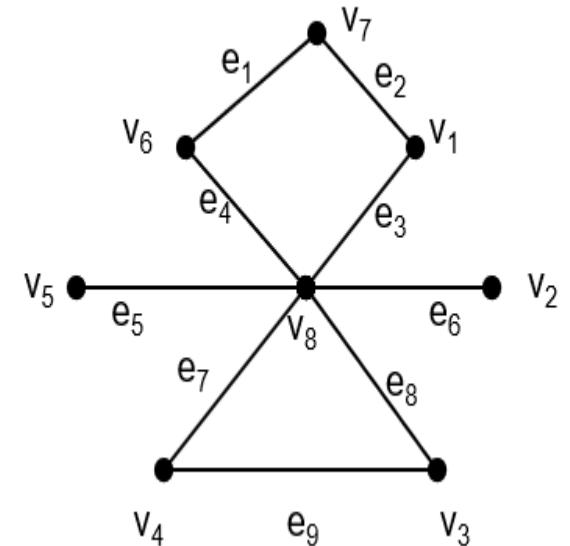
Seçenekli Yol: G grafinin herhangi bir eşlemesi M olsun. Ayrıtlanın E/M ve M kümelerinden sırasıyla seçilerek oluşturulan yola seçenekli yol (yada M-seçenekli yol) denir.

1. rnekte, $M=\{e_1, e_3\}$ eşlemesine göre v_5, v_8, v_1, v_7, v_6 bir seçenekli yol oluşturur.

Arttıran yol: Bir M seçenekli yolda başlangıç ve bitiş tepeleri M-doyurulmamış ise bu yola

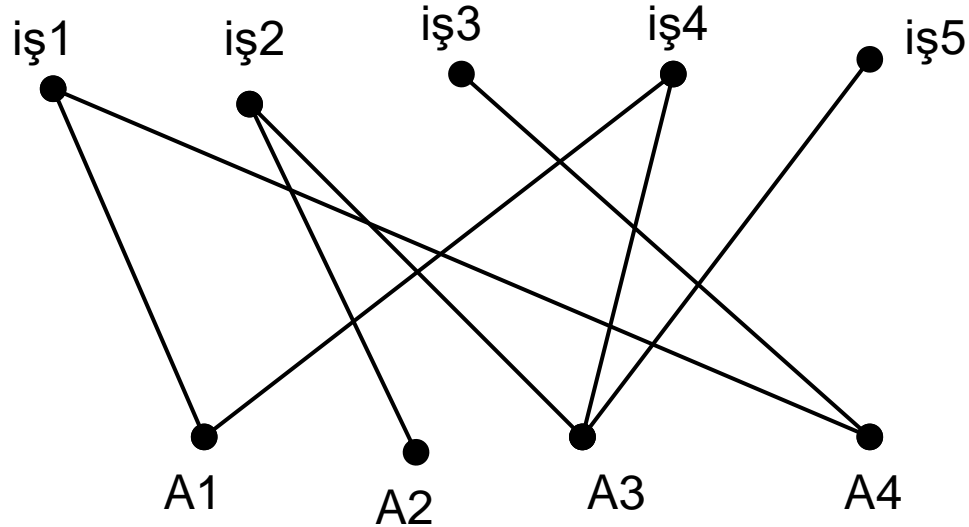
M-arttıran yol denir.

1. rnekte, $M=\{e_1, e_8\}$ eşlemesine göre :
 $v_1, v_7, v_6, v_8, v_3, v_4$ bir arttıran yol oluşturur.



Teorem: G grafının, bir M eşlemesinin en büyük eşleme olması için gerek ve yeter koşul G nin bir arttıran yol içermemesidir.

Personel Atama Problemi: Eşlemelerin bir uygulaması olarak personel atama problemi verilebilir. Örneğin, bir şirkette, 5- tane açık pozisyonda iş (boş kadro), var olup bu işlere 4-tane başvuru (aday) var olsun. Bir kişi birden fazla işe başvurabileceğine göre, bu durumu,



grafı ile gösterebiliriz. Bu graf, iki parçalı bir graf olup, $A1 \leftarrow iş4$, $A2 \leftarrow iş2$, $A3 \leftarrow iş5$ ve $A4 \leftarrow iş3$ bir eşleme oluşturur.

Burada problem,

- hangi işe kimin atanacağını araştırılması,
- atama yapılmayan bir işin kalıp kalmayacağını belirlenmesi,

olup, bu soruların yanıtlarını bulmak için eşlemeleri ve Macar algoritmasını kullanmamız gereklidir.

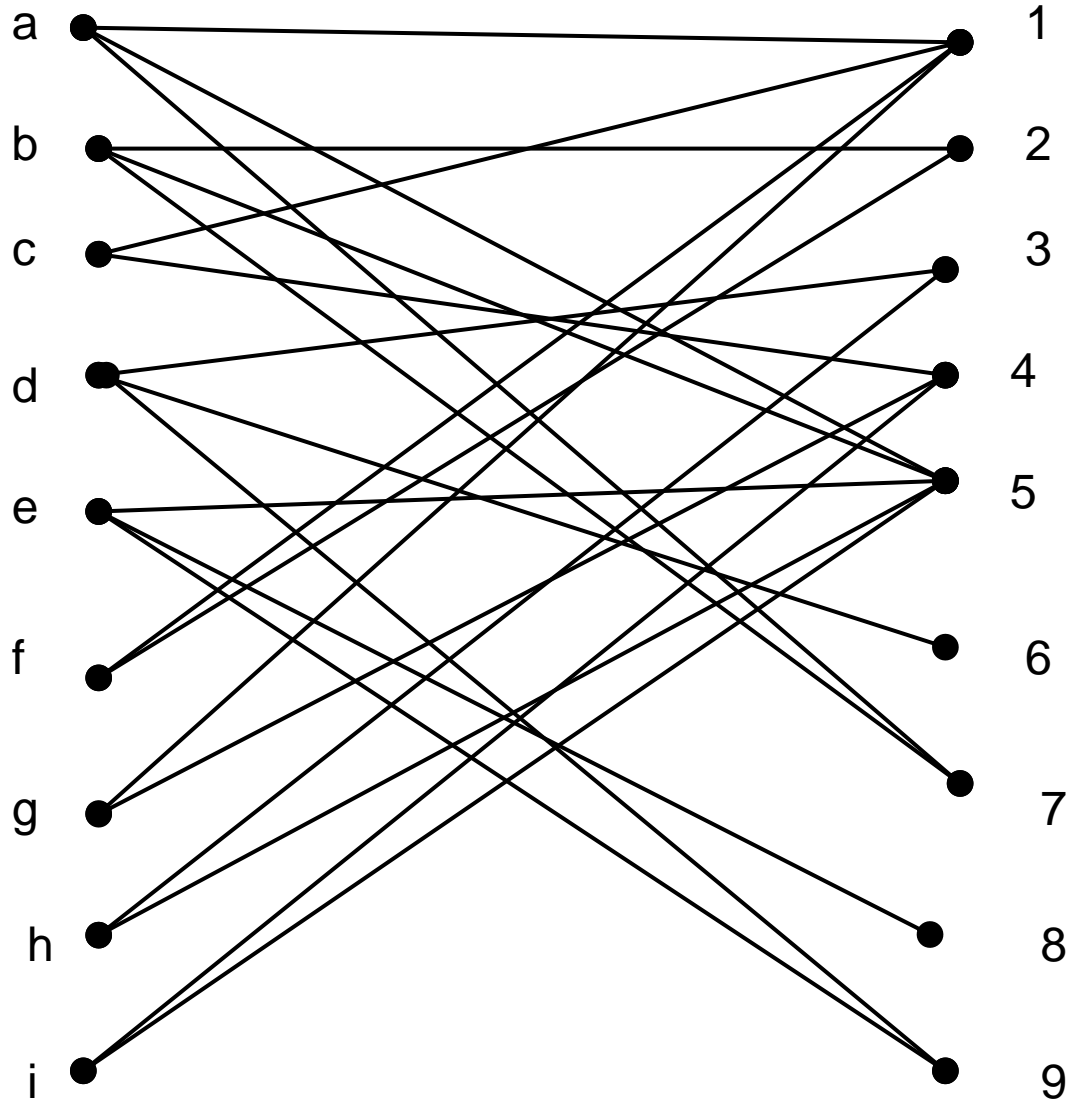
MACAR ALGORİTMASI

Adım1: Herhangi bir eşleme ile başla. Eşlemede var olan tüm tepeleri işaretle.

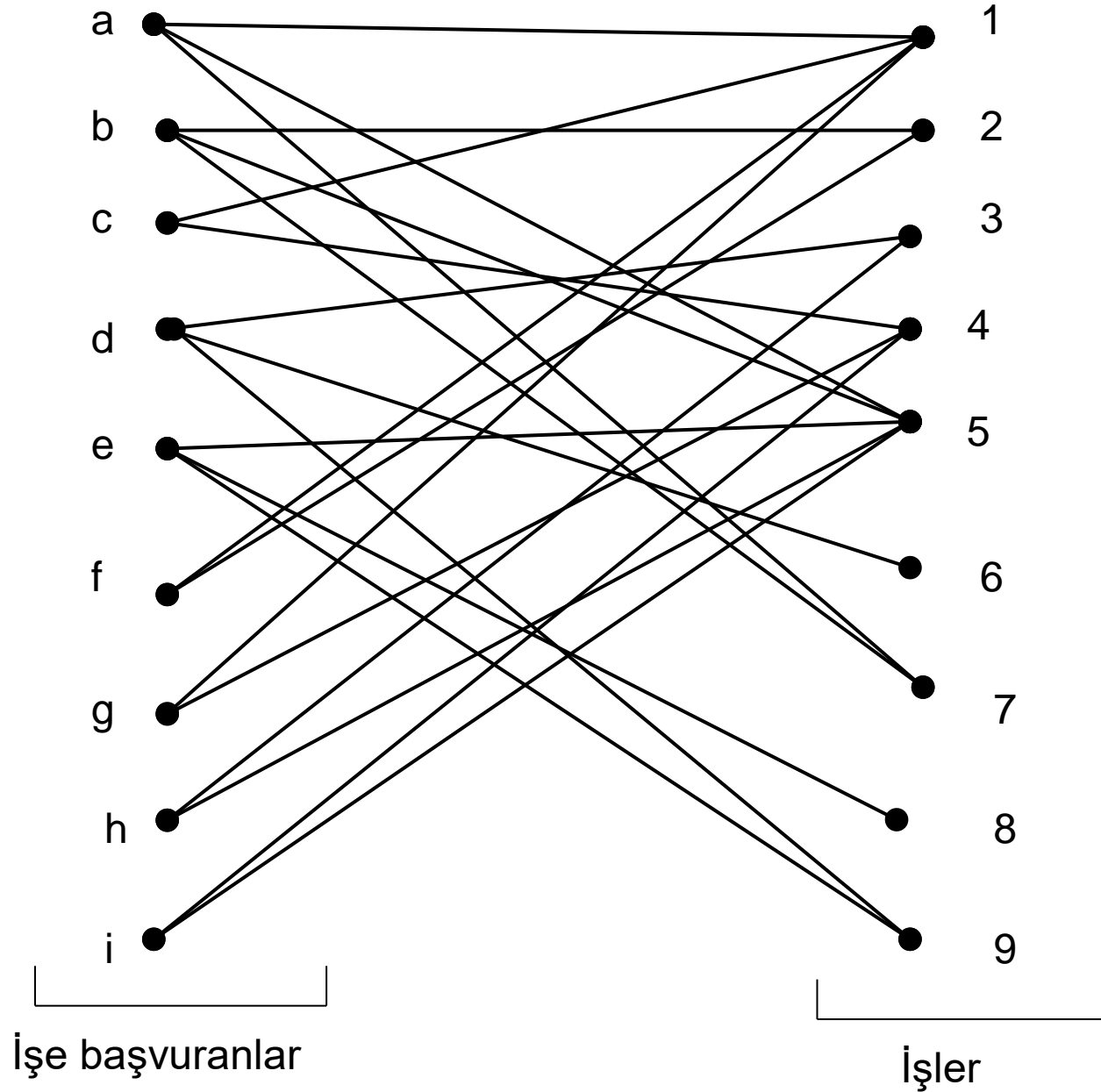
Adım2: Eşleştirilmemiş (işaretlenmemiş) başka tepe var mı? Yok ise DUR. Şu anda eşleme en büyük eşlemedir. Aksi halde Adım 3 e git.

Adım3: Bir a tepesi eşleştirilmemiş ise a tepesinden bir M seçenekli ağaç oluştur.(Büyüt). Eğer ağaç bir M arttıran yol içeriyor ise M eşlemesinden yolun M ayrıtlarını (eşlemedeki ayrıtları) sil ve yolun diğer ayrıtlarını eşlemeye ekle. Tüm seçilebilir uygun tepeleri işaretle ve Adım2 ye git. Eğer ağaç M arttıran yol içermiyor ise a tepesindeki işareti kaldır (seçme) ve Adım2 ye git.

Örnek: Aşağıdaki grafın en büyük eşlemesini Macar algoritması ile bulalım.



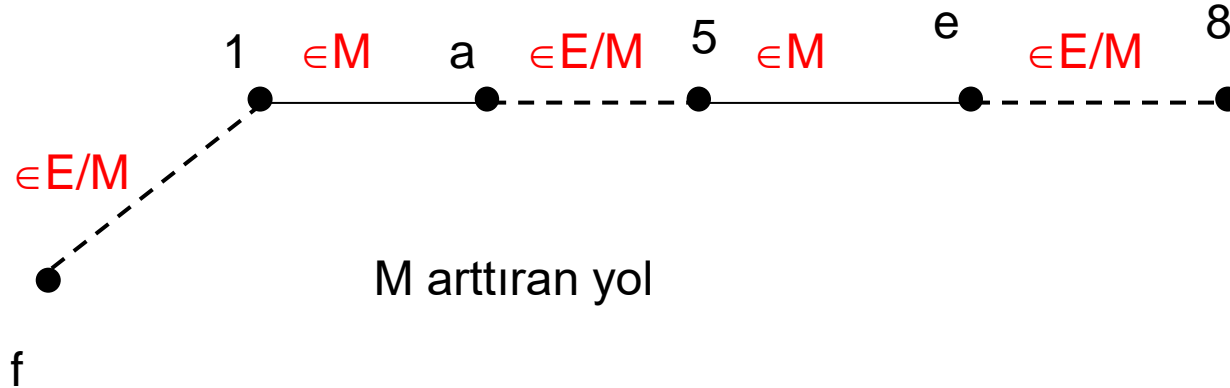
Grafı aşağıdaki gibi de düşünebiliriz.



Adım1: Başlangıç olarak $M=\{a1,b2,c4,d3,e5\}$ eşlemelerini alalım.

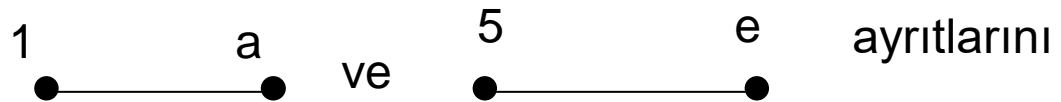
Adım2: f, eşleştirilmemiş (doyurulmamış) tepe olup, seçelim.

Adım3: f den ağaç oluşturalım.



f den 8 e bir M-arttıran yol var olup,

M eşlemesinden
çıkaralım.

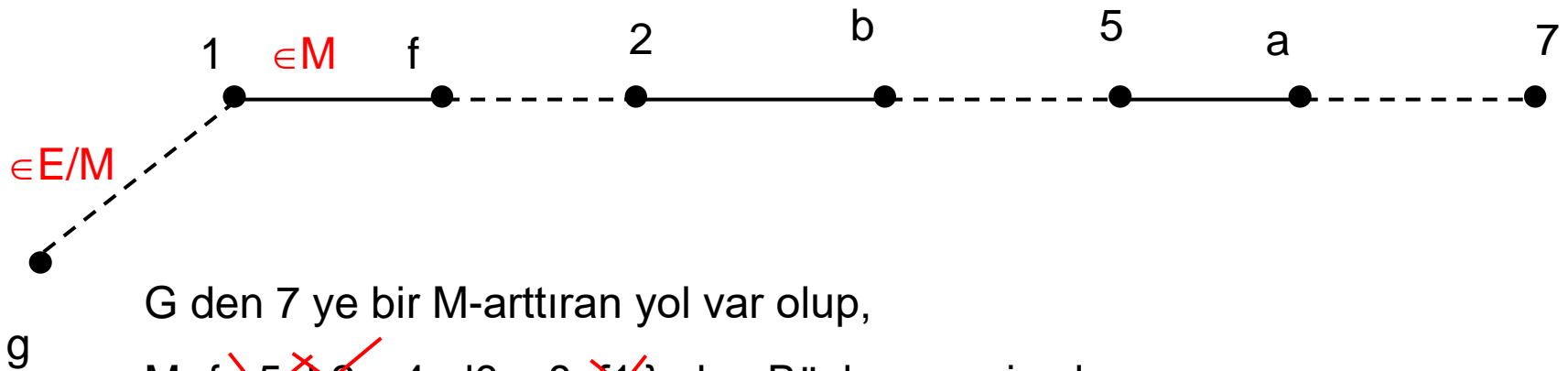


$M = \{ a1, b2, c4, d3, e5 \}$. Böylece yeni eşlememiz,

$M = \{ f1, b2, c4, d3, a5, e8 \}$ olur.

Adım2: Bu kez g tepesini seçelim.

Adım 3: g den ağaç oluşturalım.



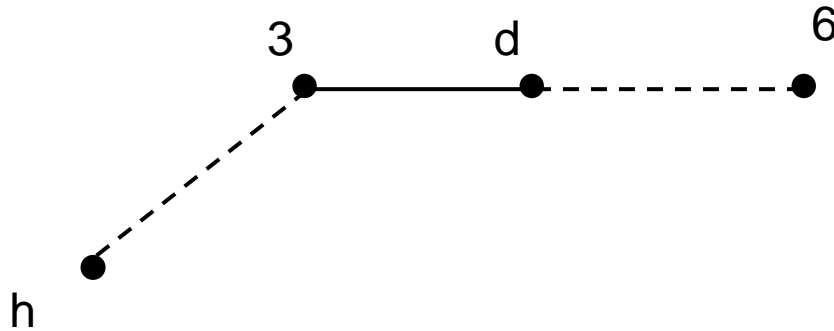
G den 7 ye bir M-arttıran yol var olup,

$M = \{ \cancel{a5}, \cancel{b2}, c4, d3, e8, \cancel{f1} \}$ olur. Böylece yeni eşleme

$M = \{ g1, f2, b5, a7, c4, d3, e8 \}$ olur.

Adım2: bu kez h tepesini alalım.

Adım3: h den ağaç büyütelim.

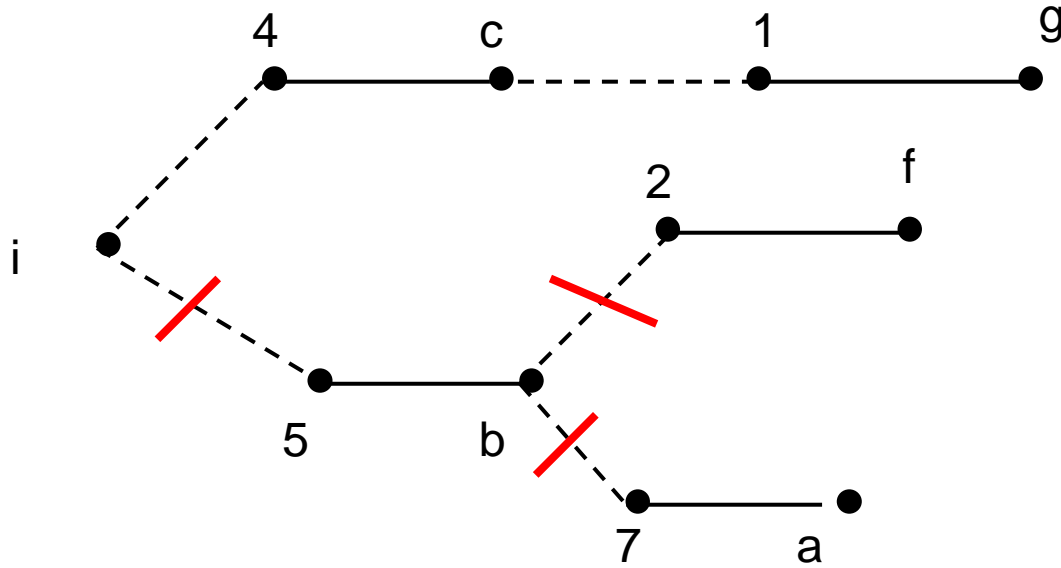


h den 6 ya bir M-arttıran yol var olup, $M=\{ g1, f2, b5, a7, c4, d3, e8\}$ yerine yeni eşlememiz

$M=\{ h3, d6, g1, f2, b5, a7, c4, e8\}$ olur.

Adım2: i tepesini alalım.

Adım 3: i den ağaç oluşturalım.

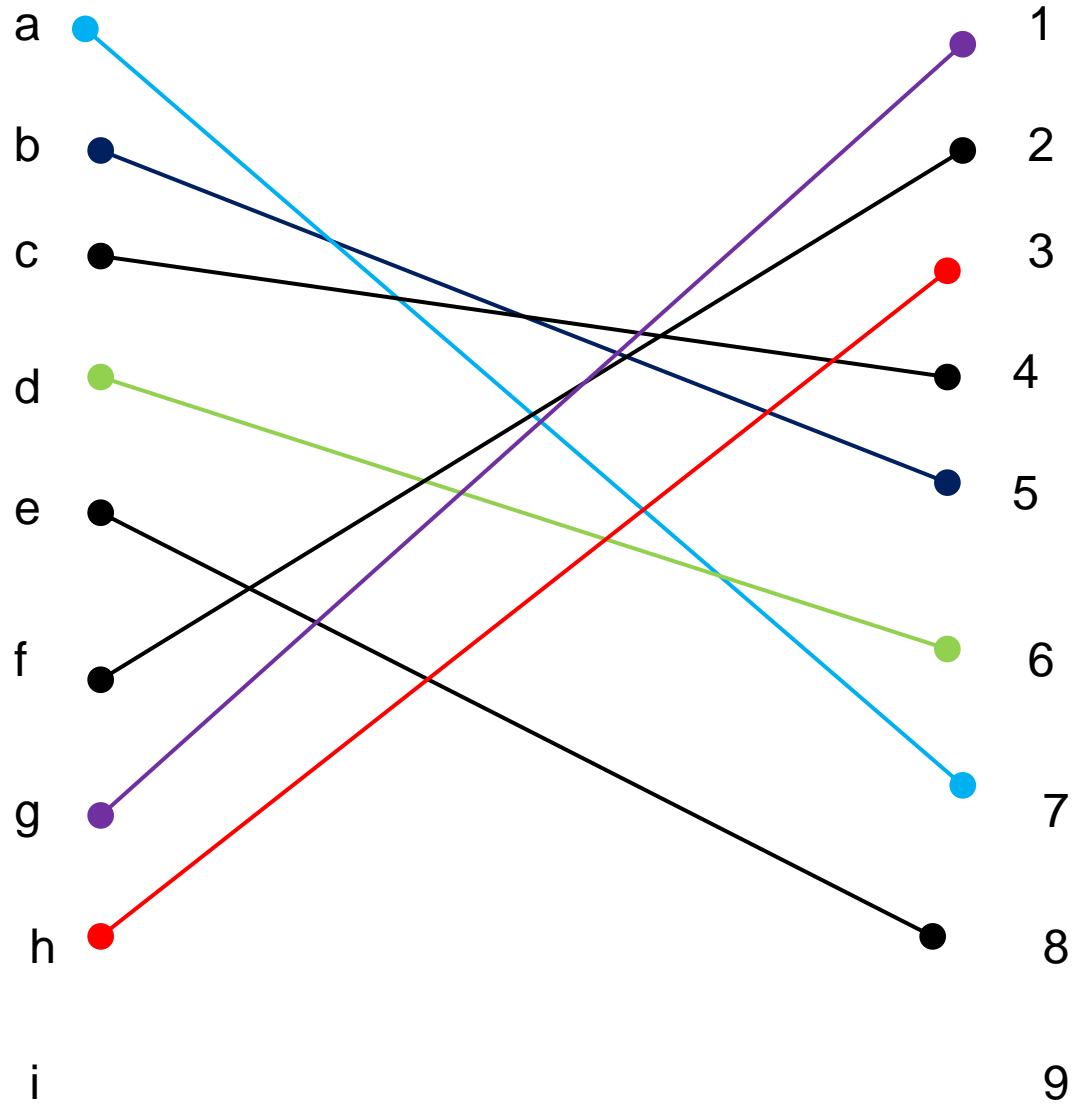


Hiçbir şekilde i den başlayan bir arttıran yol oluşturulamaz. Dolayısıyla, son elde edilen M eşlemesinin eleman sayısı değişmez. Yani $M = \{ h3, d6, g1, f2, b5, a7, c4, e8 \}$ eşlemesi, maksimum eşlemedir.

Sonuç: 9 kişiden birisi, bir işe atanamayacaktır.

Örnek çözümü:

$M = \{ h3, d6, g1, f2, b5, a7, c4, e8 \}$



KAYNAKLAR

- [1] Chartrand, G.-Lesniak, L., (1986) : *Graphs and Digraphs*, Wadsworth & Brooks, California
- [2] West D.B. (2001) : *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, USA.
- [3] Graf Teoriye Giriş, Şerife Büyükköse ve Gülistan Kaya Gök, Nobel Yayıncılık
- [4] Discrete Mathematical Structures for Computer Science, Ronald E. Prather, Houghton Mifflin Company, (1976).
- [5] Christofides, N., 1986. Graph Theory an Algorithmic Approach, Academic Press, London