BİLGİSAYAR BİLİMLERİNDE GÜNCEL KONULAR II

Hafta 14

- Graflarda Zedelenebilirlik Parametreleri

- Kimyasal sistemler, sinir ağları, sosyal ağlar ya da internet gibi farklı sistemleri modellemek için iletişim ağları ve karmaşık sistemler kullanılır. Fizik bilimleri, biyoloji bilimleri, bilgisayar bilimleri ve matematik gibi çeşitli araştırma alanlarında iletişim ağlarının topolojisini çalışma giderek artmaktadır ve büyük bir ilgi görmektedir.

- Çizge Teorisi, bir iletişim ağının mimarisinin analizi ve çalışmasında en güçlü matematiksel araçlardan biri haline gelmiştir. Bir iletişim ağının altında yatan topoloji bir $G(V(G), E(G))$ çizgesi ile modellenir. Bu G çizgesinin $V(G)$ tepeler kümesi iletişim ağındaki işlemciler kümesidir, $E(G)$ ayrıtlar kümesi ise iletişim ağındaki iletişim hatlarının bir kümesidir.

- Karmaşık sistemlerindeki ana konu, onun zedelenebilirlik ve dayanıklılığının değerlendirilmesidir. Zedelenebilirlik iletişim ağının analizinde önemli bir kavramdır. Bir iletişim ağının zedelenebilirliği o iletişim ağının altında yatan çizgenin global gücünün ölçümü olarak tanımlanmaktadır.

- Bir iletişim ağında bazı merkezlerin veya bağlantı hatlarının bozulmasıyla iletişim kesilene kadar ağın gösterdiği dayanma gücünün ölçümüne "ağın zedelenebilirlik sayısı " denir.

- İletişim sistemleri, genellikle kopmalara ve saldırılara maruz kalırlar. İletişim ağının dayanıklılığını ölçmek için literatürde çeşitli ölçümler varken iletişim ağının güvenirliliğini hesaplayacak formülleri türetmek için de birçok çizge teorik parametreleri kullanılmaktadır.

- Çizgelerdeki ilk zedelenebilirlik parametresi Bağlantılılık sayısı (Connectivity)' dır. Daha sonra birçok zedelenebilirlik parametresi tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları; dayanıklılık (toughness), saçılma sayısı (scattering number), bütünlük (integrity), baskınlık sayısı (domination number), bağımlılık sayısı (bondage number)' dır.

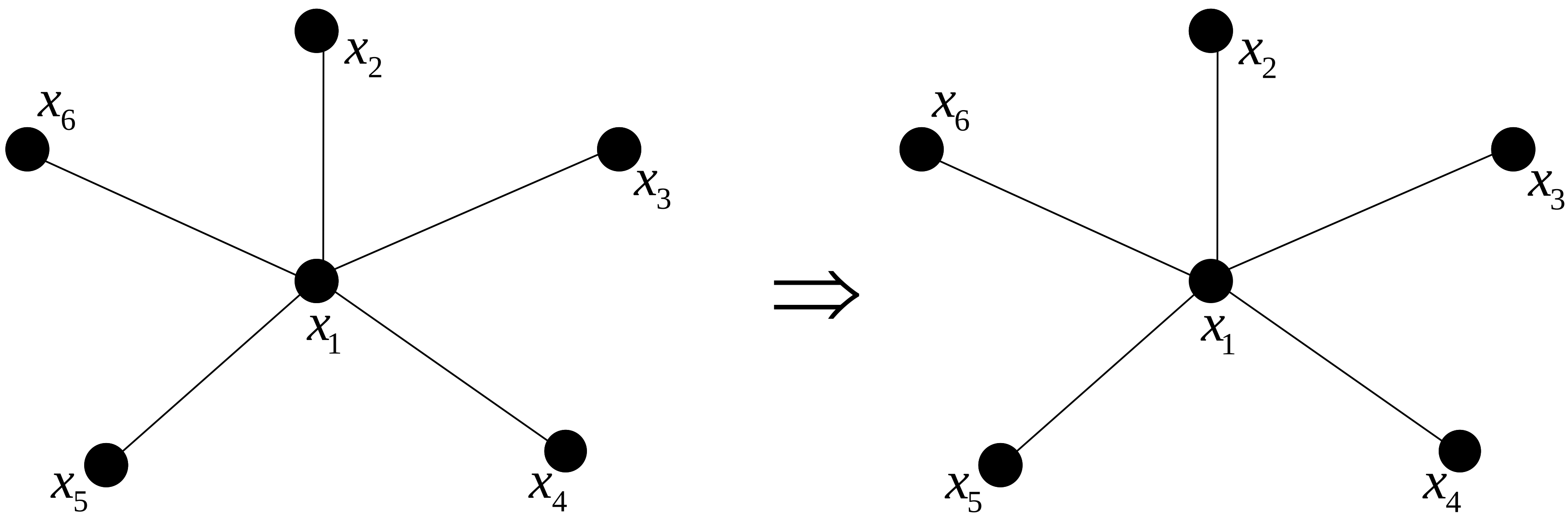
2. BAZI ÖNEMLİ ZEDELENEBİLİRLİK PARAMETRELERİ

Tanım 2.1: [14] Bir *G* çizgesini bağlantısız veya sadece izole tepelerden oluşan bir çizge haline getirmek için çizgeden çıkarılması gereken en az tepe sayısına çizgenin ***tepe bağlantılılık sayısı*** *(connectivity)* denir ve $k(G)$ ile gösterilir. Bir *G* çizgesinin bileşenlerinin sayısı *w(G)* olmak üzere, connectivity tanımı;

$$k(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \left\{ |S| : w(G-S) \geq 2 \right\}$$

şeklinde de yazılır.

Örnek 1:

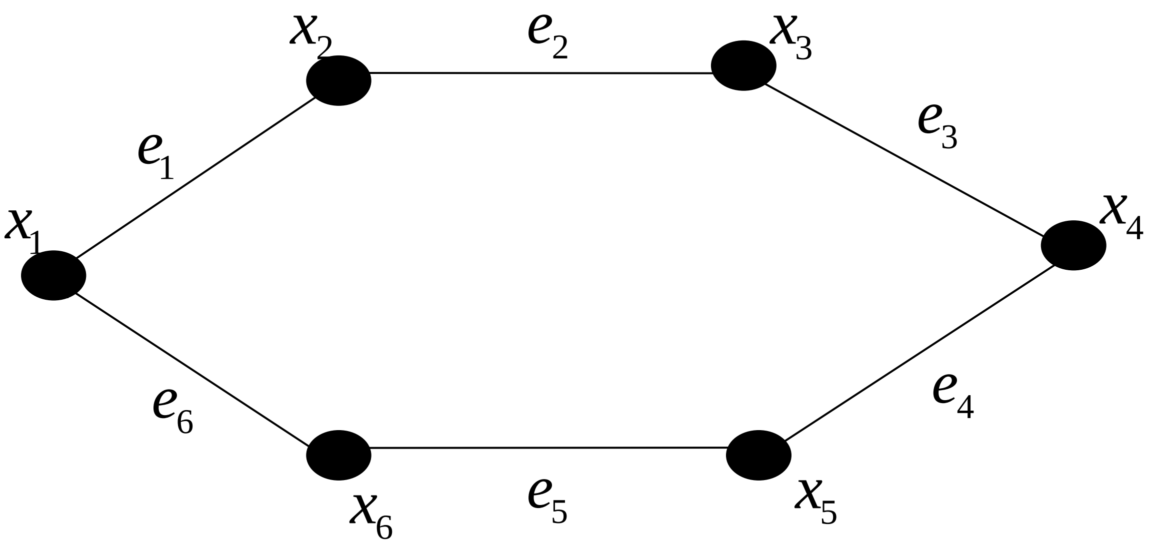


$K_{1,5}$ $\qquad\qquad$ $K_{1,5}-\{x_1\}$

$$k(K_{1,5})=1$$

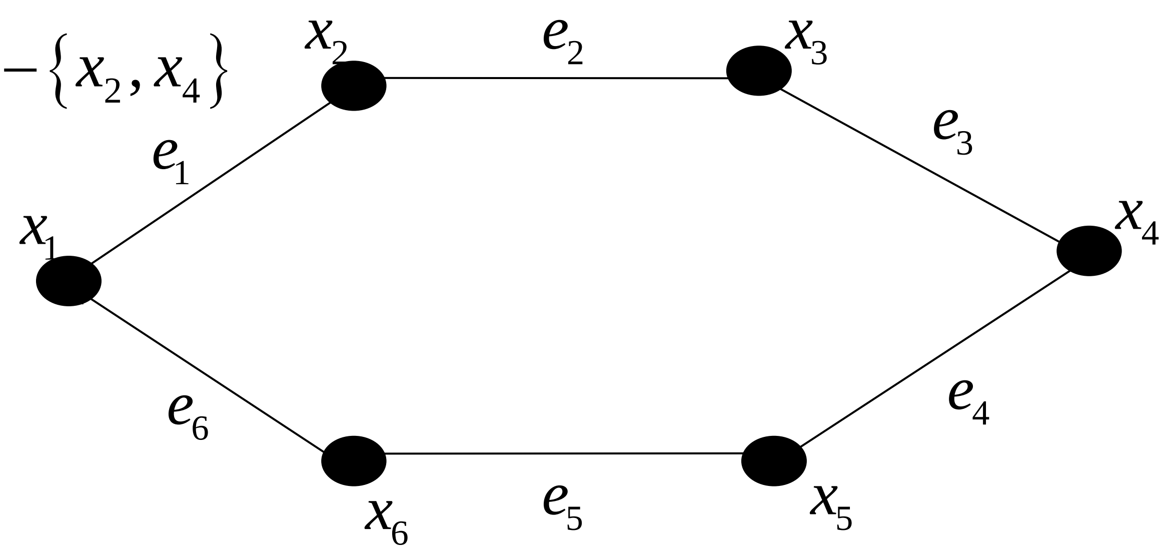
Örnek 2:

C_6



$$\Downarrow$$

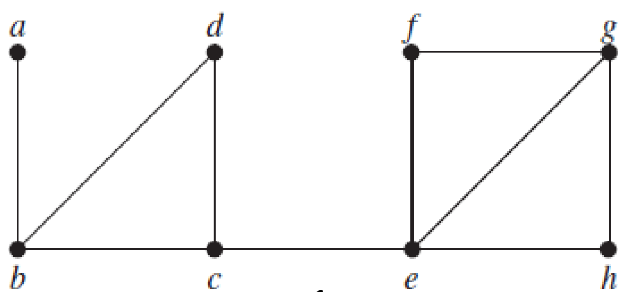
$C_6 - \{x_2, x_4\}$



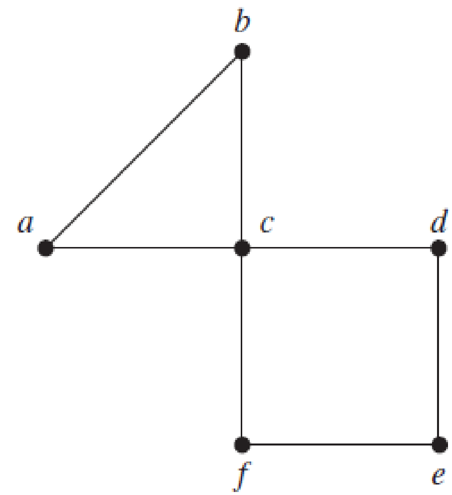
$$k(C_6) = 2$$

Örnek 3:

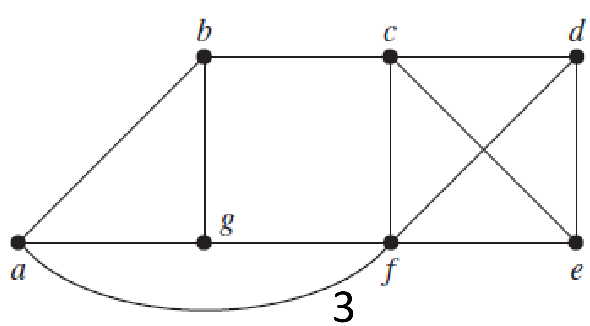
-- Aşağıdaki grafları bağlantısız yapmak için graftan atılması gerekli tepele



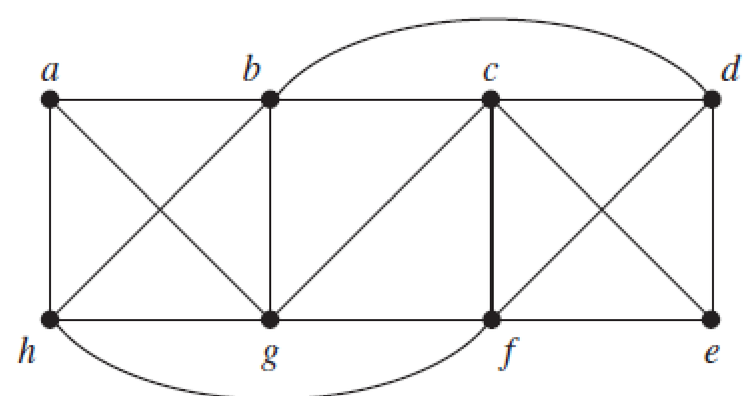
1



2



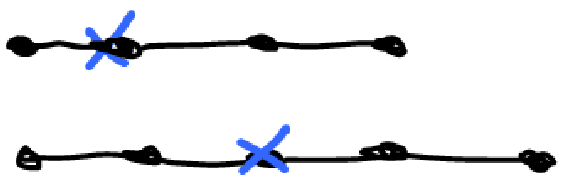
3



4

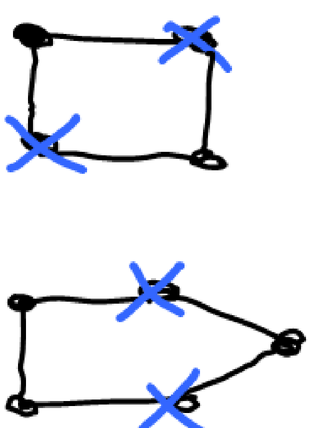
Tanım 1: Bağlantılı bir *G* grafını bağlantısız yapmak veya tek izole tepe elde etmek için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısına grafın **bağlantılılığı (connectivity)** denir ve *k(G)* ile gösterilir. Önemli grafların connectivity değerleri aşağıdadır.

1) Yol Graf



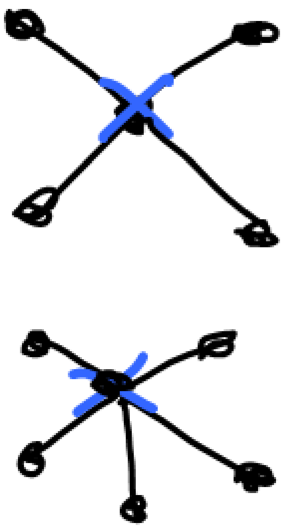
$k(P_n) = 1$

2) Cevre Graf



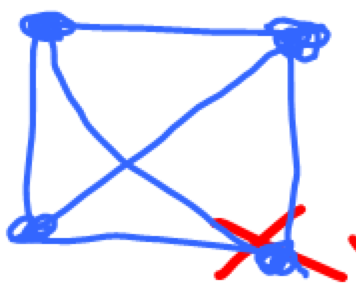
$k(C_n) = 2$

3) Yıldız Graf



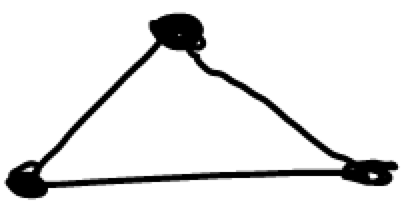
$$k(K_{1,n}) = 1$$

4) Tam Graf



K_4

olur

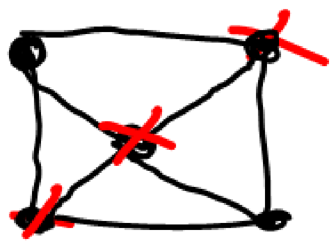


K_3

$$\kappa(K_n) = n-1$$

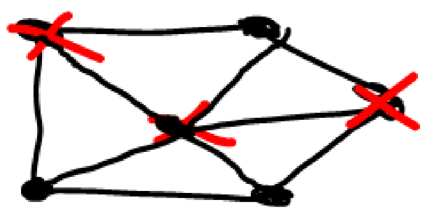
izole tepe kalmayana kadar tepe atılır.

5) Tekerlek Graf



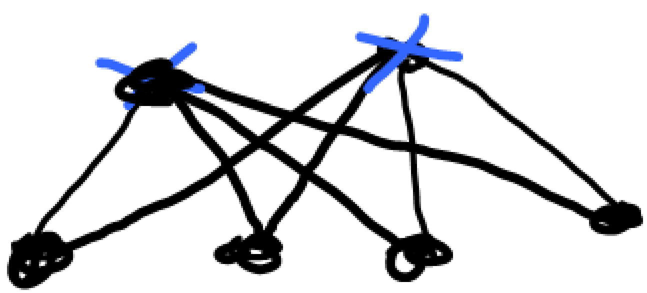
$W_{1,4}$

$\Big\} \; k(W_{1,n}) = 3$



$W_{1,5}$

6) iki parçalı tam graf



$\Rightarrow \; k(K_{m,n}) = \min\{n,m\}$

Tanım: G grafı eğer $\kappa(G)=n$ n-bağlı graftır denir.

Teorem: G, 2-bağlı bir graf ve u ve v bu grafın 2 tepesi olsun. Bu durumda G'de bir C çevrimi vardır öyleki u ve v bu döngüde yer alırlar.

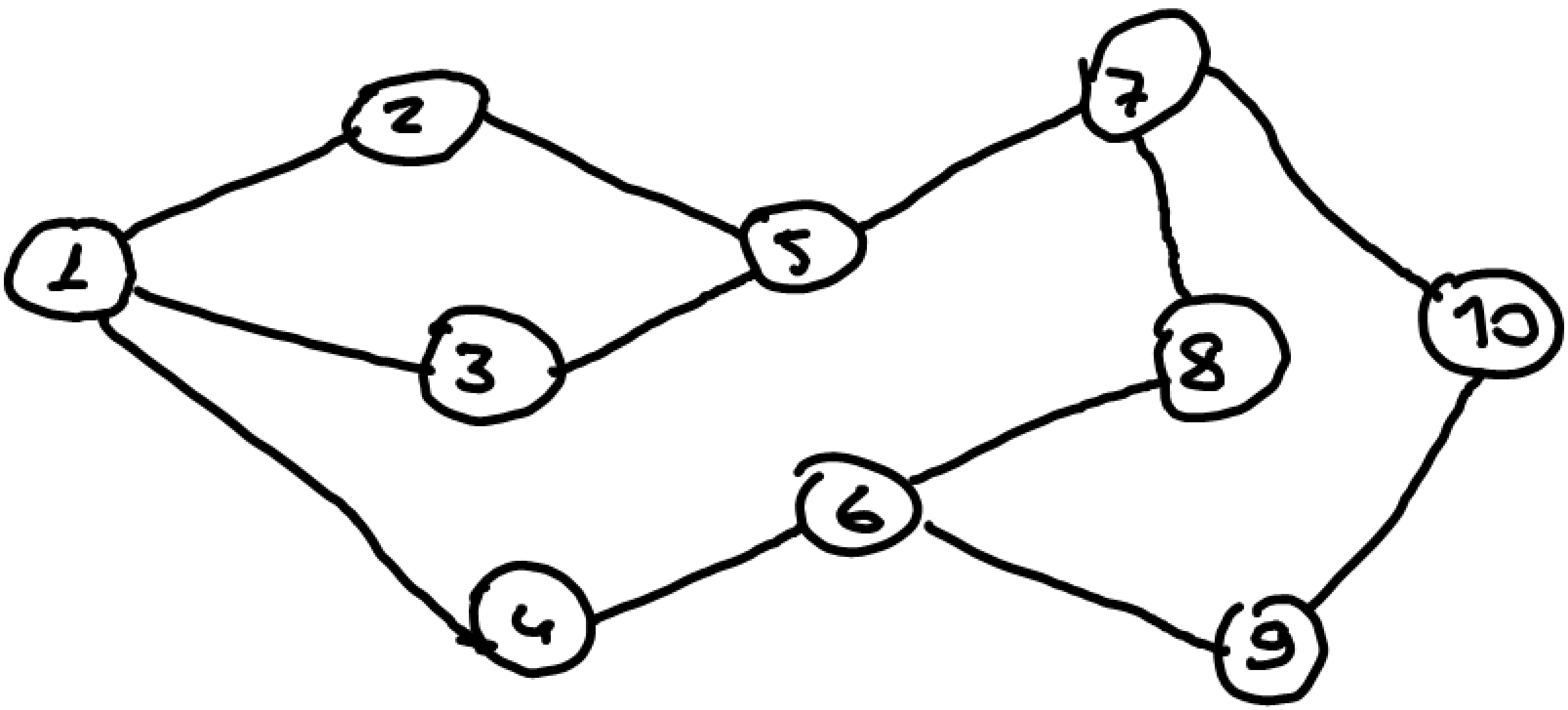
- K_n den bir tepe çıkarılır ise K_{n-1} elde edilir.
  Öyleyse $\kappa(K_n)= n-1$

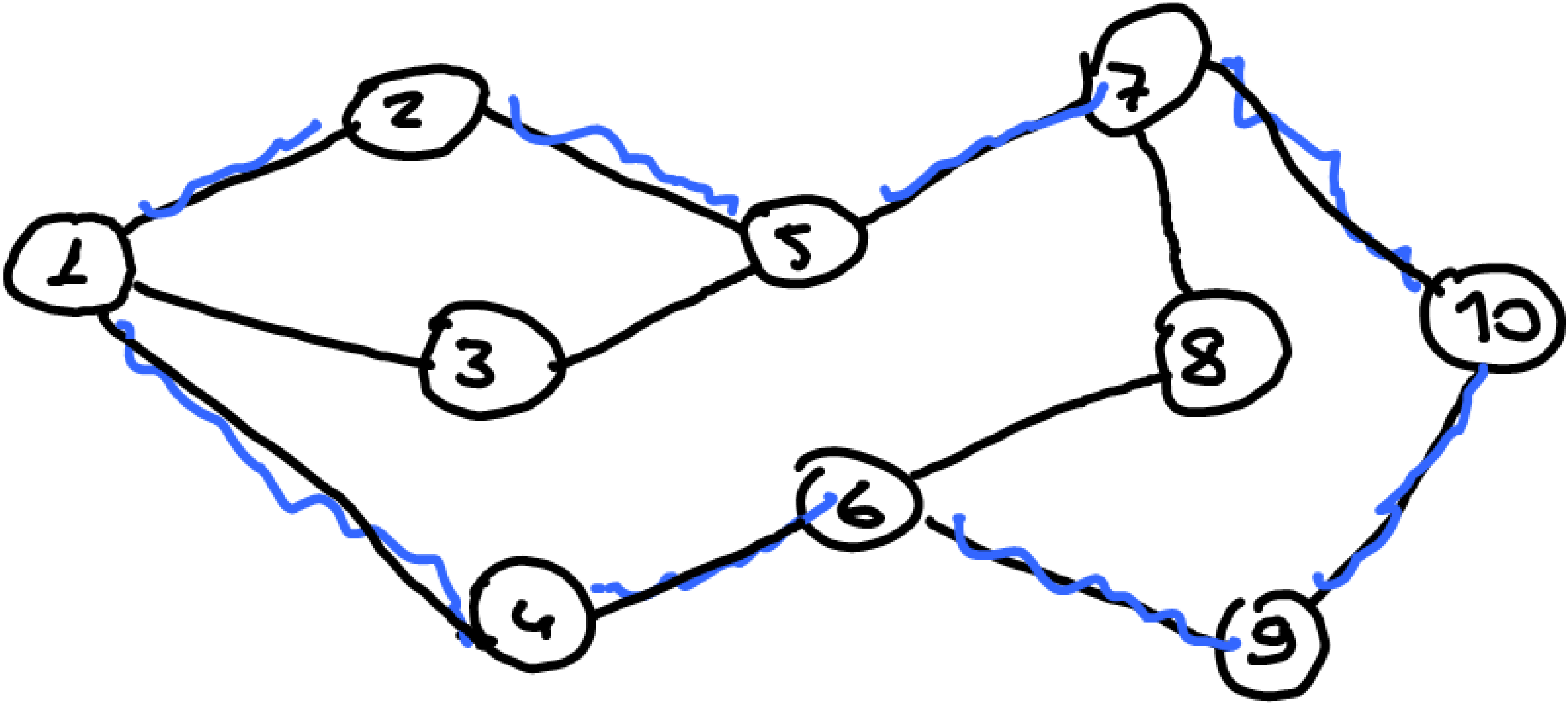
Bir Grafın Connectivity Değerlerinin Bulunması

Ağlardaki maksimum akış minimum kesme ye dayanan Menger'in teoremi birleştirilmişlik konusundaki en temel teoremdir ve bu teoreme göre bir grafta bitişik olmayan u ve v tepeleri arasındaki tepe tekrarsız yolların maksimum sayısı u ve v yi bağlantısız yapmak için çizgeden atılması gereken minimum tepe sayısına eşittir. Tepe birleştirilmişlik için ifade edilen bu teorem ayrıt tekrarsız yollar kullanılarak ayrıt birleştirilmişlik için de geçerlidir. Bu haliyle teorem grafın bağlantısız olmasını sağlayan tepelerin hangileri olduğu ile ilgili bir bilgi vermemektedir.

Teorem . *Bağlantılı bir G grafında ayrık ve komşu olmayan iki tepe u ve v olsun. Buna göre, G'deki içten ayrık $u - v$ yollarının maksimum sayısı, u'yu v'den ayırmak için atılması gerekli tepelerin minimum sayısına eşittir.*

ÖRNEK: Aşağıda 10 tepeli bir G grafı verilmiştir. İçten ayrık yolların sayısı nedir?





1,2,5,7,10 } yolları 5 ve 6
1,4,6,9,10 } tepelerini kullanan
içten ayrık yollardır.

5 ve 6 tepelerini kullanan farklı

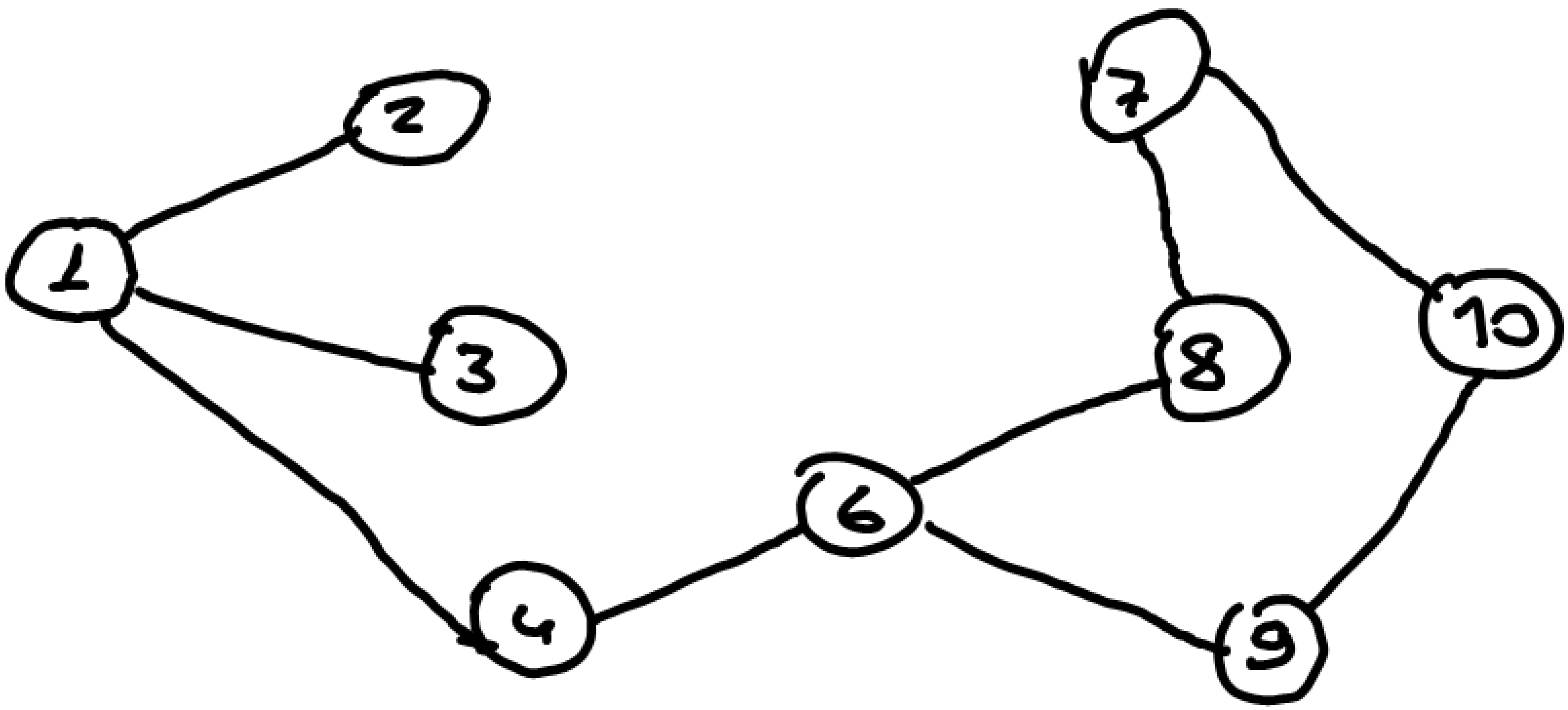
içten ayrık yollarda bulunabilir.

Fakat bunların sayısı maksimum

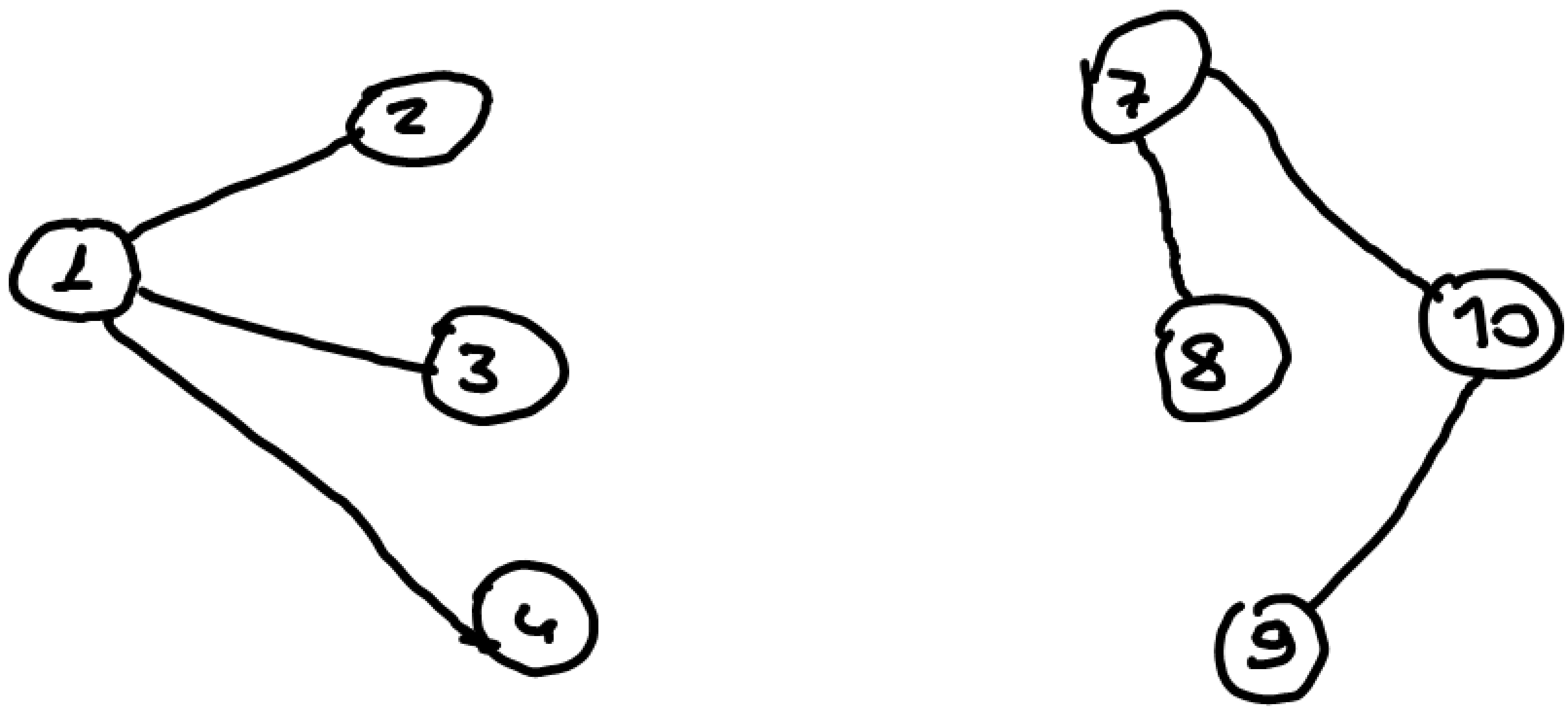
2'dir.

Böylece $k(G) = 2$ elde edilir.

5 tepesi silindiğinde



5 ve 6 tepeleri silindiğinde:



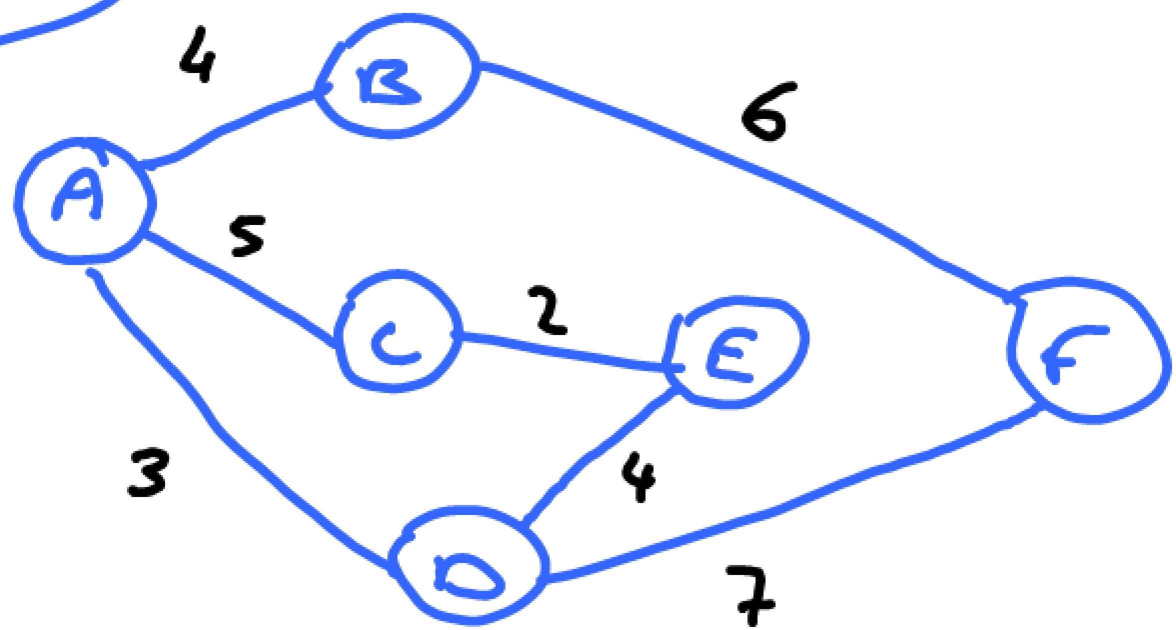
* içten ayrık yolların sayısı Ford-Fulkerson (en büyük akış) algoritması yardımıyla bulunabilir.

Ford-Fulkerson Sözde Kodu

```
ford-fulkerson (G, s, t)
for each edge (u, v) ∈ E(G)
    f[u,v] = 0
    f[v,u] = 0
end

while (s'den t'ye p yolu var ise)
    cf(p) = min{ cf(u,v) | (u,v) ∈ p }
    for each edge (u,v) in p
        f(u,v) = f(u,v) + cf(p)
        f(v,u) = - f(u,v)
    end
end
```

Örnek)

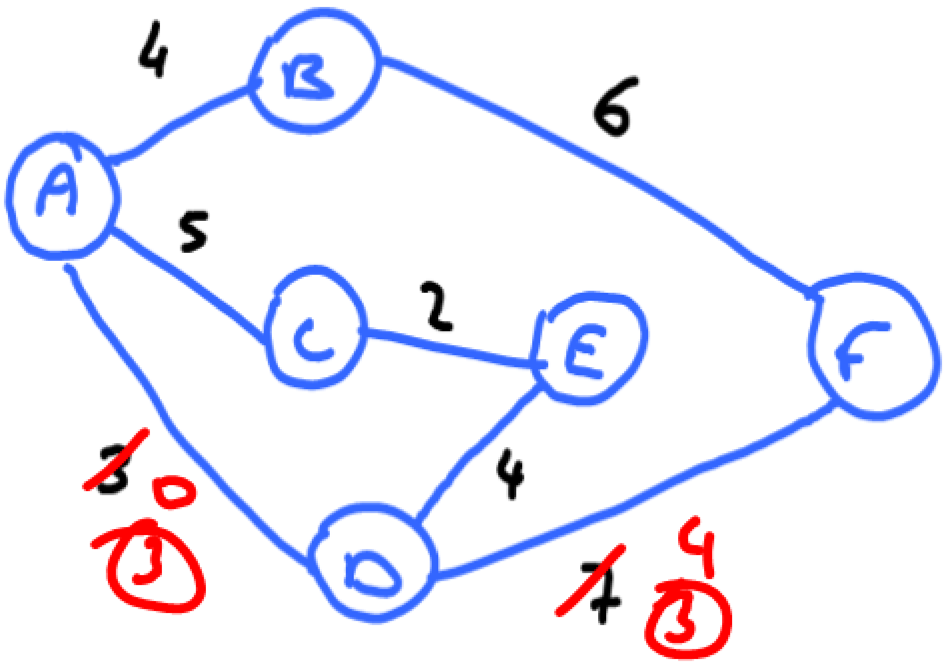


A→F'ye en büyük akış?

1. adım: DFS ile A→F ye yollar bulunur.

ADF yolu

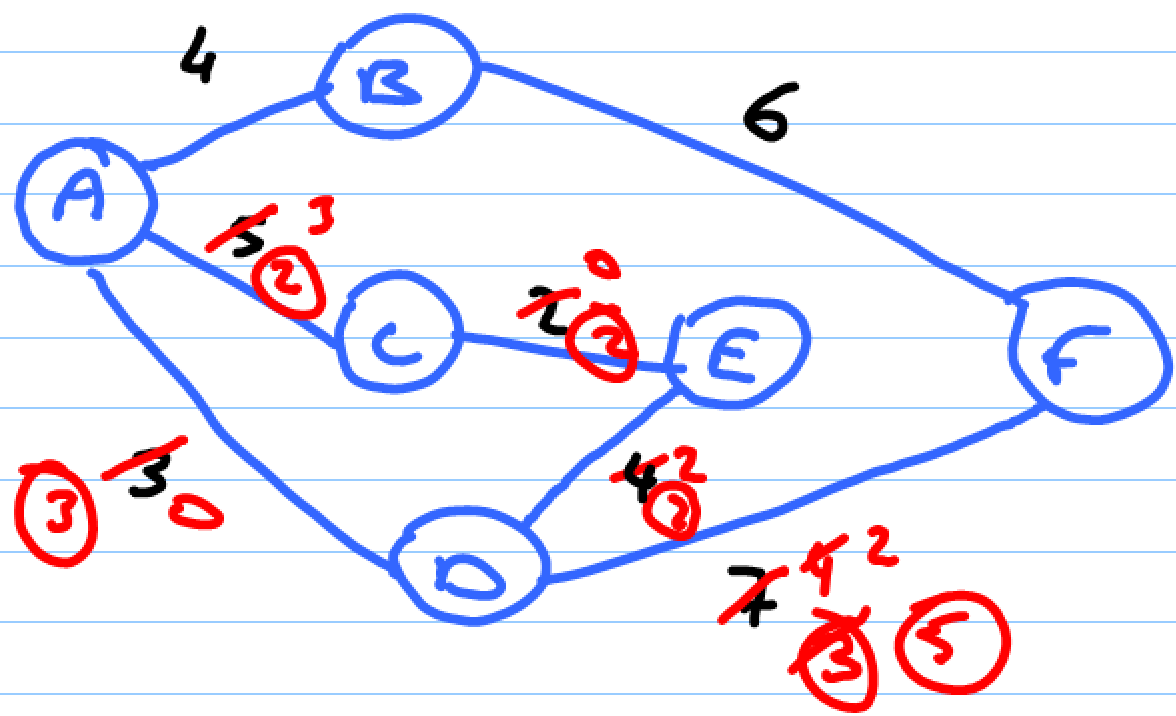
$\min\{\underset{3}{A-D}, \underset{7}{D-F}\} = 3$ //



2. adım: A C E D F yolu

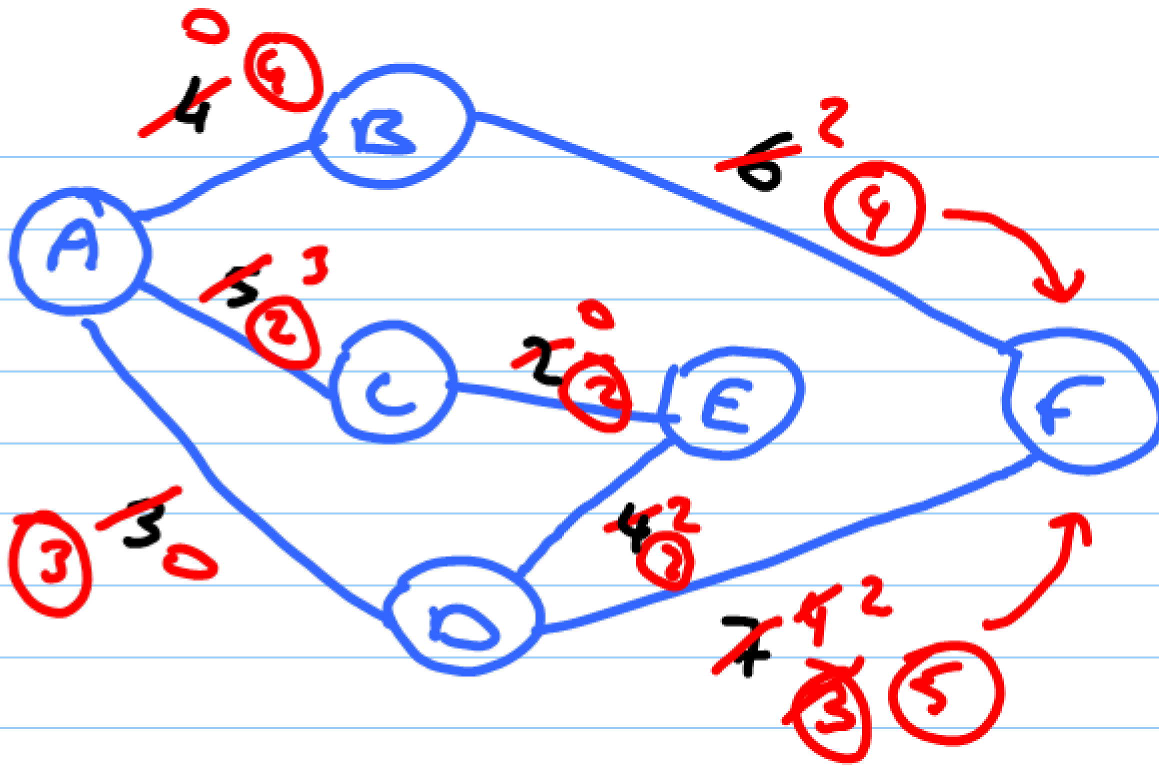
$\min\{A\text{-}C,\ C\text{-}E,\ E\text{-}D,\ D\text{-}F\} = 2$

5 2 4 3



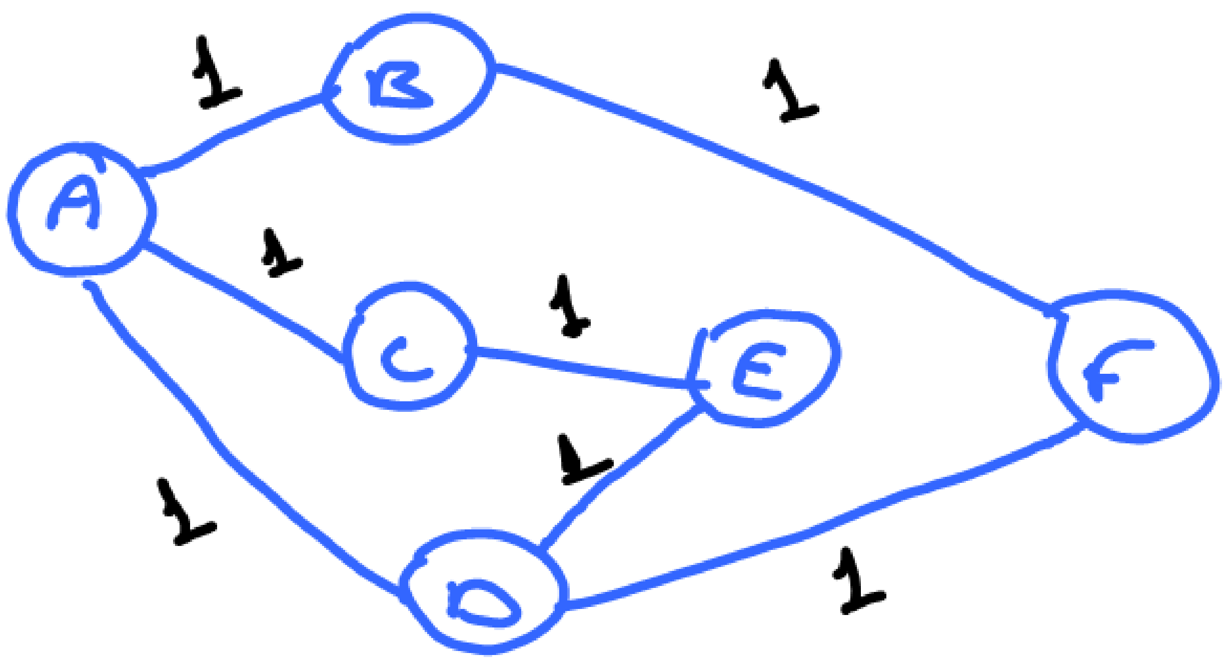
3. adım

ABF yolu $\quad \min\{\underset{4}{A-B},\ \underset{6}{B-F}\} = 4$



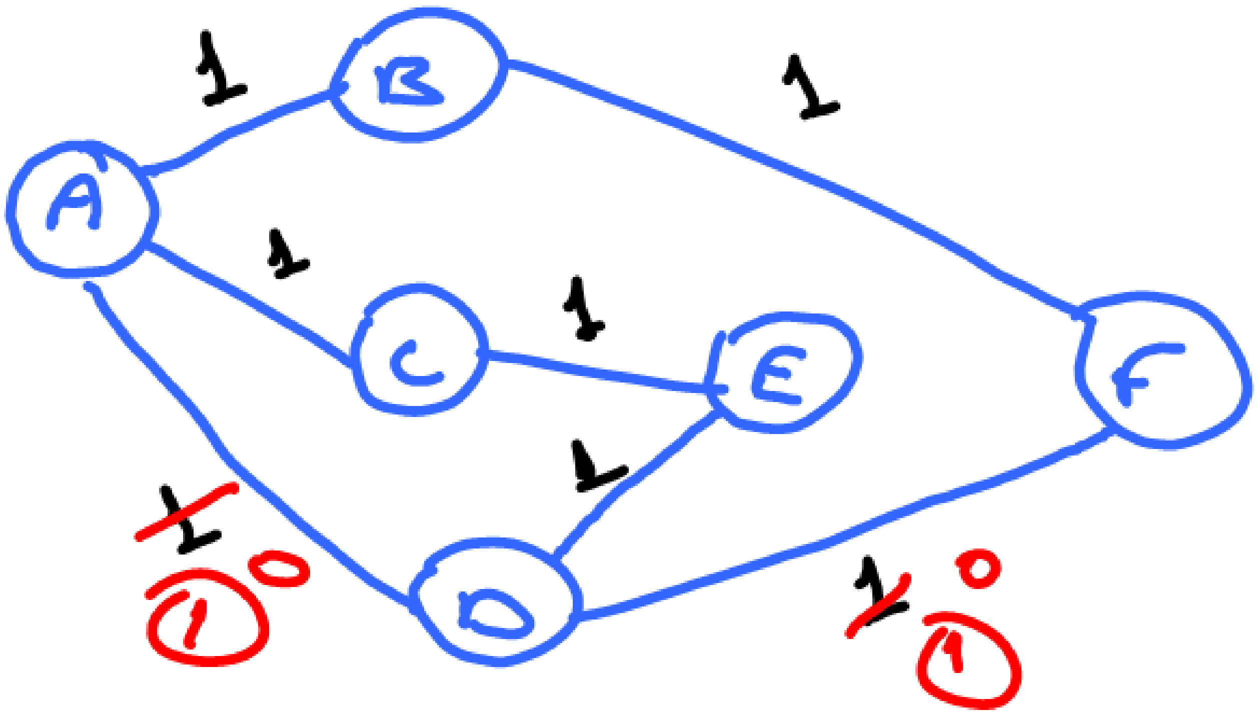
A'dan F'ye $4+5=9$ birim akış oldu.

* Tüm akış değerlerine 1 verdiğimizde, aşağıdaki graf elde edilir.



1. adım: ADF yolu

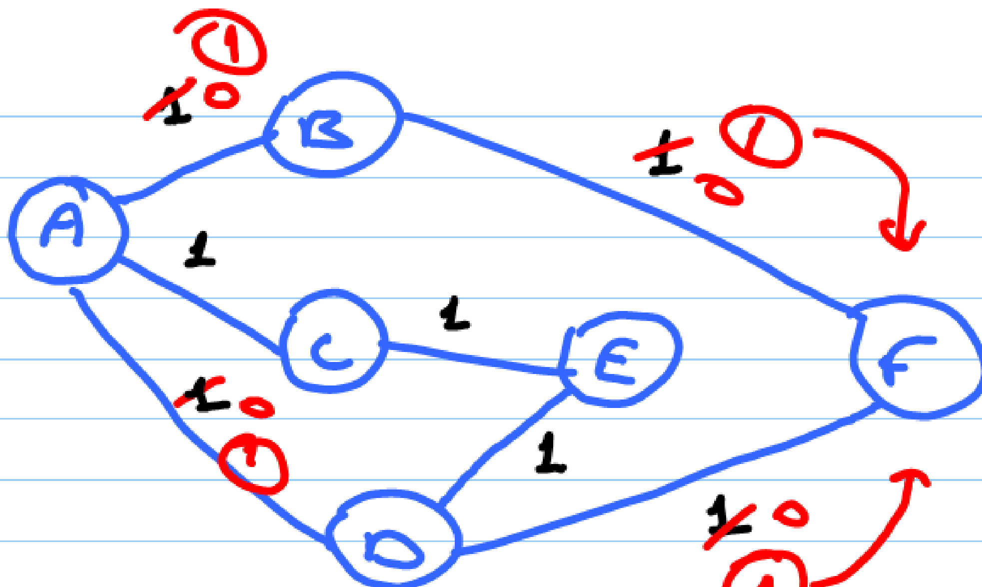
$$\min\{\underset{1}{A \to D}, \underset{1}{D \to F}\} = 1$$



2. adım: ACEDF yolu

$$\min\{\underset{1}{A-C},\ \underset{1}{C-E},\ \underset{1}{E-D},\ \underset{0}{D-F}\} = 0$$

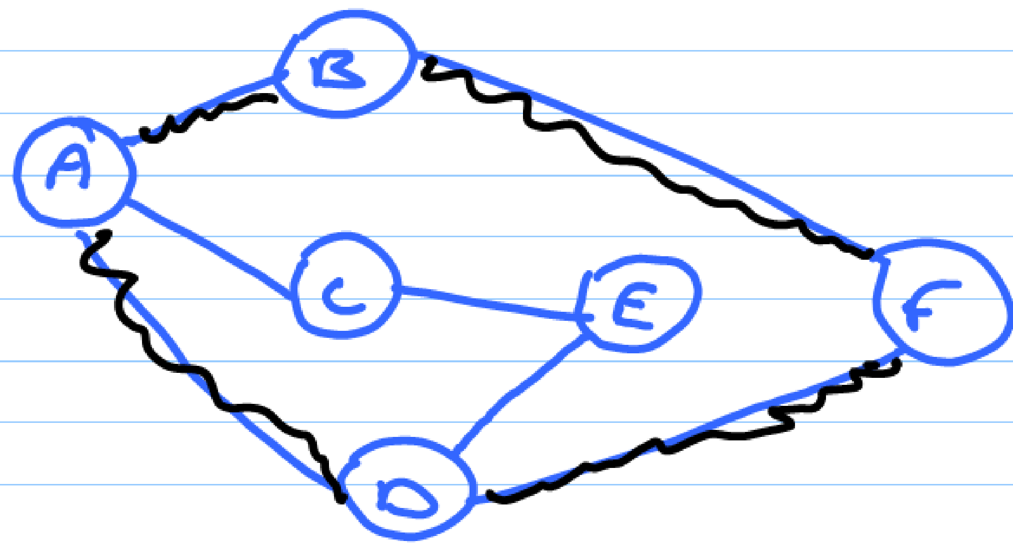
3. adım: ABF yolu $\min\{\underset{1}{A-B},\ \underset{1}{B-F}\} = 1$



$1+1=2$ mak. akış

içten ayrık yolların sayısı

Sonuç olarak: içten ayrık yolların sayısı 2'dir.



Böylece $k(G) = 2$ 'dir.

içten ayrık yollarda ortak ayrıt yoktur!!!

-- Connectivity değeri polinom zamanda hesaplanır…

-- Connectivity değeri tanımlandıktan sonra connectivity değerine bağlı bir çok Zedelenebilirlik parametresi tanımlanmıştır.

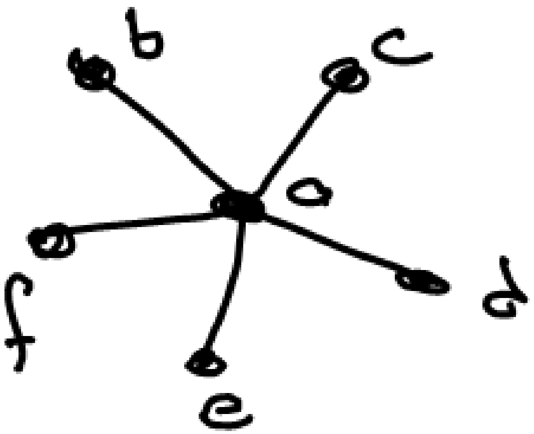
-- Ortalama Alt Connectivity (Average Lower Connectivity) değeri bu parametrelerin önemlilerinden biridir.

Ortalama Alt Connectivity Değeri

$$k_{av}(G) = \frac{1}{|V(G)|} \sum_{v \in V(G)} S_v(G)$$

$S_v(G)$: v tepesini içeren minimum elemanlı kümedir. Bu kümeyi grafta attığımızda graf ya bağlantısız kalır ya da izole tepe kalır.

Örnek: $k_{au}(K_{1,5}) = ?$



$S_a(K_{1,5}) = 1$ $\{a\}$

$S_b(K_{1,5}) = 2$ $\{a,b\}$

$S_c(K_{1,5}) = 2$ $\{a,c\}$

$S_d(K_{1,5}) = 2$ $\{a,d\}$

$S_e(K_{1,5}) = 2$ $\{a,e\}$

$S_f(K_{1,5}) = 2$ $\{a,f\}$

Böylece: $\ell_{ave}(K_{1,5}) = \dfrac{1+2+2+2+2+2}{6}$

$$= \frac{11}{6} \cong 1.83$$

$$\boxed{\ell(K_{1,5}) = 1}$$

★) $\ell_{ave}(K_{1,5}) > \ell(K_{1,5})$

Örnek: Önemli grafların ortalama alt connectivity değerlerini bulunuz.

$k_{a}(P_n) = ?$ $\quad k_{a}(C_n) = ?$ $\quad k_{a}(K_n) = ?$

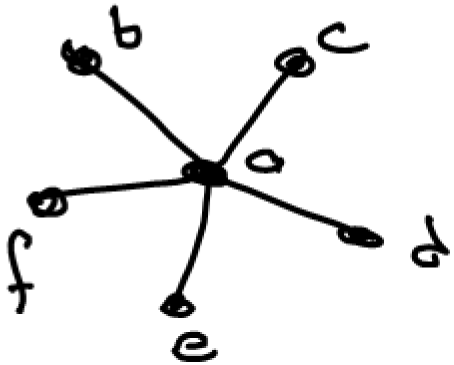
$k_{a}(W_{1,n}) = ?$ $\quad k_{a}(K_{1,n}) = ?$

Tanım: G bir çizge ve G çizgesinin tepelerinin herhangi bir kümesi S olsun. $G-S$ çizgesinin en büyük boyutlu bileşeninin tepe sayısı $m(G-S)$ olmak üzere, G çizgesinin ***tepe bütünlük değeri*** *(integrity)* denir.

$$I(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| + m(G-S)\} \text{ 'dir.}$$

Örnek:

$I(K_{1,5}) = ?$



S	$\lvert S \rvert$	$m(G-S)$	I^*
$\{a\}$	1	1	2
$\{a,b\}$	2	1	3
$\{a,b,c\}$	3	1	4
$\{b,c\}$	2	4	6
		$\vdots$	

$\boxed{I(K_{1,5}) = 2}$

Tüm alt kümeler bakılırsa : $O(2^n)$

- polinom zamanda hesaplanamaz.

- Sezgisel yaklaşımlar ile hesaplanabilir.

***Dayanıklılık Sayısı*:** Bir G grafının kesim tepesi S ve $G-S$ grafının bileşenlerinin sayısı $\omega(G-S)$ olmak üzere bu grafın dayanıklılık (toughness) sayısı,

$$t(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \left\{ \frac{|S|}{w(G-S)} \right\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım: Bir G çizgesi için $S \subseteq V$ ve $w(G\text{-}S)$, $G\text{-}S$ çizgesinin bileşen sayısı olmak üzere, bir çizgenin ***kararlılık (tenacity) değeri*** aşağıdaki biçimde tanımlıdır:

$$T(G) = \min_{S \subseteq V} \left\{ \frac{|S| + m(G-S)}{w(G-S)} \right\}$$

***Scattering Sayısı*:**

G bir graf ve G nin herhangi bir alt kümesi S kesim küme olsun. G-S grafındaki kalan bileşen sayısı, ω(G-S) olmak üzere G grafının scattering sayısı,

$$\mathrm{sc}(G)= \max_{S} \{ \omega(G\text{-}S) - |S|: S \subseteq V(G) \text{ ve } \omega(G\text{-}S) > 1 \}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım: Bir G çizgesi için ***parçalanma derecesi (rupture degree)***: $S \subseteq V$ olsun. *w(G-S)*, *G*-*S* çizgesinin bileşen sayısı ve $m(G-S)$, *G*-*S* çizgesindeki en büyük bileşenin tepe sayısı olmak üzere, bir çizgesinin dayanıklılık sayısı aşağıdaki biçimde tanımlıdır:

$$r(G) = \max_{S \subset V(G)} \left\{ w(G-S) - |S| - m(G-S) \mid w(G-S) > 1 \right\}.$$

KAYNAKLAR

[1] Chartrand, G.-Lesniak, L., (1986) : *Graphs and Digraphs*, Wadsworth & Brooks, California

[2] West D.B. (2001) : *Introduction to Graph Theory, Prentice Hall*, USA.

[3] Graf Teoriye Giriş, Şerife Büyükköse ve Gülistan Kaya Gök, Nobel Yayıncılık

[4] Discrete Mathematical Structures for Computer Science, Ronald E. Prather, Houghton Mifflin Company, (1976).

[5] Christofides, N., 1986. Graph Theory an Algorithmic Approach, Academic Press, London

[6] ALGORİTMALAR (Teoriden Uygulamalara), Vasif V. NABİYEV, Seçkin Yayıncılık