ORTALAMA ZİYARET SAYISI

$\beta<1$

$E=\{0,1,2\}$, $T=\{0,5,10,15,\dots\}$, $\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$ için;

$$\mathbb{P}^{(1)} = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

verilmiş olsun.

0 ve 2 → YUTAN

1 → GEÇİCİ

Ziyaret sayısı merak edilecek durum(lar) Geçici Durumlardır.

Yukarıdaki örnekte "1" durumu geçici durumdur.

$w_{i,j}$ → "i ile başlatılan markov zincirinde j durumunun ortalama ziyaret sayısı"

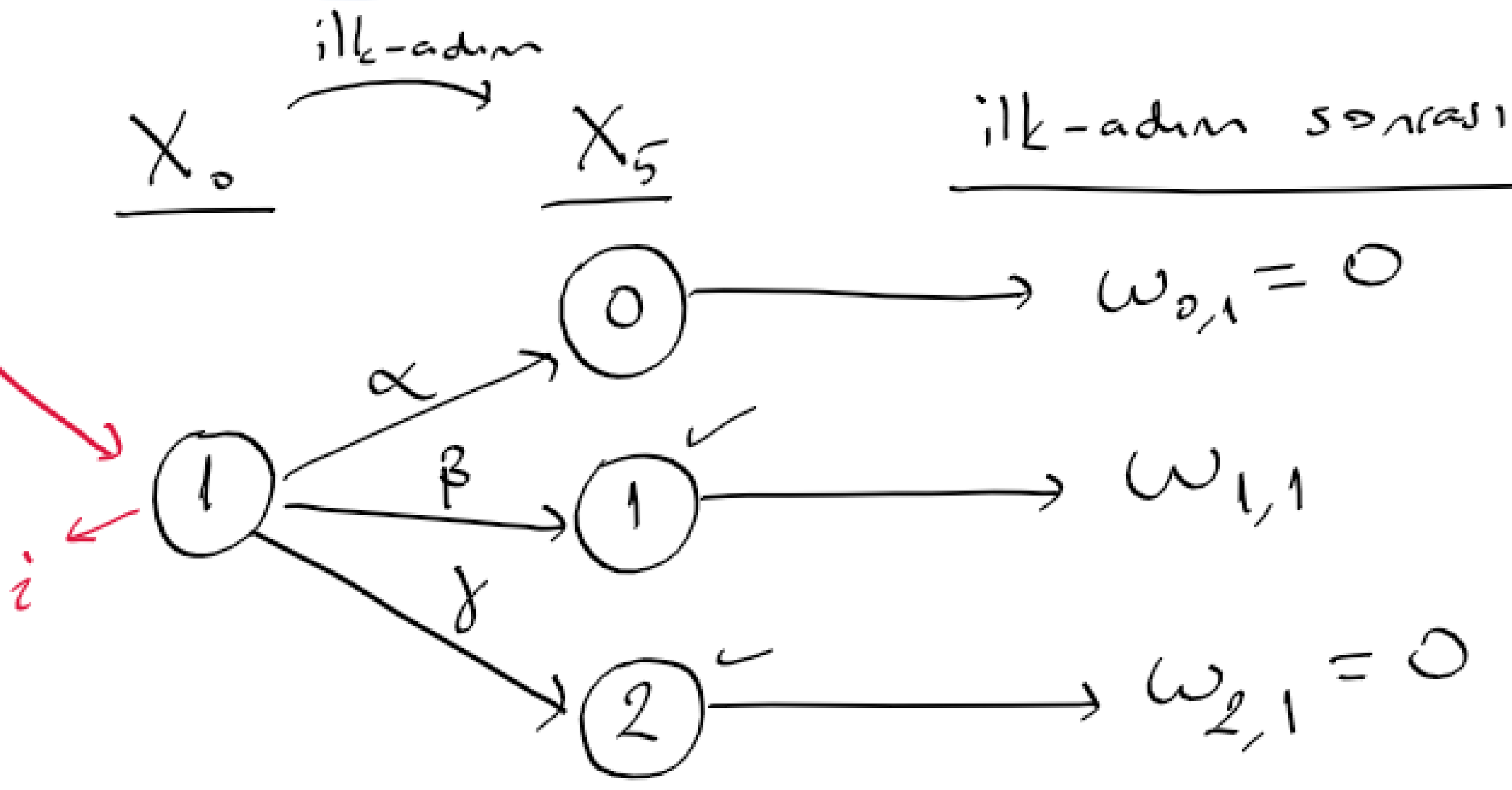
↳ geçici durum olmalı.

* $w_{0,1}=0$
* $w_{2,1}=0$

$w_{1,1}=?$ $\quad (1\le w_{1,1}<\infty)$

$w_{1,1}$ için ilk adım çözümlemesi

ilk-adım sonrası "1" durumunun ort. ziyaret sayısı



$$\Rightarrow \quad w_{1,1} = 1 + \alpha\cdot 0 + \beta\cdot w_{1,1} + \gamma\cdot 0$$

(i = j olduğu için)

Not: $i\neq j$ ise buraya "sıfır" yazılmalıdır

$$\Rightarrow \quad w_{1,1} = 1+\beta\cdot w_{1,1} \Rightarrow w_{1,1} = \frac{1}{1-\beta}$$

Örnek Soru: A ve B oyuncularına ilişkin örneği dikkate alalım.

$$
\mathbb{P}^{(1)} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 100 \\ 200 \\ 300 \\ 400 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 100 & 200 & 300 & 400 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.3 & 0.1 & 0.6 & 0 & 0 \\
0 & 0.3 & 0.1 & 0.6 & 0 \\
0 & 0 & 0.3 & 0.1 & 0.6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \end{array}
$$

$E = \{0, \overbrace{100, 200, 300}^{\text{GEÇİCİ}}, 400\}$, $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, $X_t \to$ "A oyuncusunun t'inci oyun sonrası cebindeki para miktarı"

0, 400 → YUTAN

Başlangıç durumu (ilk oyun öncesi) ← $X_0 = 200₺$

Bu iki oyuncu masadan kalkana dek ortalama kaç kez başlangıç durumunu yaşarlar? ($w_{200,200} = ?$)

Not:

$w_{100,200} = ?$ $\quad w_{200,100} = ?$ $\quad w_{300,100} = ?$

$w_{100,300} = ?$ $\quad w_{200,200} = ?$ $\quad w_{300,200} = ?$

$w_{100,100} = ?$ $\quad w_{200,300} = ?$ $\quad w_{300,300} = ?$

Her biri farklı bir soru şeklinde yazılabilir.

$w_{\overset{i}{200},\overset{j}{200}}$ için ilk-adım çöz.

X_0 | X_1 | ilk-oyun sonrası "200" 'ün ort. ziyaret sayısı

$200 \xrightarrow{0.3} 100 \longrightarrow w_{100,200}$

$200 \xrightarrow{0.1} 200 \longrightarrow w_{200,200}$

$200 \xrightarrow{0.6} 300 \longrightarrow w_{300,200}$

(I)

$$\Rightarrow \boxed{w_{200,200} = 1 + 0.3\, w_{100,200} + 0.1\, w_{200,200} + 0.6\, w_{300,200}}$$

→ Toplam 3 bilinmeyen

$w_{\overset{i}{100},\overset{j}{200}}$ için ilk-adım çöz.

X_0 | X_1 | ilk-oyun sonrası "200" 'ün ort. ziy. say.

$100 \xrightarrow{0.3} 0 \longrightarrow w_{0,200} = 0$

$100 \xrightarrow{0.1} 100 \longrightarrow w_{100,200}$

$100 \xrightarrow{0.6} 200 \longrightarrow w_{200,200}$

(II)

$$\Rightarrow \boxed{w_{100,200} = 0 + (0.3)\,0 + 0.1\, w_{100,200} + 0.6\, w_{200,200}}$$

→ Toplam 3 bilinmeyen

$\omega_{300,200}$ için ilk-adım anz. ($300 \to i$, $200 \to j$)

X_0	X_1	ilk-adım sonrası "200" ün ort. ziy. say.
$300 \xrightarrow{0.3}$	200	$\to \omega_{200,200}$
$300 \xrightarrow{0.1}$	300	$\to \omega_{300,200}$
$300 \xrightarrow{0.6}$	400	$\to \omega_{400,200} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{300,200} = \underset{\substack{i \neq j \\ \text{olduğundan}}}{0} + 0.3\,\omega_{200,200} + 0.1\,\omega_{300,200} + (0.6)\,0} \quad (\text{III}^\circ)$$

Toplam bilinmeyen 3 tane.

(*) 3 lineer denklem ve 3 bilinmeyen ($\omega_{100,200}$; $\omega_{200,200}$; $\omega_{300,200}$)

(*) I°, II° ve III° nolu denklem sistemi çözülerek sorunun cevabı olan $\omega_{200,200}$'e ulaşılır.

Teorem: $n,m \in \{1,2,3,\dots\}$ ve $m<n$ için,

$$\underbrace{\mathbb{P}^{(n)}}_{n\text{-adım geçiş olasılık matrisi}} = \underbrace{\mathbb{P}^{(m)}}_{m\text{-adım geçiş olasılık matrisi}} \times \underbrace{\mathbb{P}^{(n-m)}}_{(n-m)\text{-adım geçiş olasılık matrisi.}} \quad \text{dır.}$$

Soru:
$$\mathbb{P}^{(5)} = \mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(1)}$$
$$= \mathbb{P}^{(2)} \times \mathbb{P}^{(3)}$$
$$= \mathbb{P}^{(1)} \times \mathbb{P}^{(4)}$$
$$\vdots$$

Örn:
$$\mathbb{P}^{(1)} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 10 & 20 \end{array} \\ \begin{array}{c} 10 \\ 20 \end{array} & \begin{bmatrix} p^{(1)}_{10,10} & p^{(1)}_{10,20} \\ p^{(1)}_{20,10} & p^{(1)}_{20,20} \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \mathbb{P}^{(n)} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 10 & 20 \end{array} \\ \begin{array}{c} 10 \\ 20 \end{array} & \begin{bmatrix} p^{(n)}_{10,10} & p^{(n)}_{10,20} \\ p^{(n)}_{20,10} & p^{(n)}_{20,20} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbb{P}^{(8)} \times \mathbb{P}^{(6)} = \mathbb{P}^{(14)}.$$

STOKASTİK SÜREÇLER

LİMİT DAĞILIMI

Yutan durum içermeyen markov zincirlerinde, eğer varsa, limit dağılımı

$$P^{(\infty)} := \lim_{n\to\infty} P^{(n)}$$

sonsuz adım geçiş olasılık matrisi

şeklinde ifade edilir. Yani, limit dağılımını bulmak demek, sonsuz-adım geçiş olasılık matrisini elde etmek demektir. Örneğin, durum uzayı $E = \{0,1,2\}$ olan bir Markov zincirinin sonsuz-adım geçiş olasılık matrisinin her satırı, $\pi_0 > 0, \pi_1 > 0, \pi_2 > 0$ ve $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$ olmak üzere, $[\boldsymbol{\pi_0}, \boldsymbol{\pi_1}, \boldsymbol{\pi_2}]$ şeklindedir, yani,

$$P^{(\infty)} := \lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Eğer limit dağılımı mevcut ise

dir. O zaman, $i, j \in E$ için $\boxed{\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}}$ dir. Limit dağılımını bulmak demek $\tilde{\pi} = [\pi_0, \pi_1, \pi_2]$ vektörünü bulmak demektir. Görüleceği üzere, $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}$ başlangıç durumu olan i den bağımsızdır. Bu şu anlama gelir: **Limit dağılımı var olan bir markov zincirinin sonsuz adım sonra hangi durumda olacağı, başlangıç durumundan bağımsızdır**.

■

Tanım: Bir markov zincirinin sonsuz adım geçiş olasılık matrisinin tüm elemanları pozitifse, bu markov zincirine "Düzenli Markov zinciri" denir.

■

Düzenlilik Kontrolü: Bir markov zincirinin düzenli olduğunu tespit etmek için, en az bir sonlu $n \in T$ için $P^{(n)}$ matrisinin tüm elemanlarının pozitif olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için izlenecek algoritmada sırasıyla işaret bazlı olarak $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(4)}, P^{(8)}, P^{(16)}, P^{(32)}$, ... lara bakılır. Tüm elemanları pozitif olan matris yakalandığında durulur ve "markov zinciri düzenlidir" denir. Tüm elemanları pozitif olan bir matrisin yakalanamayacağı ispat edilirse, yine durulur ve “markov zinciri düzensizdir” denir.

Örnek 1: Yutan durum içermeyen iki durumlu bir markov zincirinin tek-adım geçiş olasılık matrisi

$$P^{(1)} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 10 & 20 \end{array} \\ \begin{array}{c} 10 \\ 20 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Şeklinde verilsin. Bu markov zinciri düzenli midir? Öncelikle $P^{(1)}$ matrisini işaret bazlı olarak yeniden yazalım:

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} + & + \\ + & 0 \end{bmatrix}.$$

Görüleceği üzere $P^{(1)}$ in tüm elemanları pozitif olmadığı için $P^{(2)}$ işaret bazlı olarak aşağıdaki gibi elde edilecektir:

$$P^{(2)} = P^{(1)} \times P^{(1)}$$

$$P^{(2)} = \overset{P^{(1)}}{\begin{bmatrix} + & + \\ + & 0 \end{bmatrix}} \, * \, \overset{P^{(1)}}{\begin{bmatrix} + & + \\ + & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} (+\cdot +) + (+\cdot +) & (+\cdot +) + (+\cdot 0) \\ (+\cdot +) + (0\cdot +) & (+\cdot +) + (0\cdot 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & + \\ + & + \end{bmatrix}$$

elde edilir ki bu matrisin tüm elemanları pozitiftir. Bu noktada dururuz ve bu markov zinciri **düzenlidir** deriz.

Örnek 2: Yutan durum içermeyen iki durumlu bir markov zincirinin tek-adım geçiş olasılık matrisi

$$P^{(1)} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 10 & 20 \end{array} \\ \begin{array}{c} 10 \\ 20 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Şeklinde verilsin. Bu markov zinciri düzenli midir? Öncelikle $P^{(1)}$ matrisini işaret bazlı olarak yeniden yazalım:

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & + \\ + & 0 \end{bmatrix}.$$

Görüleceği üzere $P^{(1)}$ in tüm elemanları pozitif olmadığı için $P^{(2)}$ işaret bazlı olarak aşağıdaki gibi elde edilecektir:

$0.0 + (+).(+) = +$

$$P^{(2)} = P^{(1)} \times P^{(1)} = \begin{bmatrix} \boxed{0} & + \\ + & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{0} & + \\ + & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{bmatrix}.$$

$(+).0 + 0.(+)$

Bu matrisin tüm elemanları pozitif olmadığı için $P^{(4)}$ işaret bazlı olarak aşağıdaki gibi elde edilecektir:

$$P^{(4)} = P^{(2)} \times P^{(2)} = \begin{bmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{bmatrix}$$

Yine tüm elemanları pozitif olan bir matris elde edilmedi ancak bir nokta dikkatimizi çekti: işaret bazlı $P^{(4)}$ matrisi ile daha önce elde edilen işaret bazlı matrislerden $P^{(2)}$ birbiriyle aynı. Bu durum bize, yukarıdaki algoritmaya göre devam edersek hiçbir zaman tüm elemanları pozitif olan bir matris elde edemeyeceğimizi gösterir. Sonuç olarak bu markov zinciri **düzensizdir** denir.

■

Not: Bir markov zincirinin tek adım geçiş olasılık matrisinin tüm elemanları pozitif ise o markov zinciri yukarıdaki tanıma göre düzenlidir.

■

Teorem: Bir markov zinciri "Düzenli Markov Zinciri" ise kesin olarak limit dağılımı vardır.

■

Soru: Düzenli bir markov zincirinin limit dağılımı nasıl bulunur?

Cevap: Bu sorunun cevabını Örnek 1'deki markov zinciri üzerinden anlatalım:

$E = \{10, 20\} \Rightarrow \Pi_{10} = ?$

$\Pi_{20} = ?$

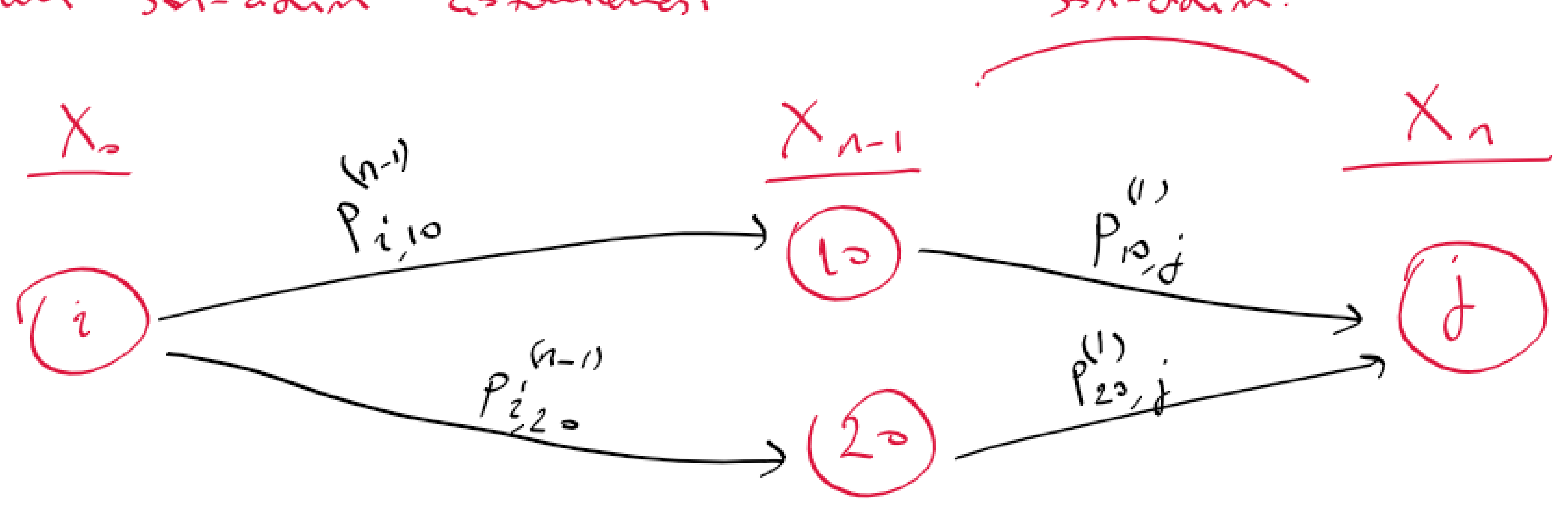
$$P^{(1)} = \begin{array}{c} \\ 10 \\ 20 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 10 & 20 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbb{P}^{(\infty)} = \begin{array}{c} \\ 10 \\ 20 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 10 & 20 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \Pi_{10} & \Pi_{20} \\ \Pi_{10} & \Pi_{20} \end{bmatrix} \end{array}$$

Bu markov zinciri düzenliydi. O zaman yukarıdaki teoreme göre limit dağılımı var. Yani, $\pi_{10} > 0, \pi_{20} > 0$ ve $\pi_{10} + \pi_{20} = 1$ olmak üzere $\tilde{\boldsymbol{\pi}} = [\boldsymbol{\pi_{10}}, \boldsymbol{\pi_{20}}]$ vektörü vardır. Bu vektörün elemanlarını bulabilmek için, $i, j \in E$ olmak üzere $p_{i,j}^{(n)}$ için **son-adım** çözümlemesi yapalım:

$\boldsymbol{X_0}$	$\boldsymbol{p_{i,k}^{(n-1)}}$	$\boldsymbol{X_{n-1} = k}$	$\boldsymbol{p_{k,j}^{(1)}}$	$\boldsymbol{X_n}$
i	$p_{i,10}^{(n-1)}$	10	$p_{10,j}^{(1)}$	j
	$p_{i,20}^{(n-1)}$	20	$p_{20,j}^{(1)}$	

$p_{i,j}^{(n)}$ için son-adım çözümlemesi



Bu çözümlemeden,

$$\boxed{p_{i,j}^{(n)} = p_{i,10}^{(n-1)} \cdot p_{10,j}^{(1)} + p_{i,20}^{(n-1)} \cdot p_{20,j}^{(1)}}$$

elde edilir. Şimdi bu eşitliğin her iki tarafının $n \to \infty$ iken limitini alalım:

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{i,10}^{(n-1)} \cdot p_{10,j}^{(1)} + \lim_{n\to\infty} p_{i,20}^{(n-1)} \cdot p_{20,j}^{(1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = p_{10,j}^{(1)} \cdot \lim_{n\to\infty} p_{i,10}^{(n-1)} + p_{20,j}^{(1)} \cdot \lim_{n\to\infty} p_{i,20}^{(n-1)}$$

$$p_{i,j}^{(\infty)} = p_{10,j}^{(1)} \cdot p_{i,10}^{(\infty-1)} + p_{20,j}^{(1)} \cdot p_{i,20}^{(\infty-1)}$$

$$\underset{\Pi_j}{\underset{\downarrow}{p_{i,j}^{(\infty)}}} = p_{10,j}^{(1)} \cdot \underset{\Pi_{10}}{\underset{\downarrow}{p_{i,10}^{(\infty)}}} + p_{20,j}^{(1)} \cdot \underset{\Pi_{20}}{\underset{\downarrow}{p_{i,20}^{(\infty)}}}$$

$\Pi_{10} + \Pi_{20} = 1$ kısıt.

$\boxed{\Pi_{20} = 1 - \Pi_{10}}$

$$\pi_j = p_{10,j}^{(1)} \cdot \pi_{10} + p_{20,j}^{(1)} \cdot \pi_{20}$$

$$\boxed{\pi_j = \sum_{k \in E=\{10,20\}} p_{k,j}^{(1)} \cdot \pi_k}$$

elde edilir. Bu denklem sisteminden, $j = 10$ için, kısıtımız olan $\pi_{20} = 1 - \pi_{10}$ yerine yazılarak,

$$\pi_{10} = p_{10,10}^{(1)} \cdot \pi_{10} + p_{20,10}^{(1)} \cdot (1 - \pi_{10})$$

$$\pi_{10} = \frac{10}{17} \cong 0.588$$

bulunur. Diğer yandan, $\pi_{20} = 1 - \pi_{10} = 1 - \frac{10}{17} = \frac{7}{17} \cong 0.412$ elde edilir. Sonuç olarak, bu markov zincirinin limit dağılımı,

$\mathbb{P}^{(8)} = \mathbb{P}^{(5)} \times \mathbb{P}^{(5)}$

$$P^{(\infty)} := \lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 10 & 20 \end{array} \\ \begin{array}{c} 10 \\ 20 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.588 & 0.412 \\ 0.588 & 0.412 \end{bmatrix} \end{array}$$

Şeklinde elde edilmiş olunur. Limit dağılımını bu şekilde yazmak yerine $\tilde{\boldsymbol{\pi}} = [\pi_{10}, \pi_{20}] = \left[\frac{10}{17}, \frac{7}{17}\right]$ şeklinde de ifade edebiliriz.

■

Önemli Not: Düzenli olduğu gösterilen m-durumlu bir markov zincirinin limit dağılımını bulurken kullanılacak lineer denklem sistemi $\sum_{j\in E} \pi_j = 1$ kısıtı altında çözülmelidir. Yani j yerine $(m-1)$ farklı durum yazılarak $(m-1)$ tane lineer denklemde, bilinmeyen π'lerden biri diğerleri cinsinden yerine yazılarak elde edilecek denklemlerden tüm bilinmeyenler çözülecektir. Örneğin, $E = \{0,1,2,3\}$ durum uzayına sahip 4-durumlu düzenli bir markov zincirinde kısıt $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ olacaktır. Bu kısıttan hareketle $\pi_3 = 1 - \pi_0 - \pi_1 - \pi_2$ olmak üzere,

$$\pi_j = p_{0,j}^{(1)} \cdot \pi_0 + p_{1,j}^{(1)} \cdot \pi_1 + p_{2,j}^{(1)} \cdot \pi_2 + p_{3,j}^{(1)} \cdot \pi_3$$

$$\pi_j = p_{0,j}^{(1)} \cdot \pi_0 + p_{1,j}^{(1)} \cdot \pi_1 + p_{2,j}^{(1)} \cdot \pi_2 + p_{3,j}^{(1)} \cdot (1 - \pi_0 - \pi_1 - \pi_2)$$

yazılacak ve sonra, $j = 0{,}1$ ve 2 için üç denklem aşağıdaki şekilde elde edilip bilinmeyenler

çözülecektir:

$$\pi_0 = p_{0,0}^{(1)} \cdot \pi_0 + p_{1,0}^{(1)} \cdot \pi_1 + p_{2,0}^{(1)} \cdot \pi_2 + p_{3,0}^{(1)} \cdot (1 - \pi_0 - \pi_1 - \pi_2) \text{ ....(1)}$$

$$\pi_1 = p_{0,1}^{(1)} \cdot \pi_0 + p_{1,1}^{(1)} \cdot \pi_1 + p_{2,1}^{(1)} \cdot \pi_2 + p_{3,1}^{(1)} \cdot (1 - \pi_0 - \pi_1 - \pi_2) \text{ ....(2)}$$

$$\pi_2 = p_{0,2}^{(1)} \cdot \pi_0 + p_{1,2}^{(1)} \cdot \pi_1 + p_{2,2}^{(1)} \cdot \pi_2 + p_{3,2}^{(1)} \cdot (1 - \pi_0 - \pi_1 - \pi_2) \text{ ....(3)}$$

π_0, π_1 ve π_2 bu üç denklemden bulunduktan sonra $\pi_3 = 1 - \pi_0 - \pi_1 - \pi_2$ şeklinde elde edilir ve limit dağılımı $\boldsymbol{\tilde{\pi} = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3]}$ bulunmuş olunacaktır.