BİLGİSAYAR BİLİMLERİNDE GÜNCEL KONULAR II

Hafta 5

. Kromotik Polinomlarla ilgili Teorem

. Konisberg Köprü Problemi ve Önemli Tanımlar

. Graf İşlemleri

Teorem: G, p-tepeli, q-ayrıtlı bir graf olsun. G grafının bileşenleri $G_1, G_2, \ldots, G_t$ olmak üzere,

a) $\Pi_k(G)$ polinomu p derecelidir.

b) $\Pi_k(G)$ de, k^p in katsayısı 1 dir.

c) $\Pi_k(G)$ polinomunda, k^{p-1} in katsayısı $-q$ dur.

d) $\Pi_k(G)$ nin en küçük üsülü terimi $a_t x^t$ olup $a_t \neq 0$ dır.

e) $\Pi_k(G)$ polinomunun sabit katsayısı sıfırdır.

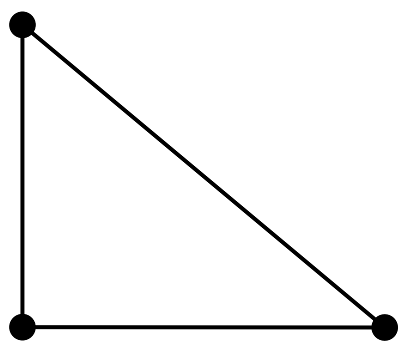
Soru: $k^4-3k^3+3k^2$ kromatik polinomuna sahip bir graf var mıdır?

Yanıt: Yukarıdaki teoremden,

(a) $\rightarrow$ graf 4 tepelidir.

(c) $\rightarrow$ grafın ayrıt sayısı 3 tür.

(d) $\rightarrow$ graf iki bileşene sahiptir.

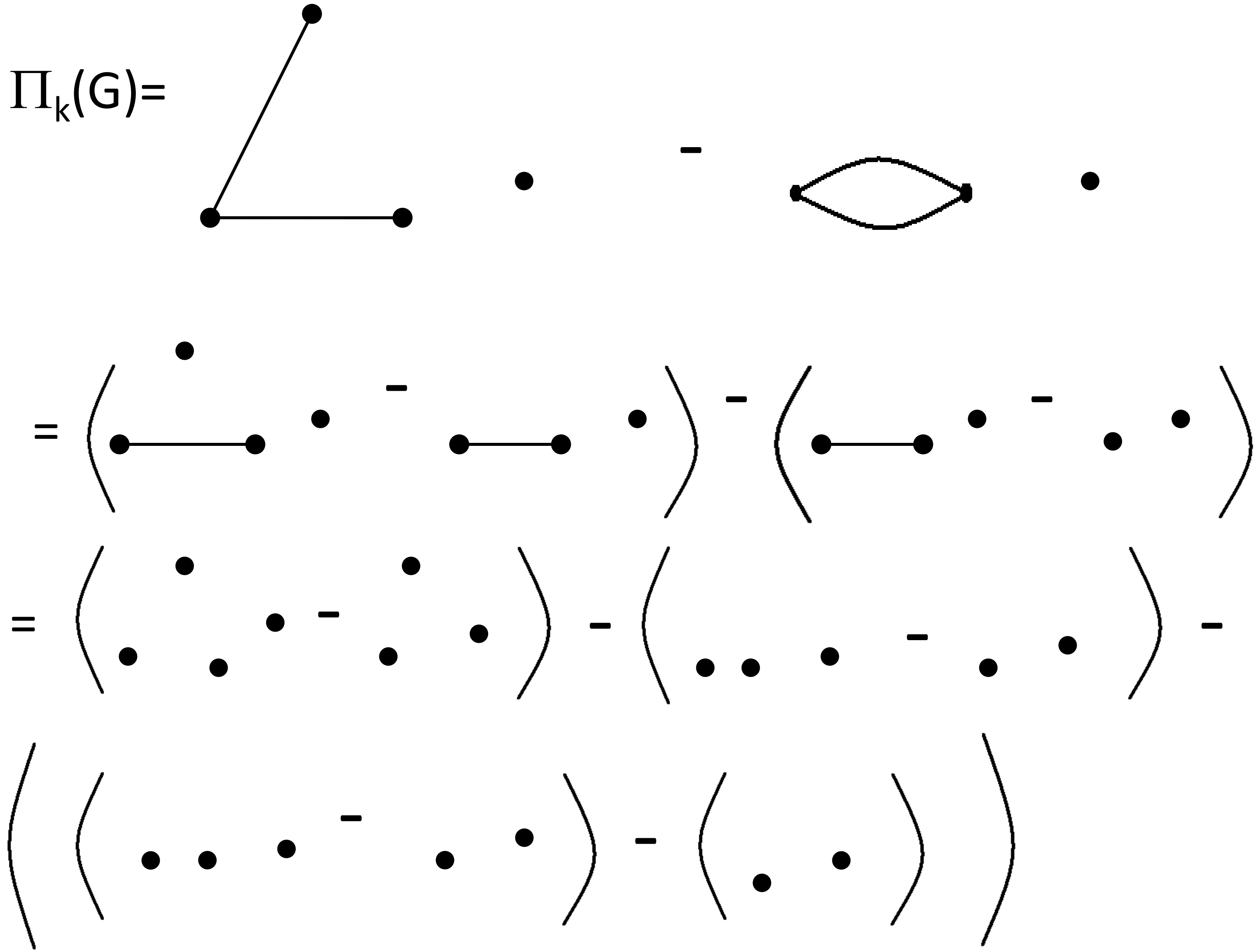


K_3

K_1

$$G=K_3 \cup K_1$$

Şimdi, bu grafın kromatik polinomunu bulalım ve doğruluğunu görelim.

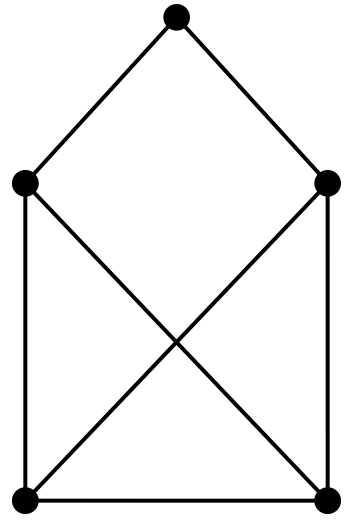

Πk(G)=

$$= (k^4-k^3)-(k^3-k^2)-((k^3-k^2)-k^2)$$

$$= k^4-k^3-k^3+k^2-k^3+k^2+k^2$$

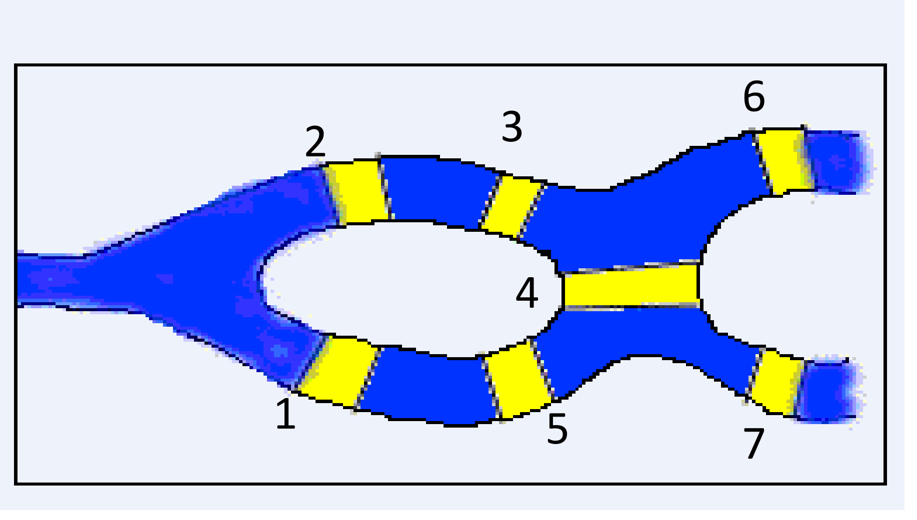
$$= k^4-3k^3-3k^2$$

Örnek: $k^5-7k^4+19k^3-23k^2+10k$ kromatik polinomu aşağıdaki grafa ait olabilir mi?



Königsberg Köprü Problemi:

Königsberg'te, Pregel nehri üzerinde 7 tane köprü vardır. Pregel nehri, Könisberg bölgesini iki adaya ve iki yarımadaya böler.



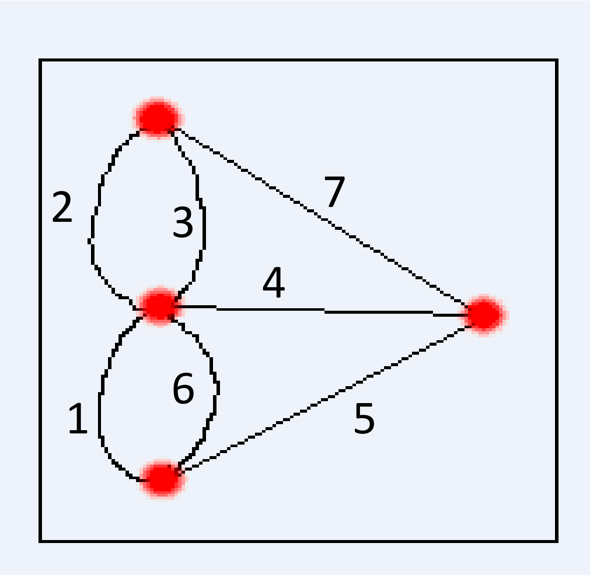
Pregel

Problem: Herhangi bir bölgeden başlayarak ve her bir köprüyü sadece bir kez kullanarak tekrar başlangıç noktasına dönebilir miyiz?

Bu problemin çözümü Euler tarafından verilmiştir. Euler öncelikle problemi, aşağıdaki gibi düşünmüştür:

Bir noktadan başlayarak ve her bir çizgiyi bir kez kullanarak tekrar başlangıç noktasına dönecek şekilde bu şekli çizebilir miyiz?

Bu düşünceye göre, Euler problemi aşağıdaki gibi bir graf ile modelledi.



Şimdi çözüm için gerekli bazı tanımları verelim.

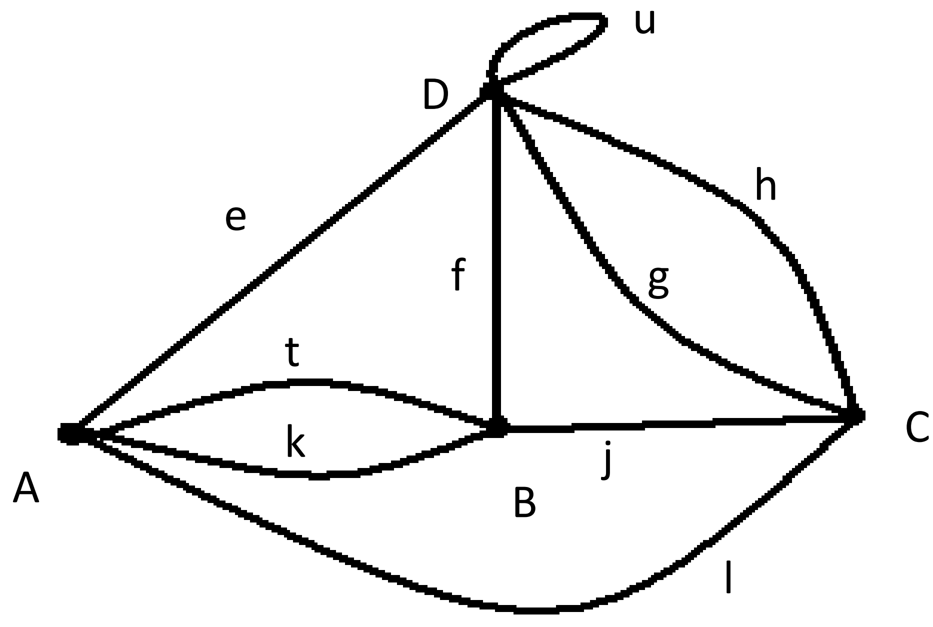
Yürüyüş: Bir graftaki ayrıtların ve tepelerin rastgele bir dizilişine yürüyüş adı verilir.

Katar (trail): Bir yürüyüşte ayrıt tekrarı yok ise bu yürüyüşe katar adı verilir.

Yol (path): Bir katarda tepe tekrarı yapılmıyor ise bu katar yol adını alır.

Çok Katlı Ayrıt: Bir G grafının herhangi iki tepesi arasında birden fazla ayrıt varsa bu grafa **çok katlı ayrıta sahip graf** denir.

Örnek:



A dan C ye bir yürüyüş : AtBfDuDfBjC

A dan C ye bir katar : AtBfDhCgDeAlC

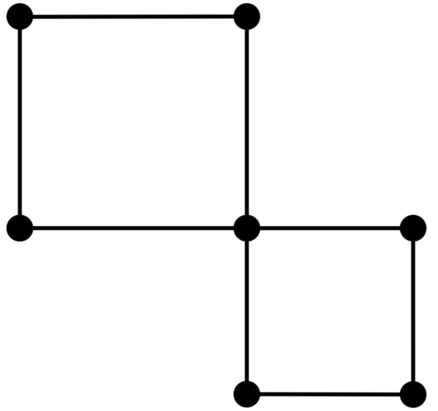
A dan c ye bir yol : AtBfDhC

Kapalı Katar (Circuit): Başlangıç ve bitiş tepesi aynı olan bir katara kapalı katar yada devre denir.

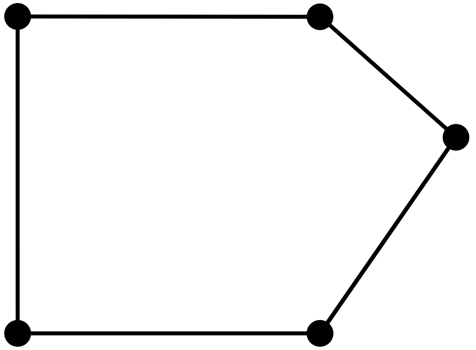
Kapalı yol (Cycle): Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan yola kapalı yol (çevre) denilir.

- **Not:** Her kapalı katar çevre değildir.

Örnek:



Kapalı katar



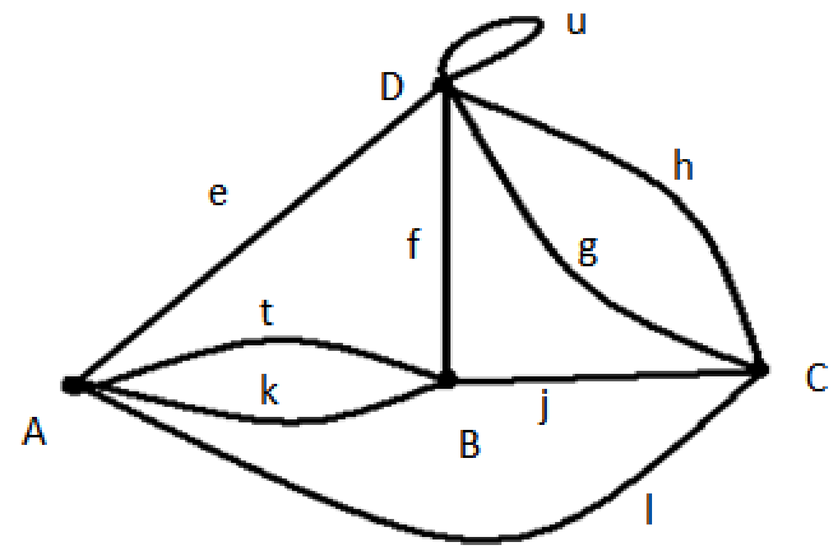
Kapalı Yol

Eulerian Devre: Bir G grafının her ayrıtını içeren bir kapalı katara Eulerian devre (Eulerian kapalı katar) adı verilir.

Önceki şekilde bir Eulerian devre örneği olarak

AeDuDhCgDfBjClAkBtA

verilebilir. Burada, tepe tekrarı var, fakat ayrıt tekrarı yoktur.



Euler, sorunun yanıtını araştırırken aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

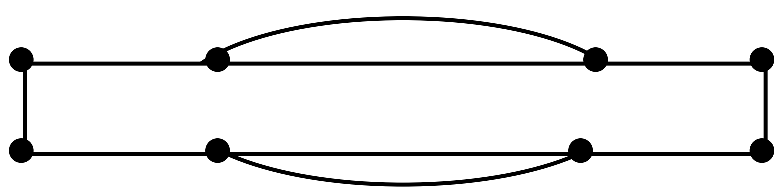
Teorem: Bir G grafı Eulerian bir devreye sahip ise G birleştirilmiş ve her tepesi çift derecelidir.

100 yıl sonra bu teoremin karşıtı Hierholzer tarafından kanıtlanmıştır.

Teorem: G birleştirilmiş bir graf ve her tepesi çift dereceli ise bu graf Eulerian bir devreye sahiptir.

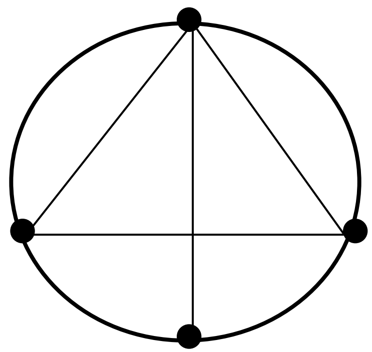
Sonuç olarak, Euler verilen şeklin bir Euler devresi içermediğini dolayısıyla *"bu problemin bir çözümü olmadığını"* belirtmiştir.

Soru: Acaba aşağıdaki şekili elimizi kağıttan kaldırmadan ve geçtiğimiz bir çizgiyi bir daha geçmeden, başlangıç noktasına dönecek şekilde çizebilirmiyiz?



Yanıt: Hayır

Bu kez aynı problemi, başlangıç noktasına dönmek zorunda olmadığımızı düşünerek ele alalım. Acaba aşağıdaki şekili çizebilirmiyiz?



Yanıta geçmeden bir tanım verelim.

Eulerian Katar: Bir G grafının her bir ayrıtını içeren bir katara Eulerian katar denir.

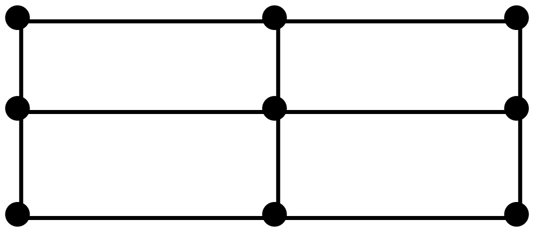
Şimdi de aşağıdaki teoremi ele alalım.

Teorem: Bir G grafının Eulerian katara sahip olması için gerek ve yeter koşul G nin birleştirilmiş ve kesinlikle 2 tepesinin tek dereceli olmasıdır

O halde, şekil çizilebilir mi?

Şimdi başka örnekler alalım.

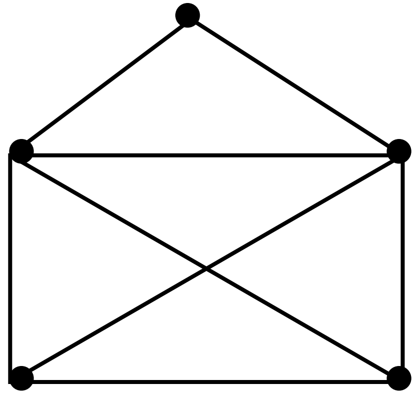
Örnek 1:



İkiden çok, 4 tane tek dereceli tepesi var.

ÇİZİLEMEZ.

Örnek 2:



Mektup zarfı

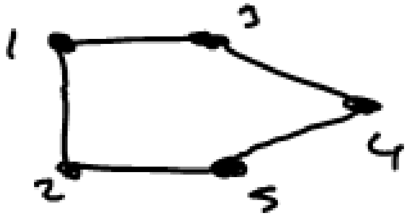
Ne dersiniz? Karar sizin…

Graf işlemleri

1-) Tümleme işlemi:

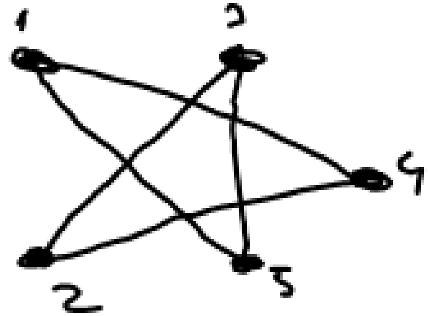
- G, p tepeli q ayrıtlı bir graf olsun.
- G'nin tümleyeni $\overline{G}$ ile gösterilir.
- $\overline{G}$ grafı, G'de bulunan tepeler ile G'de bulunmayan ayrıtların oluşturduğu bir graftır.
- $\overline{G}$ grafı birleştirilmemiş olabilir.

Örnek :

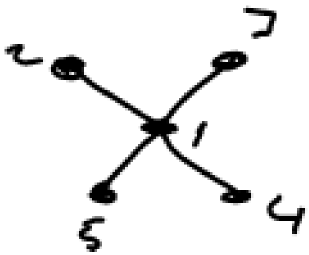


G

$\Rightarrow$

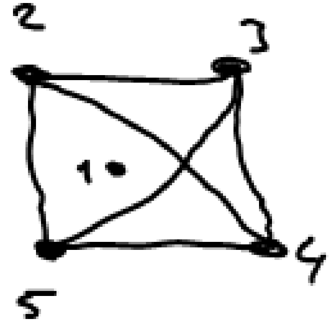


$\overline{G}$



G

$\Rightarrow$



$\overline{G}$

G

$\Rightarrow$

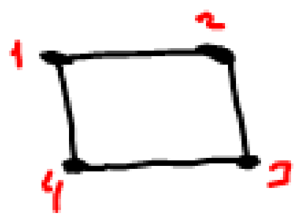
$\overline{G}$

Teorem: G, n tepeli bir graf olmak üzere $G \cup \overline{G} = K_n$ 'dir.

$\cup$: birleşme

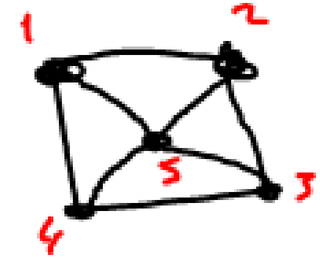
2-) Birleşme işlemi:

G_1 :



G_2 :

$G_1 \cup G_2 =$

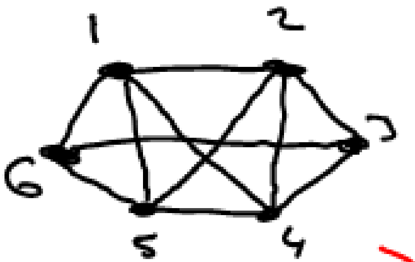


$\boxed{C_4 \cup K_{1,4} = W_{1,4}}$

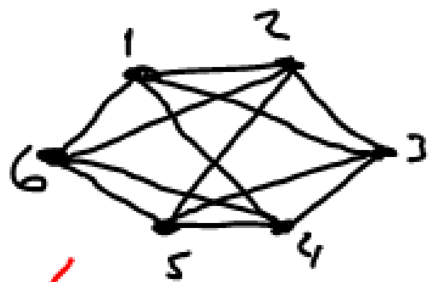
3) Kesişim İşlemi:

G_1 ve G_2 grafların kesişimi $G_1 \cap G_2$ şeklinde gösterilir. Her iki grafta ortak olan tepelerin ve ayrıtların oluşturduğu graftır.

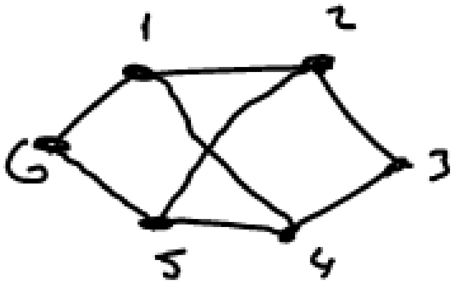
Örnek:



G_1



G_2



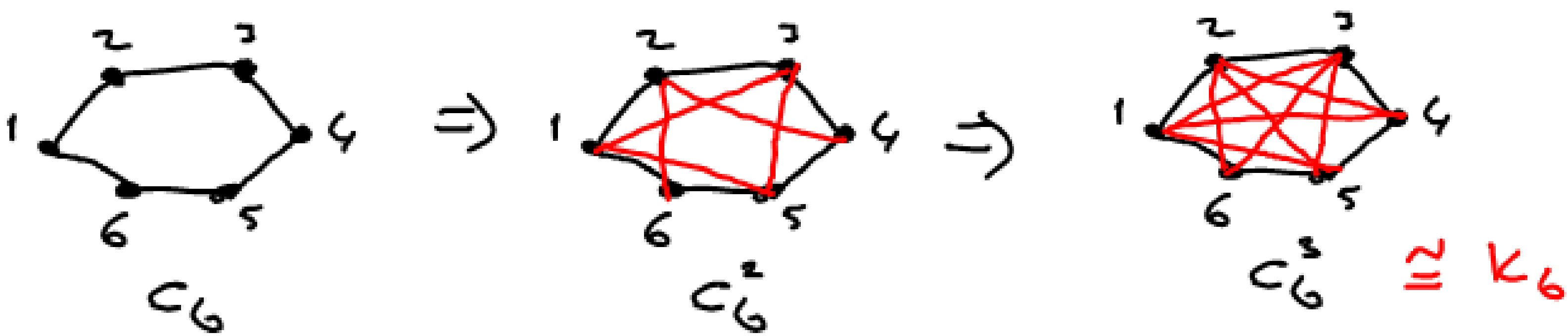
$\boxed{G_1 \cap G_2}$

4) Bir Grafın Kuvveti.

G, p tepeli q ayrıtlı bir graf olsun.

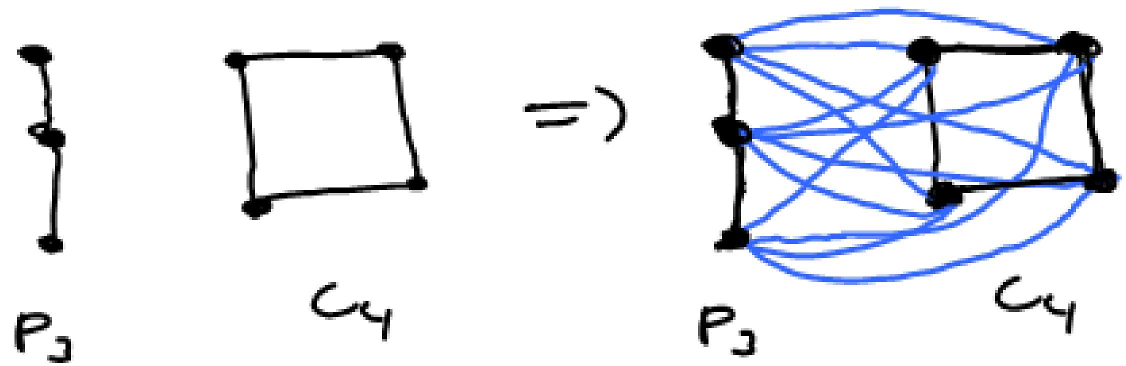
G grafının, k. cı kuvveti G^k ile gösterilir. G^k grafı, G nin tepelerini içerir. G^k'da herhangi 2 tepe arasında bir ayrıt olabilmesi için G'de bu 2 tepenin en çok k ayrıt ile birleştirilmiş olması gereklidir.

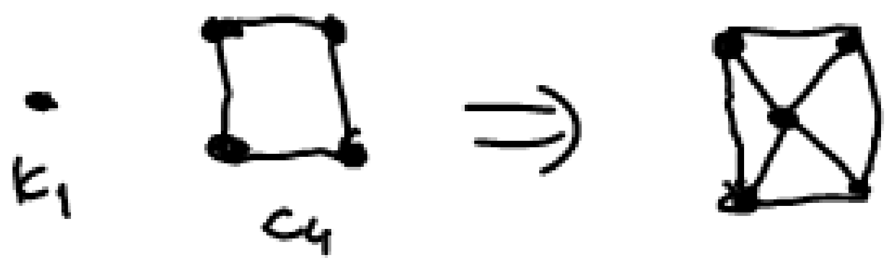
Örn)



5) İki Grafın Toplamı: (Join işlemi)

G_1 ve G_2 graflarının toplamı G_1+G_2 şeklinde gösterilir. G_1+G_2 grafı G_1 ve G_2 graflarının tüm tepelerini içerir. G_1+G_2 grafındaki ayrıtları ise G_1'deki herbir tepenin G_2'deki her bir tepeye bir ayrıtla birleştirilmesiyle oluşur. Ayrıca, G_1+G_2 grafı G_1 ve G_2'de var olan tüm ayrıtlarını da içerir.





$K_1 + C_4 = W_{1,4}$

6) Ardışık Toplam (Sequential Join)

$G_1, G_2, \dots, G_k$ grafların ardışık toplamı $G_1 + G_2 + \dots + G_k$ ile gösterilir.

Burada,

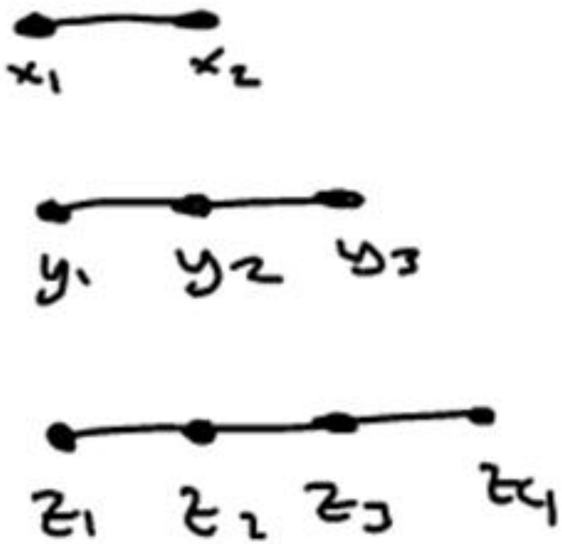
$$G_1 + G_2 + \dots + G_k = (G_1 + G_2) \cup (G_2 + G_3) \cup \dots \cup (G_{k-1} + G_k)$$

şeklindedir.

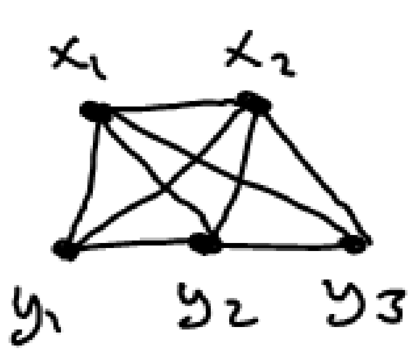
G_1:

G_2:

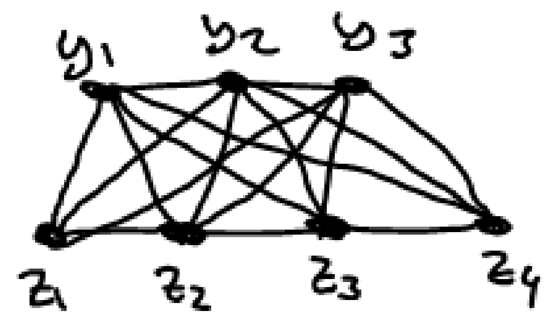
G_3:



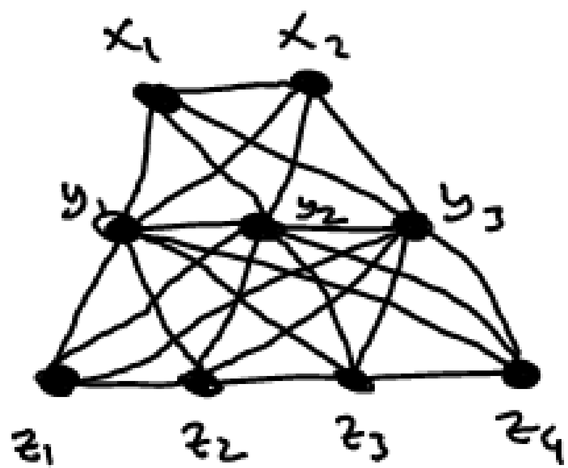
$G_1+G_2+G_3$?



$G_1 + G_2$



$G_2 + G_3$

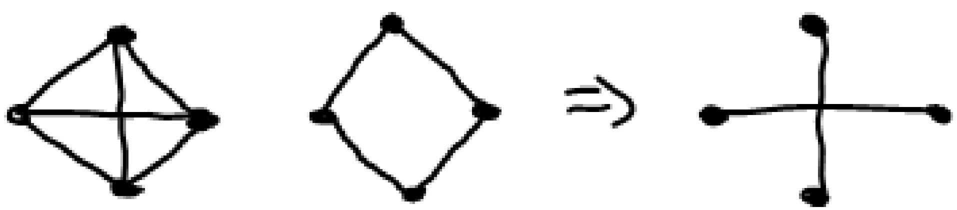


$G_1 + G_2 + G_3$

7) İki Grafın Farkı:

G_1 ve G_2 grafların farkı her ikisinde var olan ayrıtların silinmesiyle elde edilir ve $G_1 - G_2$ ile gösterilir.

Örn



G_1 G_2 $G_1 - G_2$

8) İki Grafın Kartezyen Çarpımı:

G_1 ve G_2 grafların kartezyen çarpımı

$G_1 \times G_2$ şeklinde gösterilir.

- $G_1 \times G_2$ grafının tepeler kümesini $V(G_1) \times V(G_2)$ oluşturur.

- Ayrıtlar ise aşağıdaki koşula göre belirlenir.

Koşul: $w=(w_1,w_2)$ ve $v=(v_1,v_2)$ tepeleri $G_1 \times G_2$ grafının 2 tepesi olsun.

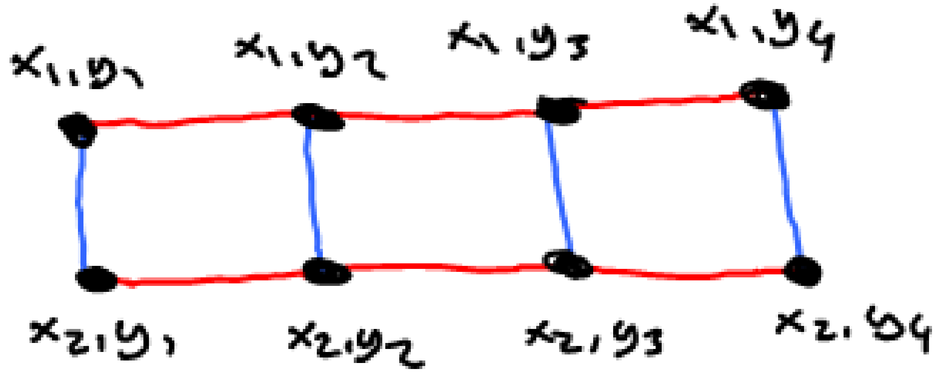
Eğer;

$w_1 = v_1$ ve G_2'de w_2; v_2'ye bir ayrıtla birleştirilmiş ise ya da;

$w_2 = v_2$ ve G_1'de w_1; v_1'e bir ayrıtla birleştirilmiş ise w ve v bir ayrıtla birleştirilir.

G_1 :

G_2 :



$P_m \times P_n$ = Mesh graf.

(Haberleşme sistemlerinde kullanılır.)

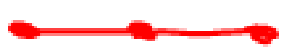
9) Corona (Taçlama) İşlemi:

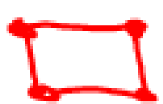
G_1 ve G_2 graflerının taçlama işleminden sonraki grafi $G_1 \circ G_2$ ile gösterilir.

$G_1 \circ G_2$ grafında G_1'in her bir tepesine karşılık G_2'nin bir kopyası alınır.

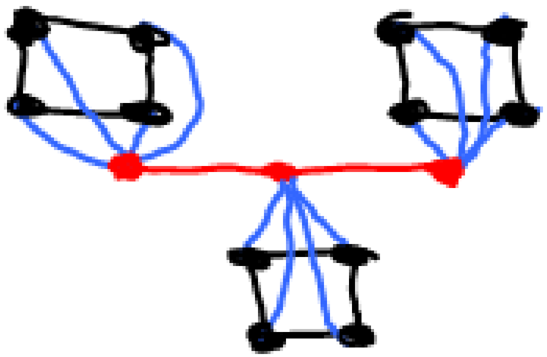
Ardından G_1'in her bir tepesinden bu tepeye karşılık gelen G_2'nin kopyasının her bir tepesine ayrıt çizilir.

Örn

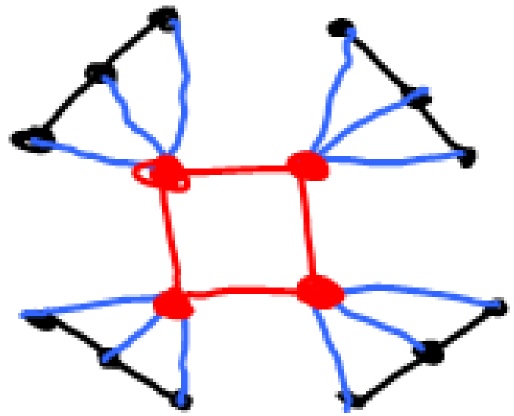
G_1 :  P_3

G_2 :  C_4

$G_1 \circ G_2$:



$G_2 \circ G_1$:



10) Composition İşlemi:

G_1 ve G_2 grafların composition işlemi $G = G_1[G_2]$ ile gösterilir.

- G grafının tepelerini: $V(G_1) \times V(G_2)$ kümesi oluşturur.

- Ayrıtlar ise aşağıdaki koşula göre belirlenir.

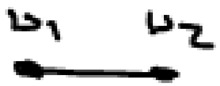
Koşul: $u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$ tepeleri $G_1[G_2]$ grafının iki tepesi olsun.

- Eğer u_1; v_1'e bir ayrıt ile bitişik ise

veya

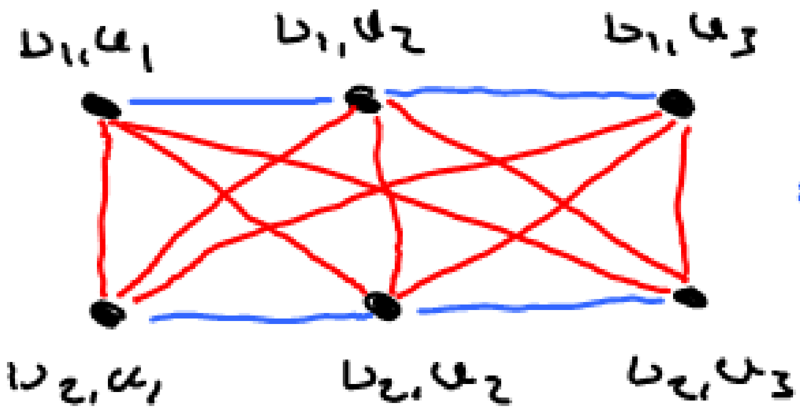
- $u_1 = v_1$ ve u_2; v_2'ye bir ayrıt ile bitişik ise u ve v tepeleri birleştirilir.

Örn

$G_1:$ 

$G_2:$ 

$\Big\} \quad G_1[G_2]$?



$\Rightarrow G_1[G_2]$ grafı.

Soru: $G_1[G_2] \cong G_2[G_1]$?

KAYNAKLAR

[1] Chartrand, G.-Lesniak, L., (1986) : *Graphs and Digraphs*, Wadsworth & Brooks, California

[2] West D.B. (2001) : *Introduction to Graph Theory*, *Prentice Hall*, USA.

[3] Graf Teoriye Giriş, Şerife Büyükköse ve Gülistan Kaya Gök, Nobel Yayıncılık

[4] Discrete Mathematical Structures for Computer Science, Ronald E. Prather, Houghton Mifflin Company, (1976).

[5] Christofides, N., 1986. Graph Theory an Algorithmic Approach, Academic Press, London