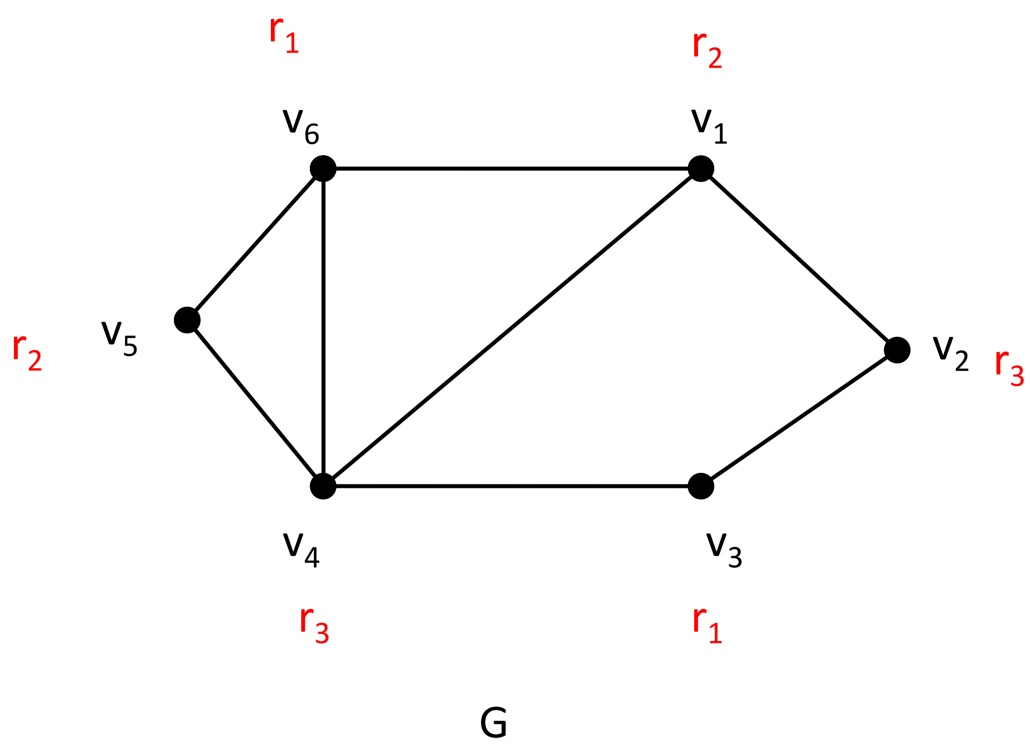
BİLGİSAYAR BİLİMLERİNDE GÜNCEL KONULAR II

Hafta 4

Grafların Boyanması

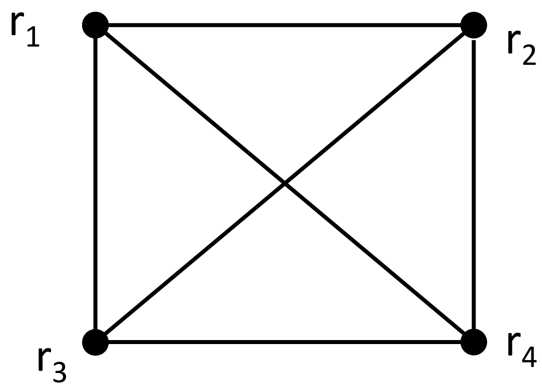
KROMATİK SAYI: G, p-tepeli bir graf olsun. G grafının birbirine komşu olan (aralarında tek bir ayrıt olan) tepeleri farklı renkte boyamak için gerekli olan en az renk sayısına bu grafın kromatik sayısı denir ve $\chi(G)$ ile gösterilir.



P tepeli, birleştirilmiş bir G grafı için, $\chi(G) \leq p$ dir. Yani, bir g grafının kromatik sayısı en fazla tepe sayısı kadardır. Yukarıdaki grafı boyamak için en az renk sayısı $\chi(G) = 3$ olup, graf 2 renkte boyanmaz.

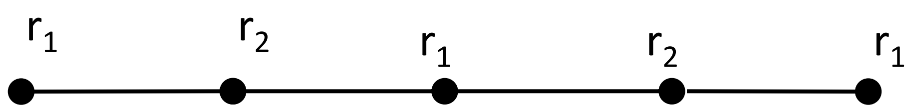
- **Tam Graf (K_p):**

p tepeli bir tam grafın, kromatik sayısı $\chi(K_p)=p$ dir.

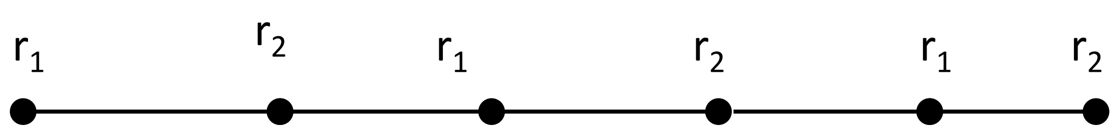


- Yol Graf (P_p): p tepeli yol grafın kromatik sayısı $\chi(P_p)=2$ dir.

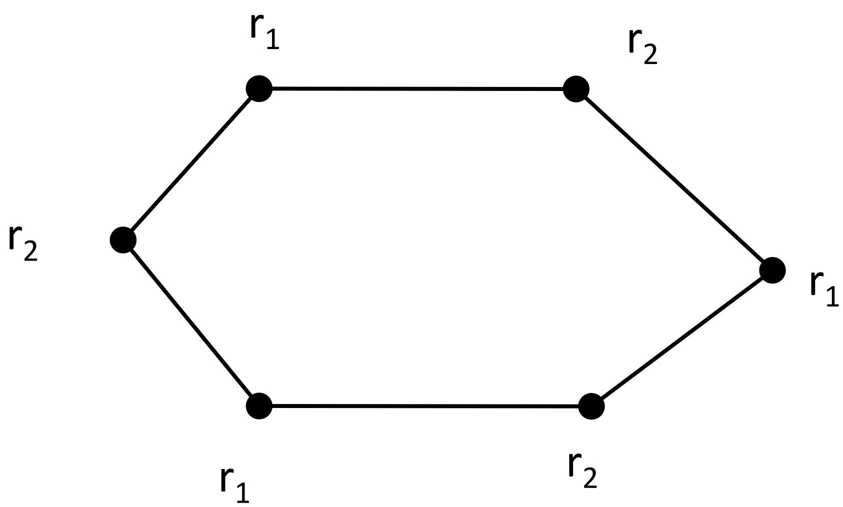
P_5



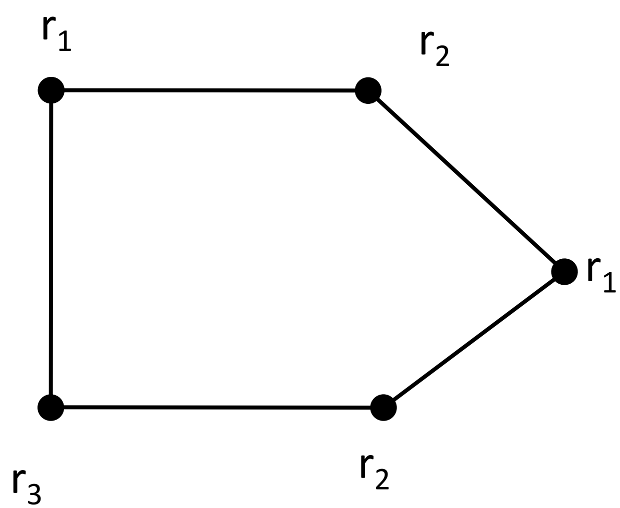
P_6



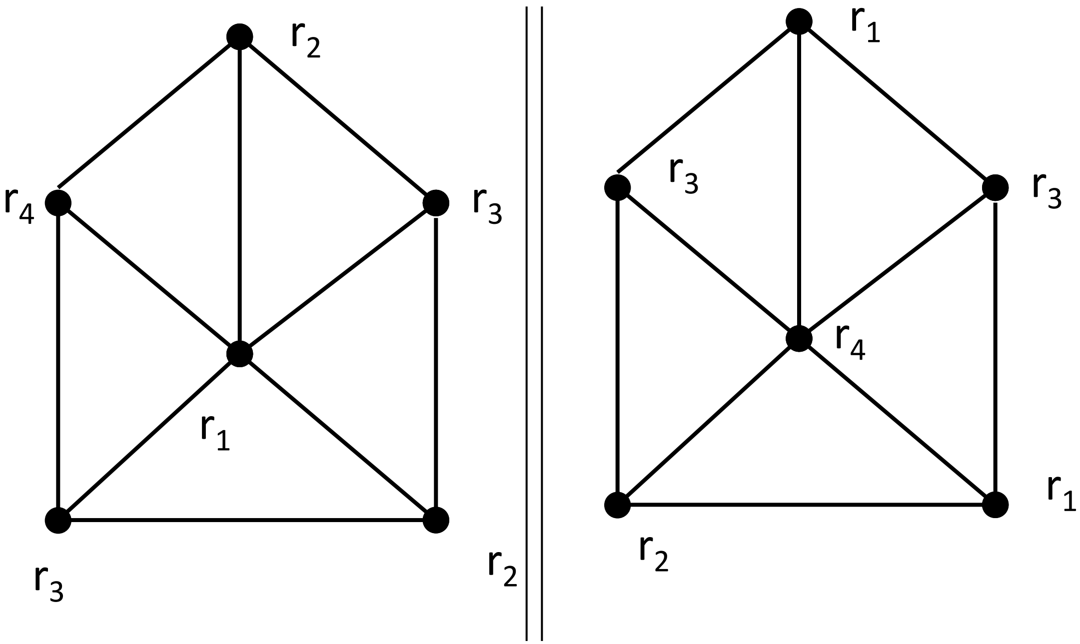
- **Çevre Graf:**

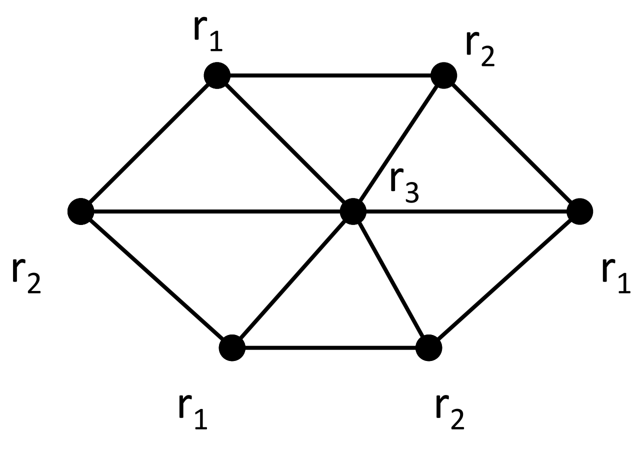


$$\chi(C_p)=\begin{cases}2, & p-çift\\ 3, & p-tek\end{cases}$$



- **Tekerlek Graf($W_{1,p}$):**



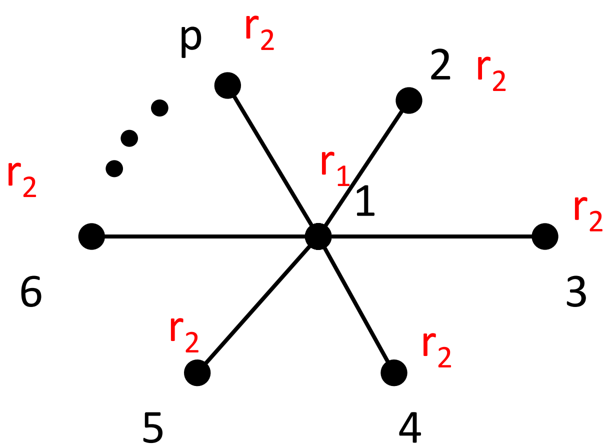


$$\chi(W_{1,\,p}) = \begin{cases} 3, & p - \text{çift} \\ 4, & p - \text{tek} \end{cases}$$

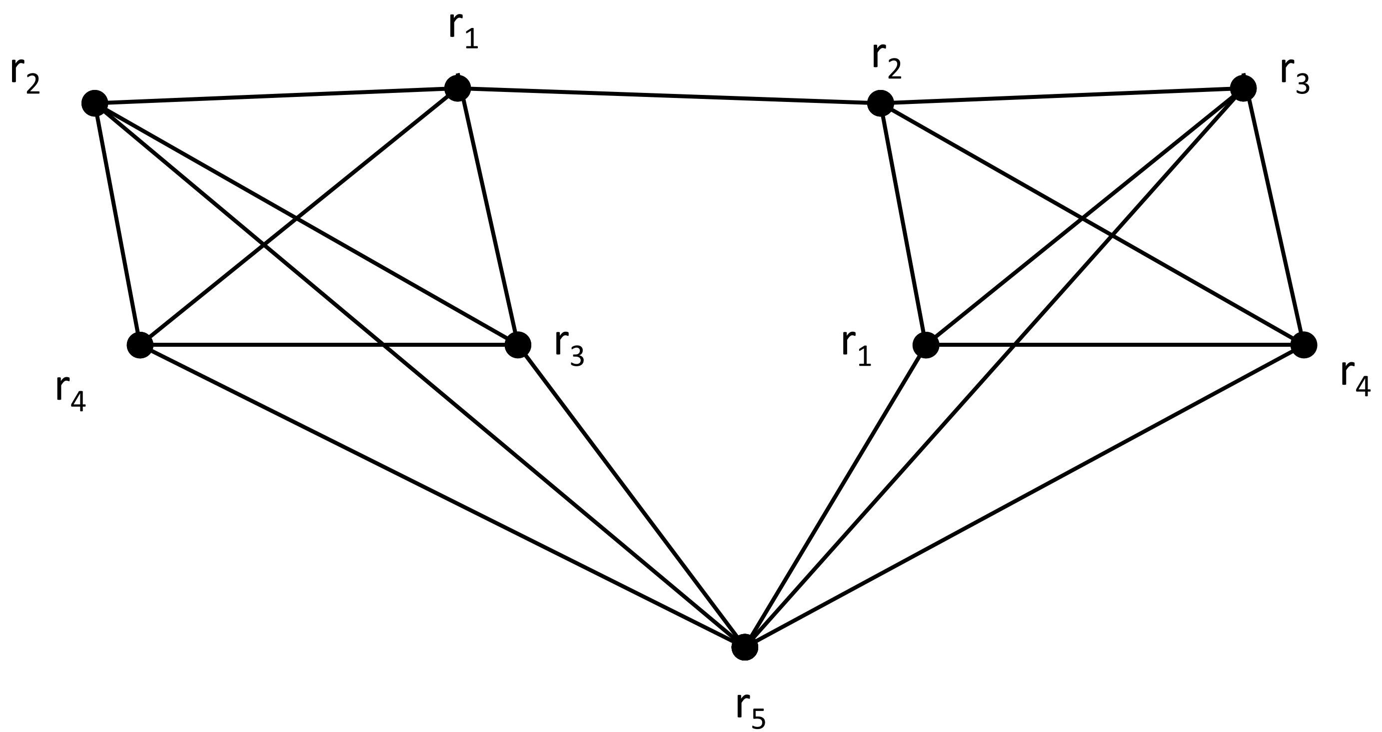
- Yıldız Graf ($K_{1,p-1}$):

P tepeli bir yıldız grafın kromatik sayısı

$\chi(K_{1,p-1})=2$ dir.

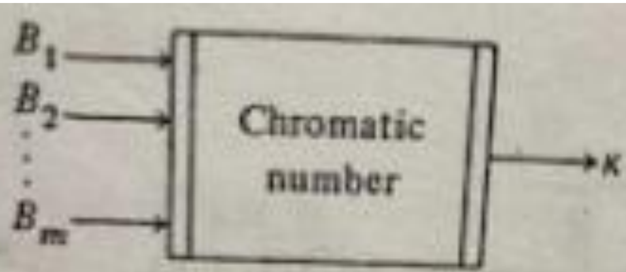


Örnek: Aşağıdaki grafın kromatik sayısı 5 dir.



$\chi(G)=5$

Kromatik Sayıyı bulmak için bir algoritma



i: element of m^+

j: element of n^+

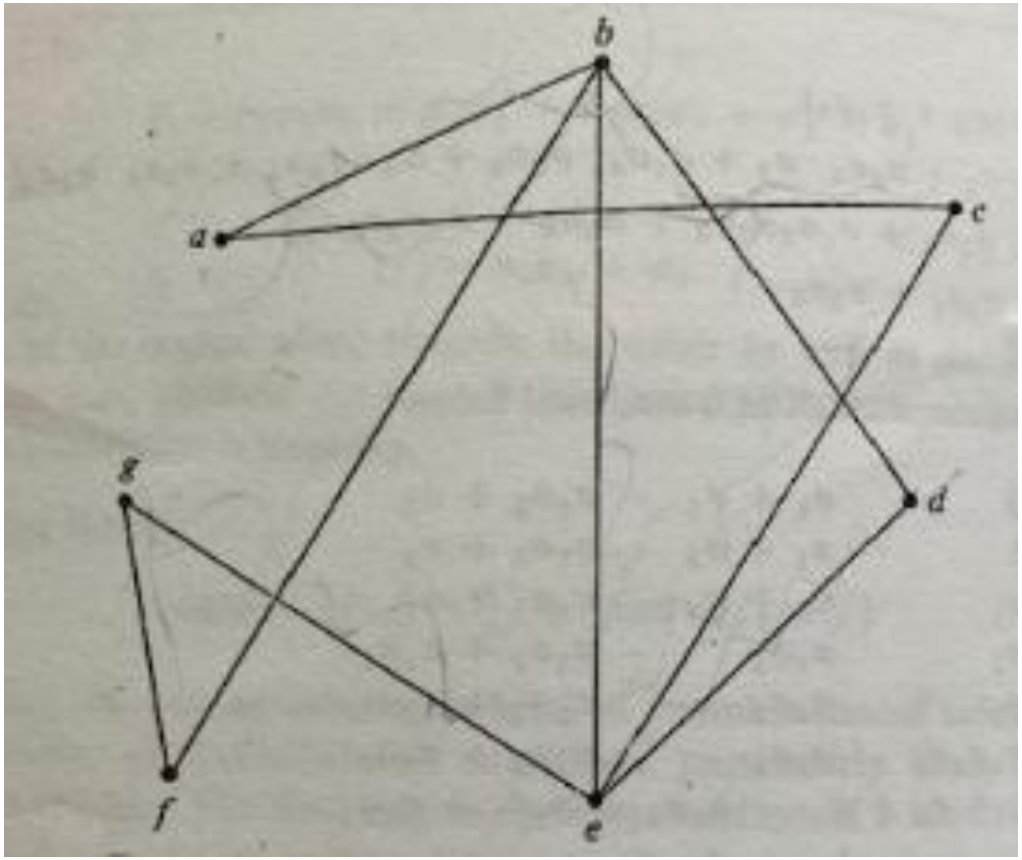
κ: nonnegative integer

f: element of $L(n)$

g: array n^+ of $L(n)$

begin for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**
    begin $g[j] \leftarrow 0$;
        for $i \leftarrow 1$ **to** m **do**
        if $v_j \in B_i$ **then**
            $g[j] \leftarrow g[j] + B_i$
    end;
    $f \leftarrow 1$;
    for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**
        $f \leftarrow f \cdot g[j]$;
    $\kappa \leftarrow \min_{x \text{ in } f} \{|x|\}$
end

Örnek:



Şekilde verilen grafın kromatik sayısını bulunuz.

Verilen grafın maksimal bağımsız kümeleri:

A= *cdg*   **B**=*cdf*   **C**=*adg*   **D**=*adf*   **E**=*aef*   **F**=*bcg*

Örtü Matrisi:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
A	0	0	1	1	0	0	1
B	0	0	1	1	0	1	0
C	1	0	0	1	0	0	1
D	1	0	0	1	0	1	0
E	1	0	0	0	1	1	0
F	0	1	1	0	0	0	1

F fonksiyonun oluşturulması:

$$\begin{aligned} f &= (C + D + E)F(A + B + F)(A + B + C + D)E(B + D + E)(A + C + F) \\ &= (CF + DF + EF)(A + B + F)\cdots \\ &= (CF + DF + EF)(A + B + C + D)\cdots \\ &= (CF + DF + AEF + BEF)E\cdots \\ &= (CEF + DEF + AEF + BEF)(B + D + E)\cdots \\ &= (CEF + DEF + AEF + BEF)(A + C + F) \\ &= CEF + DEF + AEF + BEF \end{aligned}$$

It follows that the chromatic number of the graph of Figure 4.8 is $\kappa = 3$.

If we wish to obtain a proper coloring of the graph with only three colors, we will choose any combination in f of size three, say

$$CEF: \quad C = \{a, d, g\} \qquad E = \{a, e, f\} \qquad F = \{b, c, g\}$$

These three blocks will cover V, but we have to "back off" to a partition:

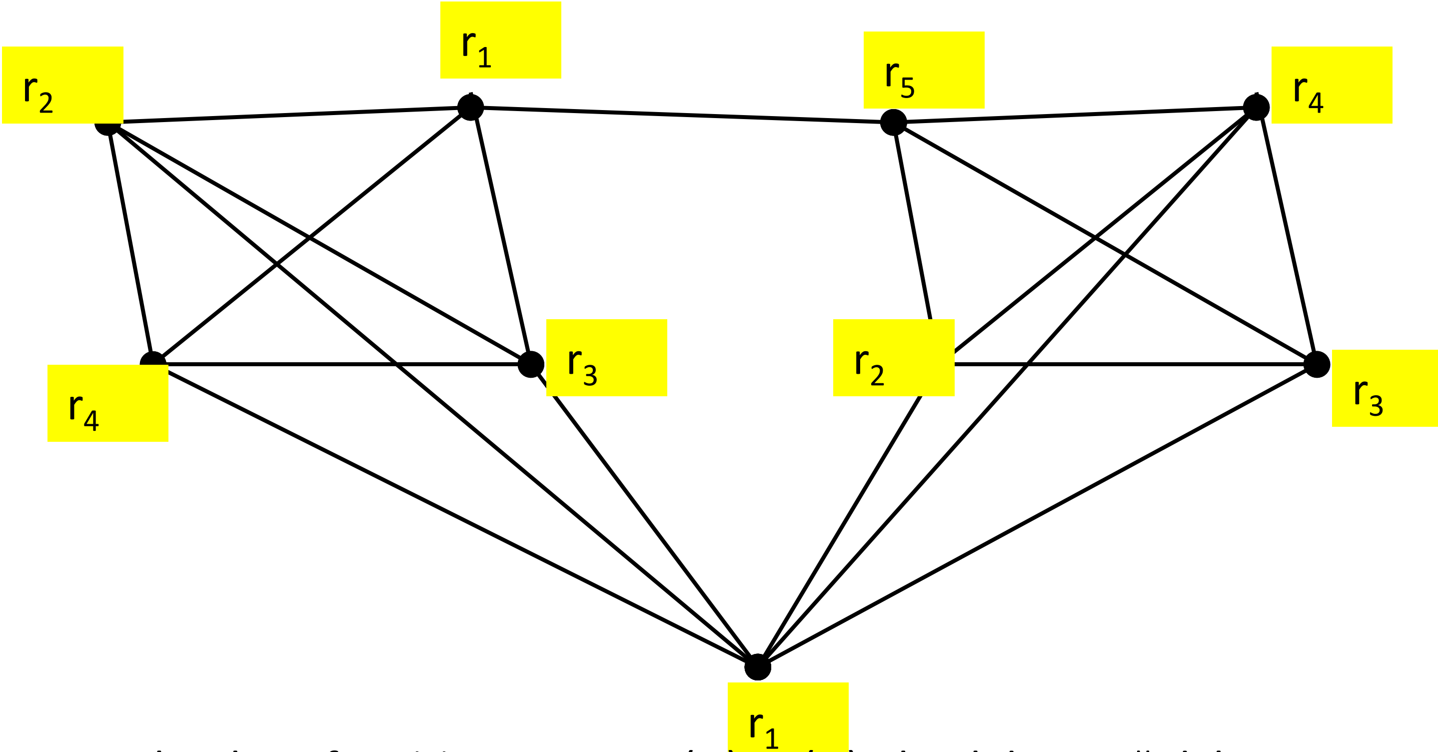
$$C' = \{d, g\} \qquad E' = \{a, e, f\} \qquad F' = \{b, c\}$$

Önemli Teoremler:

Teorem: Herhangi bir G grafı için
$\chi(G) \leq \Delta(G)+1$ dir.

Kritik Graf: G bir graf olsun. G nin her $H \subset G$ alt kümesi için $\chi(H) < \chi(G)$ oluyorsa G ye kritik graf denir.

Örnek: Aşağıdaki graf için $\chi(G)=5$ olup, G kritik graf mıdır?



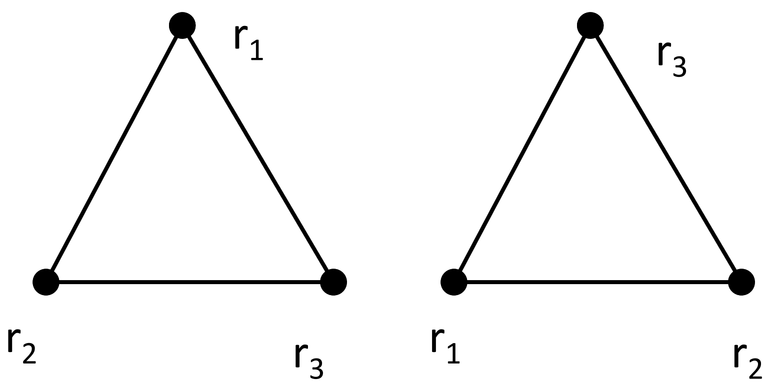
G kritik graf ise $\forall$ $H \subset G$ için $\chi(H) < \chi(G)$ olmalıdır. Aşağıdaki alt grafları, ele alalım.

$r_1r_2r_3r_4$, $r_2r_5r_4r_3$ ve $r_1r_5r_3r_2r_1$ ile belirtilen alt graflar için kromatik sayılar, sırasıyla, 4,4 ve 3 dür. Buradaki diğer alt graflar içinde kromatik sayı en fazla 4 olup, G grafı kritik grafdır.

- Tam graf kritik graftır.
- Yol graf kritik graf değildir.

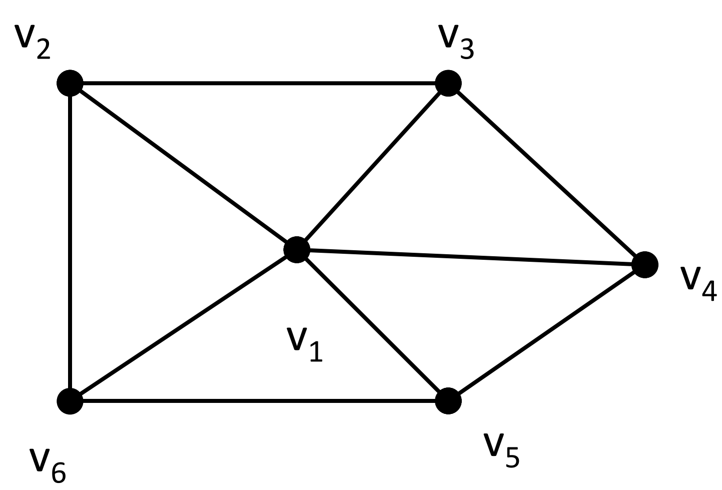
Teorem: Her kritik graf birleştirilmiştir.

Kanıt: Olmayana ergi yöntemi ile graf birleştirilmiş olmasın. Bu durumda, aşağıdaki gibi birleştirilmemiş öyle bir $H \subset G$ alt grafı vardır ki $\chi(H) < \chi(G)$ koşulu sağlanmaz. Bu ise hipoteze aykırıdır.



Teorem: G, kromatik sayısı 4 olan bir kritik graf ise her bir tepenin derecesi en az 3 tür.

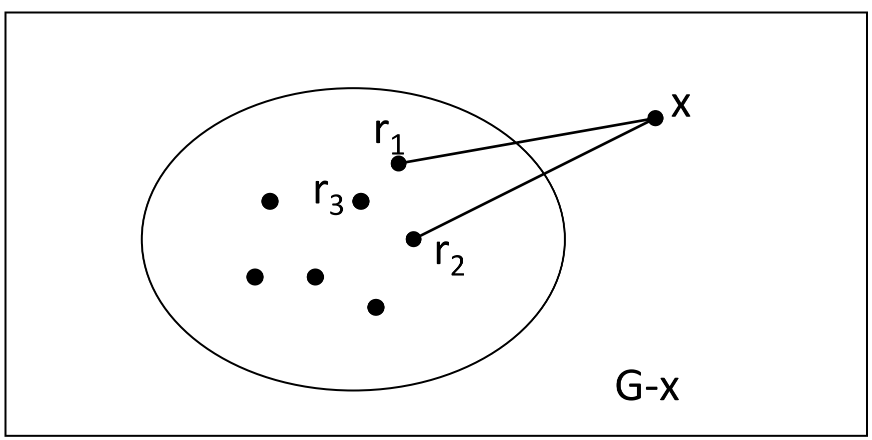
Teoreme örnek olarak aşağıdaki graf verilebilir. Bu graf için $\chi(W_{1,5})=4$ olup, her $H \subset W_{1,5}$ alt grafı için $\chi(H)<4$ dür. Yani, $W_{1,5}$ kritik grafdır ve her bir tepesinin derecesi en az 3 dür.



$W_{1,5}$

Kanıt: Kanıt olmayana ergi yöntemi ile yapılır.

G, kromatik sayısı 4 olan bir kritik graf ise G grafının bir x tepesinin en çok 2 dereceli olduğunu kabul edelim. G kritik graf olduğu için ($x \in V(G)$ olmak üzere) $\chi(G-x) < \chi(G)$ olup, G-x grafı 3 renkle boyanabilir. x tepesini grafta geriye koyarsak, kabulümüzden x en çok iki tepe ile bitişiktir.



Bu durumda, x tepesini 3. renk ile boyayabiliriz. Bu ise, G grafının kromatik sayısının 3 olması demektir ve hipotez ile çelişkilidir.

Teorem: G, kromatik sayısı $\chi(G)$ olan kritik bir graf ise her bir tepesinin derecesi en az $\chi(G)$-1 dir.

Teorem: G, p-tepeli, q-ayrıtlı kritik bir graf ve G nin kromatik sayısı $\chi(G)$ ise

$(\chi(G)-1)p \leq 2q$ dur.

Kanıt: Son teoremden, G nin her bir tepesinin derecesi en az $\chi(G)$-1olup, grafın

tüm tepe derecelerinin toplamı en az $(\chi(G)-1)p$ dir. Bir G grafının tepe derecelerinin toplamı, ayrıt sayısının (q) iki katına eşit olduğuna göre

$(\chi(G)-1)p \leq 2q$.

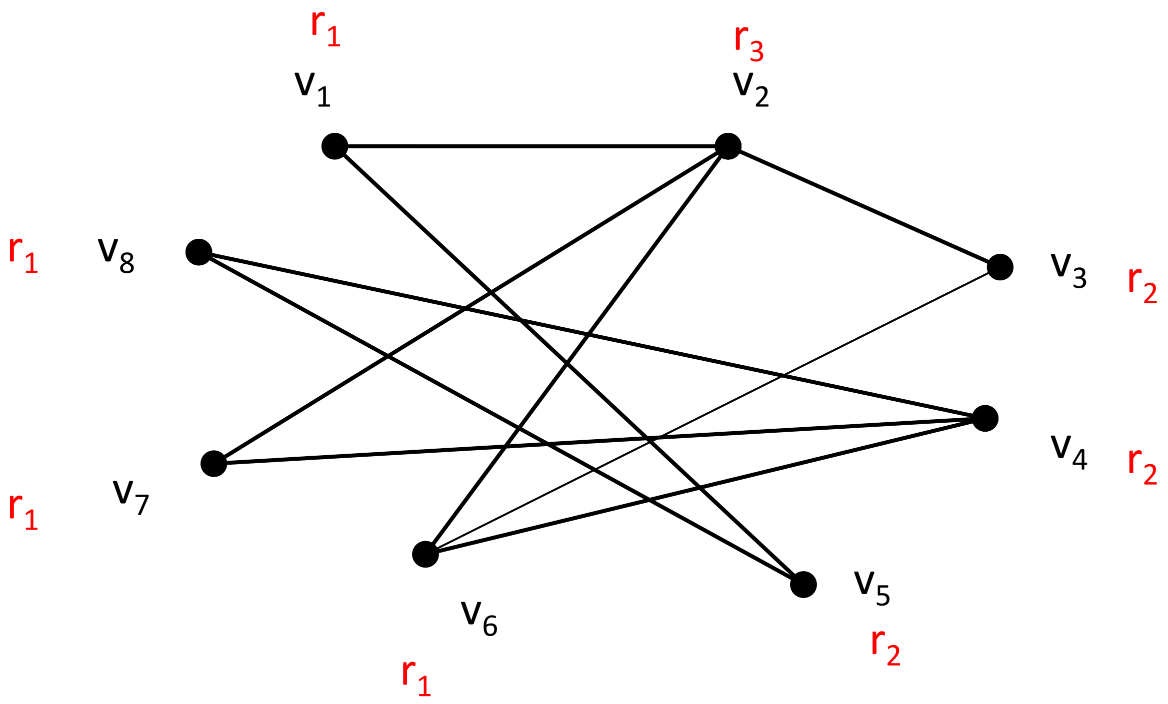
Kromatik sayı için güncel bir örnek

Örnek: Bir ilaç firması n tane kimyasal maddeyi satın ıştır. Bu maddeleri işlemeden önce saklamak için firmanın en az kaç tane depoya ihtiyacı vardır?

Problemin çözümü için örnek olarak n=8 alalım ve bu maddeler maddelerin aşağıdaki gibi kimyasal etkileşime girdiğini düşünelim?

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_2	x_3	x_2	x_7	x_1	x_2	x_4	x_4
x_5	x_7	x_6	x_6	x_8	x_4	x_2	x_5
	x_1		x_8		x_3		
	x_6						

O halde en az kaç depoya gereksinim vardır.?



$r_1=\{x_1,x_6,x_7,x_8\}$ $r_2=\{x_3,x_4,x_5\}$ $r_3=\{x_2\}$

Burada her bir renk kümesi bir depoya yani grafın bir bağımsızlık kümesine karşılık gelmektedir.Ayrıca bu kümeler bir parçalanış oluşturur.
Yani; grafın tepeleri 3 parçaya ayrılmış olur.

Tanım (Parçalanış):

A bir küme olsun.

1)$\forall$i için Ai$\neq\emptyset$

2) $\forall$i,j için (i$\neq$j) Ai $\cap$Aj =0

3) $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{r} A_i = A$

A_1, A_2,…,Ar ye A nın bir parçalanışı denir. Gerçekten, sorunun yanıtını veren renk kümelerini ele alırsak:

1) $r_1 \neq \emptyset$

$r_2 \neq \emptyset$

$r_3 \neq \emptyset$

2) $r_1 \cap r_2 = \emptyset$

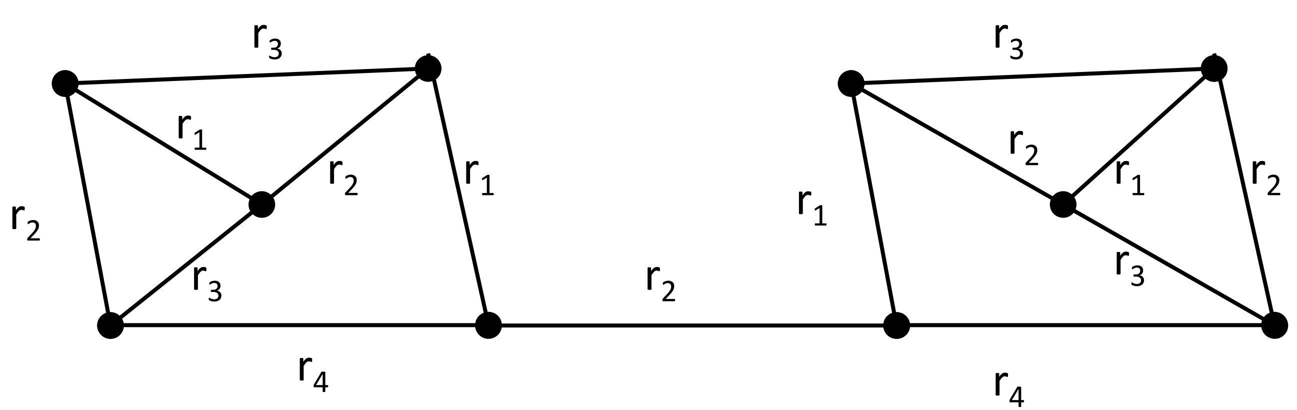
$r_1 \cap r_3 = \emptyset$

$r_2 \cap r_3 = \emptyset$

3) $r_1 \cup r_2 \cup r_3 = V(G)$

Koşulları sağlanmakta olup bu kümeler bir parçalanış oluşturur.

Ayrıt Boyama: G bir graf olsun. G nin birbirine bitişik olan (ortak bir tepeye sahip olan) ayrıtları farklı renkte olacak şekilde grafın tüm ayrıtlarını boyamak için gerekli olan en az renk sayısına renk sayısına ayrıt kromatik sayı denir ve χ‘(G) ile gösterilir.

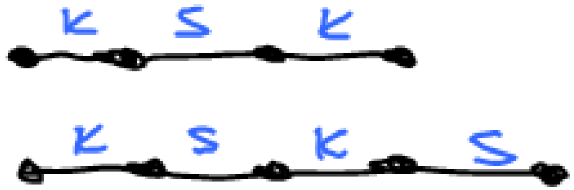


Yol, Çevre, Tam, Yıldız, Tekerlek ve İki parçalı Tam grafların Ayrıt Boyama Sayıları nedir?

Ayrıt Boyama sayısı algoritmik olarak nasıl hesaplanabilir?

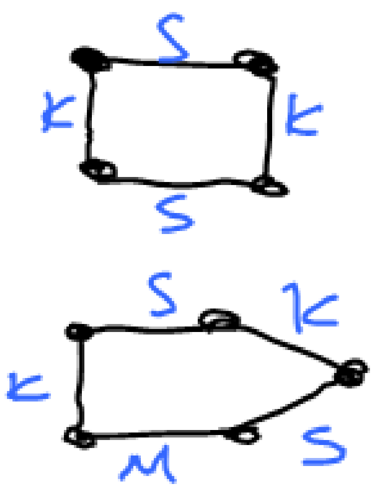
Ayrıt Boyama

1) Yol Graf



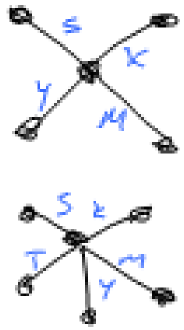
$$\chi'(P_n) = 2$$

2) Çevre Graf



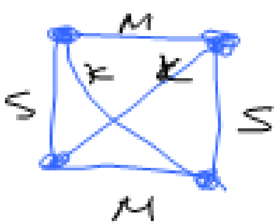
$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ çift} \\ 3, & n \text{ tek} \end{cases}$$

3) Yıldız Graf

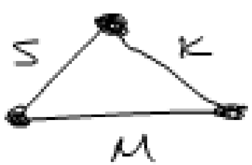


$$\chi'(K_{1,n}) = n$$

4) Tam Graf



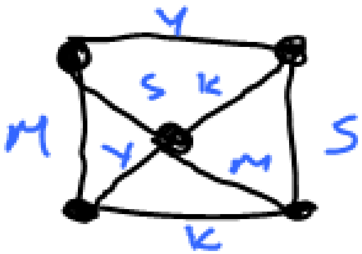
K_4



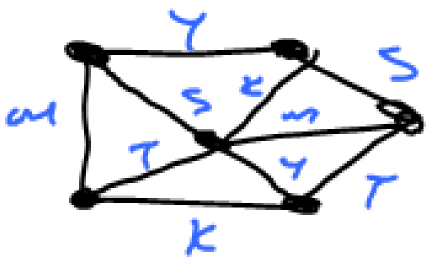
K_3

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n, & n \text{ tek} \\ n-1, & n \text{ çift} \end{cases}$$

5) Tekerlek Graf



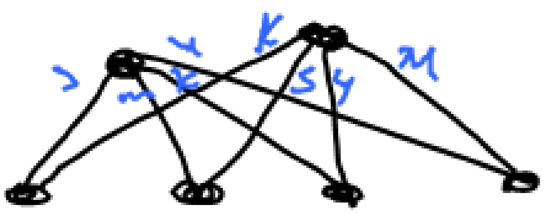
$W_{1,4}$



$W_{1,5}$

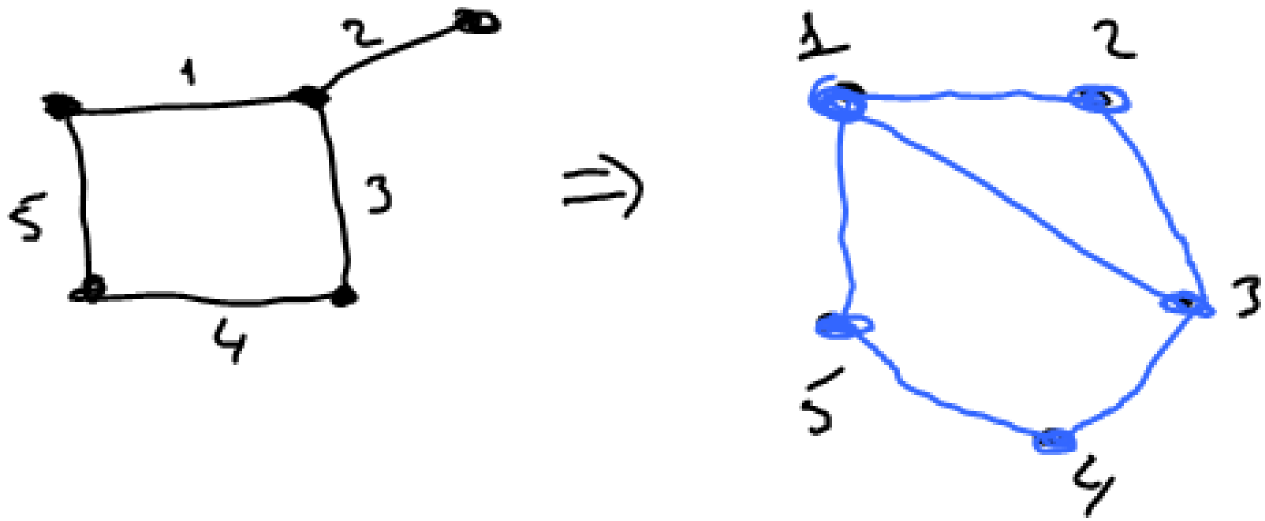
$$\chi'(W_{1,n}) = n$$

6) iki parçalı tam graf



$$\Rightarrow \chi'(K_{m,n}) = \max\{m,n\}$$

Line Graf



$G \Rightarrow L(G)$

Ayrıtlar tepe oluyor.

KAYNAKLAR

[1] Chartrand, G.-Lesniak, L., (1986) : *Graphs and Digraphs*, Wadsworth & Brooks, California

[2] West D.B. (2001) : *Introduction to Graph Theory, Prentice Hall*, USA.

[3] Graf Teoriye Giriş, Şerife Büyükköse ve Gülistan Kaya Gök, Nobel Yayıncılık

[4] Discrete Mathematical Structures for Computer Science, Ronald E. Prather, Houghton Mifflin Company, (1976).

[5] Christofides, N., 1986. Graph Theory an Algorithmic Approach, Academic Press, London