Durum Türleri: $i \in E$ için,

Eğer $p_{i,i}^{(1)} = 1 \Rightarrow$ "i" durumuna **YUTAN DURUM**;

$p_{i,i}^{(1)} < 1 \Rightarrow$ "i" durumuna **GEÇİCİ DURUM**

denir.

Not: Gelecekte diğer durumların gözlenmesini ortadan kaldıran duruma yutan durum denir.

Örn: $E=\{0,1,2,3\}$, $T=\{0,1,2,3,\dots\}$ ve

$$\mathbb{P}^{(1)} = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{array}$$

$p_{0,0}^{(1)}$, $p_{1,1}^{(1)}$, $p_{2,2}^{(1)}$, $p_{3,3}^{(1)}$

$p_{0,0}^{(1)} = 0.2 < 1$ olduğundan "0" durumu Geçici durumdur.

$p_{1,1}^{(1)} = 0 < 1$ " "1" " " " .

$p_{2,2}^{(1)} = 1 = 1$ " "2" " YUTAN " .

$p_{3,3}^{(1)} = 0.4 < 1$ " "3" " Geçici " .

Sonuçta YUTAN → 2

GEÇİCİ → 0, 1 ve 3 .

Not: Yukarıdaki örnekte "2" durumu diğer durumları ortadan kaldıran durumdur. Yani rasgele değişkenin değeri 2 olduğu andan gelecekte hep 2 olarak sabitlenmiş olacağı söylenebilir. Bir başka deyişle;

$$\underbrace{P(X_8=2 \mid \overbrace{X_7=2}^{\text{şu an}})}_{p_{2,2}^{(1)}} = 1 \qquad \underbrace{P(\overbrace{X_8=1}^{\text{bir sonraki}} \mid \overbrace{X_7=2}^{\text{şu an}})}_{p_{2,1}^{(1)}} = 0$$

$$\underbrace{P(X_9=2 \mid X_7=2)}_{p_{2,2}^{(2)}} = 1$$

$$P(X_n=2 \mid X_7=2) = 1 \,, \quad n>7 \text{ için}$$

* Yutulma Süresi: En az bir yutan duruma sahip markov zincirlerinde bu süre bir kesikli rasgele değişken ile gösterilir. Örneğin; $E=\{0,1,2\}$, $T=\{0,1,2,3,\ldots\}$ ve $\{0$ ile 2 yutan; 1 ise geçici durum$\}$ olmak üzere, bu markov zincirinde yutulma süresi;

$$N := \min\{n \in T : \underbrace{X_n = 0}_{\text{koşul 1}} \underset{\vee}{\text{veya}} \underbrace{X_n = 2}_{\text{koşul 2}}\}$$

koşul.

yutan durumu (0 veya 2'yi) ilk gözlendiğinin an. (= kaçıncı gözlem)

T'nin elemanlarını değer olarak alabilen bir kesikli r.d.

şeklinde tanımlanır. Mesela, yukarıdaki markov zincirinde ilk 6 gözlem aşağıdaki gibi gerçekleşmiş olsun:

başlangıç gözlem; birinci gözlem; ikinci gözlem

		X_0	$\xrightarrow{\text{1. adım}}$ X_1	$\xrightarrow{\text{2. adım}}$ X_2	$\xrightarrow{\text{3. adım}}$ X_3	X_4	X_5	$\ldots$	X_{100}	$\ldots$
$N=3$	$\Leftarrow$	1	1	1	$\boxed{0}$	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$
$\boxed{N=2}$	$\Leftarrow$	1	1	$\boxed{2}$	2	2	2	$\ldots$	2	$\ldots$
$N=0$	$\Leftarrow$	$\boxed{0}$	0	0	0	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$
$N=0$	$\Leftarrow$	$\boxed{2}$	2	2	2	2	2	$\ldots$	2	$\ldots$
$\vdots$		$\vdots$								

$\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$

$$\to N = \min\{n \in T : \underline{X_n = 0} \text{ veya } X_n = 2\}$$
$$= \min\{3,4,5,\ldots\} = 3$$

YUTULMA OLASILIKLARI:

En az bir yutan duruma sahip Markov zincirlerinde $i \in E$ ve j ise yutan durum olmak üzere, "i ile başlayıp j ile yutulma olasılığı" $\boxed{U_{ij}}$ ile gösterilsin. Bu durumda U_{ij} şu şekilde tanımlanır;

$$\boxed{U_{ij} := P(X_{\boxed{N}} = j \mid \underline{X_0 = i})}.$$

$\to$ i ile başlayıp.

Not: X_N'in indisinin bir rasgele değişken olduğuna dikkat ediniz.

Örnek: $E=\{0,1,2\}$, $T=\{0,1,2,\dots\}$, $\alpha+\beta+\gamma=1$, $\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0$

olmak üzere,

$$\mathbb{P}^{(1)} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow$$

YUTAN D. → 0 ve 2

GEÇİCİ D. → 1

$p^{(1)}_{1,0} = P(X_n=0 \mid X_{n-1}=1)$

$0<\beta<1$

$U_{i,j} \rightarrow$ i ile başlarsa j ile yutulma olasılığı

i ↓ 0, 1 veya 2; j ↓ 0 veya 2

$\boxed{U_{0,0}=1}$ $\boxed{U_{0,2}=0}$

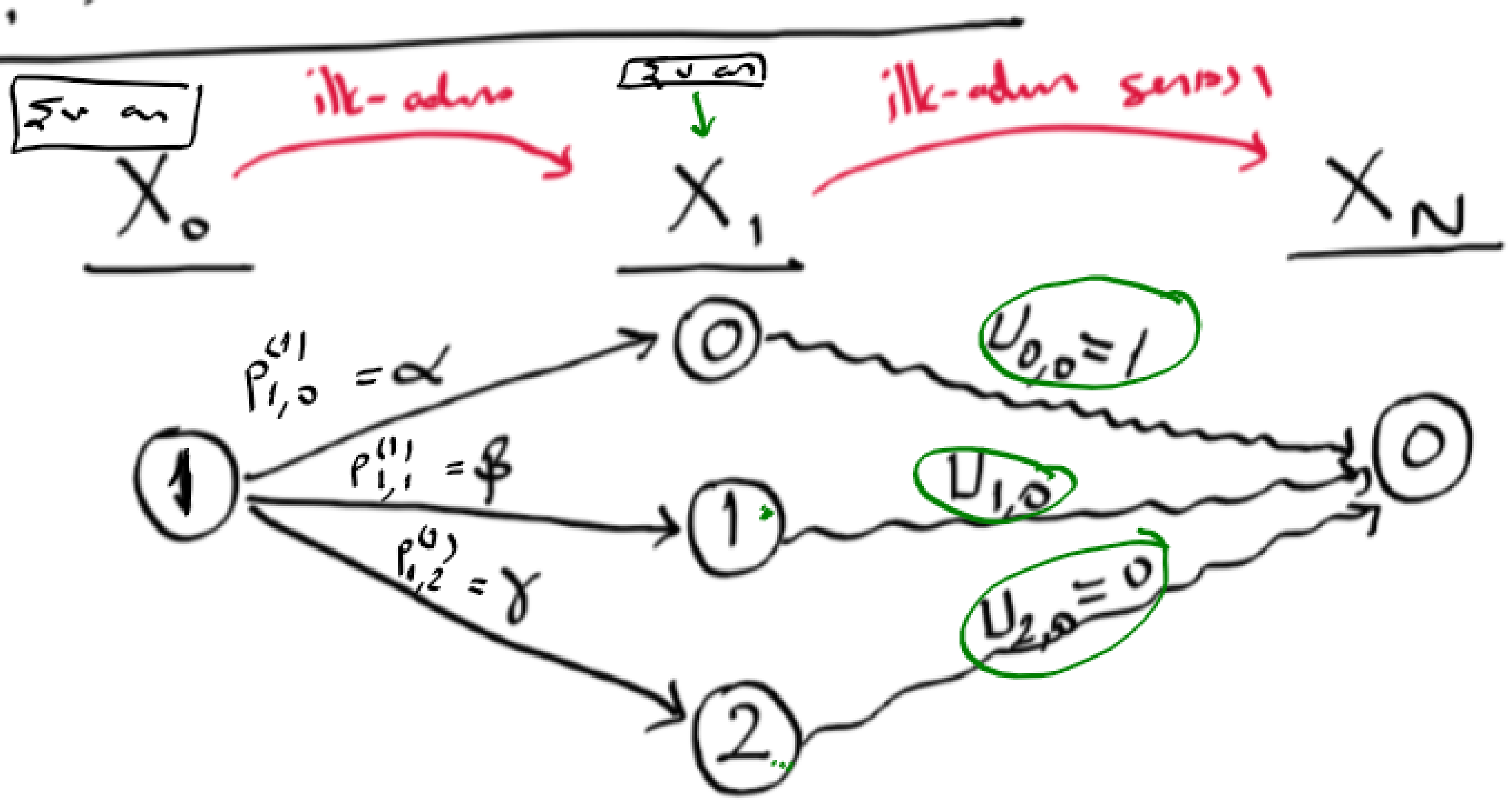
$\boxed{U_{1,0}=?>0 \quad U_{1,2}=?>0}$

$\boxed{U_{2,0}=0}$ $\boxed{U_{2,2}=1}$

İlk-Adım Çözümlemesi (First-step Analysis) ile Yutulma Olasılıklarının Hesaplanması:

$U_{1,0}$ için ilk-adım çözümlemesi:

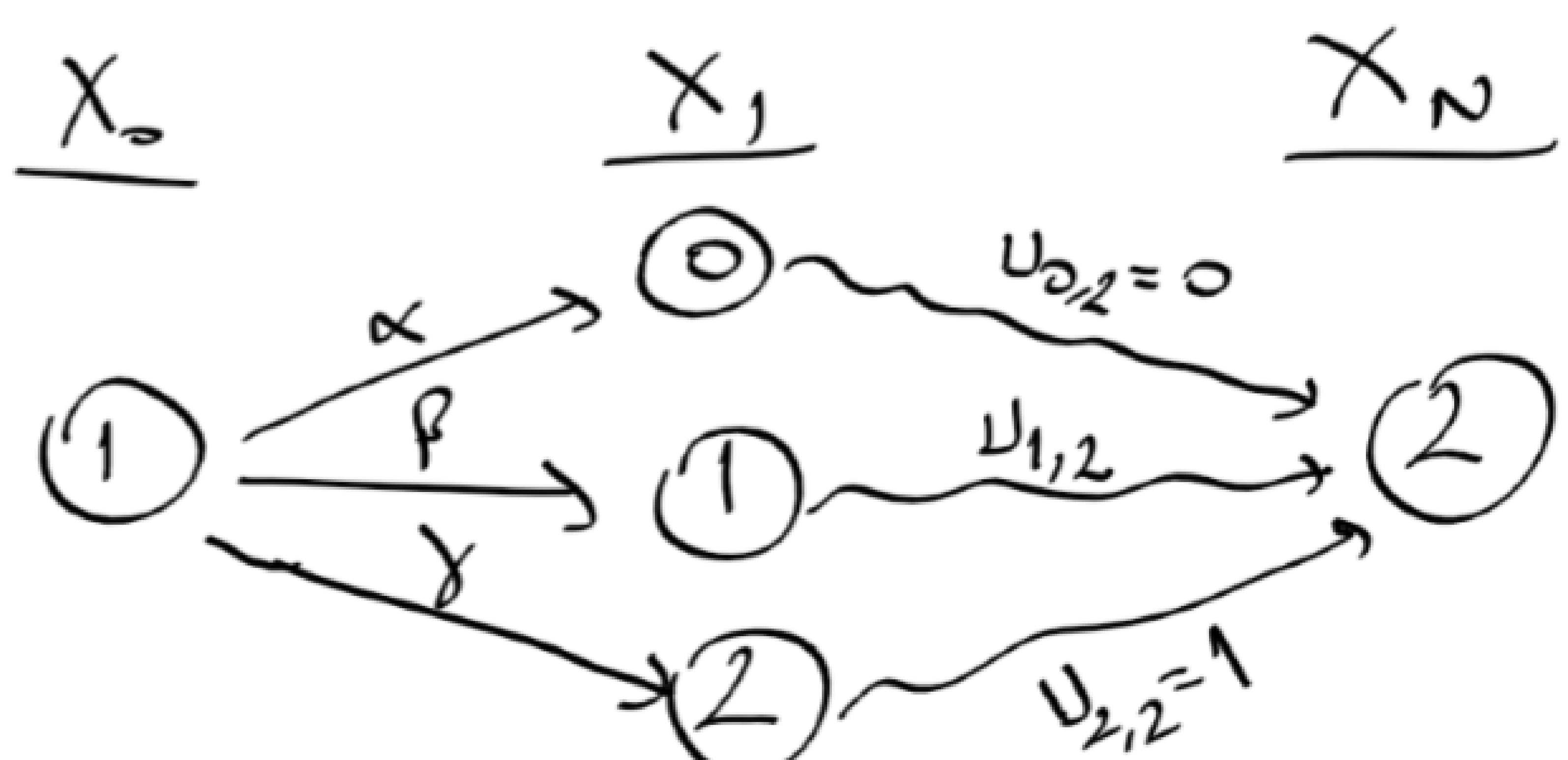
$P(X_N=0 \mid X_0=1) \rightarrow U_{1,0}$



$$\Rightarrow U_{1,0} = \alpha\cdot \underbrace{1}_{U_{0,0}} + \beta\cdot U_{1,0} + \gamma\cdot \underbrace{0}_{U_{2,0}} \Rightarrow U_{1,0} = \frac{\alpha}{1-\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma}$$

Lineer denklem

$U_{1,2}$ için ilk-adım çözümlemesi:



$$\Rightarrow U_{1,2} = \alpha\cdot 0 + \beta\cdot U_{1,2} + \gamma\cdot 1$$

$$\Rightarrow U_{1,2} = \frac{\gamma}{1-\beta} = \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}$$

$\boxed{P\{1 \text{ ile başlarsa en sonunda yutulma}\} = U_{1,0}+U_{1,2} = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} = 1}$

$U_{1,0}$ için klasik çözüm!

$\boxed{N>0}$

$T=\{0,\overbrace{1,2,\dots}^{n\in}\}$

$E=\{0,1,2\}$ Geçici

Yutan

$$U_{1,0} := P(X_N=0 \mid X_0=1) = \sum_{\substack{n\in T_\infty \\ n\neq 0}} P\{\underbrace{X_1=1, X_2=1, \dots, X_{n-1}=1, X_n=0}_{A} \mid X_0=1\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{p_{1,1}^{(1)} \cdot p_{1,1}^{(1)} \cdots p_{1,1}^{(1)}}_{(n-1)\text{ tane}} \cdot p_{1,0}^{(1)}$$

A = {ilk n-1 adımda yutulmama ve n'inci adımda "0" ile yutulma} = {"0" ile n'inci adımda yutulma}

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\beta\cdot\beta\cdots\beta}_{(n-1)\text{ tane}}\cdot\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1}\cdot\alpha$$

$$= \alpha\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \beta^{n-1} = \alpha(\beta^0+\beta^1+\beta^2+\beta^3+\dots) = \alpha\underbrace{(1+\beta+\beta^2+\beta^3+\dots)}_{K=?}$$

Not: $\beta.K = \underbrace{\beta+\beta^2+\beta^3+\dots}_{K-1} \Rightarrow \beta.K=K-1$

$\Rightarrow K=\frac{1}{1-\beta}$

$$= \alpha.K = \alpha\cdot\frac{1}{1-\beta} = \frac{\alpha}{1-\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma}$$

Not: örneğe bak.
$\boxed{\alpha+\beta+\gamma=1}$

$$U_{1,2} = P(X_N=2 \mid X_0=1) = \dots = \gamma.K = \frac{\gamma}{1-\beta} = \frac{\gamma}{\alpha+\gamma}$$

UYARI: $\underbrace{U_{1,0}+U_{1,2}} = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} = 1$

"1" ile başlanırsa
eninde sonunda [illegible]
yutulma olasılığı