Genel Sonuç: Aynı başlangıç durumu ile başladığında olası tüm yutan durumlar ile yutulma olasılıkları toplamı daima 1'e eşittir.

Not: Bir yutulma olasılığı için ilk-adım çözümlemesi yapıldığında ortaya çıkan lineer denklemde bir başka bilinmeyen yutulma olasılığı yer alıyor ise, onun için de ilk-adım çözümlemesi yapılır ve bir lineer denklem daha elde edilir. Süreç bu şekilde bilinmeyen yutulma olasılığı sayısı, lineer denklem sayısına eşitlenene kadar sürer. Daha sonra lineer denklem sistemi çözülerek yutulma olasılıkları bulunur.

Örnek: $E=\{0,1,2,3\}$, $T=\{0,1,2,3,\dots\}$ ve

$$\mathbb{P}^{(1)} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0.4} & 0.6 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{YUTAN D.} \rightarrow \boxed{0 \text{ ve } 3} \\ \text{GEÇİCİ D.} \rightarrow \boxed{1 \text{ ve } 2} \end{array}$$

$U_{0,0}=1$
$U_{0,3}=0$
$U_{3,0}=0$
$U_{3,3}=1$

$\boxed{U_{1,0}=?}$, $U_{1,3}=?$

$\boxed{U_{2,0}=?}$, $U_{2,3}=?$

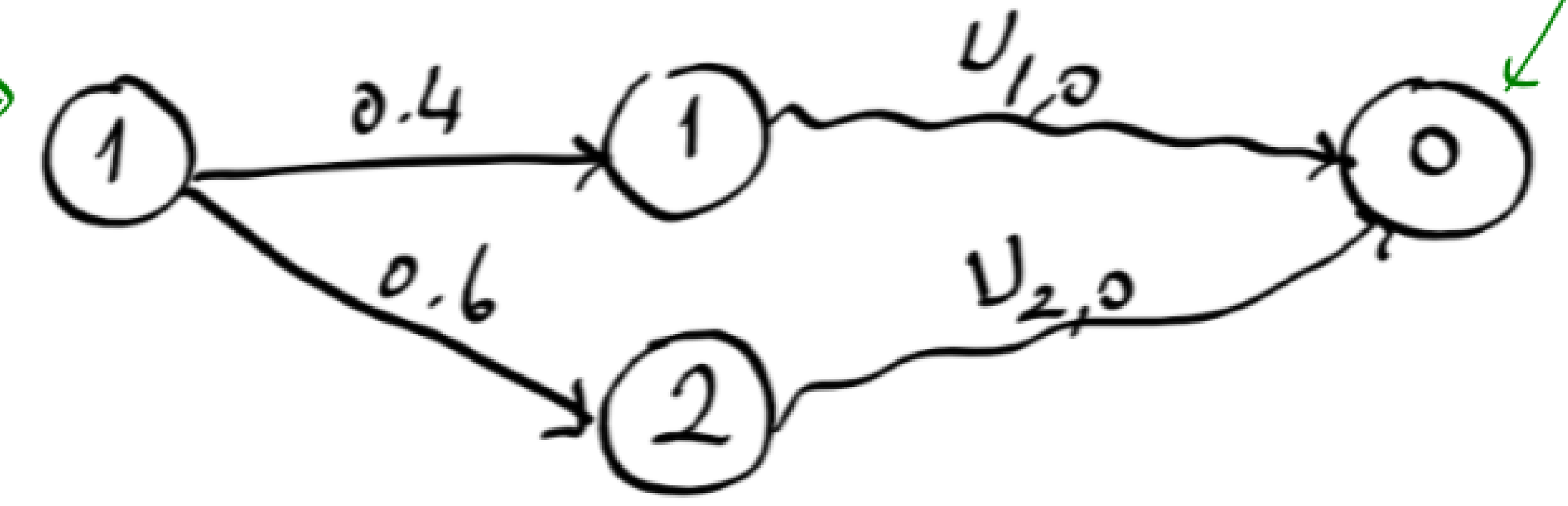
Not: $U_{1,0}+U_{1,3}=1$

$U_{2,0}+U_{2,3}=1$

$\rightarrow N:=\min\{n\in T:\ X_n=0 \text{ veya } X_n=3\}$ yutulma süresi

$U_{1,0}$ için ilk-adım çözümlemesi

$X_0 \xrightarrow{\text{ilk-adım}} X_1 \longrightarrow X_N$



üstteki yol — alttaki yol

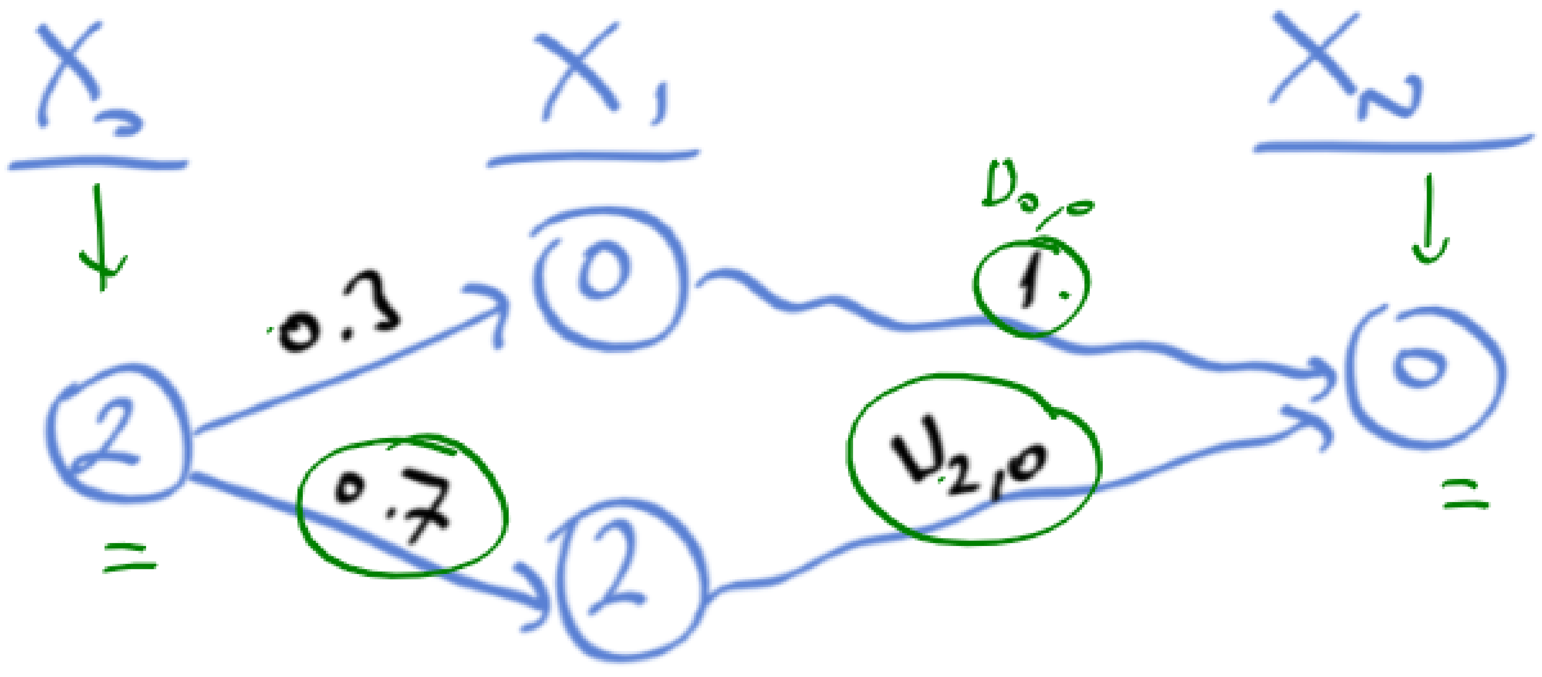
$\Rightarrow U_{1,0}=(0.4)\cdot U_{1,0}+(0.6)\cdot U_{2,0}$

$\Rightarrow 6U_{1,0}-6U_{2,0}=0$

$\Rightarrow \boxed{U_{1,0}-U_{2,0}=0} \dots (I)$

2. bilinmeyen

→ $U_{2,0}$ için ilk-adım çözümlemesi



(II)

$$\boxed{U_{2,0} = (0.3)\,1 + (0.7)\,U_{2,0}}$$

$$3 \cdot U_{2,0} = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{U_{2,0} = 1} \ldots$$

Bunu I'de yerine yazalım.

$$U_{1,0} - U_{2,0} = 0 \Rightarrow U_{1,0} - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{U_{1,0} = 1}$$

Diğer yandan;

$$\underbrace{U_{1,0}}_{1} + U_{1,3} = 1 \Rightarrow \boxed{U_{1,3} = 0}$$

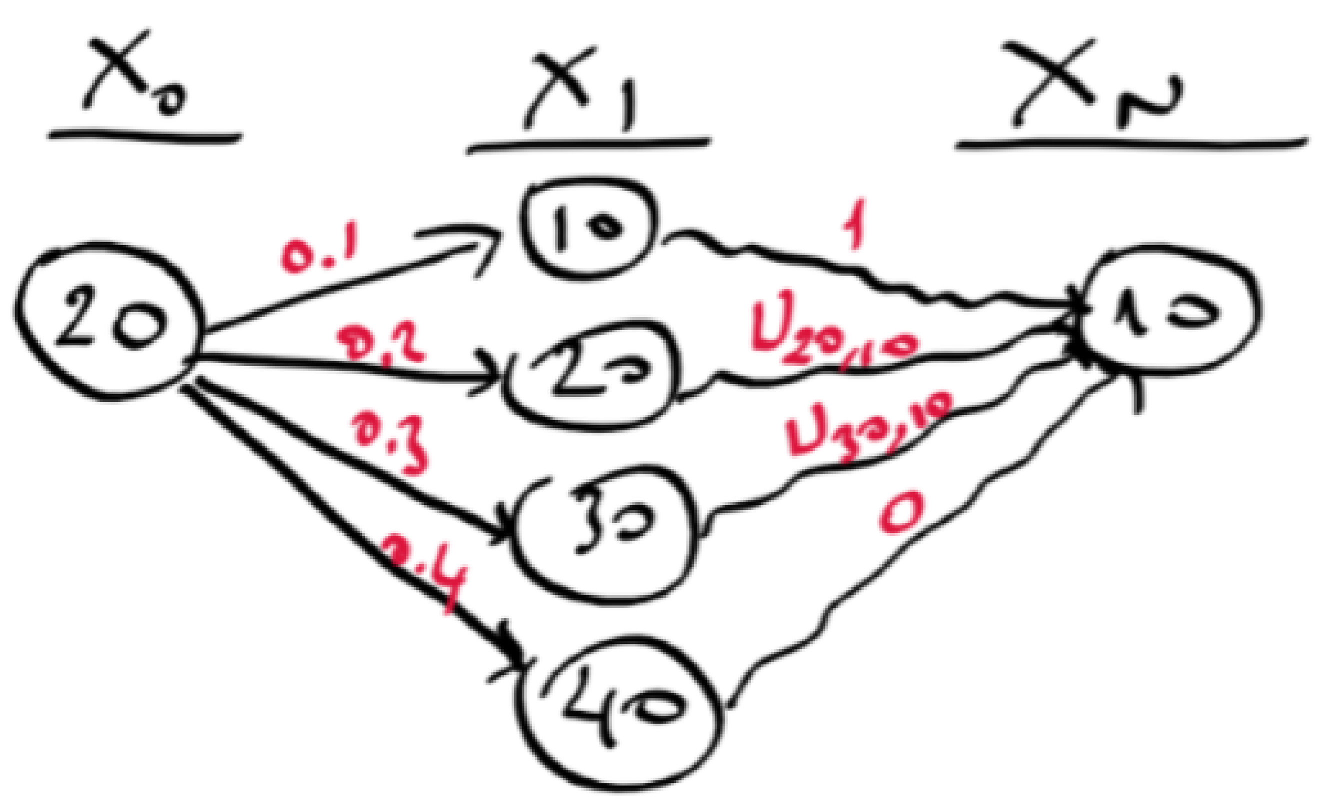
$$\underbrace{U_{2,0}}_{1} + U_{2,3} = 1 \Rightarrow \boxed{U_{2,3} = 0}$$

Örnek: $E = \{10, 20, 30, 40\}$, $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$$\mathbb{P}^{(1)} = \begin{array}{c} \\ 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 10 & 20 & 30 & 40 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} U_{20,10} = ? + U_{20,40} = ? \\ U_{30,10} = ? + U_{30,40} = ? \end{matrix}}$$

YUTAN → 10 ve 40
GEÇİCİ → 20 ve 30

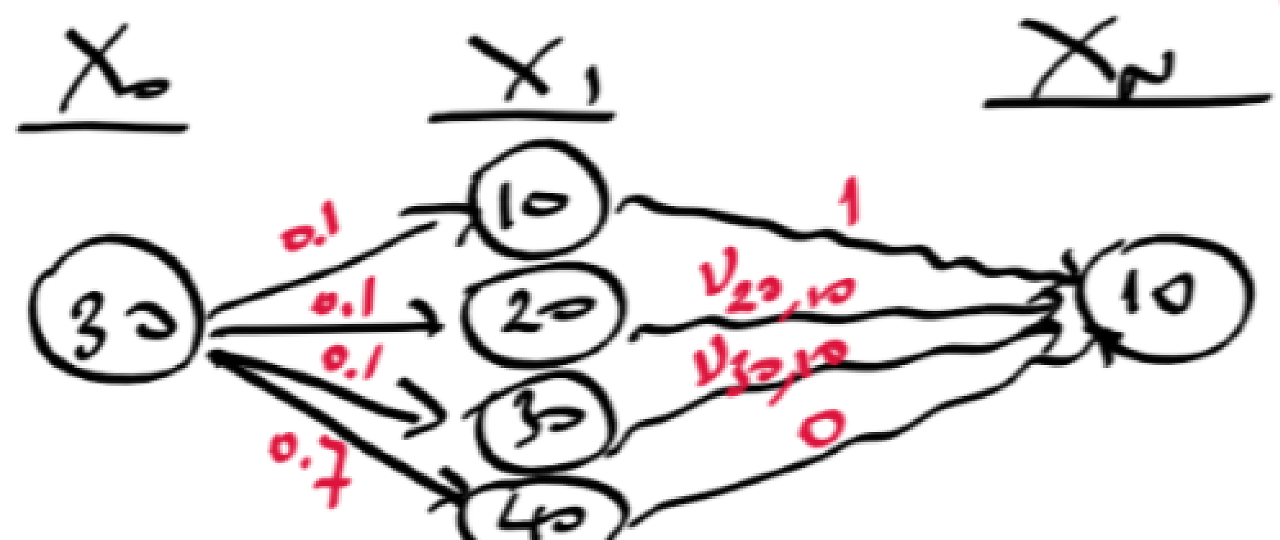
$U_{20,10}$ için ilk-adım çöz.



$$\Rightarrow U_{20,10} = (0.1)\,1 + (0.2)\,U_{20,10} + (0.3)\,U_{30,10} + (0.4)\,0$$

$$\Rightarrow \boxed{8\,U_{20,10} - 3\,U_{30,10} = 1} \ldots (I')$$

$U_{30,10}$ için ilk-adım çöz.



$$\Rightarrow U_{30,10} = (0.1)\,1 + (0.1)\,U_{20,10} + (0.1)\,U_{30,10} + (0.7)\,0$$

$$\Rightarrow \boxed{-U_{20,10} + 9\,U_{30,10} = 1} \ldots (II')$$

I' ve II' den $U_{20,10}$ ve $U_{30,10}$ çözülür.

$$\begin{aligned} 3 / \quad 8\, U_{20,10} - 3\, U_{30,10} &= 1 \\ / \quad -U_{20,10} + 9\, U_{30,10} &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 24\, U_{20,10} - \cancel{9\, U_{30,10}} &= 3 \\ + \quad -U_{20,10} + \cancel{9\, U_{30,10}} &= 1 \\ \hline 23\, U_{20,10} &= 4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{①:} \quad \boxed{U_{20,10} = \frac{4}{23} \cong 0.174}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{20,10} \\ U_{30,10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 8 & -3 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_1 \leftarrow \frac{R_1}{8}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3/8 & 1/8 \\ -1 & 9 & 1 \end{array}\right] \underset{R_2 \leftarrow R_1 + R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3/8 & 1/8 \\ 0 & 69/8 & 9/8 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{aligned} 1 \cdot U_{20,10} - \frac{3}{8} U_{30,10} &= \frac{1}{8} \quad (\text{III}) \\ 0 \cdot U_{20,10} + \frac{69}{8} U_{30,10} &= \frac{9}{8} \Rightarrow (\text{IV}) \end{aligned}$$

$U_{20,10} = \dfrac{4}{23}$ sonucunu I. nolu denklemde yerine yazalım:

$$8 \cdot \frac{4}{23} - 3\, U_{30,10} = 1 \Rightarrow \text{②} \quad \boxed{U_{30,10} = \cancel{\frac{32}{23 \cdot 3}} = \cancel{\frac{32}{69}} \cong \cancel{0.464}} \quad = \frac{9}{69} \cong 0.1304$$

Doğru yönden;

$$\boxed{U_{20,10} + U_{20,40} = 1} \quad \text{ve} \quad \boxed{U_{30,10} + U_{30,40} = 1}$$

$$\text{③} \quad \boxed{U_{20,40} = \frac{19}{23} \cong 0.826} \qquad \text{④} \quad \boxed{U_{30,40} = \frac{60}{69} \cong \cancel{0.536}} \cong 0.87$$

Problem:

Problem: A ve B oyuncularının bir oyun masasına oturup 3 sonuçlu (Galibiyet, Beraberlik, Malubiyet) bir oyunu ardışık olarak oynayacaklarını varsayalım. A oyuncusununun bir oyunu B oyuncusuna karşı kazanma olasılığının $\boxed{0.6}$, kaybetme olasılığı ise $\boxed{0.3}$ olduğu bilinmektedir. Her iki oyuncu oyun masasına 20'şer TL ile oturduklarını varsayalım. Her oyun sonrası kaybeden kazanana 10 TL verecektir. Oyun serisi oyunculardan birinin cebindeki para sıfırlandığında sona erecektir. A oyuncusunun masadan kazanarak kalkma olasılığı kaçtır?

Çözüm: X_t : t'inci oyun sonrası A oyuncusunun cebindeki para miktarı

$$E=\{0,10,20,30,40\} \qquad X_0 = 20 \text{ TL}$$

$$T=\{0,1,2,3,\ldots\}$$

* $X_0, X_1, X_2, \ldots$'lar markov bağımlı.

Çünkü; Oyun sonrası A oyuncusunun cebindeki para miktarı sadece oyuna başlarkenki para miktarına bağlı, önceki para miktarlarından bağımsız.

Bu problemde yutan durum(lar), oyun masasından kalkmaya neden olan durumlara karşılık gelecektir. O zaman

YUTAN D. → 0 ve 40

GEÇİCİ D. → 10, 20 ve 30

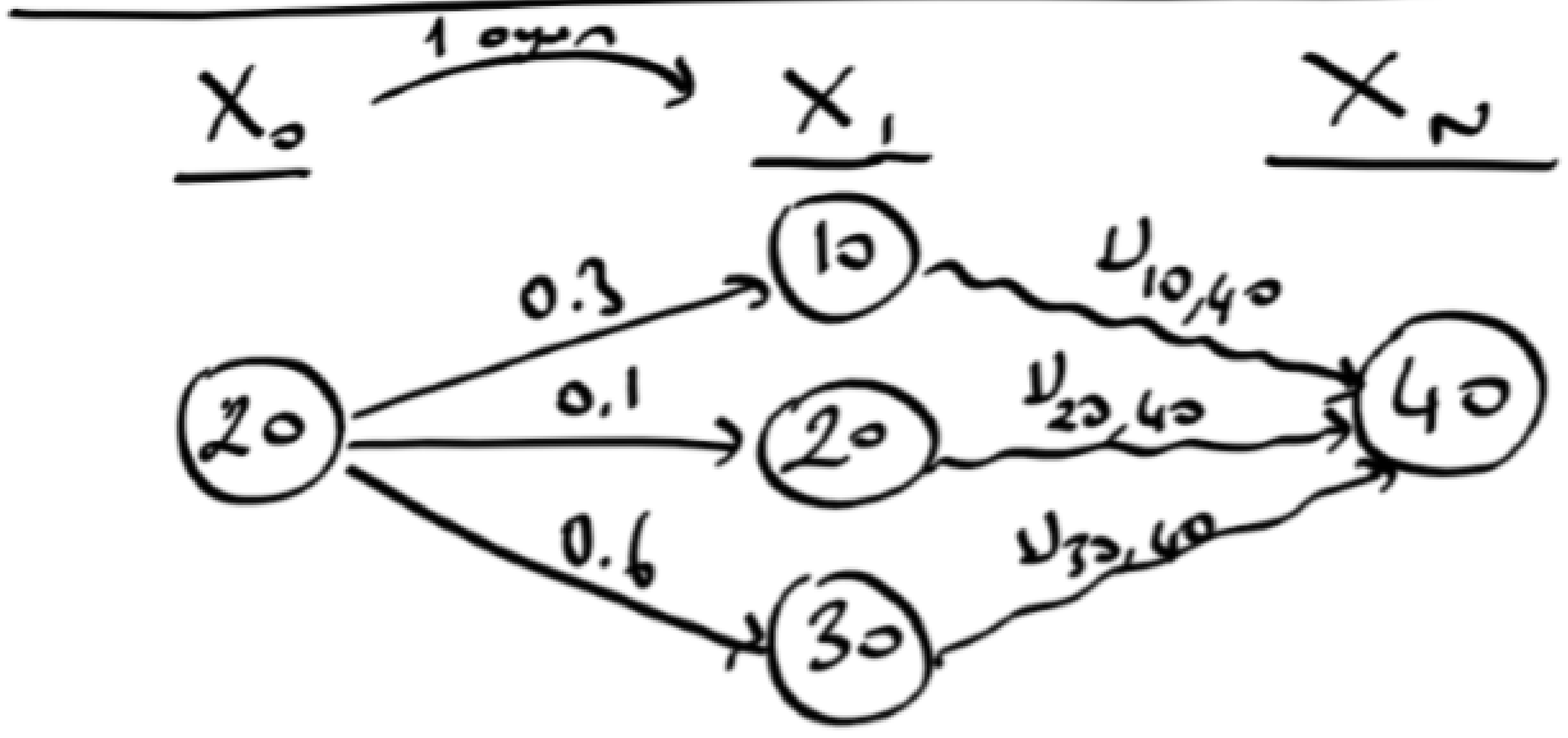
$$\mathbb{P}^{(1)} := \begin{array}{c} \\ 0 \\ 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boxed{0} & 10 & 20 & 30 & 40 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0.3} & \boxed{0.1} & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.1 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \to P^{(1)}_{20,30}$$

$\Rightarrow U_{20,40} = ?$

A'nın kazanarak masadan kalkması olasılığı

Not: $N := \min\{n \in T : X_n = 0 \text{ veya } X_n = 40\}$ masadan kalkana dek oynanacak oyun sayısı

$U_{20,40}$ için ilk-adım çözümlemesi

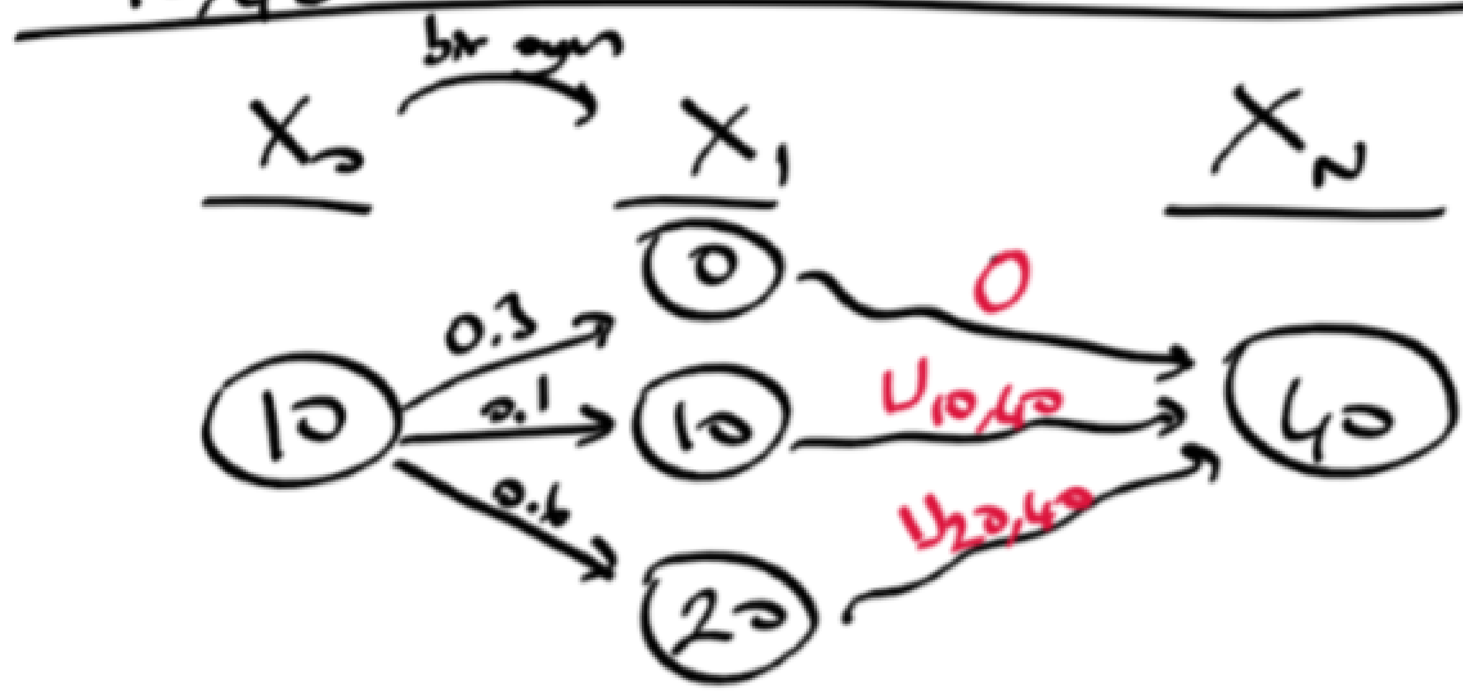


$$\Rightarrow U_{20,40} = 0.3\, U_{10,40} + 0.1\, U_{20,40} + 0.6\, U_{30,40}$$

$$-3\, U_{10,40} + 9\, U_{20,40} - 6\, U_{30,40} = 0$$

$$\boxed{-U_{10,40} + 3\, U_{20,40} - 2\, U_{30,40} = 0} \quad \dots (\mathrm{I}^\circ)$$

$U_{10,40}$ için ilk-adım çözümlemesi

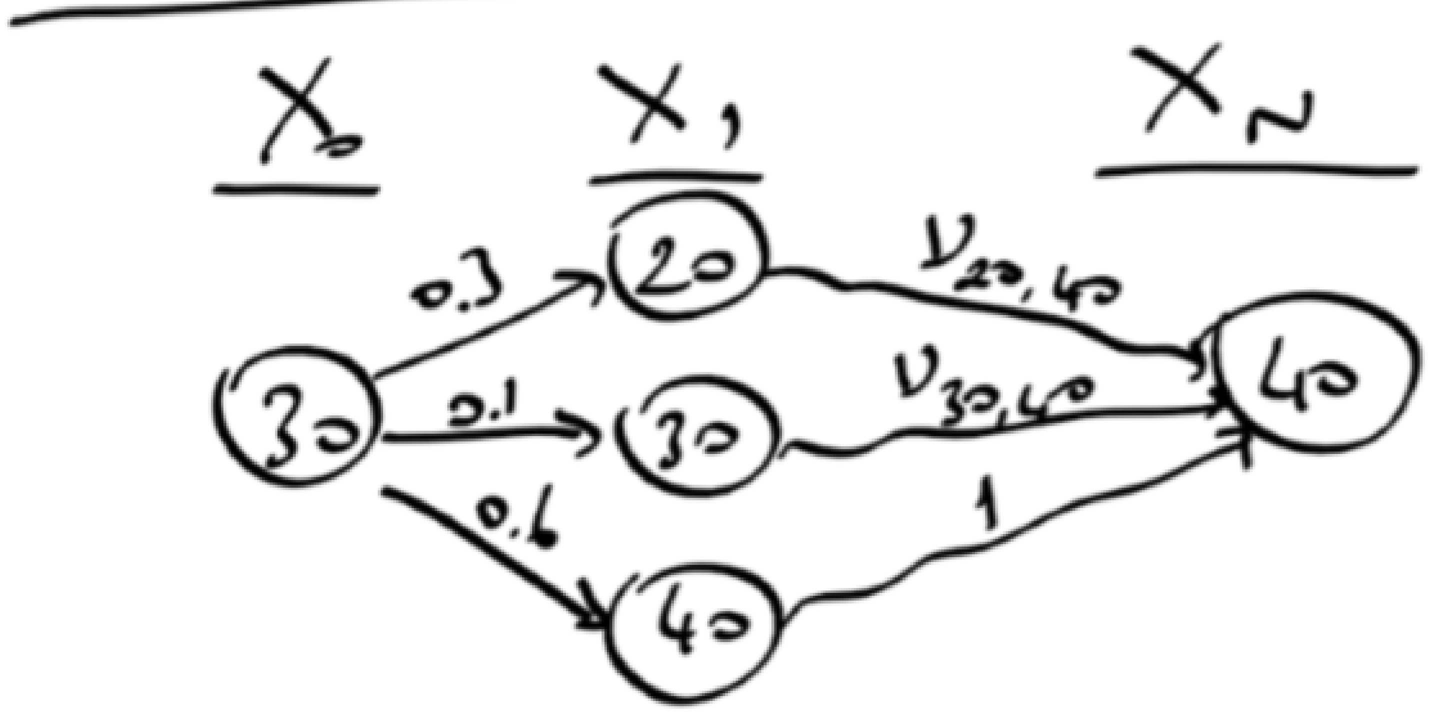


$$\Rightarrow U_{10,40} = (0.3)\,0 + 0.1\, U_{10,40} + 0.6\, U_{20,40}$$

$$9\, U_{10,40} - 6\, U_{20,40} = 0$$

$$\boxed{3\, U_{10,40} - 2\, U_{20,40} = 0} \quad \dots (\mathrm{II}^\circ)$$

$U_{30,40}$ için ilk-adım çözümlemesi



$$\Rightarrow U_{30,40} = 0.3\, U_{20,40} + 0.1\, U_{30,40} + (0.6)\,1$$

$$-3\, U_{20,40} + 9\, U_{30,40} = 6$$

$$\boxed{-U_{20,40} + 3\, U_{30,40} = 2} \quad \dots (\mathrm{III}^\circ)$$

I°, II° ve III° lineer denklem sisteminden $U_{10,40}$, $\boxed{U_{20,40}}$ ve $\boxed{U_{30,40}}$ çözülür. Sorunun cevabı $U_{20,40}$'tır.

II°'den $U_{10,40}$'ı çekelim: $\boxed{U_{10,40} = \frac{2}{3} U_{20,40}} \quad \dots (A)$

III°'den $U_{30,40}$'ı çekelim: $\boxed{U_{30,40} = \frac{2 + U_{20,40}}{3}} \quad \dots (B)$

A ve B'yi I°'de yerine yazalım:

$$-\frac{2}{3} U_{20,40} + 3\, U_{20,40} - 2\, \frac{2 + U_{20,40}}{3} = 0$$

$$-2\, U_{20,40} + 9\, U_{20,40} - 4 - 2\, U_{20,40} = 0 \Rightarrow U_{20,40} = \frac{4}{5} = 0.8$$

= B oyuncusunun masadan kaybederek kalkma olasılığı

Not: $U_{10,40} \xrightarrow{=0.53}$ A oyuncusu 10 TL, B oyuncusu 30 TL ile masaya otursaydı, A oyuncusunun kazanarak masadan kalkması olasılığı

$U_{30,40} \xrightarrow{=0.93}$ A oyuncusu 30 TL, B oyuncusu 10 TL ile masaya otursaydı, A'nın kazanarak masadan kalkması olasılığı.

*** Genel olarak, Markov zinciri olarak modellenebilen bir stokastik süreçte Yutan Durum(lar), gözlenme sürecini sonlandıran duruma(lara) karşılık getirilir. Özetle; gözlenme sürecini sonlandıran durumlar yutan durum yapılır.

Örnek: Futbolda galibiyet 3 puan, beraberlik 1 puan, mağlubiyet ise 0 puan artışı sağlar. Şu an 20 puanda olan A takımının 25 puanı aşması ile ilgileniliyor ise durum uzayı; $X_0 = 20$ puan.

X_t: t'inci maç sonrası A takımının puanı

$$E = \{20, 21, 22, 23, 24, 25, \boxed{26, 27, 28}\}$$

$U_{20,27} \to$ 20 puandaki A takımının 25 puanı 27'ye ulaşarak aşması olasılığı

Geçici Durumlar

YUTAN DURUMLAR → Kaydedilecek son puanlar