Bitti: BÖLÜM 1: FA (DFA,NFA), RE, PL

Buradayız: BÖLÜM 2: CFG, CFL, PDA

BÖLÜM 3: TM

Tekrar: Pumping Lemma ile RE İspat

- $\Sigma = \{0, 1\}$, $L = \{u0v : u, v \in \Sigma* \text{ and } |u| = |v|\}$.
- Sözle ifade edersek; L orta sembolü 0 olan tek uzunluktaki katarlardır.
- L dilinin regular olup olmadığını PL yardımı ile gösteriniz.
- L diline ait $w=1^n01^n$ için PL uygularsak regular olmadığını kolayca gösterebiliriz.

Tekrar: Pumping Lemma ile RE İspat

- Çelişki (contradiction) ile L'nin düzenli dil olduğunu varsayalım. RE için PL'ye göre, L için bu lemmada ifade edilen özelliği karşılayan $n \geq 1$ bir pumping length bulunması gerekir.
- $w \in L$ ve $|w| = 2n + 1 \geq n$ olmak üzere $w = 1^n 0 1^n$ alalım.
- PL'den $w = xyz$ katarları için $x, y, z \in \Sigma^*$ olmak üzere

  (i) $y \neq \varepsilon$, (ii) $|xy| \leq n$, ve (iii) $xy^i z \in L$ her $i \in N$ için.

$w = xyz = 1^n 0 1^n$ ve $|xy| \leq n$ olduğuna göre $y = 1^k$ $k \in N$ olabilir çünkü önek xy tek 0 sembolünü içerirse (iii) sağlanmaz.

- Ayrıca, $y \neq \varepsilon$ olduğu için $k \geq 1$ olmalıdır. $i = 2$ için

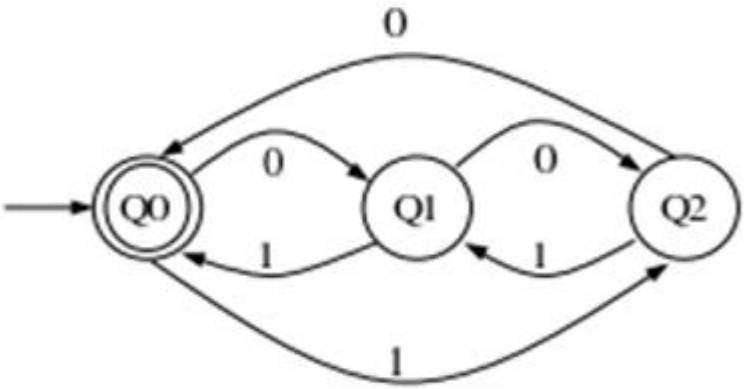
$$xy^2 z = xyyz = 1^{n+k} 0 1^n \in L.$$

- $k \geq 1$ için $1^{n+k} 0 1^n$ katarı L dilinin elemanı değildir; ya 0 ortada olmaz ya da uzunluğu çift olur. Bu yüzden L düzenli değildir.

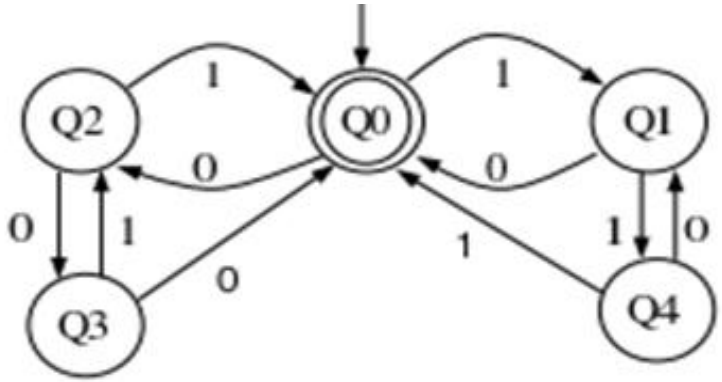
Tekrar: DFA ile RE İspat

- d(w), $|n - m|$ değerini veriyor olsun. Burada n, w'daki 0'ların sayısı ve m de 1'lerin sayısı olsun
- $A = \{w \in \{0, 1\}^* \mid d(w) = 0 \bmod 3\}$ düzenli midir? Cevabınızı kısaca anlatınız.

Tekrar: DFA ile RE İspat



Q0 - start and accept state (same number of 0s and 1s)
Q1 - |x-y| mod 3 is 1.
Q2 - |x-y| mod 3 is 2.
x - number of 1s
y - number of 0s



Q0 - start and accept state (same number of 0s and 1s)
Q1 - (number of 1s) mod 3 is 1.
Q4 - (number of 1s) mod 3 is 2.
Q2 - (number of 0s) mod 3 is 1.
Q3 - (number of 0s) mod 3 is 2.

CENG 306 Biçimsel Diller ve Otomatlar
Formal Languages and Automata

BÖLÜM 2

BAĞLAMDAN BAĞIMSIZ GRAMER

CONTEXT-FREE GRAMMAR

Konular

- Context-Free (bağlamdan bağımsız , içerikten bağımsız) Grammars (CFGs) and Languages (CFLs)
- Parse Trees (Türetme Ağacı) and Derivations

Context-Free Grammars and Languages

- Dil tanıyıcı cihaz bir dile ait geçerli string'leri kabul eder.
- Dil üreteci cihaz bir dile ait string'leri oluşturur.
- Dil üreteci cihazlar bir başlangıç işaretiyle bir string oluşturmaya başlarlar ve belirlenmiş kuralları kullanarak string oluştururlar.
- Regular expression bir dil üreteci olarak kabul edilir.

Örnek:

$a(a^* \cup b^*)b$ regular expression ile önce bir a üretilir; ardından iki durumdan birisine göre devam edilir. istenen *sayıda a üretilir veya b üretilir.*

Son olarak da bir b üretilir.

Context-Free Grammars and Languages

- Context-free grammar ile regular ifadelere göre çok daha karmaşık diller üretilebilir. Örnek:

- *a (a* U b*) b* *regular expression ön kısım, orta kısım ve son kısım olarak ayrıştırılabilir.*

- *S dilde bir string ve M ise orta kısım olmak üzere*

  S → aMb *şeklinde bir kural yazılabilir.*

  Burada M, a'lardan veya b'lerden oluşturulabilir.

  M → A *ve* ***M → B*** *yeni iki kural, A ve B dile ait stringlerdir.*

  A → e, A → aA ve B → e, B → bB

- *a (a* U b*) b regular expression tarafından oluşturulan dil yukarıdaki kurallarla oluşturulabilir.* ***aaab*** *string'i aşağıdaki gibi oluşturulur;*

  S → aMb, sonra M → A ile ***aAb*** *A → aA ile* ***aaAb*** *yine A → aA ile* ***aaaAb*** *A → e ile* ***aaab elde edilir.***

Context-Free Grammars and Languages

- Kurallarla değiştirme işlemi, sadece değişecek sembol üzerinde yapılır ve önündeki ve ardındaki kısımlara bakılmaz.
- Bu yüzden context-free olarak adlandırılır.
- *S, A, B, M* non-terminal, *a, b, e* terminal olarak adlandırılır.
- Tüm string'ler sadece terminallerden oluşabilir.
- Kuralların uygulanması ve yeni bir string elde edilmesi regular expression'larda yeni bir string elde edilmesi gibidir.

Context-Free Grammars and Languages

Tanım:

- *Bir context-free grammar* $G = (V, \sum, R, S)$ *şeklinde tanımlanır.*

  V *alfabe (terminal ve non-terminaller)*

  $\sum$ *terminaller* ($\sum \subseteq V$)

  R *kurallar* $(V - \sum) \times V^*$

  S *başlangıç sembolü* ($S \in (V - \sum)$)

- $A \in V - \sum$ *ve* $u \in V^*$ *için* $(A, u) \in R$ *ise* $A \rightarrow_G u$ *yazabiliriz.*

- $u, v \in V^*$ *için* $u \Rightarrow_G v$ *yazabiliriz sadece ve sadece*

  $x, y \in V^*$ * *ve* $A \in V - \sum$ *ve* $u = xAy$ *ve* $v = xv'y$ *ve* $A \rightarrow_G v'$ *ise*

Context-Free Grammars and Languages

- $\Rightarrow_G^*$ $\Rightarrow_G$ *ilişkisinin reflexive, transitive, closure'udur.*
- *G grammar'i tarafından oluşturulan dil*

  $L(G) = \{w \in \sum^* : S \Rightarrow^*_G w\}$ *şeklindedir.*

- *Kurallar uygulanarak dile ait tüm string'ler elde edilebilir.*
- *Oluşturulan* $L(G)$ *dili* ***context-free language*** *olarak adlandırılır.*
- $A \rightarrow_G u$ *ve* $u \Rightarrow_G v$ *yerine* $A \rightarrow u$ *ve* $u \Rightarrow v$ *yazılabilir.*
- $w_0 \Rightarrow_G w_1 \Rightarrow_G \ldots \Rightarrow_G w_n$ ***derivation*** *(türetme) olarak adlandırılır.* w_n *string'i* w_0*'dan türetilmiştir.*
- $w_0, \ldots, w_n \in V^*$ *olabilir. n* ***derivation length*** *(türetme uzunluğu) olarak adlandırılır.*

Context-Free Grammars and Languages

Örnek:

G = (V, ∑ , R, S) grammar'i için

V = {S, a, b}, ∑ ={a, b} ve R kümesi S →aSb ve S → e olmak üzere iki tane kurala sahip olsun. Örnek bir derivation aşağıdaki gibi olabilir:

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aabb$$

ilk iki adımda S → aSb ve son olarak S → e uygulanmıştır. Oluşturulan dil

$L(G) = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ *olmuştur.*

Bazı context-free diller regular degildir, ancak tüm regular diller context-free dildir.

Context-Free Grammars and Languages

Örnek:

G = (W, ∑, R, S) grammar'i için W = { S, A, N, V, P } ∪ ∑,

∑ = { Jim, big, green, cheese, ate },

R = { P → N,
P → AP,
S → PVP,
A → big,
A → green, N → cheese, N → Jim,
V → ate }

S = sentence A = adjective V = verb
N = noun P = phrase

L(G) deki grammar olarak doğru bazı string'ler aşağıdadır;

Jim ate cheese
big Jim ate green cheese big cheese ate Jim

Bazı string'ler anlamsız olabilir;

big cheese ate green green big green big cheese green Jim ate green big Jim

Context-Free Grammars and Languages

- Herhangi bir bilgisayar programlama diliyle yazılmış bilgisayar programının, yazımının doğru olabilmesi için katı kurallara uyması gerekir.
- Konuşma dillerindekinin tersine bircok programlama dilinin yazımının doğruluğunu kontrol etmek icin context-free grammar'ler kullanılabilir.
- Özellikle programların syntax analizinde parse edilmesi aşamasında cok faydalıdır.
- Bir programlama dilinde bazı kısımlar regular expression'larla ifade edilebilir, program yapısı veya blok yapıları context-free grammar'ler tarafından ifade edilebilir.

Context-Free Grammars and Languages

Örnek: Bütün programlama dillerindeki ortak bir kısmı oluşturan bir dil tanımlayalım.

Bu dil doğru yazılmış aritmetik ifadeleri göstersin.

*id * (id * id + id) yazımı dogru ancak * id + (ve + * id yanlıştır.*

(id değişken adlarıdır)

$G = (V, \sum, R, E)$

$V = \{+, *, (,), id, T, F, E\}$,

$\sum = \{+, *, (,), id\}$,

$R = \{ E \rightarrow E + T,$ (R1)

$E \rightarrow T,$ (R2)

$T \rightarrow T * F,$ (R3)

$T \rightarrow F,$ (R4)

$F \rightarrow (E),$ (R5)

$F \rightarrow id \quad \}$ (R6)

E = ifade (expression)

T = terim

F = öğe (factor)

Context-Free Grammars and Languages

Örnek: (devam)

*G grammar'i (id * id + id) * (id + id) string'ini aşağıdaki gibi oluşturur;*

$E \Rightarrow T$ (R2)
$\Rightarrow T * F$ (R3)
$\Rightarrow T * (E)$ (R5)
$\Rightarrow T * (E + T)$ (R1)
$\Rightarrow T * (T + T)$ (R2)
$\Rightarrow T * (F + T)$ (R4)
$\Rightarrow T * (id + T)$ (R6)
$\Rightarrow T * (id + F)$ (R4)
$\Rightarrow T * (id + id)$ (R6)
$\Rightarrow F * (id + id)$ (R4)
$\Rightarrow (E) * (id + id)$ (R5)
$\Rightarrow (E + T) * (id + id)$ (R1)
$\Rightarrow (E + F) * (id + id)$ (R4)
$\Rightarrow (E + id) * (id + id)$ (R6)
$\Rightarrow (T + id) * (id + id)$ (R2)
$\Rightarrow (T * F + id) * (id + id)$ (R3)
$\Rightarrow (F * F + id) * (id + id)$ (R4)
$\Rightarrow (F * id + id) * (id + id)$ (R6)
$\Rightarrow (id * id + id) * (id + id)$ (R6)

Context-Free Grammars and Languages

Örnek: Düzgün dağılımlı sağ ve sol parantezleri üreten bir grammar oluşturalım.

$G = (V, \sum, R, S)$

$V = \{ S, (,) \}$,

$\sum = \{ (,) \}$,

$R = \{ S \rightarrow e, \quad S \rightarrow SS, \quad S \rightarrow (S) \quad \}$

Aşağıdaki türetmeleri G grammar'i oluşturur;

$S \Rightarrow SS \Rightarrow S(S) \Rightarrow S((S)) \Rightarrow S(()) \Rightarrow ()(())$

$S \Rightarrow SS \Rightarrow (S)S \Rightarrow ()S \Rightarrow ()(S) \Rightarrow ()(())$

Context-Free Grammars and Languages

Örnek: Bir $M = (K, \sum, \delta, s, F)$ DFA tarafından tanınan regular dil $L(M)$,

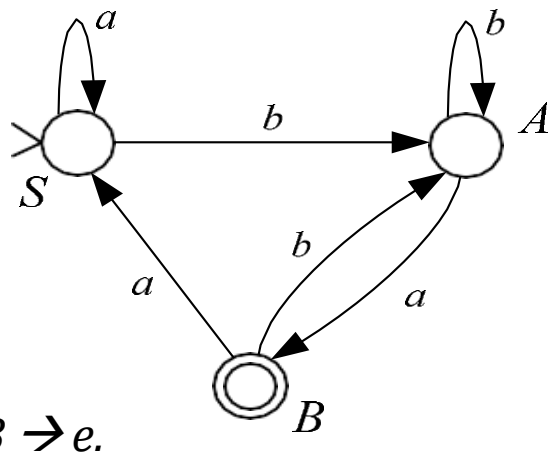
$G(M) = (V, \sum, R, S)$ grammar'i tarafından oluşturulabilir. Burada,

$V = K \cup \sum$,

$S = s$,

$R = \{ q \rightarrow ap : \delta(q, a) = p\} \cup \{q \rightarrow e : q \in F\}$

Nonterminaller otomatın durumları ve a girişi için yapılan q dan p'ye geçiş R içinde $q \rightarrow ap$ şeklinde bir kural olarak alınır.



Yandaki otomat için oluşturulan kurallar;

$S \rightarrow aS,\ S \rightarrow bA,\ A \rightarrow bA,\ A \rightarrow aB,\ B \rightarrow aS,\ B \rightarrow bA,\ B \rightarrow e.$

Context-Free Grammars and Languages

- Regular olmayan context-free diller vardır.
- Ancak bütün regular diller context-free dildir.
- Regular olan ϕ ve $\{a\}$ basit context-free dillerdir. Kuralı olmayan ve sadece $S \rightarrow a$ şeklinde kuralı olan dillerdir.
- Context-free diller **union, concatenation ve Kleene star** işlemleri icin kapalıdır.
- Context-free diller pushdown otomatlar tarafından tanınır. Pushdown otomatlar finite otomatların genelleştirilmiş şeklidir.
- Her finite otomat basit yapıdaki pushdown otomat olarak düşünülür. (Her PDA bir FA gibi çalışabilir ama tersi olmaz)

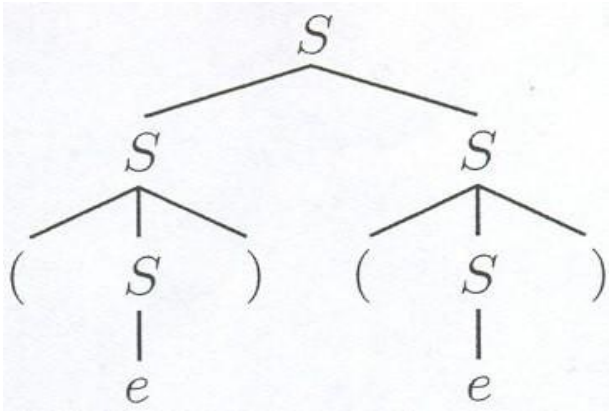
Parse Trees and Derivations

- G context-free grammar olsun. Bu grammar ile bir string'in oluşturulması farklı şekillerde olabilir.
- Dengeli parantez üreten bir context-free dil aşağıdaki farklı şekillerde aynı string'i üretir.

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow S(S) \Rightarrow (S)(S) \Rightarrow (S)() \Rightarrow ()()$$

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow (S)S \Rightarrow ()S \Rightarrow ()(S) \Rightarrow ()()$$

- iki türetmede yandaki şekildeki gibi gösterilebilir.



Bu şekil parse tree olarak adlandırılır.

- Her node V içinde bir nonterminal sembold0r.
- Yapraklar (leaves) terminallerdir ve ∑ icinde bir semboldür.
- Yapraklar soldan sağa concatenate edildiğinde oluşan string üretilir.

Parse Trees and Derivations

Bir context-free grammar $G = (V, \sum, R, S)$ için parse tree, roots, leaves aşağıdaki gibi tanımlanır.

1. o a

Her $a \in \Sigma$ için bu bir parse tree'dir. Tek node hem root hem de yapraktır ve a oluşturur.

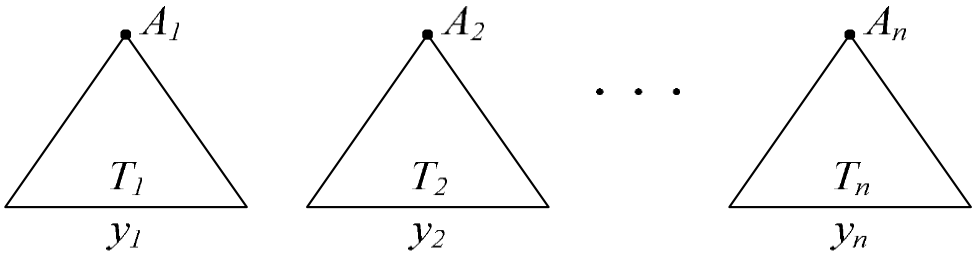
2.

$A \rightarrow e$, R içinde bir kural ise bu bir parse tree'dir.

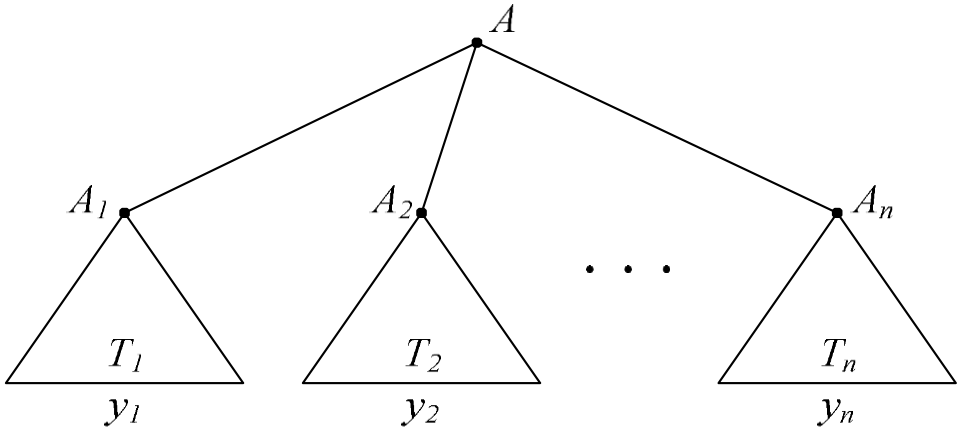
A root ve e yapraktır. Sadece e üretir.

Parse Trees and Derivations

3.



Hepsi parse tree'dir. $n \geq 1$ için $A_1, \ldots, A_n$ root ve $y_1, \ldots, y_n$ üretilir. $A \rightarrow A_1, \ldots, A_n$, R içinde kural ise aşağıdaki parse tree'dir. Üretilen string $y_1 \ldots y_n$ olur.



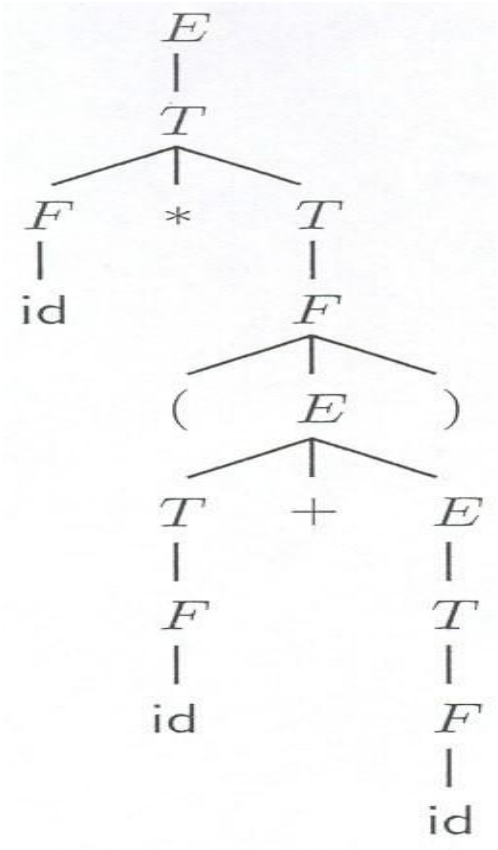
4. Bunların dışında hiçbir şey parse tree değildir.

Parse Trees and Derivations

Örnek: Aritmetik ifadeleri o luşturan grammar'in

id * (id + id)

için oluşturduğu parse tree aşağıdaki gibidir.



Parse Trees and Derivations

Bir context-free grammar $G = (V, \sum, R, S)$ için

$D = x_1 \Rightarrow x_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_n$ ve $D' = x'_1 \Rightarrow x'_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow x'_n$ iki farklı türetmedir.

Burada $x_i, x'_i \in V^*$ ve $x_1, x'_1 \in V - \sum$ ve $x_n, x'_n \in \sum^*$

iki türetmede bir nonterminalden terminal string'leri türetilir.

D türetmesi D' türetmesinden öncedir ve $D \prec D'$ şeklinde gösterilir **eğer;**

$n > 2$ için $1 < k < n$ olacak şekilde bir k değeri varsa ve;

1. Tüm $i \neq k$ için $x_i = x'_i$
2. $x_{k-1} = x'_{k-1} = uAvBw$ burada $u, v, w \in V^*$ ve $A, B \in V - \sum$
3. $x_k = uyvBw$, burada $A \rightarrow y \in R$
4. $x'_k = uAvzw$, burada $B \rightarrow z \in R$
5. $x_{k+1} = x'_{k+1} = uyvzw$

En soldaki nonterminali önce degiştiren türetme diğerinden ***önce gelir****.*

Parse Trees and Derivations

Örnek: Herhangi bir grammar için aşağıdaki üç türetmenin önceliklerini çıkaralım.

$D_1 = S \Rightarrow SS \Rightarrow (S)S \Rightarrow ((S))S \Rightarrow \mathbf{(( ))S} \Rightarrow (( ))(S) \Rightarrow (( ))( )$

$D_2 = S \Rightarrow SS \Rightarrow (S)S \Rightarrow ((S))S \Rightarrow \mathbf{((S))(S)} \Rightarrow \mathbf{(( ))(S)} \Rightarrow (( ))( )$

$D_3 = S \Rightarrow SS \Rightarrow (S)S \Rightarrow ((S))S \Rightarrow ((S))(S) \Rightarrow \mathbf{((S))( )} \Rightarrow (( ))( )$

Burada $D_1 \prec D_2$ *ve* $D_2 \prec D_3$ olur.

$D_1 \prec D_3$ olamaz çünkü birden fazla ara string'te farklılık vardır. Bütün türetmeler aynı parse tree'ye sahiptir.

Parse Trees and Derivations

örnek: devam

$D_1 = S \Rightarrow SS \Rightarrow (S)S \Rightarrow ((S))S \Rightarrow (( ))S \Rightarrow (( ))(S) \Rightarrow (( ))( )$

$D_2 = S \Rightarrow SS \Rightarrow (S)S \Rightarrow ((S))S \Rightarrow ((S))(S) \Rightarrow (( ))(S) \Rightarrow (( ))( )$

$D_3 = S \Rightarrow SS \Rightarrow (S)S \Rightarrow ((S))S \Rightarrow ((S))(S) \Rightarrow ((S))( ) \Rightarrow (( ))( )$

$D_4 = S \Rightarrow SS \Rightarrow (S)S \Rightarrow (S)(S) \Rightarrow ((S))(S) \Rightarrow (( ))(S) \Rightarrow (( ))( )$

$D_5 = S \Rightarrow SS \Rightarrow (S)S \Rightarrow (S)(S) \Rightarrow ((S))(S) \Rightarrow ((S))( ) \Rightarrow (( ))( )$

$D_6 = S \Rightarrow SS \Rightarrow (S)S \Rightarrow (S)(S) \Rightarrow (S)( ) \Rightarrow ((S))( ) \Rightarrow (( ))( )$

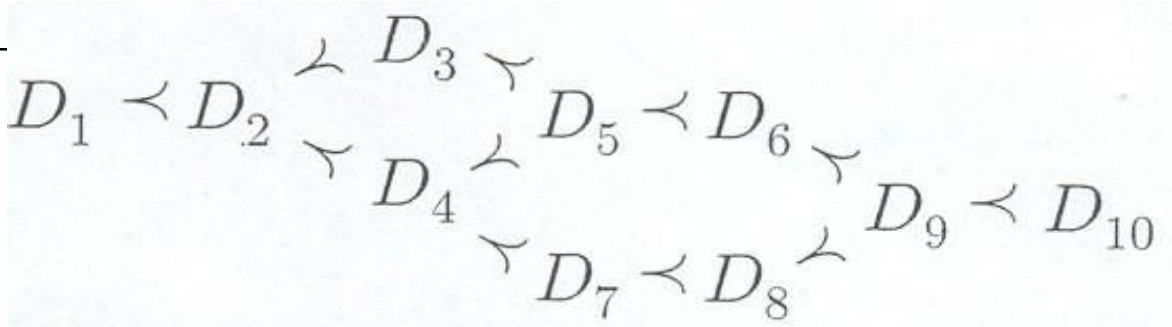
$D_7 = S \Rightarrow SS \Rightarrow S(S) \Rightarrow (S)(S) \Rightarrow ((S))(S) \Rightarrow (( ))(S) \Rightarrow (( ))( )$

$D_8 = S \Rightarrow SS \Rightarrow S(S) \Rightarrow (S)(S) \Rightarrow ((S))(S) \Rightarrow ((S))( ) \Rightarrow (( ))( )$

$D_9 = S \Rightarrow SS \Rightarrow S(S) \Rightarrow (S)(S) \Rightarrow (S)( ) \Rightarrow ((S))( ) \Rightarrow (( ))( )$

$D_{10} = S \Rightarrow SS \Rightarrow S(S) \Rightarrow S( ) \Rightarrow (S)( ) \Rightarrow ((S))( ) \Rightarrow (( ))( )$

Buradaki tüm öncelik ilişkileri aşağıdaki şekille gösterilebilir.



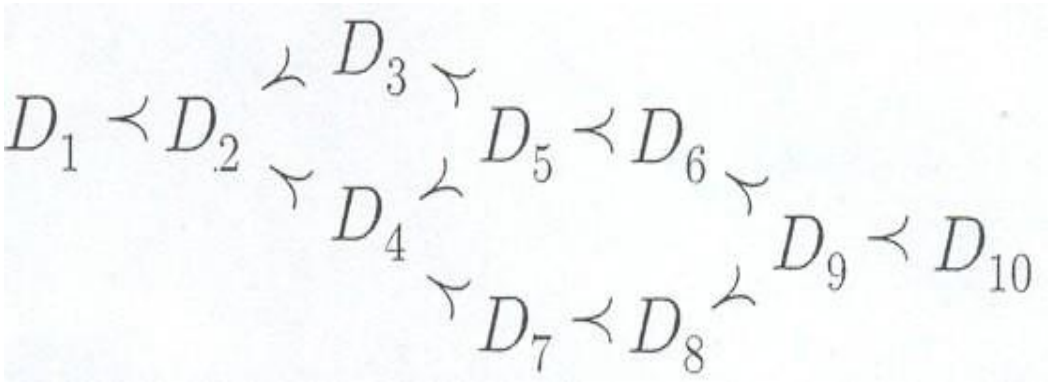
Parse Trees and Derivations

Bir parse tree üzerinde **leftmost derivation** ve **rightmost derivation** elde edilebilir.

Leftmost derivation için ağacın root node'undan başlanır ve **sürekli en soldaki nonterminal degiştirilir.**

Rightmost derivation için ağacın root node'undan başlanır **ve sürekli en sağdaki nonterminal degiştirilir.**

Önceki örnekte ***D*₁** **leftmost** ***D*₁₀** **ise rightmost** derivation n türetmedir.



Parse Trees and Derivations

Leftmost derivation için $x \Rightarrow^{L} y$ ve rightmost derivation için $x \Rightarrow^{R} y$ kullanılır.

$x \Rightarrow^{L} y$ yazabiliriz eğer sadece ve sadece $x = wA\beta$, $y = w\alpha\beta$, ise ve burada

$w \in \sum^{*}$ ve α, $\beta \in V^{*}$ ve $A \in V - \sum$ ve $A \rightarrow \alpha$ kuralı grammar'de varsa.

$x_1 \Rightarrow^{L} x_2 \Rightarrow^{L} \ldots \Rightarrow^{L} x_n$ tüm leftmost türetme sırasını ifade eder.

SORU

- L1 = {$a^n b^m c d^m e^n$ |n, m >= 0}
- L2 = {$(ab)^n cd^m$|n, m > =0}
- L3 = {$a^n b(cd)^n e^n$ |n > =0}

One of the languages is regular, one context-free and not regular and one not context-free. Which are the regular and the non-regular context-free languages?

SORU

- L1 = $\{a^n b^m c d^m f^n \mid n, m >= 0\}$

G=(V,∑,R,S) V={S,A,B,C,a,b,c,d,f} ∑={a,b,c,d,f}
S={S}

R={S->aSf | aAf, A->bAd | bCd, C->c | e }

Öyle ise L1 context-free

SORU

- $L2 = \{(ab)^n cd^m \mid n, m >= 0\}$

- $L2a=(ab)^n$ regular
- L2b=c regular
- $L2c=d^m$ regular

- Öyle ise L2 =L2a.L2b.L2c regular (closure under concatenation)

SORU

- L3 = {a ^{n} b(cd) ^{n} e ^{n} |n > =0}
- L3 ne RL ne de CFL

Ödev

- Problemleri çözünüz 3.1.1b, 3.1.1c, 3.1.1c (sayfa 120)
- Problemleri çözünüz 3.1.2, 3.1.3 (sayfa 120)
- Problemleri çözünüz. 3.1.8 (sayfa 121)
- Problemleri çözünüz 3.2.4 (sayfa 129)