BİLGİSAYAR BİLİMLERİNDE GÜNCEL KONULAR II

Hafta 12

. Graflarda Uzaklık (Distance in Graphs)

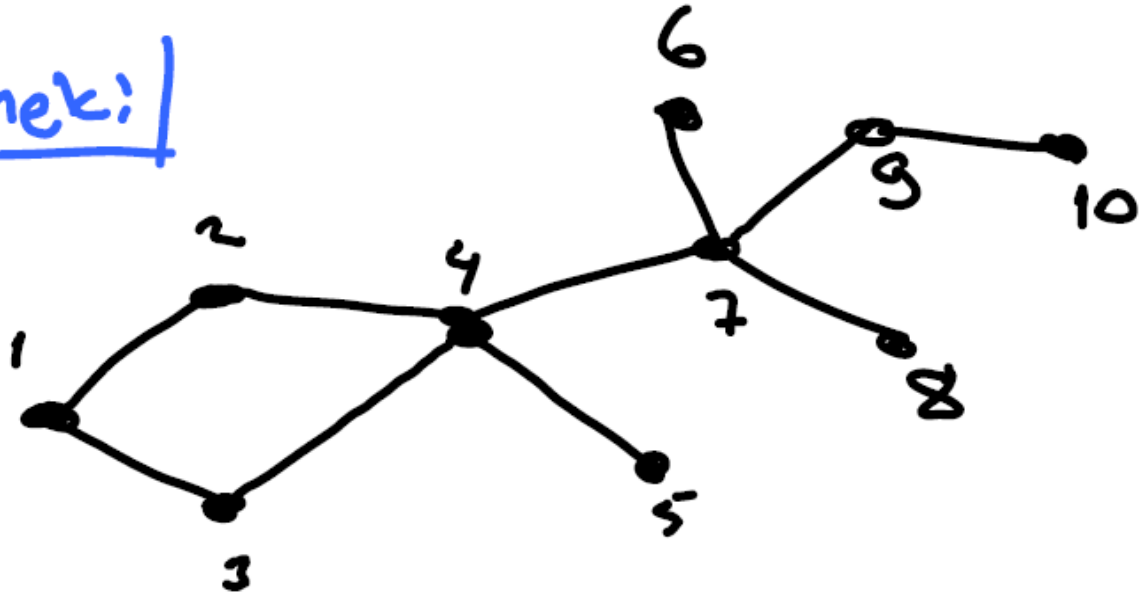
Tanım 1: Bir G grafında u ve v gibi iki tepe arasındaki yollar içinde minimum uzunluğu olanın uzunluğuna; u ve v nin **uzaklığı (distance)** denir ve $d(u,v)$ (veya $d_G(u,v)$) biçiminde gösterilir.

Tanım 2: n tepeli bir G grafında, grafın tepeleri $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ olsun. G grafının **komşuluk matrisi** $A(G) = \left[a_{ij} \right]$ dir.

$$A(G) = \begin{cases} a_{ij} = 1, \;\; v_i \;\; ile \;\; v_j \;\; komşu \;\; ise; \\ \\ a_{ij} = 0, \;\; aksi \;\; halde. \end{cases}$$

$A(G) = \left[a_{ij} \right]$ nin satır ve sütunları grafın tepelerine karşılık gelir.

Örnek:



G

Verilen G grafında tüm tepe çiftleri arasındaki uzaklıkları bulunuz.

$d(1,2) = 1$

$d(1,3) = 1$

$d(1,4) = 2$

$d(1,5) = 3$

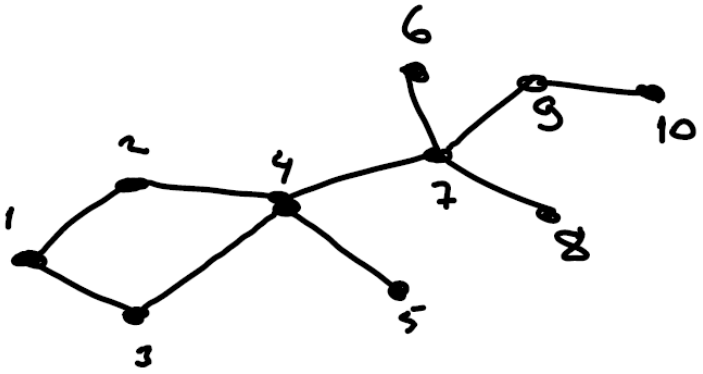
$d(1,6) = 4$

$d(1,7) = 3$

$d(1,8) = 4$

$d(1,9) = 4$

$d(1,10) = 5$



G

$d(2,3) = 2$

$d(2,4) = 1$

$d(2,5) = 2$

$d(2,6) = 3$

$d(2,7) = 2$

$d(2,8) = 3$

$d(2,9) = 3$

$d(2,10) = 4$

$d(3,4) = 1$

$d(3,5) = 2$

$d(3,6) = 3$

$d(3,7) = 2$

$d(3,8) = 3$

$d(3,9) = 3$

$d(3,10) = 4$

$d(4,5) = 1$

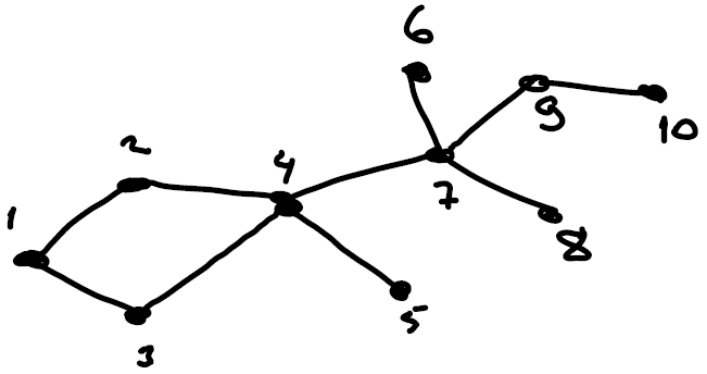
$d(4,6) = 2$

$d(4,7) = 1$

$d(4,8) = 2$

$d(4,9) = 2$

$d(4,10) = 3$



G

$d(5,6) = 3$

$d(5,7) = 2$

$d(5,8) = 3$

$d(5,9) = 3$

$d(5,10) = 4$

$d(7,8) = 1$

$d(7,9) = 1$

$d(7,10) = 2$

$d(6,7) = 1$

$d(6,8) = 2$

$d(6,9) = 2$

$d(6,10) = 3$

$d(8,9) = 2$

$d(8,10) = 3$

$d(9,10) = 1$

Graflarda Uzaklık Algoritmaları

1. Floyd Algoritması

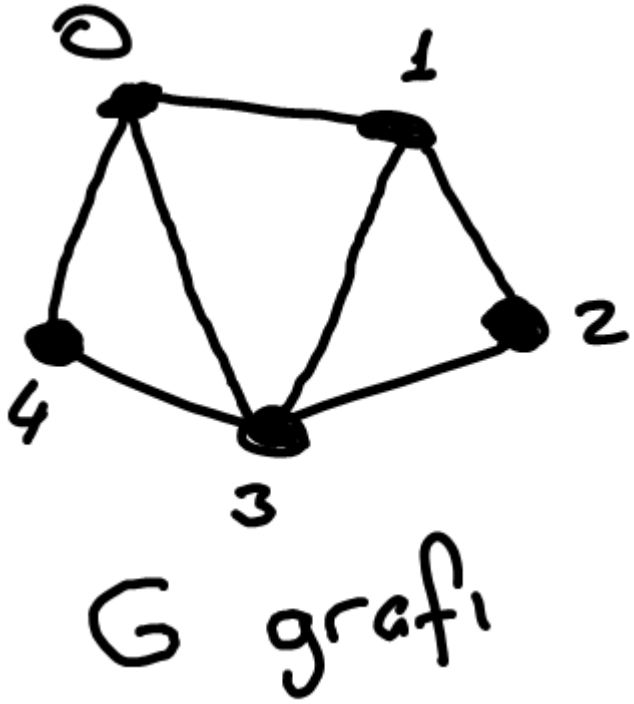
Floyd Algoritması, graf üzerindeki herbir tepe için diğer tepelere olan en kısa yolları ve bu yolların uzaklıklarını bulmak için kullanılan bir algoritmadır. En kısa yolu bulmak için en genel algoritma Floyd'un algoritmasıdır. Grafın bitişiklik matrisi şeklinde tutulması durumunda bu algoritma $O(n^3)$ karmaşıklığında olmaktadır.

Algoritma:

```
for i=1 to n
 for j=1 to n
  if A[i,j] ≠ 0 then D[i,j]=A[i,j]
                else D[i,j]=∞
 repeat
repeat

for k=1 to n
 for i=1 to n
  for j=1 to n
   if (D[i,k]+D[k,j] < D[i,j]) then D[i,j]=D[i,k]+D[k,j]
  repeat
 repeat
repeat
```

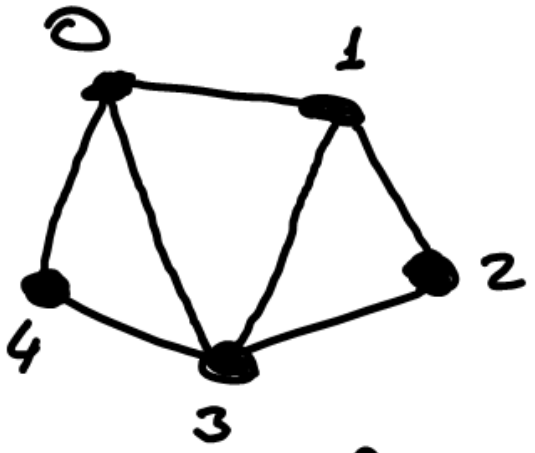
C kodu: Yanda verilen G grafı için…

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#define MAX 1000
 int main()
{
   int i, j, k,n=5;  long D[5][5];
   long A[5][5] = {{0,    1,   0,  1,   1},
                   {1,    0,   1,    1,   0},
                   {0,  1,   0,    1,   0},
                   {1,    1,   1,    0,   1},
                   {1,   0,  0,  1,   0}};

  for (i = 0; i < n; i++){
      for (j = 0; j < n; j++) {
         if (A[i][j]!=0 ) D[i][j] = A[i][j];
         if ((i!=j) && A[i][j]==0 ) D[i][j] = MAX;
   }}
```



```
 for (k = 0; k < n; k++) {
     for (i = 0; i < n; i++){
       for (j = 0; j < n; j++){
         if ((D[i][k] + D[k][j]) < D[i][j])  D[i][j]=D[i][k] + D[k][j];

       }
              }
             }

  printf("Tepe ciftleri arasinda en kisa yollar:\n\n");

  for (i = 0; i < n; i++) {
    for (j = 0; j < n; j++) {
    if (i==j) printf("%d - %d  uzaklik = %ld ", i,j,0);
              if (i!=j) printf("%d - %d  uzaklik = %ld ", i,j,D[i][j]);
    printf("\n");
    }
  }

  getch();
  return 0;
}
```

```
Tepe ciftleri arasinda en kisa yollar:

0 - 0  uzaklik = 0
0 - 1  uzaklik = 1
0 - 2  uzaklik = 2
0 - 3  uzaklik = 1
0 - 4  uzaklik = 1
1 - 0  uzaklik = 1
1 - 1  uzaklik = 0
1 - 2  uzaklik = 1
1 - 3  uzaklik = 1
1 - 4  uzaklik = 2
2 - 0  uzaklik = 2
2 - 1  uzaklik = 1
2 - 2  uzaklik = 0
2 - 3  uzaklik = 1
2 - 4  uzaklik = 2
3 - 0  uzaklik = 1
3 - 1  uzaklik = 1
3 - 2  uzaklik = 1
3 - 3  uzaklik = 0
3 - 4  uzaklik = 1
4 - 0  uzaklik = 1
4 - 1  uzaklik = 2
4 - 2  uzaklik = 2
4 - 3  uzaklik = 1
4 - 4  uzaklik = 0

--------------------------------
Process exited with return value 0
```



G grafi

2. Dijkstra Algoritması

-Dijkstra algoritması, bir tepeden diğer tüm tepelere en kısa yolları hesaplar.
-Ağırlıklı ve yönlü graflar için geliştirilmiştir.
-Dijkstra algoritmasının zaman karmaşıklığı genel olarak $O(\mathrm{m}log\mathrm{n})$ şeklindedir.
-Dijkstra algoritması en kısa yolları Greedy yaklaşımı ile belirler.
-Yani bir düğümden diğer bir düğüme geçerken olası en iyi yerel çözümü göz önüne alır.
-Her seferinde bir sonraki düğüme ilerleme Greedy yaklaşımına göre yapılır.

Algoritma:

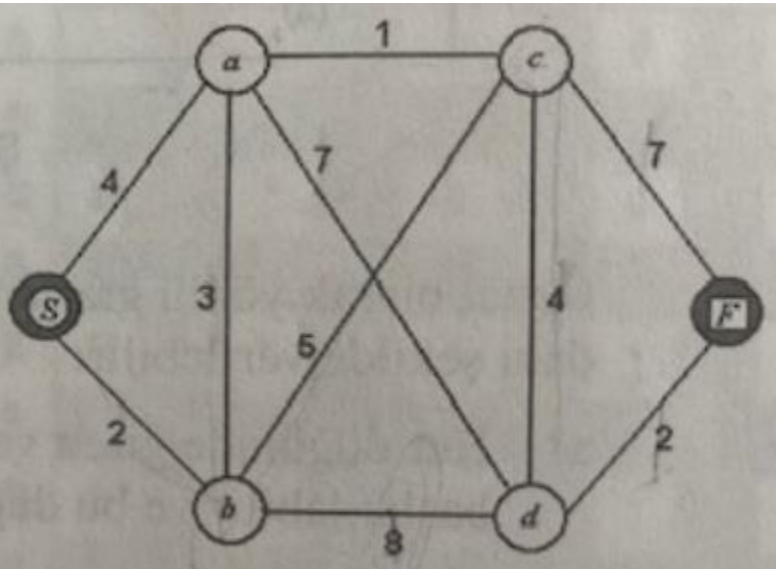
```
Dijkstra_uzaklık (graf G, düğüm v0)
// v0 başlangıç düğüm
{
   S = {v0};
   for(i=1; i<n; i++)
         D[i]=C[v0,i];          // C[i,j] - maliyet matrisi
   for (i=0; i<n-1; i++)
         {
   V-S'den öyle bir w düğümü seçelim ki D[w] minimum olsun;
         w'yi S'ye ekle;

   for v∈V - S
   D[v]=min(D[v],D[w]+C[w,v]);     // uzaklıkları yeniden ayarla
         }
}
```

C kodu çalışma olarak bırakılmıştır.

Örnek: **Örnek, 6 numaralı kaynaktan alınmıştır.**

S den F ye en kısa yolu bulunuz.

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & S & a & b & c & d & F \\ \hline S & 0 & 4 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ a & 4 & 0 & 3 & 1 & 7 & \infty \\ b & 2 & 3 & 0 & 5 & 8 & \infty \\ c & \infty & 1 & 5 & 0 & 4 & 7 \\ d & \infty & 7 & 8 & 4 & 0 & 2 \\ F & \infty & \infty & \infty & 7 & 2 & 0 \end{array}$$



S den uzaklıklar…

Tepeler	S	a	b	c	d	F
Uzaklık	0	4	2	∞	∞	∞

1 . adım: a,b,c,d,F arasından minimum olan b=2

Tepeler	S	a	b*	c	d	F
Uzaklık	0	4	2	∞	∞	∞

(b,a) için $D(a) = \min(4, 2+3) = 4$

(b,c) için $D(c) = \min(\infty, 2+5) = 7$

(b,d) için $D(d) = \min(\infty, 2+8) = 10$

(b,F) için $D(F) = \min(\infty, \infty) = \infty$

Böylece; yeni tablo aşağıdaki gibidir.

Tepeler	S	a	b *	c	d	F
S	0	4	2	∞	∞	∞
b	0	4	2	7	10	∞

2. adım: a,c,d,F arasından minimum olan a=4

Tepeler	S	a *	b *	c	d	F
S	0	4	2	∞	∞	∞
b	0	4	2	7	10	∞

$\min\{a,c,d,F\} = 4$

(a,c) için $D(c) = \min(7, 4+1) = 5$

(a,d) için $D(d) = \min(10, 4+7) = 10$

(a,F) için $D(F) = \min(\infty, \infty) = \infty$

2. Adım sonrası yeni tablo aşağıdaki gibidir.

Tepeler	S	a*	b*	c	d	F
S	0	4	2	∞	∞	∞
b	0	4	2	7	10	∞
a	0	4	2	5	10	∞

3. adım: c,d,F arasından minimum olan c=5

Tepeler	S	a*	b*	c*	d	F
S	0	4	2	∞	∞	∞
b	0	4	2	7	10	∞
a	0	4	2	5	10	∞

$\min\{c, d, F\} = 5$

(c, d) için $D(d) = \min(10, 5+4) = 9$

(c, F) için $D(F) = \min(\infty, 5+7) = 12$

3. Adım sonrası yeni tablo aşağıdaki gibidir.

Tepeler	S	a*	b*	c*	d	F
S	0	4	2	∞	∞	∞
b	0	4	2	7	10	∞
a	0	4	2	5	10	∞
c	0	4	2	5	9	12

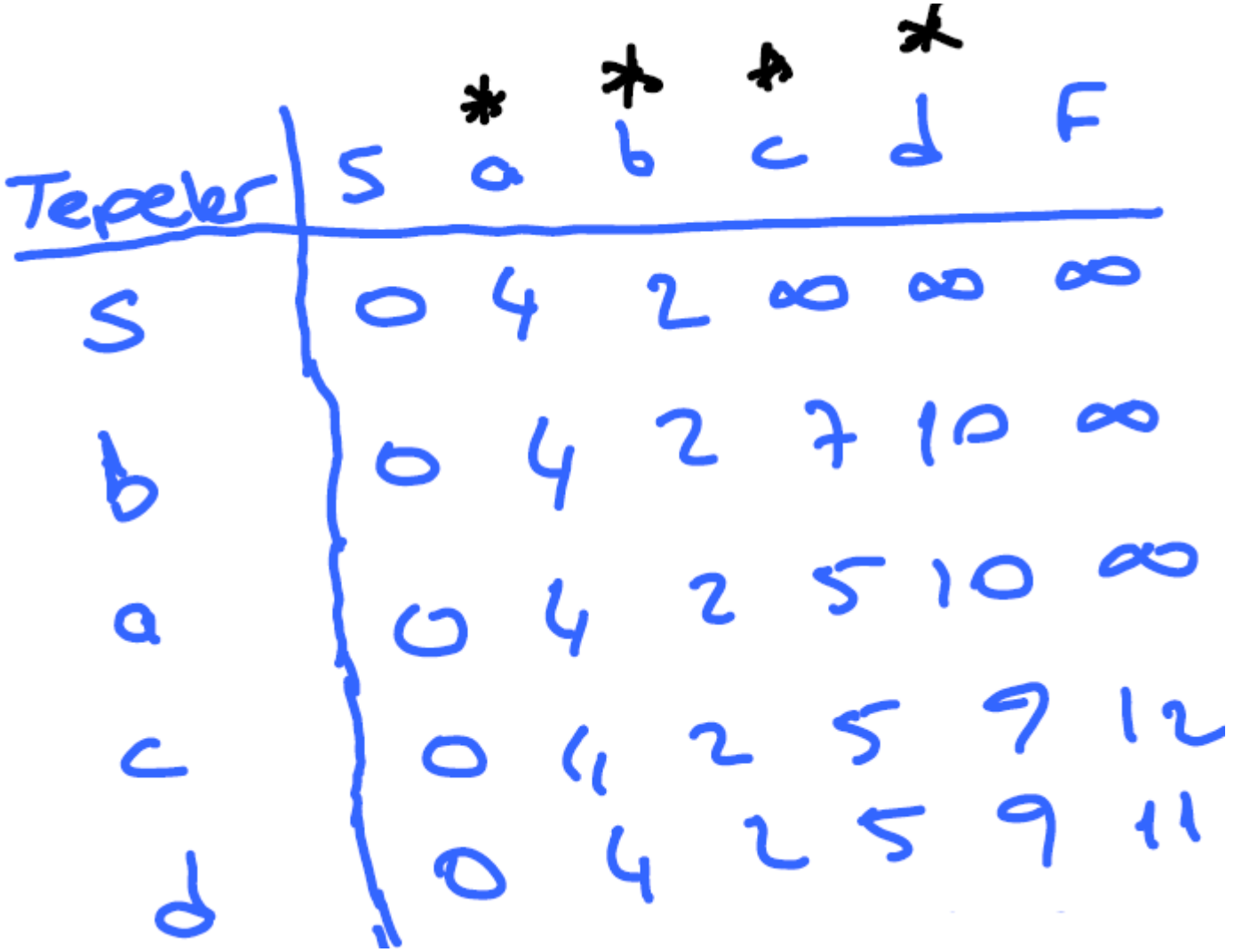
4. adım: d,F arasından minimum olan d=9

Tepeler	S	a*	b*	c*	d*	F
S	0	4	2	∞	∞	∞
b	0	4	2	7	10	∞
a	0	4	2	5	10	∞
c	0	11	2	5	9	12

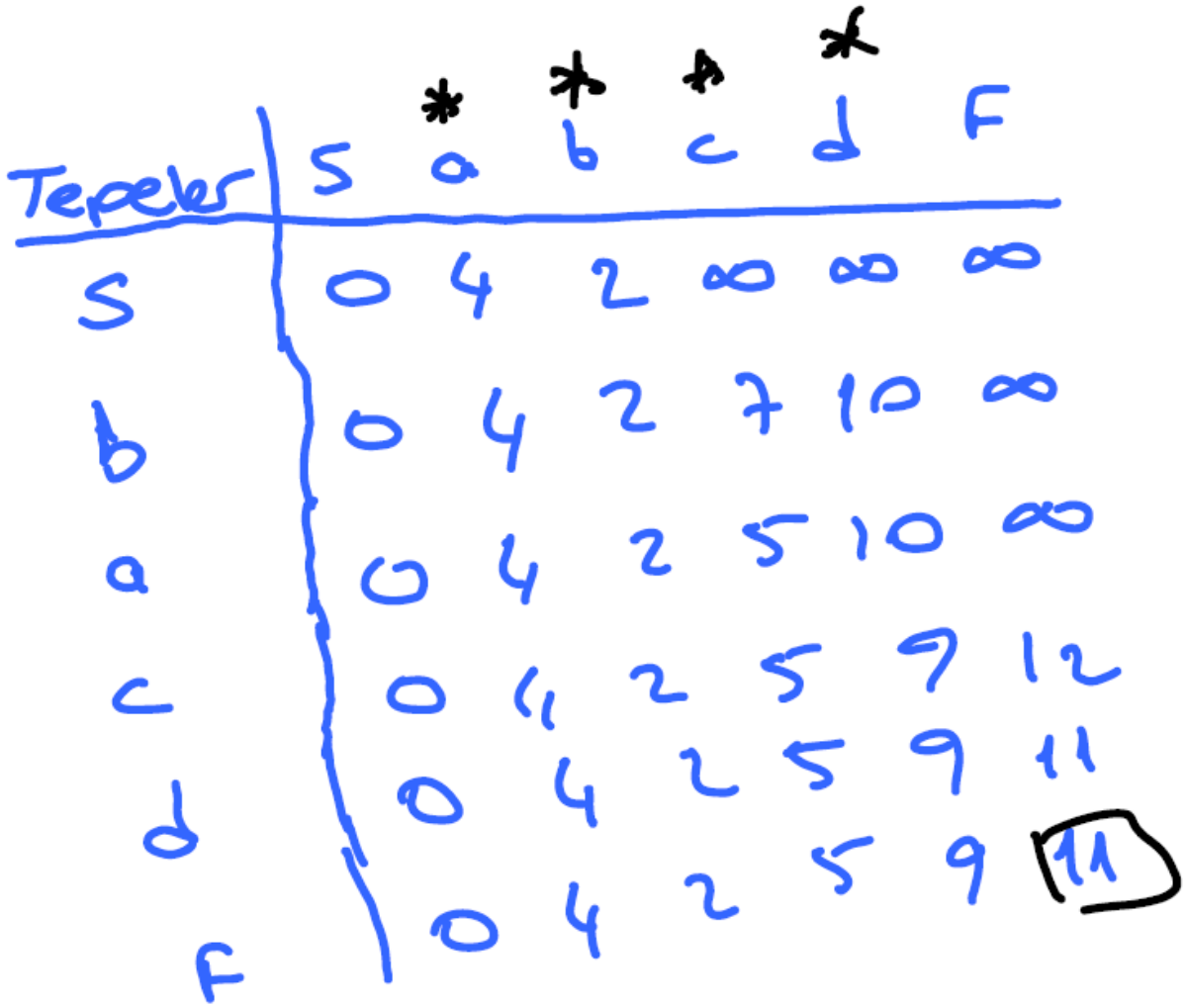
$\min(d,F) = 9$

(d,F) için $D(F) = \min(12, 9+2) = 11$

4. Adım sonrası yeni tablo aşağıdaki gibidir.



5. adım: F son tepe F=11 için tablo aşağıdaki gibidir.



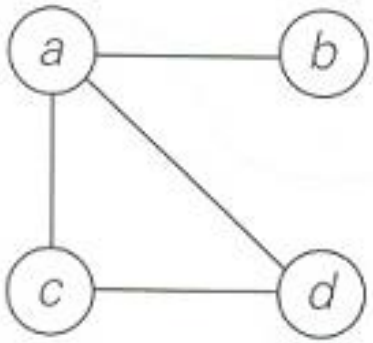
S den diğer tüm tepelere en kısa uzaklıklar

Tepeler	S'den en kısa yollar	Min. uzaklık
a	S→a	4
b	S→b	2
c	S→a→c	5
d	S→a→c→d	9
F	S→a→c→d→F	11

Bir Grafta Yolların Sayısı

- Tanım:
  - Bir grafta iki köşe arasındaki farklı yolları sayma.
  - Bir grafiğin i. tepe noktasından j. tepe noktasına k> 0 uzunluğundaki farklı yolların sayısının, A^k 'nın (i, j). Elemanına eşit olduğunu kanıtlamak kolaydır, burada A, grafiğin komşuluk matrisidir.

Bir Grafta Yolların Sayısı



$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^2 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Bir graf Grafın komşuluk matrisi A A^2

A ve A^2 matrislerinin elemanları 1 ve 2 uzunluklu yolların sayısını temsil eder.

Bir Grafta Yolların Sayısı

- Böylece problem, komşuluk matrisinin uygun bir gücünü hesaplamak için bir algoritma ile çözülebilir.
- Problem matris üssüne indirgenmiştir.
- A^k nasıl hesaplanır?

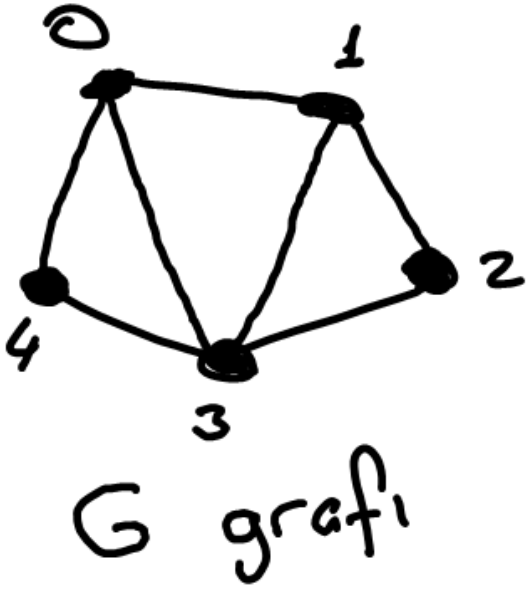
Optimizasyon Problemlerinin İndirgenmesi

Problem Tanımı:

- Bir fonksiyonun maksimumunu (minimum) bulun,
  - maksimizasyon (minimizasyon) problemi
- Bir işlevi maksimize etmek için bir algoritma bildiğinizi, ancak onu en aza indirmek istediğinizi varsayalım.
- İkincisinden nasıl yararlanabilirsiniz?

C kodu: Yanda verilen G grafı için…

Liste yötemi ile veri girişi yapalım…




```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
int main()
{ int a[100][100],t[7][7]={{0,0,0,1,1,2,3},{1,3,4,2,3,3,4}};
int d[100][100],v[100][100],s[100][100];
int i,j,k,m,top,b,h,f,enb,enk,n,s1,s2,s3,sum1,sum2,sum3;

m=1;
printf("G nin tepe sayisini giriniz: ");
scanf ("%d",&n);

for (i=0;i<n;i++)
{
for (j=0;j<n;j++)
 {
      a[i][j]=0;
 }}
```

```
for (i=0;i<7;i++)
 {
      a[t[0][i]][t[1][i]]=1;
      a[t[1][i]][t[0][i]]=1;
  }                          // komşuluk matrisi elde edildi...

for ( i = 0; i <n; i++ ) {

     for ( j = 0; j <n; j++ )
        printf( "%d", a[ i ][ j ] );

        printf( "\n" );}  // komşuluk matrisini yazdırdık...

for (i=0;i<n;i++)
{
for (j=0;j<n;j++)
 {
      v[i][j]=a[i][j];  // komşuluk matrisinin bir kopyası alındı...
}}
printf( "\n" );
```

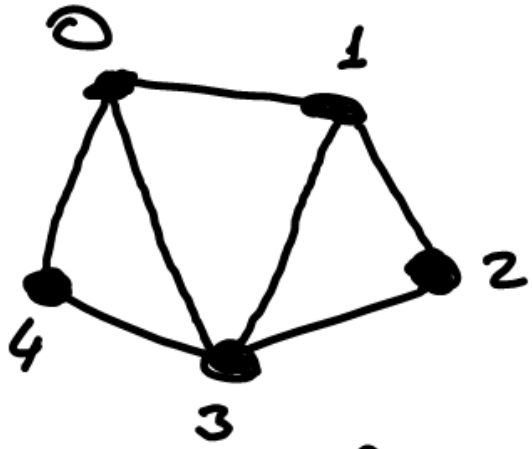
```
if (m==1)
      {

      for (i=0;i<n;i++)
       {
       for (j=0;j<n;j++)
        {
            if ((a[i][j]==1)||(i==j))  d[i][j]=a[i][j];
            else d[i][j]=500;



}}
                        }   // komşuluk matrisi ilk adımda uzaklık matrisine atanıyor...
```

```
f=0;
for (i=0;i<n;i++)
        {
        for (j=0;j<n;j++)
         {
      if (d[i][j]==500)  f=f+1;

}}
if (f==0)  goto T;  // sonsuz olan uzaklık var mı kontrol ediliyor...

L:
if (m>1) {
       for (i=0;i<n;i++)
        {
        for (j=0;j<n;j++)
         {
           if ((d[i][j]==500) && (a[i][j]==1)) d[i][j]=m;
       }}}
```

```
for (i=0;i<n;i++)
        {
        for (j=0;j<n;j++)
         {top=0;
          for (b=0;b<n;b++)
          {
           top = (top + (a[i][b]*v[b][j]));
          }
          s[i][j]=top;
}}

for (i=0;i<n;i++)
        {
        for (j=0;j<n;j++)
         {
           if ((i==j) || (s[i][j]==0))  s[i][j]=0;
                 else s[i][j]=1;
}}
```

```
for (i=0;i<n;i++)
        {
        for (j=0;j<n;j++)
         {
           if (i==j)  a[i][j]=0;
                 else a[i][j]=s[i][j];}}
m=m+1;
goto L;
T:
printf ("\n");
printf ( "G nin uzaklik matrisi\n");
for (i=0;i<n;i++)
        {
        for (j=0;j<n;j++)
         {
          if (d[i][j]==500) printf ("%d",0);
                          else
                           printf ("%d",d[i][j]);
}printf( "\n" );}
getch();
return 0;
}
```

```
G nin tepe sayisini giriniz: 5
01011
10110
01010
11101
10010


G nin uzaklik matrisi
01211
10112
21012
11101
12210

--------------------------------
Process exited with return value 0
Press any key to continue . . .
```



G grafi

Tanım 3: Dışmerkezlilik **(eccentricity)**, her tepenin diğer tepelere olan uzaklıklarının en büyük değeridir ve $e(v)$ (veya $e_G(v)$) biçiminde gösterilir. En büyük dışmerkezlilik değerine **çap (diameter)** denir, $diam(G)$ biçiminde gösterilir. En küçük dışmerkezlilik değerine **yarıçap (radius)** denir ve $r(G)$ biçiminde gösterilir.

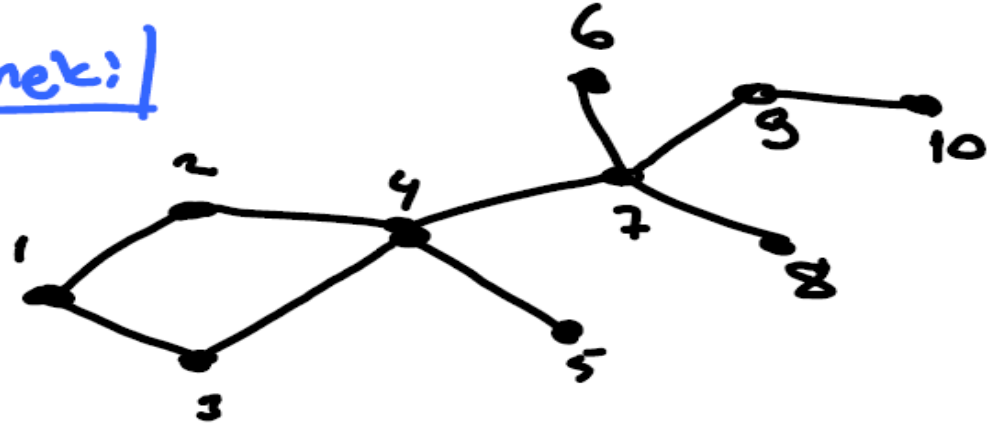
Tanım 4: Dışmerkezlilik değeri yarıçapa eşit olan tepelere **merkez tepeler (central vertices)** denir.

Tanım 5: Dışmerkezlilik değeri çapa eşit olan tepe veya tepelere **kıyı tepeler (peribheral vertices)** denir.

Eccentricity (Dışmerkezlik)

$$e(v) = \max \{ d(v,u) \mid v,u \in V(G) \}$$

Örnek:



G

$e(1) = 5$

$e(2) = 4$

$e(3) = 4$

$e(4) = 3$

$e(5) = 4$

$e(6) = 4$

$e(7) = 3$

$e(8) = 4$

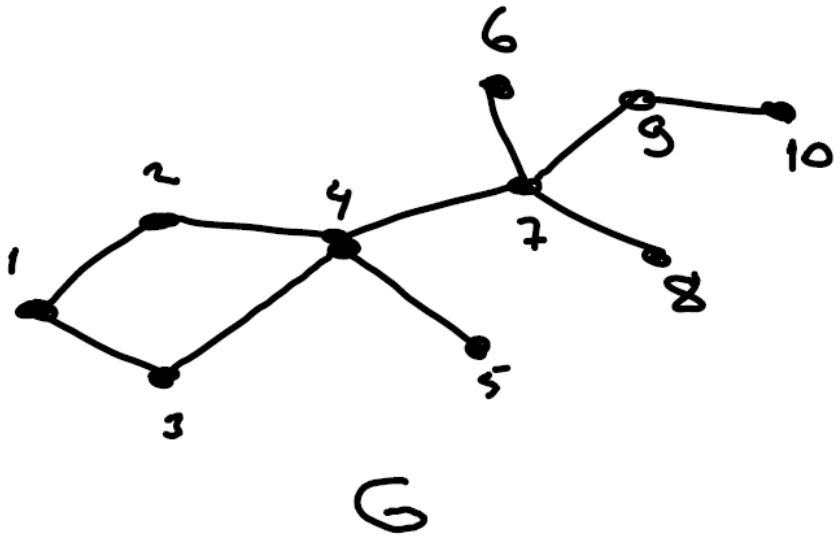
$e(9) = 4$

$e(10) = 5$

Böylece;

$diam(G) = 5$ (Çap)

$r(G) = 3$ (Yarıçap)



G

Merkez tepeler;

$C(G) = \{ v \mid e(v) = r(G) \}$

$C(G) = \{4, 7\}$

Kıyı tepeler;

$P(G) = \{ v \mid e(v) = diam(G) \}$

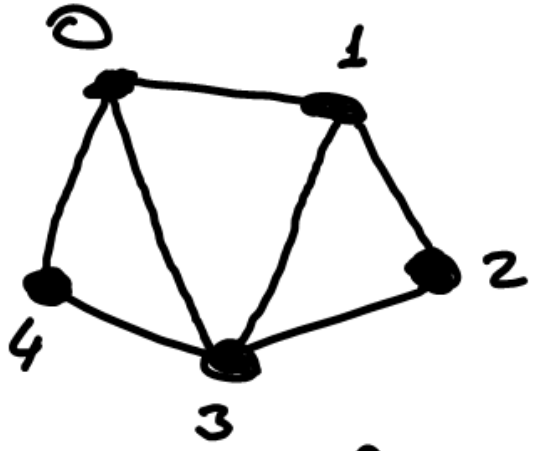
$P(G) = \{1, 10\}$

C kodu: Eccentricity için yukarıdaki koda aşağıdaki kod parçası eklenir.

```
for (i=0;i<n;i++)
        {
        for (j=0;j<n;j++)
         {
          if (j==0)  enb=d[i][j];
          if ( d[i][j] >= enb )  enb=d[i][j];
         }
         e[i][0]=enb;
```

```
printf ("\n");
printf  ("Tum tepelerin eccenricity degerleri\n");


for (i=0;i<n;i++)
        {
        for (j=0;j<1;j++)
         {
          printf ("%d--->  %d",i+1, e[i][j]);

}printf ("\n");}
```

```
G nin tepe sayisini giriniz: 5
01011
10110
01010
11101
10010


G nin uzaklik matrisi
01211
10112
21012
11101
12210

Tum tepelerin eccenricity degerleri
0--->  2
1--->  2
2--->  2
3--->  1
4--->  2

--------------------------------
Process exited with return value 0
Press any key to continue . . .
```



G grafi

Eccentricity değerlerini kullanarak grafın çapı, yarıçapı, merkez ve kıyı tepeleri kolayca bulunabilir…

KAYNAKLAR

[1] Chartrand, G.-Lesniak, L., (1986) : *Graphs and Digraphs*, Wadsworth & Brooks, California

[2] West D.B. (2001) : *Introduction to Graph Theory, Prentice Hall*, USA.

[3] Graf Teoriye Giriş, Şerife Büyükköse ve Gülistan Kaya Gök, Nobel Yayıncılık

[4] Discrete Mathematical Structures for Computer Science, Ronald E. Prather, Houghton Mifflin Company, (1976).

[5] Christofides, N., 1986. Graph Theory an Algorithmic Approach, Academic Press, London

[6] ALGORİTMALAR (Teoriden Uygulamalara), Vasif V. NABİYEV, Seçkin Yayıncılık