

حل تمرین فصل اول، بخش اول

ساختمان داده ها و الگوریتم

سجاد هاشمیان

۱۱ اسفند ۱۳۹۹

سوال ۱.

گزینه ۱ (۲)

$$\begin{aligned}n <> (\log n)^{\log n} &\implies \log n <> \log((\log n)^{\log n}) \\&\implies \log n <> \log n \times \log(\log n) \\&\implies \log n < \log n \log(\log n) \implies \log n \in O((\log n)^{\log n})\end{aligned}$$

گزینه ۳ طبق تقریب استرلینگ اشتباه است.

گزینه ۴ تابع $(\log n)!$ طبق تقریب استرلینگ به صورت نمایی رشد می کند (اینجا را ببینید)، پس اشتباه است.

سوال ۲.

$$\begin{cases} (\log n)! \in \Theta(n^{\log \log n}) \\ \log(n!) \in \Theta(n \log n) \longrightarrow O(n) < O(\log n!) < O((\log n)!) \\ n \in \Theta(n) \end{cases}$$

سوال ۳.

می دانیم میانگین برابر با زمان مصرفی کل تقسیم بر تعداد اجرا است، پس میانگین اجرای g برابر با $\log n = \frac{n \log n}{n}$ است. اما برای بدترین زمان اجرا این لزوماً صادق نیست، ممکن است همه اجراها از مرتبه ثابت $O(1)$ اجرا شده باشند، آنگاه زمان اجرا بدترین حالت برابر با $\Theta(n \log n)$ خواهد بود.

سوال ۴.

واضح است که در این تابع، زمان اجرایی برابر با زمان اجرایی تنها حلقه for می باشد. بنابراین اگر $T(n)$ برابر با زمان اجرای $f(n)$ باشد، آنگاه داریم:

$$T(n) = n \times T(n-1) \implies T(n) \in O(n!)$$

سوال ۵.

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=j}^{i+j} 1 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^i (i+j-j-1) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^i i-1 = \sum_{i=0}^n \frac{i(i-1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

سوال ۶.

الگوریتم زیر، این کار را با $O(n)$ ضرب انجام میدهد.

$X = 1$

$result = 0$

for $i = 0$ to n do

$result = result + a_i \times X$

$X = X \times x$

return $result$

سوال ۷.

تابع $T(n)$ را حداقل زمان اجرای مورد نیاز برای محاسبه $fib(n)$ تعریف می‌کنیم. میدانیم که $T(n) \in \Theta(\log n)$ (اینجا را ببینید)، بنابراین داریم:

$$T(n^2) = \Theta(\log n^2) = \Theta(2 \times \log n) = \Theta(\log n)$$