حل تمرین فصل اول، بخش دوم

ساختمان داده ها و الگوریتم

سجاد هاشمیان

زمستان ۱۳۹۹

سوال ۱.

با کمک از سری هارمونیک داریم:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \frac{n(n+1)}{2} + \mathcal{H}_n = \Theta(n^2) + \Theta(\ln n) = \Theta(n^2 + \ln n) = \Theta(n^2)$$

سوال ۲.

یادآوری(قضیه اصلی، حالت دوم). $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n) : f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \Longrightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

با توجه به تعریف سوال از $T(n)$ داریم: $a = 2, b = 4, f(n) = \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$ ، بنابراین این تابع در شرایط قسمت دوم قضیه اصلی صدق می‌کند و طبق آن $T(n) \in \Theta(\sqrt{n} \log n)$ است.

سوال ۳. $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{3}) + T(\frac{n}{4}) + n^2$

$$\begin{cases} T(n) < 3T(\frac{n}{2}) + n^2 \xRightarrow{\log_2 3 < n^2} T(n) \le \Theta(n^2) \Rightarrow T(n) \in O(n^2) \\ T(n) > 3T(\frac{n}{4}) + n^2 \xRightarrow{\log_4 3 < n^2} T(n) \ge \Theta(n^2) \Rightarrow T(n) \in \Omega(n^2) \end{cases} \Longrightarrow T(n) \in \Theta(n^2)$$

سوال ۴.

ابتدا رابطه بازگشتی را با تغییر متغییر $k = \sqrt{m}$ به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$T(n) = \begin{cases} 8T(\frac{n}{2}) + \Theta(1) & n > k \\ k^2 & n < k \end{cases}$$

حال با استفاده از مجموع در درخت بازگشت رابطه فوق داریم:

$$T(n) \in \Theta\left(\sum_{i=0}^{\log \frac{n}{k}} 8^i \frac{n}{2^i}\right) = \Theta\left(n \sum_{i=0}^{\log \frac{n}{k}} 4^i\right)$$

اما باید $g(n,k) = \sum_{i=0}^{\log \frac{n}{k}} 2^{2i}$ را محاسبه کنیم:

محدود کردن حاصل جمع‌ها با انتگرال $\sum_{i=1}^{n} f(i) \leq \int_{1}^{n+1} f(x)dx$

با توجه به رابطه فوق $g(n,k) = \Theta(\int 2^{2i})$ که با حل انتگرال فوق داریم:

$$g(n,k) = \Theta(2^{\log \frac{n^2}{k}}) \in \Theta(\frac{n^2}{k})$$

محاسبات پایه لگاریتم ها $\log(a+b) = \log(a(1+\frac{b}{a})) = \log a + \log(1+\frac{b}{a})$

طبق رابطه گفته شده، داریم:

$$\log(g(n,k)) = \log(2^{2\log 2}) + \log(g(n-k,k))$$

$$(\log o\ g)(n,k) = (\log o\ g)(n-k,k) + 4$$

از آنجا که k به عنوان پارامتر ثابت تکرار می‌شود، قابل حذف است؛ بنابراین طبق قضیه اصلی و سپس حذف تابع لگاریتمی که در ابتدا محاسبات اضافه کردیم داریم: $g(n) \in \Theta(\frac{n^2}{k})$

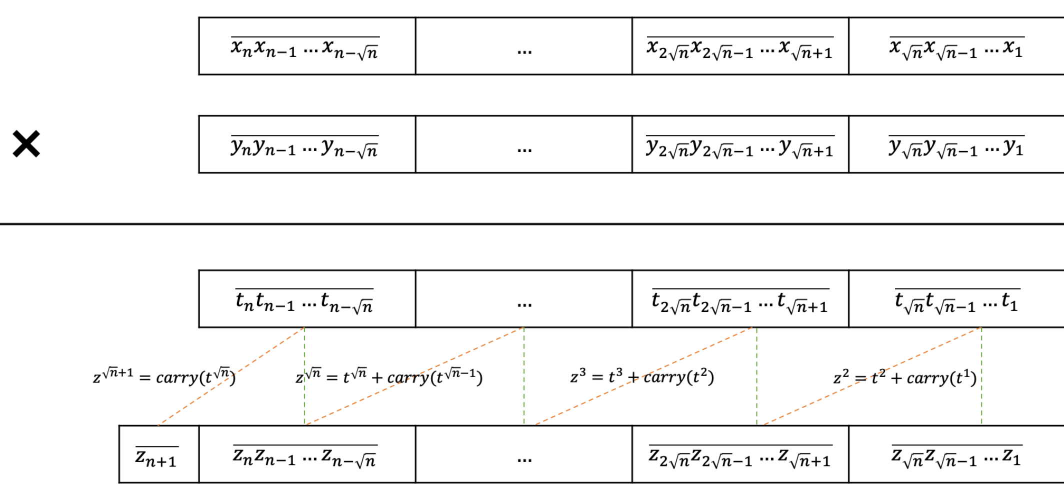
درنهایت با توجه به محاسبات فوق داریم: $T(n) \in \Theta(n) \times \Theta(g(n)) = \Theta(\frac{n^3}{\sqrt{m}})$

سوال ۵.

$$U(m) = T(2^m) = T(\frac{2^m}{2}) + \log(2^m) = T(2^{m-1}) + m = U(m-1) + m$$

سوال ۶.

کافیست تا اعداد را در بلوک های $\sqrt{n}$ تایی به ماشین ورودی دهیم، در اینصورت $\sqrt{n}$ تا بلوک به اندازه $\sqrt{n}$ داریم؛ که هر کدام از آنها طبق فرض سوال از مرتبه $O(1)$ قابل محاسبه و همینطور از $O(1)$ قابل ترکیب با دیگر بلوک ها است، و این یعنی از مرتبه $\sqrt{n}$ می‌توانیم این دو عدد را در هم ضرب کنیم که کمترین گزینه موجود است.



سوال ۷.

بدون کم شدن از کلیت مسئله قرار دهید $\beta \geq \alpha$ آنگاه داریم:

$$\begin{cases} T(n) \leq 2T(\alpha n) + cn \\ \alpha + \beta = 1 \to \alpha \geq \frac{1}{2} \end{cases} \implies T(n) \in O(n^{\log_{\frac{1}{\alpha}} 2} \log n) = O(n \log n)$$

اما آیا رابطه ای بین این تابع بازگشتی و مسئله زیر می‌بینید؟

مسئله: با استفاده از یک نخ به طول $2\alpha + 2\beta$ یک چهارضلعی ساخته‌ایم، مساحت بیشینه چهارضلعی ممکن چقدر است؟