

حل تمرین فصل اول، بخش دوم

ساختمان داده ها و الگوریتم

سجاد هاشمیان

۱۱ اسفند ۱۳۹۹

سوال ۱.

با کمک از سری هارمونیک داریم:

$$T(n) = \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \frac{n(n+1)}{2} + \mathcal{H}_n = \Theta(n^2) + \Theta(\ln n) = \Theta(n^2 + \ln n) = \Theta(n^2)$$

سوال ۲.

طبق قسمت دوم قضیه اصلی، به سادگی گزینه ۴ $(\Theta(\sqrt{n} \log n))$ نتیجه می شود.

سوال ۳.

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$$

$$\begin{cases} T(n) < 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2 \xrightarrow{\log_2 3 < n^2} T(n) \leq \Theta(n^2) \Rightarrow T(n) \in O(n^2) \\ T(n) > 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2 \xrightarrow{\log_4 3 < n^2} T(n) \geq \Theta(n^2) \Rightarrow T(n) \in \Omega(n^2) \end{cases} \implies T(n) \in \Theta(n^2)$$

سوال ۴.

ابتدا رابطه بازگشتی را با تغییر متغیر $k = \sqrt{m}$ به شکل زیر بازنویسی می کنیم:

$$T(n) = \begin{cases} 8T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(1) & n > k \\ k^2 & n < k \end{cases}$$

حال با استفاده از مجموع در درخت بازگشت رابطه فوق داریم:

$$T(n) \in \Theta\left(\sum_{i=0}^{\log \frac{n}{k}} 8^i \frac{n}{2^i}\right) = \Theta\left(\frac{n^3}{k}\right)$$

سوال ۵.

$$U(m) = T(2^m) = T\left(\frac{2^m}{2}\right) + \log(2^m) = T(2^{m-1}) + m = U(m-1) + m$$

سوال ۶.

کافیست تا اعداد را در بلوک های \sqrt{n} تایی به ماشین ورودی دهیم، در اینصورت \sqrt{n} تا بلوک به اندازه \sqrt{n} داریم، و این یعنی از مرتبه \sqrt{n} می توانیم این دو عدد را در هم ضرب کنیم که کمترین گزینه موجود است.

سوال ۷.

آیا رابطه ای بین این تابع بازگشتی و مسئله زیر می بینید؟

مسئله: با استفاده از یک نخ به طول $2\alpha + 2\beta$ یک چهارضلعی ساخته ایم، مساحت بیشینه چهارضلعی ممکن چقدر است؟