حل تمرین فصل اول، بخش اول

ساختمان داده ها و الگوریتم

سجاد هاشمیان

۲۸ اسفند ۱۳۹۹

سوال ۱.

گزینه ۱و۲)

$$\begin{aligned} n <> (\log n)^{\log n} &\Longrightarrow \log n <> \log((\log n)^{\log n}) \\ &\Longrightarrow \log n <> \log n \times \log(\log n) \\ &\Longrightarrow \log n < \log n \log(\log n) \Longrightarrow \log n \in O((\log n)^{\log n}) \end{aligned}$$

گزینه ۳) طبق تقریب استرلینگ اشتباه است.

گزینه ۴) تابع $(\log n)!$ طبق تقریب استرلینگ به صورت نمایی رشد می کند (اینجا را ببینید) ، پس اشتباه است.

سوال ۲.

$$\begin{cases} (\log n)! \in \Theta(n^{\log\log n}) \\ \log(n!) \in \Theta(n \log n) \\ n \in \Theta(n) \end{cases} \longrightarrow O(n) < O(\log n!) < O((\log n)!)$$

سوال ۳.

می دانیم میانگین برابر با زمان مصرفی کل تقسیم بر تعداد اجرا است، پس میانگین اجرای g برابر با $\frac{n\log n}{n} = \log n$ است. اما برای بد ترین زمان اجرا این لزوما صادق نیست، ممکن است همه اجرا ها از مرتبه ثابت $O(1)$ اجرا شده باشند، آنگاه زمان اجرا بدترین حالت برابر با $\Theta(n\log n)$ خواهد بود.

سوال ۴.

واضح است که در این تابع، زمان اجرایی برابر با زمان اجرایی تنها حلقه for می‌باشد، بنابراین اگر $T(n)$ برابر با زمان اجرای $f(n)$ باشد، آنگاه داریم:

$$T(n) = n \times T(n-1) \Longrightarrow T(n) \in O(n!)$$

سوال ۵.

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=j}^{i+j}1=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{i}(i+j-j+1)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{i}i+1=\sum_{i=0}^{n}i(i+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

سوال ۶.

الگوریتم زیر، این کار را با $O(n)$ ضرب انجام میدهد.

$X = 1$

$result = 0$

$for\ \ i = 0\ \ to\ \ n\ \ do$

$\quad result = result + a_i \times X$

$\quad X = X \times x$

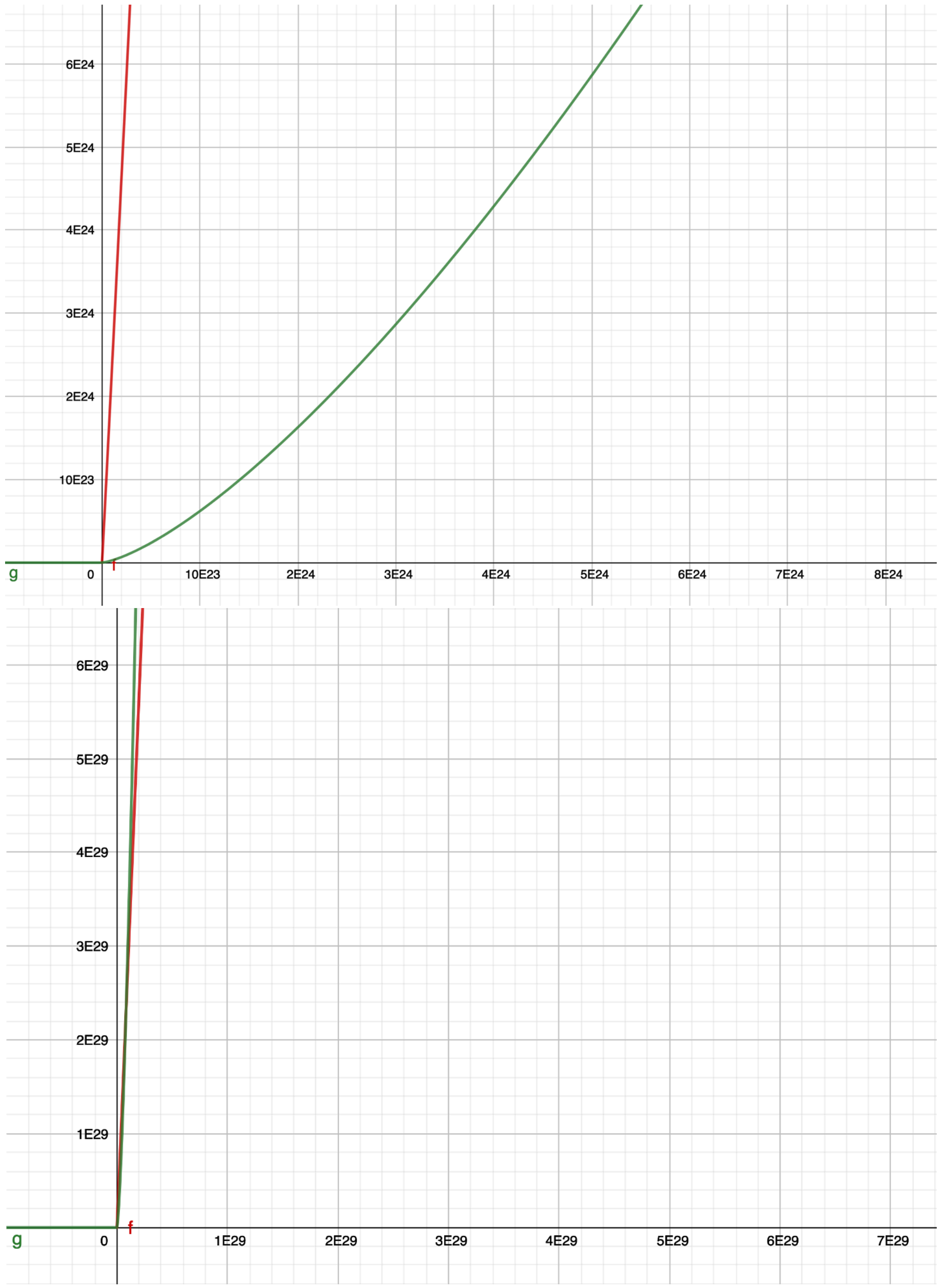
$return\ \ result$

سوال ۷.

تابع $T(n)$ را حداقل زمان اجرای مورد نیاز برای محاسبه $fib(n)$ تعریف می‌کنیم. میدانیم که $T(n) \in \Theta(\log n)$ (اینجا را ببینید) ، بنابرین داریم:

$$T(n^2) = \Theta(\log n^2) = \Theta(2 \times \log n) = \Theta(\log n)$$

شکل ۱: سوال ۲. توضیحات بیشتر



(آ) به ارقام نجومی(وحشیانه) روی نمودار هم دقت کنید.

نمودار سبز رنگ نشان‌دهنده مقدار تابع $\log(n!)$ و نمودار قرمز مربوط به تابع $n \log n$ است که طبق تقریب استرلینگ مربوط به $\log(n!)$ است.