

MATE 5201: Tarea 3

Due on 7 de octubre

Prof. Alejandro Vélez , C41, 7 de octubre

Sergio Rodríguez

Problem 1

(5 puntos) – Demuestre que los únicos subconjuntos de \mathbb{R} que son abiertos y cerrados son \emptyset y \mathbb{R} .

Prueba:

Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ abierto y cerrado. Sea $E^\circ := \{x \in E \mid \exists r > 0 \text{ tal que } B(x; r) \subseteq E\}$ y $E' := \{x \in \mathbb{R} \mid (U_r(x) \setminus \{x\}) \cap E \neq \emptyset\}$. Note que $E^\circ \subseteq E'$. Como E es abierto, $E = E^\circ$, y como E es cerrado, $E' \subseteq E = E^\circ$. Por lo tanto, $E^\circ = E'$, lo que implica que $E' \setminus E^\circ = \emptyset$.

Suponga, por contradicción, que $E \neq \emptyset \wedge E \neq \mathbb{R}$. Ahora fije un elemento arbitrario $x \in E$ y considere $F := \{d(x, y) \mid y \in E^c\} \subseteq \mathbb{R}$. Note que $E \neq \mathbb{R} \implies E^c \neq \emptyset \implies F \neq \emptyset$. Además, por la definición de la métrica, 0 es una cota inferior para F . Por lo tanto, por la propiedad de la cota inferior mínima, $\inf(F)$ existe en \mathbb{R} . Entonces existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $d(x, \alpha) = \inf(F)$ con $(U_\rho(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cap E \neq \emptyset \forall \rho > 0$ (porque $\inf(F) - \rho \notin F \forall \rho > 0 \implies$ si $d(x, y) = \inf(F) - \rho$, entonces $y \notin E^c \implies y \in E$). Además, $U_\rho(\alpha) \not\subseteq E$ (porque $\exists \varepsilon \in F$ tal que $\inf(F) < \varepsilon < \inf(F) + \rho \forall \rho > 0 \implies \exists y \in E^c$ tal que $d(x, y) = \varepsilon$). Por lo tanto, $x \in E^\circ \setminus E' \implies E^\circ \setminus E' \neq \emptyset$.
✖

Por lo tanto, $E = \emptyset \vee E = \mathbb{R}$. Ahora, note que $x \in \emptyset \implies \exists r > 0$ tal que $B(x; r) \subseteq E$ es cierto porque la hipótesis es falsa, por lo tanto \emptyset es abierto y $\emptyset^c = \mathbb{R}$ es cerrado. Similarmente, $x \in \emptyset \implies (U_r(x) \setminus \{x\}) \cap E \neq \emptyset \forall r > 0$. Por lo tanto, \emptyset es cerrado y $\emptyset^c = \mathbb{R}$ es abierto.

MEP

Problem 2

(12 puntos) – Para $x, y \in \mathbb{R}$, definamos:

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &:= (x - y)^2 \\ d_2(x, y) &:= \sqrt{|x - y|} \\ d_3(x, y) &:= |x - 2y| \\ d_4(x, y) &:= |x^2 - y^2| \end{aligned} \tag{1}$$

Determine cuáles de estos definen métricas en \mathbb{R} . Justifique completamente cada respuesta.

Determinación:

d_1 no define una métrica en \mathbb{R} porque falla la desigualdad triangular. Tome $x = 1, y = 0, z = -1$ y note que $d_1(1, -1) = 4 \not\leq 2 = 1 + 1 = d_1(1, 0) + d_1(0, -1)$.

d_2 define una métrica en \mathbb{R} . Note que $d_2(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$ con d siendo la métrica usual de \mathbb{R} . Ahora:

$$d_2(x, x) = \sqrt{d(x, x)} = \sqrt{0} = 0 \tag{2}$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{d(x, y)} = \sqrt{d(y, x)} = d_2(y, x) \tag{3}$$

$$d_2(x, z) = \sqrt{d(x, z)} \leq \sqrt{d(x, y)} + \sqrt{d(y, z)} = d_2(x, y) + d_2(y, z) \tag{4}$$

d_3 no define una métrica en \mathbb{R} porque falla la propiedad de que $d(x, y) = 0 \iff x = y$. Tome $x = 2, y = 1$ y note que $d_3(2, 1) = |2 - 2| = 0$

d_4 no define una métrica en \mathbb{R} porque falla la propiedad de que $d(x, y) = 0 \iff x = y$. Tome $x = 1, y = -1$ y note que $d_4(1, -1) = |1^2 - (-1)^2| = |1 - 1| = 0$.

Problem 3

(5 puntos) – Sea (X, d) un espacio métrico, y definamos:

$$d^*(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad \forall x, y \in X \quad (5)$$

Pruebe que (X, d^*) es un espacio métrico, y que $d^* : X \times X \rightarrow [0, 1)$.

Prueba:

Note que como d es una métrica:

$$d^*(x, x) = \frac{d(x, x)}{1 + d(x, x)} = 0, \quad \forall x \in X \quad (6)$$

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = d^*(y, x), \quad \forall x, y \in X \quad (7)$$

$$\begin{aligned} d^*(x, z) &= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} \leq \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \\ &\leq \frac{d(x, y) + 2d(x, y)d(y, z) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(x, y)d(y, z) + d(y, z)} \\ &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} = d^*(x, y) + d^*(y, z) \end{aligned} \quad (8)$$

Es claro que el dominio de d^* es $X \times X$. Como d^* es una métrica, su rango empieza limitado a $[0, \infty)$, pero ahora, note que $\lim_{d(x, y) \rightarrow \infty} d^*(x, y) = 1$.

$\therefore d^* : X \times X \rightarrow [0, 1)$.

MEP

Problem 4

(4 puntos c.u.) – Dado (X, d) espacio métrico, y $E \subseteq X$, definamos:

$$E^\circ := \{x \in E \mid x \text{ punto interior}\}, \quad E' := \{x \in X \mid x \text{ punto límite}\} \quad (9)$$

(a) Demuestre que E° es abierto (no puede usar parte (d)).

Prueba:

Tome $x \in E^\circ$. Como x es un punto interior de E , sabemos que $\exists r > 0$ tal que $B(x; r) \subseteq E$.

Suponga, por contradicción, que $B(x; r) \cap (E^\circ)^c \neq \emptyset$. Entonces, $\exists y \in B(x; r)$ tal que y no es un punto interior de E . Esto implica que $B(y, \rho) \not\subseteq E \quad \forall \rho > 0$, pero como $B(x; r) \subseteq E$, también tenemos que $B(y, \rho) \not\subseteq B(x; r) \quad \forall \rho > 0$. Esto quiere decir que encontramos un punto $y \in B(x; r)$ tal que ninguna bola centrada en y está contenida en $B(x; r)$. Por lo tanto, $B(x; r)$ no es abierto. ✖

Entonces:

$$\begin{aligned} B(x; r) \cap (E^\circ)^c &= \emptyset \\ \implies B(x; r) &\subseteq E^\circ \end{aligned} \tag{10}$$

$\therefore E^\circ$ es abierto.

MEP

(b) Pruebe que E es abierto si y sólo si $E^\circ = E$.

Prueba:

(\implies) Suponga que E es abierto. Es claro que $E^\circ \subseteq E$. Ahora, tome $x \in E$ y note que, como E es abierto, $\exists r > 0$ tal que $B(x; r) \subseteq E$. Pero esto implica, por definición, que $x \in E^\circ$. Entonces $E \subseteq E^\circ$.

$\therefore E^\circ = E$

(\impliedby) Suponga que $E^\circ = E$. Por (a), sabemos que E° es abierto, pero como $E^\circ = E$, tenemos que E es abierto.

MEP

(c) Si G es abierto y $G \subseteq E$, demuestre que $G \subseteq E^\circ$.

Prueba:

Tome $x \in G$, y note que como G es abierto, $\exists r > 0$ tal que $B(x; r) \subseteq G \subseteq E$. Por transitividad, esto quiere decir que x es un punto interior de E . Entonces $x \in E^\circ$.

$\therefore G \subseteq E^\circ$

MEP

(d) Pruebe que $(E^\circ)^c = \overline{E^c}$.

Prueba:

Note que $(E^\circ)^c = \{x \in X \mid x \text{ no es punto interior de } E\}$ y $\overline{E^c} = E^c \cup (E^c)'$.

Suponga que $x \in (E^\circ)^c$.

Caso 1 — $x \notin E$:

$x \notin E \implies x \in E^c \implies x \in \overline{E^c}$.

Caso 2 — $x \in E$:

Como x no es un punto interior de E , sabemos que $B(x; r) \not\subseteq E \quad \forall r > 0$. Esto implica que $B(x; r) \cap E^c \neq \emptyset \quad \forall r > 0$. Pero $x \notin E^c$, así que lo podemos quitar de la bola sin quitar la intersección: $B(x; r) \setminus \{x\} \cap E^c \neq \emptyset \quad \forall r > 0$. Por lo tanto, $x \in (E^c)' \implies x \in \overline{E^c}$.

MEP

(e) Determine si $E^\circ = (\overline{E})^\circ$. Pruebe ó provea un contraejemplo.

Prueba:

Tome $x \in E^\circ$, entonces $\exists r > 0$ tal que $B(x; r) \subseteq E \implies B(x; r) \subseteq E \cup E' = \overline{E} \implies x \in (\overline{E})^\circ$
 $\therefore E^\circ \subseteq (\overline{E})^\circ$.

Tome $x \in (\overline{E})^\circ \implies \exists r > 0$ tal que $B(x; r) \subseteq \overline{E} = E \cup E' = E \sqcup E' \setminus E$. Note que, como esta unión es disjunta, si probamos que $y \in B(x; r) \wedge y \notin E'$, entonces $B(x; r) \subseteq E$. Ahora, sea $F := \{d(x, z) \mid z \in B(x; r) \cap E\}$. Note que $F \subseteq \mathbb{R}$, $F \neq \emptyset$, y r es cota superior para F . Entonces, por la propiedad de la cota superior mínima $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \sup(F)$. Suponga, por contradicción, que $B(x; r) \cap E^c \neq \emptyset$, entonces $\exists y_0 \in B(x; r) \cap E^c$. Note que $\alpha \leq d(x, y_0) < r$, entonces, por la densidad de los reales, y la abiertitud de las bolas, $\exists y \in B(x; r) \cap E^c$ tal que $\alpha \leq d(x, y_0) < d(x, y) < r \implies \alpha < d(x, y) < r$. Nuevamente, usando la densidad y la abiertitud, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\alpha < d(x, y) - \varepsilon < d(x, y) < d(x, y) + \varepsilon < r$. Entonces $B(y; \varepsilon) \subseteq B(x; r)$ y $B(y; \varepsilon) \setminus \{y\} \cap E = \emptyset$. Esto contradice que $B(x; r) \subseteq E \sqcup E' \setminus E$. ✖

Entonces $B(x; r) \cap E^c = \emptyset$, lo que implica que $B(x; r) \cap E' \setminus E = \emptyset \implies B(x; r) \subseteq E \implies x \in E^\circ$.
 $\therefore (\overline{E})^\circ \subseteq E^\circ$

$\therefore (\overline{E})^\circ = E^\circ$

MEP

(f) Determine si $\overline{E} = \overline{E^\circ}$. Pruebe ó provea un contraejemplo.

Prueba:**MEP**

(g) Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo, demuestre que E° y \overline{E} son convexos.

Prueba:**MEP**

(h) Pruebe que E' es cerrado.

Prueba:

Tome $x \in (E')^c$ y note que $\exists r > 0$ tal que $B(x; r) \setminus \{x\} \cap E = \emptyset$. Entonces $y \in B(x; r) \implies \exists \rho \in \mathbb{R}$ con $0 < \rho < r$ tal que $B(y; \rho) \subseteq B(x; r) \implies B(y; \rho) \setminus \{y\} \cap E \subseteq B(x; r) \setminus \{x\} \cap E = \emptyset$. Entonces $B(y; \rho) \setminus \{y\} \cap E = \emptyset \implies y \in (E')^c$. Por lo tanto, $B(x; r) \subseteq (E')^c \implies (E')^c$ abierto.

$\therefore E'$ cerrado.

MEP

(i) Demuestre que $\overline{E}' = E'$.

Prueba:

MEP

(j) Determine si $(E')' = E'$. Pruebe ó provea un contraejemplo.

Prueba:

MEP

Problem 5

(4 puntos) – Demuestre que el intervalo $(0, 1)$ no es compacto de forma directa, esto es, encuentre una cubierta abierta de $(0, 1)$ que no posee una subcubierta finita.

Prueba:

Considere la familia $A_n := (\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Note que A_i es abierto $\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Tome $x \in (0, 1)$ y note que $0 < x < 1$. Entonces $\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tal que $0 < \frac{1}{k} < x < 1 - \frac{1}{k} < 1$, por lo tanto, $x \in A_k \implies x \in \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$. Entonces:

$$(0, 1) \subseteq \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \implies \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \text{ es una cubierta abierta para } (0, 1). \quad (11)$$

Sea $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ una subcolección finita arbitraria de $F := \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$. Ahora escoja $\frac{1}{m_0} = \min\{\frac{1}{m} \mid (\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}) \in F\}$, y note que $0 < \frac{1}{m_0}$. Entonces, $\exists \alpha \in (0, 1)$ tal que $0 < \alpha < \frac{1}{m_0}$. Entonces $\alpha \notin F$.

$\therefore (0, 1) \not\subseteq F \implies (0, 1)$ no es compacto.

MEP

Problem 6

(5 puntos) – Sean K_1, K_2, \dots, K_n subconjuntos compactos del espacio métrico (X, d) . Pruebe que:

$$K := \bigcup_{j=1}^n K_j \quad (12)$$

es compacto.

Prueba:

Sea U una cubierta abierta para K . Entonces U cubre a $\bigcup_{j=1}^n K_j$, lo que implica que U cubre a $K_i \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pero, como K_i es compacto $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, existen subcubiertas abiertas finitas $F_i \subseteq U$ tal que F_i cubre a $K_i \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ahora considere:

$$F := \bigcup_{j=1}^n F_j \quad (13)$$

Note que, por construcción, F es una cubierta abierta finita que cubre a K . Además, $F_i \subseteq U \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, lo que implica que $F \subseteq U$. Como U era arbitrario, siempre podemos construir una subcubierta abierta finita de U que cubre a K .

$\therefore K$ es compacto.

MEP

Problem 7

(4 puntos) – Dado que $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con $a < b$, definamos el conjunto: $S := \{x \in \mathbb{Q} \mid a < x < b\}$. Demuestre que $S \subseteq \mathbb{Q}$ es cerrado y acotado (en \mathbb{Q}), pero no compacto (en \mathbb{Q}).

Prueba:

Por contradicción, suponga que $S' \not\subseteq S$, entonces $S' \neq \emptyset \implies \exists x \in S' \setminus S$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $x \geq b$. Note que $x \in \mathbb{Q}$ y $b \notin \mathbb{Q} \implies x \neq b \implies x > b$. Pero $x \in S' \implies U_r(x) \setminus \{x\} \cap S \neq \emptyset \forall r \in (0, \infty)$. Ahora, tome $\rho = \frac{x-b}{2} \in (0, \infty)$ y construya $U_\rho(x)$. Note que:

$$y \in U_\rho(x) \implies y > x - \rho = x - \frac{|x-b|}{2} = \frac{2x - x + b}{2} = \frac{x+b}{2} \quad (14)$$

Como $x > b, \exists \alpha \in (0, \infty)$ tal que $x = b + \alpha$. Entonces:

$$\begin{aligned} y &> \frac{(b+\alpha) + b}{2} = \frac{2b + \alpha}{2} = \frac{2b}{2} + \frac{\alpha}{2} = b + \frac{\alpha}{2} > b \\ \implies y \notin S &\implies U_\rho(x) \setminus \{x\} \cap S = \emptyset. \times \end{aligned} \quad (15)$$

$\therefore S' \subseteq S \implies S$ cerrado en \mathbb{Q} .

Tome $p, q \in \mathbb{Q}$ tal que $p < a$ y $q > b$.

$\therefore S$ está acotado por p y q en \mathbb{Q} .

Sea $S_n := B\left(\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{n}\right) \subseteq \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. Tome $x \in S$ y note que: $a < x < b \implies \exists k \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ tal que $a < \frac{b-a}{2} - \frac{b-a}{k} < x < \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{k} < b \implies x \in S_k \implies x \in \bigcup_{n=3}^{\infty} S_n$ es una cubierta abierta para S .

Tome una subcolección finita arbitraria $F := \bigcup \{A_1, A_2, \dots, A_k\} \subseteq \bigcup_{n=3}^{\infty} S_n$. Sea $\alpha = \frac{b-a}{j} \in F$ tal que $|\alpha - a| = \min\{|x - a| \mid x \in F\}$. Entonces $a < \frac{b-a}{j} \implies \exists s \in S$ tal que $a < s < \frac{b-a}{j}$. Pero $s \notin F$. Por lo tanto $S \not\subseteq F$.

$\therefore S$ no es compacto en \mathbb{Q} .

MEP