

# **MATE 5201: Tarea 3**

Due on 7 de octubre

*Prof. Alejandro Vélez , C41, 7 de octubre*

**Sergio Rodríguez**

**Problem 1**

(5 puntos) – Demuestre que los únicos subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que son abiertos y cerrados son  $\emptyset$  y  $\mathbb{R}$ .

**Prueba:**

Sea  $E \subseteq \mathbb{R}$  abierto y cerrado. Sea  $E^\circ := \{x \in E \mid \exists r > 0 \text{ tal que } B(x; r) \subseteq E\}$  y  $E' := \{x \in \mathbb{R} \mid (U_r(x) \setminus \{x\}) \cap E \neq \emptyset\}$ . Note que  $E^\circ \subseteq E'$ . Como  $E$  es abierto,  $E = E^\circ$ , y como  $E$  es cerrado,  $E' \subseteq E = E^\circ$ . Por lo tanto,  $E^\circ = E'$ , lo que implica que  $E' \setminus E^\circ = \emptyset$ .

Suponga, por contradicción, que  $E \neq \emptyset \wedge E \neq \mathbb{R}$ . Ahora fije un elemento arbitrario  $x \in E$  y considere  $F := \{d(x, y) \mid y \in E^c\} \subseteq \mathbb{R}$ . Note que  $E \neq \mathbb{R} \implies E^c \neq \emptyset \implies F \neq \emptyset$ . Además, por la definición de la métrica, 0 es una cota inferior para  $F$ . Por lo tanto, por la propiedad de la cota inferior mínima,  $\inf(F)$  existe en  $\mathbb{R}$ . Entonces existe un  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $d(x, \alpha) = \inf(F)$  con  $(U_\rho(\alpha) \setminus \{\alpha\}) \cap E \neq \emptyset \forall \rho > 0$  (porque  $\inf(F) - \rho \notin F \forall \rho > 0 \implies$  si  $d(x, y) = \inf(F) - \rho$ , entonces  $y \notin E^c \implies y \in E$ ). Además,  $U_\rho(\alpha) \not\subseteq E$  (porque  $\exists \varepsilon \in F$  tal que  $\inf(F) < \varepsilon < \inf(F) + \rho \forall \rho > 0 \implies \exists y \in E^c$  tal que  $d(x, y) = \varepsilon$ ). Por lo tanto,  $x \in E^\circ \setminus E' \implies E^\circ \setminus E' \neq \emptyset$ .  
✖

Por lo tanto,  $E = \emptyset \vee E = \mathbb{R}$ . Ahora, note que  $x \in \emptyset \implies \exists r > 0$  tal que  $B(x; r) \subseteq E$  es cierto porque la hipótesis es falsa, por lo tanto  $\emptyset$  es abierto y  $\emptyset^c = \mathbb{R}$  es cerrado. Similarmente,  $x \in \emptyset \implies (U_r(x) \setminus \{x\}) \cap E \neq \emptyset \forall r > 0$ . Por lo tanto,  $\emptyset$  es cerrado y  $\emptyset^c = \mathbb{R}$  es abierto.

MEP

**Problem 2**

(12 puntos) – Para  $x, y \in \mathbb{R}$ , definamos:

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &:= (x - y)^2 \\ d_2(x, y) &:= \sqrt{|x - y|} \\ d_3(x, y) &:= |x - 2y| \\ d_4(x, y) &:= |x^2 - y^2| \end{aligned} \tag{1}$$

Determine cuáles de estos definen métricas en  $\mathbb{R}$ . Justifique completamente cada respuesta.

**Determinación:**

$d_1$  no define una métrica en  $\mathbb{R}$  porque falla la desigualdad triangular. Tome  $x = 1, y = 0, z = -1$  y note que  $d_1(1, -1) = 4 \not\leq 2 = 1 + 1 = d_1(1, 0) + d_1(0, -1)$ .

$d_2$  define una métrica en  $\mathbb{R}$ . Note que  $d_2(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$  con  $d$  siendo la métrica usual de  $\mathbb{R}$ . Ahora:

$$d_2(x, x) = \sqrt{d(x, x)} = \sqrt{0} = 0 \tag{2}$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{d(x, y)} = \sqrt{d(y, x)} = d_2(y, x) \tag{3}$$

$$d_2(x, z) = \sqrt{d(x, z)} \leq \sqrt{d(x, y)} + \sqrt{d(y, z)} = d_2(x, y) + d_2(y, z) \tag{4}$$

$d_3$  no define una métrica en  $\mathbb{R}$  porque falla la propiedad de que  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ . Tome  $x = 2, y = 1$  y note que  $d_3(2, 1) = |2 - 2| = 0$

$d_4$  no define una métrica en  $\mathbb{R}$  porque falla la propiedad de que  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ . Tome  $x = 1, y = -1$  y note que  $d_4(1, -1) = |1^2 - (-1)^2| = |1 - 1| = 0$ .

### Problem 3

(5 puntos) – Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y definamos:

$$d^*(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad \forall x, y \in X \quad (5)$$

Pruebe que  $(X, d^*)$  es un espacio métrico, y que  $d^* : X \times X \rightarrow [0, 1)$ .

#### Prueba:

Note que como  $d$  es una métrica:

$$d^*(x, x) = \frac{d(x, x)}{1 + d(x, x)} = 0, \quad \forall x \in X \quad (6)$$

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = d^*(y, x), \quad \forall x, y \in X \quad (7)$$

$$\begin{aligned} d^*(x, z) &= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} \leq \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \\ &\leq \frac{d(x, y) + 2d(x, y)d(y, z) + d(x, z)}{1 + d(x, y) + d(x, y)d(y, z) + d(y, z) + d(y, z)d(x, y) + d(x, z)} \\ &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} = d^*(x, y) + d^*(y, z) \end{aligned} \quad (8)$$

Es claro que el dominio de  $d^*$  es  $X \times X$ . Como  $d^*$  es una métrica, su rango empieza limitado a  $[0, \infty)$ , pero ahora, note que  $\lim_{d(x, y) \rightarrow \infty} d^*(x, y) = 1$ .

$\therefore d^* : X \times X \rightarrow [0, 1)$ .

MEP

### Problem 4

(4 puntos c.u.) – Dado  $(X, d)$  espacio métrico, y  $E \subseteq X$ , definamos:

$$E^\circ := \{x \in E \mid x \text{ punto interior}\}, \quad E' := \{x \in X \mid x \text{ punto límite}\} \quad (9)$$

(a) Demuestre que  $E^\circ$  es abierto (no puede usar parte (d)).

**Prueba:**

Tome  $x \in E^\circ$ . Como  $x$  es un punto interior de  $E$ , sabemos que  $\exists r > 0$  tal que  $B(x; r) \subseteq E$ .

Suponga, por contradicción, que  $B(x; r) \cap (E^\circ)^c \neq \emptyset$ . Entonces,  $\exists y \in B(x; r)$  tal que  $y$  no es un punto interior de  $E$ . Esto implica que  $B(y, \rho) \not\subseteq E \quad \forall \rho > 0$ , pero como  $B(x; r) \subseteq E$ , también tenemos que  $B(y, \rho) \not\subseteq B(x; r) \quad \forall \rho > 0$ . Esto quiere decir que encontramos un punto  $y \in B(x; r)$  tal que ninguna bola centrada en  $y$  está contenida en  $B(x; r)$ . Por lo tanto,  $B(x; r)$  no es abierto. ✖

Entonces:

$$\begin{aligned} B(x; r) \cap (E^\circ)^c &= \emptyset \\ \implies B(x; r) &\subseteq E^\circ \end{aligned} \tag{10}$$

$\therefore E^\circ$  es abierto.

**MEP**

(b) Pruebe que  $E$  es abierto si y sólo si  $E^\circ = E$ .

**Prueba:**

( $\implies$ ) Suponga que  $E$  es abierto. Es claro que  $E^\circ \subseteq E$ . Ahora, tome  $x \in E$  y note que, como  $E$  es abierto,  $\exists r > 0$  tal que  $B(x; r) \subseteq E$ . Pero esto implica, por definición, que  $x \in E^\circ$ . Entonces  $E \subseteq E^\circ$ .

$\therefore E^\circ = E$

( $\impliedby$ ) Suponga que  $E^\circ = E$ . Por (a), sabemos que  $E^\circ$  es abierto, pero como  $E^\circ = E$ , tenemos que  $E$  es abierto.

**MEP**

(c) Si  $G$  es abierto y  $G \subseteq E$ , demuestre que  $G \subseteq E^\circ$ .

**Prueba:**

Tome  $x \in G$ , y note que como  $G$  es abierto,  $\exists r > 0$  tal que  $B(x; r) \subseteq G \subseteq E$ . Por transitividad, esto quiere decir que  $x$  es un punto interior de  $E$ . Entonces  $x \in E^\circ$ .

$\therefore G \subseteq E^\circ$

**MEP**

(d) Pruebe que  $(E^\circ)^c = \overline{E^c}$ .

**Prueba:**

Note que  $(E^\circ)^c = \{x \in X \mid x \text{ no es punto interior de } E\}$  y  $\overline{E^c} = E^c \cup (E^c)'$ .

Suponga que  $x \in (E^\circ)^c$ .

**Caso 1** —  $x \notin E$ :

$x \notin E \implies x \in E^c \implies x \in \overline{E^c}$ .

**Caso 2** –  $x \in E$ :

Como  $x$  no es un punto interior de  $E$ , sabemos que  $B(x; r) \not\subseteq E \quad \forall r > 0$ . Esto implica que  $B(x; r) \cap E^c \neq \emptyset \quad \forall r > 0$ . Pero  $x \notin E^c$ , así que lo podemos quitar de la bola sin quitar la intersección:  $B(x; r) \setminus \{x\} \cap E^c \neq \emptyset \quad \forall r > 0$ . Por lo tanto,  $x \in (E^c)' \implies x \in \overline{E^c}$ .

**MEP**

(e) Determine si  $E^\circ = (\overline{E})^\circ$ . Pruebe ó provea un contraejemplo.

**Prueba:****MEP**

(f) Determine si  $\overline{E} = \overline{E^\circ}$ . Pruebe ó provea un contraejemplo.

**Prueba:****MEP**

(g) Si  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  es convexo, demuestre que  $E^\circ$  y  $\overline{E}$  son convexos.

**Prueba:****MEP**

(h) Pruebe que  $E'$  es cerrado.

**Prueba:****MEP**

(i) Demuestre que  $\overline{E'} = E'$ .

**Prueba:****MEP**

(j) Determine si  $(E')' = E'$ . Pruebe ó provea un contraejemplo.

**Prueba:****MEP****Problem 5**

(4 puntos) – Demuestre que el intervalo  $(0, 1)$  no es compacto de forma directa, esto es, encuentre una cubierta abierta de  $(0, 1)$  que no posee una subcubierta finita.

**Prueba:**

Considere la familia  $A_n := (\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Note que  $A_i$  es abierto  $\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ .

Tome  $x \in (0, 1)$  y note que  $0 < x < 1$ . Entonces  $\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  tal que  $0 < \frac{1}{k} < x < 1 - \frac{1}{k} < 1$ , por lo tanto,  $x \in A_k \implies x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} A_n$ . Entonces:

$$(0, 1) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} A_n \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} A_n \text{ es una cubierta abierta para } (0, 1). \quad (11)$$

Sea  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  una subcolección finita arbitraria de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} A_n$

**MEP**

## Problem 6

(5 puntos) – Sean  $K_1, K_2, \dots, K_n$  subconjuntos compactos del espacio métrico  $(X, d)$ . Pruebe que:

$$K := \bigcup_{j=1}^n K_j \quad (12)$$

es compacto.

### Prueba:

Sea  $U$  una cubierta abierta para  $K$ . Entonces  $U$  cubre a  $\bigcup_{j=1}^n K_j$ , lo que implica que  $U$  cubre a  $K_i \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Pero, como  $K_i$  es compacto  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , existen subcubiertas abiertas finitas  $F_i \subseteq U$  tal que  $F_i$  cubre a  $K_i \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Ahora considere:

$$F := \bigcup_{j=1}^n F_j \quad (13)$$

Note que, por construcción,  $F$  es una cubierta abierta finita que cubre a  $K$ . Además,  $F_i \subseteq U \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , lo que implica que  $F \subseteq U$ . Como  $U$  era arbitrario, siempre podemos construir una subcubierta abierta finita de  $U$  que cubre a  $K$ .

$\therefore K$  es compacto.

**MEP**

## Problem 7

(4 puntos) – Dado que  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  con  $a < b$ , definamos el conjunto:  $S := \{x \in \mathbb{Q} \mid a < x < b\}$ . Demuestre que  $S \subseteq \mathbb{Q}$  es cerrado y acotado (en  $\mathbb{Q}$ ), pero no compacto (en  $\mathbb{Q}$ ).

### Prueba:

Por contradicción, suponga que  $S' \not\subseteq S$ , entonces  $S' \neq \emptyset \implies \exists x \in S' \setminus S$ . Sin pérdida de generalidad, suponga que  $x \geq b$ . Note que  $x \in \mathbb{Q}$  y  $b \notin \mathbb{Q} \implies x \neq b \implies x > b$ . Pero  $x \in S' \implies U_r(x) \setminus \{x\} \cap S \neq \emptyset \forall r \in (0, \infty)$ . Ahora, tome  $\rho = \frac{x-b}{2} \in (0, \infty)$  y construya  $U_\rho(x)$ . Note que:

$$y \in U_\rho(x) \implies y > x - \rho = x - \frac{|x-b|}{2} = \frac{2x - x + b}{2} = \frac{x+b}{2} \quad (14)$$

Como  $x > b, \exists \alpha \in (0, \infty)$  tal que  $x = b + \alpha$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
 y &> \frac{(b + \alpha) + b}{2} = \frac{2b + \alpha}{2} = \frac{2b}{2} + \frac{\alpha}{2} = b + \frac{\alpha}{2} > b \\
 \implies y \notin S &\implies U_\rho(x) \setminus \{x\} \cap S = \emptyset. \text{ ✖}
 \end{aligned} \tag{15}$$

$\therefore S' \subseteq S \implies S$  cerrado en  $\mathbb{Q}$ .

Tome  $p, q \in \mathbb{Q}$  tal que  $p < a$  y  $q > b$ .

$\therefore S$  está acotado por  $p$  y  $q$  en  $\mathbb{Q}$ .

Sea  $S_n := B\left(\frac{b-a}{2}; \frac{b-a}{n}\right) \subseteq \mathbb{Q}$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ . Tome  $x \in S$  y note que:  $a < x < b$   
 $\implies \exists k \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$  tal que  $a < \frac{b-a}{2} - \frac{b-a}{k} < x < \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{k} < b \implies x \in S_k \implies x \in \bigcup_{n=3}^{\infty} S_n$  es una cubierta abierta para  $S$ .

Tome una subcolección finita arbitraria  $F := \bigcup \{A_1, A_2, \dots, A_k\} \subseteq \bigcup_{n=3}^{\infty} S_n$ . Sea  $\alpha = \frac{b-a}{j} \in F$  tal que  $|\alpha - a| = \min\{|x - a| \mid x \in F\}$ . Entonces  $a < \frac{b-a}{j} \implies \exists s \in S$  tal que  $a < s < \frac{b-a}{j}$ . Pero  $s \notin F$ . Por lo tanto  $S \not\subseteq F$ .

$\therefore S$  no es compacto en  $\mathbb{Q}$ .

**MEP**