MATE 5201: Tarea 1

Due on 6 de septiembre

Prof. Alejandro Vélez , C41, 6 de septiembre

Sergio Rodríguez

Problem 1

(5 puntos) – Demuestre que $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$ *es un número irracional, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Prueba:

Por contradicción, suponga que $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} \in \mathbb{Q}$. Entonces, $\exists a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} \tag{1}$$

Sin perder la generalidad, suponga que $\frac{a}{b}$ está en su forma más simple. Ahora:

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b} = \sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} \\
&\implies \frac{a^2}{b^2} = 2n + 2\sqrt{n+1}\sqrt{n-1} \\
&\implies a^2 = 2n \cdot b^2 + 2\sqrt{n+1}\sqrt{n-1} \cdot b^2 \\
&\implies a^2 - 2nb^2 = 2\sqrt{n+1}\sqrt{n-1} \cdot b^2 \\
&\implies a^4 - 4na^2b^2 + 4n^2b^4 = 4(n^2-1)b^4 = 4n^2b^4 - 4b^4 \\
&\implies a^4 - 4na^2b^2 = -4b^4 \\
&\implies a^4 = 4na^2b^2 - 4b^4 = 2(2na^2b^2 - 2b^4)
\end{aligned} \tag{2}$$

Como $(2na^2b^2 - 2b^4) \in \mathbb{Z}$, entonces $2 \mid a^4$, lo cual implica que $2 \mid a$ (porque 2 es primo). Además: $2 \mid a \implies 4 \mid a^4$.

Por otro lado, usando la ecuación 2:

$$a^4 = 4na^2b^2 - 4b^4 \implies a^4 + 4b^4 = 4na^2b^2 \implies 4b^4 = 4na^2b^2 - a^4 \tag{3}$$

Como $4 \mid a^2$, entonces $\exists c \in \mathbb{Z}$ tal que $a^2 = 4c$. Sustituyendo:

$$4b^4 = 16nb^2c - 16c^2 \implies b^4 = 4nb^2c - 4c^2 = 2(2nb^2c - 2c^2) \tag{4}$$

Como $(2nb^2c - 2c^2) \in \mathbb{Z}$, entonces $2 \mid b^4$, lo cual implica que $2 \mid b$ (porque 2 es primo). Entonces $2 \mid a$ y $2 \mid b$, por lo tanto, $\frac{a}{b}$ no está en su forma más simple. $\perp$

$\therefore \sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} \notin \mathbb{Q}$

MEP

Problem 2

(5 puntos) – Sean $A, B \subset \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ *dos conjuntos acotados superiormente, y sean* $\alpha := \sup(A)$, $\beta := \sup(B)$. *Sea* $C := \{xy \mid x \in A, y \in B\}$. *Pruebe que* C *está acotado superiormente, y que* $\sup(C) = \alpha\beta$.

Prueba:

Tome $c \in C$. Entonces $\exists a \in A$ y $b \in B$ tal que $c = ab$. Como $\alpha = \sup(A)$ y $\beta = \sup(B)$, entonces $\alpha \geq a$ y $\beta \geq b$. Como $a, b, \alpha, \beta \geq 0$, entonces $\alpha\beta \geq ab = c$. Por lo tanto, $\alpha\beta$ es una cota superior de

C, y C está acotado superiormente. Ahora, por contradicción, suponga que $\alpha\beta \neq \sup(C)$. Entonces $\exists s \in \mathbb{R}$ tal que $c \leq s < \alpha\beta \ \forall c \in C$. Note que:

$$s \geq c \forall c \in C \implies ab \forall a \in A, \forall b \in B \tag{5}$$

Esto implica que

Problem 3

(5 puntos) – Sea $P := \{p \text{ primo}\}$. Demuestre que P no está acotado superiormente.

Prueba:

Por contradicción, suponga que P está acotado superiormente, entonces, como $P \neq \emptyset \in \mathbb{R}$, por lo tanto, $\exists s \in \mathbb{R}$ tal que $s = \sup(P)$. Ahora tome

$$p' = \left(\prod_{p \in P}\right) + 1 \tag{6}$$

y note que p' no es divisible por algún $p \in P$. Esto quiere decir que p' es primo y por lo tanto, $p' \in P$. Pero $p' > s$ (pues $p > 1 \ \forall p \in P$), entonces $s \neq \sup(P)$. $\perp$

$\therefore P$ no está acotado superiormente.

MEP

Problem 4

(4 puntos) – Sea $S \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente, y sea k una cota superior para S. Si $k \in S$, pruebe que $k = \sup(S)$.

Prueba:

Por contradicción, suponga que $k \neq \sup(S)$. Entonces $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $s \leq x < k \ \forall s \in S$. Pero $k \in S$, por lo tanto, $k \leq x < k$. $\perp$

$\therefore k = \sup(S)$.

MEP

Problem 5

(3 puntos c.u.) – Sea $b > 1$ un número real fijo.

a) *Sean $m, p \in \mathbb{Z}, n, q \in \mathbb{N}$. Si $r = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, pruebe que $(b^m)^{\frac{1}{n}} = (b^p)^{\frac{1}{q}}$.*
Entonces definimos $b^r = (b^m)^{\frac{1}{n}}$.

Prueba:

Por contradicción, suponga que $(b^m)^{\frac{1}{n}} \neq (b^p)^{\frac{1}{1}}$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $(b^m)^{\frac{1}{n}} > (b^p)^{\frac{1}{q}}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
&(b^m)^{\frac{1}{n}} > (b^p)^{\frac{1}{q}} \\
&\Longrightarrow b^m > \left((b^p)^{\frac{1}{q}}\right)^n \\
&\Longrightarrow b^{mq} > \left(\left((b^p)^{\frac{1}{q}}\right)^n\right)^q \\
&\Longrightarrow b^{mq} > \left(\left((b^p)^{\frac{1}{q}}\right)^q\right)^n \\
&\Longrightarrow b^{mq} > (b^p)^n \\
&\Longrightarrow b^{mq} > b^{pn} \\
&\Longrightarrow mq > pn \\
&\Longrightarrow \frac{m}{n} > \frac{p}{q}
\end{aligned} \tag{7}$$

$\perp$

$\therefore$ b^r está bien definido.

MEP

b) *Demuestre que* $b^{r+s} = b^r b^s \ \forall r, s \in \mathbb{Q}$.

Prueba:

Si $r = \frac{m}{n}$ y $s = \frac{p}{q}$ para $m, p \in \mathbb{Z}$ y $n, q \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\begin{aligned}
b^{r+s} &= b^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} \\
&= b^{\frac{m}{n}} b^{\frac{p}{q}} \\
&= b^{\frac{mq+np}{nq}} \\
&= \left(b^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq+np} \\
&= \left(b^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq} \left(b^{\frac{1}{nq}}\right)^{np} \\
&= b^{\frac{m}{n}} b^{\frac{p}{q}} \\
&= b^r b^s
\end{aligned} \tag{8}$$

MEP

c) *Dado* $x \in \mathbb{R}$, *definimos* $K_x := \left\{ b^t \mid t \in \mathbb{Q}, t < x \right\}$. *Demuestre que si* $r \in \mathbb{Q}$, *entonces* $b^r = \sup(K_r)$. *Luego, definimos* $b^x = \sup(K_x)$.

Prueba:

d) *Pruebe que* $b^{x+y} = b^x b^y \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Prueba:

Considere el conjunto $K_x K_y = \left\{ \alpha\beta \mid \alpha \in K_x, \beta \in K_y \right\}$ y note que:

$$\sup\left(K_x K_y\right) = \sup(K_x) \sup\left(K_y\right) \tag{9}$$

por el resultado demostrado en clase. Además:

$$\begin{aligned} K_x K_y &= \{b^t b^s \mid t, s \in \mathbb{Q}, t < x, s < y\} \\ &= \{b^{t+s} \mid t, s \in \mathbb{Q}, t < x, s < y\} \\ &= \{b^{t+s} \mid t, s \in \mathbb{Q}, t + s < x + y\} \\ &= \{b^r \mid r \in \mathbb{Q}, r < x + y\} \\ &= K_{x+y} \end{aligned} \tag{10}$$

(todo racional se puede expresar como la suma de dos racionales).

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} b^{x+y} &= \sup(K_{x+y}) \\ &= \sup(K_x K_y) \\ &= \sup(K_x) \sup(K_y) \\ &= b^x b^y \end{aligned} \tag{11}$$

MEP

Problem 6

(4 puntos) – Si $x, y \in \mathbb{C}$, pruebe que $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Prueba:

$$\begin{aligned} |x-y|^2 &= (x-y)\overline{(x-y)} \\ &= (x-y)(\overline{x}-\overline{y}) \\ &= x\overline{x} - y\overline{x} - \overline{y}x + y\overline{y} \\ &= |x|^2 - y\overline{x} - \overline{y\overline{x}} + |y|^2 \\ &= |x|^2 - 2\Re(y\overline{x}) + |y|^2 \\ &\geq |x|^2 - 2|y\overline{x}| + |y|^2 \\ &= |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 \\ &= (|x| - |y|)^2 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow (|x| - |y|)^2 \leq |x-y|^2 \\ &\Longrightarrow ||x| - |y|| \leq |x-y| \end{aligned} \tag{13}$$

MEP

Problem 7

(5 puntos) – Sea $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| = 1$. Calcule el valor de $|1+z|^2 + |1-z|^2$. Justifique completamente su respuesta.

Cálculo:

$$
\begin{aligned}
|1+z|^2 + |1-z|^2 &= (1+z)\overline{(1+z)} + (1-z)\overline{(1-z)} \\
&= (1+z)(1+\overline{z}) + (1-z)(1-\overline{z}) \\
&= 1 + \overline{z} + z + z\overline{z} + 1 - \overline{z} - z - z\overline{z} \\
&= 2 + 2z\overline{z} = 2 + 2|z|^2 = 2 + 2(1)^2 = 4
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$\therefore |1+z|^2 + |1-z|^2 = 4$

MEP