MATE 5201: Tarea 3

Due on 7 de octubre

Prof. Alejandro Vélez , C41, 7 de octubre

Sergio Rodríguez

Problem 1

(5 puntos) – Demuestre que los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son abiertos y cerrados son $\emptyset$ y $\mathbb{R}$.

Prueba:

Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ abierto y cerrado. Sea $E^\circ := \{x \in E \mid \exists r > 0 \text{ tal que } B(x;r) \subseteq E\}$ y $E' := \{x \in \mathbb{R} \mid (U_r(x) \setminus \{x\}) \cap E \neq \emptyset\}$. Note que $E^\circ \subseteq E'$. Como E es abierto, $E = E^\circ$, y como E es cerrado, $E' \subseteq E = E^\circ$. Por lo tanto, $E^\circ = E'$, lo que implica que $E' \setminus E^\circ = \emptyset$.

Suponga, por contradicción, que $E \neq \emptyset \wedge E \neq \mathbb{R}$. Ahora fije un elemento arbitrario $x \in E$ y considere $F := \{d(x,y) \mid y \in E^\complement\} \subseteq \mathbb{R}$. Note que $E \neq \mathbb{R} \Longrightarrow E^\complement \neq \emptyset \Longrightarrow F \neq \emptyset$. Además, por la definición de la métrica, 0 es una cota inferior para F. Por lo tanto, por la propiedad de la cota inferior mínima, $\inf(F)$ existe en $\mathbb{R}$. Entonces existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $d(x, \alpha) = \inf(F)$ con $\left(U_\rho(\alpha) \setminus \{\alpha\}\right) \cap E \neq \emptyset \ \forall \rho > 0$ (porque $\inf(F) - \rho \notin F \ \forall \rho > 0 \Longrightarrow$ si $d(x,y) = \inf(F) - \rho$, entonces $y \notin E^\complement \Longrightarrow y \in E$). Además, $U_\rho(\alpha) \nsubseteq E$ (porque $\exists \varepsilon \in F$ tal que $\inf(F) < \varepsilon < \inf(F) + \rho \ \forall \rho > 0 \Longrightarrow \exists y \in E^\complement \text{ tal que } d(x,y) = \varepsilon$). Por lo tanto, $x \in E^\circ \setminus E' \Longrightarrow E^\circ \setminus E' \neq \emptyset$. ※

Por lo tanto, $E = \emptyset \vee E = \mathbb{R}$. Ahora, note que $x \in \emptyset \Longrightarrow \exists r > 0 \text{ tal que } B(x;r) \subseteq E$ es cierto porque la hipótesis es falsa, por lo tanto $\emptyset$ es abierto y $\emptyset^\complement = \mathbb{R}$ es cerrado. Similarmente, $x \in \emptyset \Longrightarrow (U_r(x) \setminus \{x\}) \cap E \neq \emptyset \ \forall r > 0$. Por lo tanto, $\emptyset$ es cerrado y $\emptyset^\complement = \mathbb{R}$ es abierto.

MEP

Problem 2

(12 puntos) – Para $x, y \in \mathbb{R}$, definamos:

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &:= (x-y)^2 \\ d_2(x,y) &:= \sqrt{|x-y|} \\ d_3(x,y) &:= |x-2y| \\ d_4(x,y) &:= \left|x^2 - y^2\right| \end{aligned} \tag{1}$$

Determine cuáles de estos definen métricas en $\mathbb{R}$. Justifique completamente cada respuesta.

Determinación:

d_1 no define una métrica en $\mathbb{R}$ porque falla la desigualdad triangular. Tome $x = 1, y = 0, z = -1$ y note que $d_1(1,-1) = 4 \nleq 2 = 1 + 1 = d_1(1,0) + d_1(0,-1)$.

d_2 define una métrica en $\mathbb{R}$. Note que $d_2(x,y) = \sqrt{d(x,y)}$ con d siendo la métrica usual de $\mathbb{R}$. Ahora:

$$d_2(x,x) = \sqrt{d(x,x)} = \sqrt{0} = 0 \tag{2}$$

$$d_2(x,y) = \sqrt{d(x,y)} = \sqrt{d(y,x)} = d_2(y,x) \tag{3}$$

$$d_2(x,z) = \sqrt{d(x,z)} \leq \sqrt{d(x,y)} + \sqrt{d(y,z)} = d_2(x,y) + d_2(y,z) \tag{4}$$

d_3 no define una métrica en $\mathbb{R}$ porque falla la propiedad de que $d(x, y) = 0 \iff x = y$. Tome $x = 2, y = 1$ y note que $d_3(2, 1) = |2 - 2| = 0$

d_4 no define una métrica en $\mathbb{R}$ porque falla la propiedad de que $d(x, y) = 0 \iff x = y$. Tome $x = 1, y = -1$ y note que $d_4(1, -1) = \left|1^2 - (-1)^2\right| = |1 - 1| = 0$.

Problem 3

(5 puntos) – Sea (X, d) un espacio métrico, y definamos:

$$d^*(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \ \forall x, y \in X \tag{5}$$

Pruebe que (X, d^*) es un espacio métrico, y que $d^* : X \times X \to [0, 1)$.

Prueba:

Note que como d es una métrica:

$$d^*(x, x) = \frac{d(x, x)}{1 + d(x, x)} = 0, \ \forall x \in X \tag{6}$$

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = d^*(y, x), \ \forall x, y \in X \tag{7}$$

$$\begin{aligned} d^*(x, z) = \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} &\leq \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \\ &\leq \frac{d(x, y) + 2d(x, y)d(y, z) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(x, y)d(y, z) + d(y, z)} \\ &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} = d^*(x, y) + d^*(y, z) \end{aligned} \tag{8}$$

Es claro que el dominio de d^* es $X \times X$. Como d^* es una métrica, su rango empieza limitado a $[0, \infty)$, pero ahora, note que $\lim_{d(x,y) \to \infty} d^*(x, y) = 1$.

$\therefore d^* : X \times X \to [0, 1)$.

MEP

Problem 4

(4 puntos c.u.) – Dado (X, d) espacio métrico, y $E \subseteq X$, definamos:

$$E^\circ := \{x \in E \mid x \text{ punto interior}\}, \ E' := \{x \in X \mid x \text{ punto límite}\} \tag{9}$$

(a) Demuestre que E° es abierto (no puede usar parte (d)).

Prueba:

Tome $x \in E^\circ$. Como x es un punto interior de E, sabemos que $\exists r > 0$ tal que $B(x;r) \subseteq E$. Suponga, por contradicción, que $B(x;r) \cap (E^\circ)^\complement \neq \emptyset$. Entonces, $\exists y \in B(x;r)$ tal que y no es un punto interior de E. Esto implica que $B(y,\rho) \nsubseteq E \quad \forall \rho > 0$, pero como $B(x;r) \subseteq E$, también tenemos que $B(y,\rho) \nsubseteq B(x;r) \quad \forall \rho > 0$. Esto quiere decir que encontramos un punto $y \in B(x;r)$ tal que ninguna bola centrada en y está contenida en $B(x;r)$. Por lo tanto, $B(x;r)$ no es abierto. ※

Entonces:

$$\begin{aligned} & B(x;r) \cap (E^\circ)^\complement = \emptyset \\ \implies & B(x;r) \subseteq E^\circ \end{aligned} \tag{10}$$

$\therefore$ E° es abierto.

MEP

(b) Pruebe que E es abierto si y sólo si $E^\circ = E$.

Prueba:

($\Longrightarrow$) Suponga que E es abierto. Es claro que $E^\circ \subseteq E$. Ahora, tome $x \in E$ y note que, como E es abierto, $\exists r > 0$ tal que $B(x;r) \in E$. Pero esto implica, por definición, que $x \in E^\circ$. Entonces $E \subseteq E^\circ$.

$\therefore E^\circ = E$

($\Longleftarrow$) Suponga que $E^\circ = E$. Por (a), sabemos que E° es abierto, pero como $E^\circ = E$, tenemos que E es abierto.

MEP

(c) Si G es abierto y $G \subseteq E$, demuestre que $G \subseteq E^\circ$.

Prueba:

Tome $x \in G$, y note que como G es abierto, $\exists r > 0$ tal que $B(x;r) \subseteq G \subseteq E$. Por transitividad, esto quiere decir que x es un punto interior de E. Entonces $x \in E^\circ$.

$\therefore G \subseteq E^\circ$

MEP

(d) Pruebe que $(E^\circ)^\complement = \overline{E^\complement}$.

Prueba:

Note que $(E^\circ)^\complement = \{x \in X \mid x \text{ no es punto interior de } E\}$ y $\overline{E^\complement} = E^\complement \cup (E^\complement)'$.

Suponga que $x \in (E^\circ)^\complement$.

Caso 1 — $x \notin E$:
$x \notin E \implies x \in E^\complement \implies x \in \overline{E^\complement}$.

Caso 2 — $x \in E$:
Como x no es un punto interior de E, sabemos que $B(x;r) \nsubseteq E \quad \forall r > 0$. Esto implica que $B(x;r) \cap E^{\complement} \neq \emptyset \quad \forall r > 0$. Pero $x \notin E^{\complement}$, así que lo podemos quitar de la bola sin quitar la intersección: $B(x;r) \setminus \{x\} \cap E^{\complement} \neq \emptyset \quad \forall r > 0$. Por lo tanto, $x \in \left(E^{\complement}\right)' \implies x \in \overline{E^{\complement}}$.

MEP

(e) Determine si $E^\circ = \left(\overline{E}\right)^\circ$. Pruebe ó provea un contraejemplo.

Prueba:

Tome $x \in E^\circ$, entonces $\exists r > 0$ tal que $B(x;r) \subseteq E \implies B(x;r) \subseteq E \cup E' = \overline{E} \implies x \in \left(\overline{E}\right)^\circ$
$\therefore E^\circ \subseteq \left(\overline{E}\right)^\circ$.

Tome $x \in \left(\overline{E}\right)^\circ \implies \exists r > 0$ tal que $B(x;r) \subseteq \overline{E} = E \cup E' = E \sqcup E' \setminus E$. Note que, como esta unión es disjunta, si probamos que $y \in B(x;r) \land y \notin E'$, entonces $B(x;r) \subseteq E$. Ahora, sea $F \coloneqq \{d(x,z) \mid z \in B(x;r) \cap E\}$. Note que $F \subseteq \mathbb{R}$, $F \neq \emptyset$, y r es cota superior para F. Entonces, por la propiedad de la cota superior mínima $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \sup(F)$. Suponga, por contradicción, que $B(x;r) \cap E^{\complement} \neq \emptyset$, entonces $\exists y_0 \in B(x;r) \cap E^{\complement}$. Note que $\alpha \leq d(x,y_0) < r$, entonces, por la densidad de los reales, y la abiertitud de las bolas, $\exists y \in B(x;r) \cap E^{\complement}$ tal que $\alpha \leq d(x,y_0) < d(x,y) < r \implies \alpha < d(x,y) < r$. Nuevamente, usando la densidad y la abiertitud, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\alpha < d(x,y) - \varepsilon < d(x,y) < d(x,y) + \varepsilon < r$. Entonces $B(y;\varepsilon) \subseteq B(x;r)$ y $B(y;\varepsilon) \setminus \{y\} \cap E = \emptyset$. Esto contradice que $B(x;r) \subseteq E \sqcup E' \setminus E$. ※

Entonces $B(x;r) \cap E^{\complement} = \emptyset$, lo que implica que $B(x;r) \cap E' \setminus E = \emptyset \implies B(x;r) \subseteq E \implies x \in E^\circ$.
$\therefore \left(\overline{E}\right)^\circ \subseteq E^\circ$

$\therefore \left(\overline{E}\right)^\circ = E^\circ$

MEP

(f) Determine si $\overline{E} = \overline{E^\circ}$. Pruebe ó provea un contraejemplo.

Prueba:

Tome $E = (0,1) \cup \{7\}$, entonces $E' = [0,1] \implies \overline{E} = [0,1] \cup \{7\}$. Note que $E^\circ = (0,1) \implies \overline{E^\circ} = [0,1]$. Por lo tanto, $\overline{E} \nsubseteq \overline{E^\circ} \implies \overline{E} \neq \overline{E^\circ}$.

MEP

(g) Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo, demuestre que E° y $\overline{E}$ son convexos.

Prueba:

Se deja como un ejercicio para el profesor ;)

(h) Pruebe que E' es cerrado.

Prueba:

Tome $x \in (E')^{\complement}$ y note que $\exists r > 0$ tal que $B(x;r) \setminus \{x\} \cap E = \emptyset$. Entonces $y \in B(x;r) \implies \exists \rho \in \mathbb{R}$ con $0 < \rho < r$ tal que $B(y;\rho) \subseteq B(x;r) \implies B(y,\rho) \setminus \{y\} \cap E \subseteq B(x;r) \setminus \{x\} \cap E = \emptyset$. Entonces $B(y;\rho) \setminus \{y\} \cap E = \emptyset \implies y \in (E')^{\complement}$. Por lo tanto, $B(x;r) \subseteq (E')^{\complement} \implies (E')^{\complement}$ abierto.

$\therefore E'$ cerrado.

MEP

(i) Demuestre que $\overline{E}' = E'$.

Prueba:

Tome $x \in \overline{E}'$ y note que:

$$
\begin{aligned}
& U_r(x) \setminus \{x\} \cap (E \cup E') \neq \emptyset \\
\implies & (U_r(x) \setminus \{x\} \cap E) \cup (U_r(x) \setminus \{x\} \cap E') \neq \emptyset \\
\implies & U_r(x) \setminus \{x\} \cap E \neq \emptyset \\
\implies & x \in E'
\end{aligned} \tag{11}
$$

$\therefore \overline{E}' \subseteq E'$

Tome $x \in E'$ y note que:

$$
\begin{aligned}
& U_r(x) \setminus \{x\} \cap E \neq \emptyset \\
\implies & U_r(x) \setminus \{x\} \cap (E \cup E') \neq \emptyset \\
\implies & U_r(x) \setminus \{x\} \cap \overline{E} \neq \emptyset \\
\implies & x \in \overline{E}'
\end{aligned} \tag{12}
$$

.

$\therefore E' \subseteq \overline{E}'$

$\therefore \overline{E}' = E'$

MEP

(j) Determine si $(E')' = E'$. Pruebe ó provea un contraejemplo.

Prueba:

Tome $x \in (E')'$ y note que:

$$\begin{aligned}
&U_r(x) \setminus \{x\} \cap E' \neq \emptyset \ \forall r > 0 \\
&\Longrightarrow \exists y \in U_r(x) \setminus \{x\} \text{ tal que } U_\varepsilon(y) \setminus \{y\} \cap E \neq \emptyset \ \forall \varepsilon > 0 \\
&\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } U_\varepsilon(y) \subseteq U_r(x) \\
&\Longrightarrow U_r(x) \setminus \{x\} \cap E \neq \emptyset \Longrightarrow x \in E'
\end{aligned} \tag{13}$$

$\therefore (E')' \subseteq E'$

Tome $x \in E'$ y note que:

$$\begin{aligned}
&U_r(x) \setminus \{x\} \cap E \neq \emptyset \ \forall r > 0 \\
&\Longrightarrow \exists y \in U_r(x) \setminus \{x\} \land \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } U_\varepsilon(y) \subseteq U_r(x) \setminus \{x\} \text{ (porque } U_r(x) \text{ es abierto)} \\
&\Longrightarrow U_\varepsilon(y) \setminus \{y\} \cap E \neq \emptyset \Longrightarrow y \in E' \\
&\Longrightarrow U_r(x) \setminus \{x\} \cap E' \neq \emptyset \Longrightarrow x \in (E')'
\end{aligned} \tag{14}$$

$\therefore E' \subseteq (E')'$

$\therefore (E')' = E'$

MEP

Problem 5

(4 puntos) – Demuestre que el intervalo $(0,1)$ no es compacto de forma directa, esto es, encuentre una cubierta abierta de $(0,1)$ que no posee una subcubierta finita.

Prueba:

Considere la familia $A_n := \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Note que A_i es abierto $\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Tome $x \in (0,1)$ y note que $0 < x < 1$. Entonces $\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tal que $0 < \frac{1}{k} < x < 1 - \frac{1}{k} < 1$, por lo tanto, $x \in A_k \Longrightarrow x \in \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$. Entonces:

$$(0,1) \subseteq \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \Longrightarrow \bigcup_{n=2}^{\infty} \text{es una cubierta abierta para } (0,1). \tag{15}$$

Sea $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ una subcolección finita arbitraria de $F := \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$. Ahora escoja $\frac{1}{m_0} = \min\left\{\frac{1}{m} \mid \left(\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}\right) \in F\right\}$, y note que $0 < \frac{1}{m_0}$. Entonces, $\exists \alpha \in (0,1)$ tal que $0 < \alpha < \frac{1}{m_0}$. Entonces $\alpha \notin F$.

$\therefore (0,1) \not\subseteq F \Longrightarrow (0,1)$ no es compacto.

MEP

Problem 6

(5 puntos) – Sean $K_1, K_2, ..., K_n$ subconjuntos compactos del espacio métrico (X, d). Pruebe que:

$$K := \bigcup_{j=1}^{n} K_j \tag{16}$$

es compacto.

Prueba:

Sea U una cubierta abierta para K. Entonces U cubre a $\bigcup_{j=1}^{n} K_j$, lo que implica que U cubre a $K_i \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. Pero, como K_i es compacto $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, existen subcubiertas abiertas finitas $F_i \subseteq U$ tal que F_i cubre a $K_i \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. Ahora considere:

$$F := \bigcup_{j=1}^{n} F_j \tag{17}$$

Note que, por construcción, F es una cubierta abierta finita que cubre a K. Además, $F_i \subseteq U$ $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, lo que implica que $F \subseteq U$. Como U era arbitrario, siempre podemos construir una subcubierta abierta finita de U que cubre a K.

$\therefore K$ es compacto.

MEP

Problem 7

(4 puntos) – Dado que $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con $a < b$, definamos el conjunto: $S := \{x \in \mathbb{Q} \mid a < x < b\}$. Demuestre que $S \subseteq \mathbb{Q}$ es cerrado y acotado (en $\mathbb{Q}$), pero no compacto (en $\mathbb{Q}$).

Prueba:

Por contradicción, suponga que $S' \nsubseteq S$, entonces $S' \neq \emptyset \Longrightarrow \exists x \in S' \setminus S$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $x \geq b$. Note que $x \in \mathbb{Q}$ y $b \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow x \neq b \Longrightarrow x > b$. Pero $x \in S' \Longrightarrow$ $U_r(x) \setminus \{x\} \cap S \neq \emptyset \ \forall r \in (0, \infty)$. Ahora, tome $\rho = \frac{x-b}{2} \in (0, \infty)$ y construya $U_\rho(x)$. Note que:

$$y \in U_\rho(x) \Longrightarrow y > x - \rho = x - \frac{|x-b|}{2} = \frac{2x - x + b}{2} = \frac{x+b}{2} \tag{18}$$

Como $x > b, \exists \alpha \in (0, \infty)$ tal que $x = b + \alpha$. Entonces:

$$\begin{aligned} y &> \frac{(b+\alpha)+b}{2} = \frac{2b+\alpha}{2} = \frac{2b}{2} + \frac{\alpha}{2} = b + \frac{\alpha}{2} > b \\ &\Longrightarrow y \notin S \Longrightarrow U_\rho(x) \setminus \{x\} \cap S = \emptyset. \text{※} \end{aligned} \tag{19}$$

$\therefore S' \subseteq S \Longrightarrow S$ cerrado en $\mathbb{Q}$.

Tome $p, q \in \mathbb{Q}$ tal que $p < a$ y $q > b$.
$\therefore S$ está acotado por p y q en $\mathbb{Q}$.

Sea $S_n := B\left(\frac{b-a}{2}; \frac{b-a}{n}\right) \subseteq \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. Tome $x \in S$ y note que: $a < x < b$ $\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ tal que $a < \frac{b-a}{2} - \frac{b-a}{k} < x < \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{k} < b \Longrightarrow x \in S_k \Longrightarrow x \in \bigcup_{n=3}^{\infty} S_n$ es una cubierta abierta para S.

Tome una subcolección finita arbitraria $F := \cup \{A_1, A_2, ..., A_k\} \subseteq \cup_{n=3}^{\infty} S_n$. Sea $\alpha = \frac{b-a}{j} \in F$ tal que $|\alpha - a| = \min\{|x - a| \mid x \in F\}$. Entonces $a < \frac{b-a}{j} \Longrightarrow \exists s \in S$ tal que $a < s < \frac{b-a}{j}$. Pero $s \notin F$. Por lo tanto $S \nsubseteq F$.

$\therefore S$ no es compacto en $\mathbb{Q}$.

MEP