MATE 5201: Tarea 3

Due on 7 de octubre

Prof. Alejandro Vélez , C41, 7 de octubre

Sergio Rodríguez

Problem 1

(5 puntos) – Demuestre que los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son abiertos y cerrados son $\emptyset$ y $\mathbb{R}$.

Prueba:

Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ abierto y cerrado. Sea $E^\circ := \{x \in E \mid \exists r > 0 \text{ tal que } B(x; r) \subseteq E\}$ y $E' := \{x \in \mathbb{R} \mid (U_r(x) \setminus \{x\}) \cap E \neq \emptyset\}$. Note que $E^\circ \subseteq E'$. Como E es abierto, $E = E^\circ$, y como E es cerrado, $E' \subseteq E = E^\circ$. Por lo tanto, $E^\circ = E'$, lo que implica que $E' \setminus E^\circ = \emptyset$.

Suponga, por contradicción, que $E \neq \emptyset \wedge E \neq \mathbb{R}$. Ahora fije un elemento arbitrario $x \in E$ y considere $F := \left\{d(x, y) \mid y \in E^{\complement}\right\} \subseteq \mathbb{R}$. Note que $E \neq \mathbb{R} \Longrightarrow E^{\complement} \neq \emptyset \Longrightarrow F \neq \emptyset$. Además, por la definición de la métrica, 0 es una cota inferior para F. Por lo tanto, por la propiedad de la cota inferior mínima, $\inf(F)$ existe en $\mathbb{R}$. Entonces existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $d(x, \alpha) = \inf(F)$ con $\left(U_\rho(\alpha) \setminus \{\alpha\}\right) \cap E \neq \emptyset\ \forall \rho > 0$ (porque $\inf(F) - \rho \notin F\ \forall \rho > 0 \Longrightarrow$ si $d(x, y) = \inf(F) - \rho$, entonces $y \notin E^{\complement} \Longrightarrow y \in E$). Además, $U_\rho(\alpha) \nsubseteq E$ (porque $\exists \varepsilon \in F$ tal que $\inf(F) < \varepsilon < \inf(F) + \rho\ \forall \rho > 0 \Longrightarrow \exists y \in E^{\complement} \text{ tal que } d(x, y) = \varepsilon$). Por lo tanto, $x \in E^\circ \setminus E' \Longrightarrow E^\circ \setminus E' \neq \emptyset$. ※

Por lo tanto, $E = \emptyset \vee E = \mathbb{R}$. Ahora, note que $x \in \emptyset \Longrightarrow \exists r > 0 \text{ tal que } B(x; r) \subseteq E$ es cierto porque la hipótesis es falsa, por lo tanto $\emptyset$ es abierto y $\emptyset^{\complement} = \mathbb{R}$ es cerrado. Similarmente, $x \in \emptyset \Longrightarrow (U_r(x) \setminus \{x\}) \cap E \neq \emptyset\ \forall r > 0$. Por lo tanto, $\emptyset$ es cerrado y $\emptyset^{\complement} = \mathbb{R}$ es abierto.

MEP

Problem 2

(12 puntos) – Para $x, y \in \mathbb{R}$, definamos:

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &:= (x - y)^2 \\ d_2(x, y) &:= \sqrt{|x - y|} \\ d_3(x, y) &:= |x - 2y| \\ d_4(x, y) &:= \left|x^2 - y^2\right| \end{aligned} \tag{1}$$

Determine cuáles de estos definen métricas en $\mathbb{R}$. Justifique completamente cada respuesta.

Determinación:

d_1 no define una métrica en $\mathbb{R}$ porque falla la desigualdad triangular. Tome $x = 1, y = 0, z = -1$ y note que $d_1(1, -1) = 4 \nleq 2 = 1 + 1 = d_1(1, 0) + d_1(0, -1)$.

d_2 define una métrica en $\mathbb{R}$. Note que $d_2(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$ con d siendo la métrica usual de $\mathbb{R}$. Ahora:

$$d_2(x, x) = \sqrt{d(x, x)} = \sqrt{0} = 0 \tag{2}$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{d(x, y)} = \sqrt{d(y, x)} = d_2(y, x) \tag{3}$$

$$d_2(x, z) = \sqrt{d(x, z)} \leq \sqrt{d(x, y)} + \sqrt{d(y, z)} = d_2(x, y) + d_2(y, z) \tag{4}$$

d_3 no define una métrica en $\mathbb{R}$ porque falla la propiedad de que $d(x,y)=0 \iff x=y$. Tome $x=2, y=1$ y note que $d_3(2,1)=|2-2|=0$

d_4 no define una métrica en $\mathbb{R}$ porque falla la propiedad de que $d(x,y)=0 \iff x=y$. Tome $x=1, y=-1$ y note que $d_4(1,-1)=\left|1^2-(-1)^2\right|=|1-1|=0$.

Problem 3

(5 puntos) – Sea (X,d) un espacio métrico, y definamos:

$$d^*(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)},\ \forall x,y \in X \tag{5}$$

Pruebe que (X,d^*) es un espacio métrico, y que $d^*: X\times X \to [0,1)$.

Prueba:

Note que como d es una métrica:

$$d^*(x,x) = \frac{d(x,x)}{1+d(x,x)} = 0,\ \forall x \in X \tag{6}$$

$$d^*(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d^*(y,x),\ \forall x,y \in X \tag{7}$$

$$\begin{aligned} d^*(x,z) = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} &\leq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\ &\leq \frac{d(x,y)+2d(x,y)d(y,z)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(x,y)d(y,z)+d(y,z)} \\ &= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = d^*(x,y)+d^*(y,z) \end{aligned} \tag{8}$$

Es claro que el dominio de d^* es $X\times X$. Como d^* es una métrica, su rango empieza limitado a $[0,\infty)$, pero ahora, note que $\lim_{d(x,y)\to\infty} d^*(x,y) = 1$.

$\therefore d^*: X\times X \to [0,1)$.

MEP

Problem 4

(4 puntos c.u.) – Dado (X,d) espacio métrico, y $E \subseteq X$, definamos:

$$E^\circ := \{x \in E \mid x \text{ punto interior}\},\ E' := \{x \in X \mid x \text{ punto límite}\} \tag{9}$$

(a) Demuestre que E° es abierto (no puede usar parte (d)).

Prueba:

Tome $x \in E^\circ$. Como x es un punto interior de E, sabemos que $\exists r > 0$ tal que $B(x;r) \subseteq E$. Suponga, por contradicción, que $B(x;r) \cap (E^\circ)^\complement \neq \emptyset$. Entonces, $\exists y \in B(x;r)$ tal que y no es un punto interior de E. Esto implica que $B(y,\rho) \nsubseteq E \quad \forall \rho > 0$, pero como $B(x;r) \subseteq E$, también tenemos que $B(y,\rho) \nsubseteq B(x;r) \quad \forall \rho > 0$. Esto quiere decir que encontramos un punto $y \in B(x;r)$ tal que ninguna bola centrada en y está contenida en $B(x;r)$. Por lo tanto, $B(x;r)$ no es abierto. ※

Entonces:

$$\begin{aligned} &B(x;r) \cap (E^\circ)^\complement = \emptyset \\ \Longrightarrow\ &B(x;r) \subseteq E^\circ \end{aligned} \tag{10}$$

$\therefore E^\circ$ es abierto.

MEP

(b) Pruebe que E es abierto si y sólo si $E^\circ = E$.

Prueba:

$(\Longrightarrow)$ Suponga que E es abierto. Es claro que $E^\circ \subseteq E$. Ahora, tome $x \in E$ y note que, como E es abierto, $\exists r > 0$ tal que $B(x;r) \in E$. Pero esto implica, por definición, que $x \in E^\circ$. Entonces $E \subseteq E^\circ$.

$\therefore E^\circ = E$

$(\Longleftarrow)$ Suponga que $E^\circ = E$. Por (a), sabemos que E° es abierto, pero como $E^\circ = E$, tenemos que E es abierto.

MEP

(c) Si G es abierto y $G \subseteq E$, demuestre que $G \subseteq E^\circ$.

Prueba:

Tome $x \in G$, y note que como G es abierto, $\exists r > 0$ tal que $B(x;r) \subseteq G \subseteq E$. Por transitividad, esto quiere decir que x es un punto interior de E. Entonces $x \in E^\circ$.

$\therefore G \subseteq E^\circ$

MEP

(d) Pruebe que $(E^\circ)^\complement = \overline{E^\complement}$.

Prueba:

Note que $(E^\circ)^\complement = \{x \in X \mid x \text{ no es punto interior de } E\}$ y $\overline{E^\complement} = E^\complement \cup (E^\complement)'$.

Suponga que $x \in (E^\circ)^\complement$.

Caso 1 — $x \notin E$:
$x \notin E \Longrightarrow x \in E^\complement \Longrightarrow x \in \overline{E^\complement}$.

Caso 2 — $x \in E$:
Como x no es un punto interior de E, sabemos que $B(x;r) \nsubseteq E \quad \forall r > 0$. Esto implica que $B(x;r) \cap E^{\complement} \neq \emptyset \quad \forall r > 0$. Pero $x \notin E^{\complement}$, así que lo podemos quitar de la bola sin quitar la intersección: $B(x;r) \setminus \{x\} \cap E^{\complement} \neq \emptyset \quad \forall r > 0$. Por lo tanto, $x \in \left(E^{\complement}\right)' \implies x \in \overline{E^{\complement}}$.

MEP

(e) Determine si $E^{\circ} = \left(\overline{E}\right)^{\circ}$. Pruebe ó provea un contraejemplo.

Prueba:

MEP

(f) Determine si $\overline{E} = \overline{E^{\circ}}$. Pruebe ó provea un contraejemplo.

Prueba:

MEP

(g) Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo, demuestre que E° y $\overline{E}$ son convexos.

Prueba:

MEP

(h) Pruebe que E' es cerrado.

Prueba:

MEP

(i) Demuestre que $\overline{E}' = E'$.

Prueba:

MEP

(j) Determine si $(E')' = E'$. Pruebe ó provea un contraejemplo.

Prueba:

MEP

Problem 5

(4 puntos) – Demuestre que el intervalo $(0,1)$ no es compacto de forma directa, esto es, encuentre una cubierta abierta de $(0,1)$ que no posee una subcubierta finita.

Prueba:

Considere la familia $A_n := \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Note que A_i es abierto $\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Tome $x \in (0,1)$ y note que $0 < x < 1$. Entonces $\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ tal que $0 < \frac{1}{k} < x < 1 - \frac{1}{k} < 1$, por lo tanto, $x \in A_k \Longrightarrow x \in \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$. Entonces:

$$(0,1) \subseteq \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \Longrightarrow \bigcup_{n=2}^{\infty} \text{es una cubierta abierta para } (0,1). \tag{11}$$

Sea $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ una subcolección finita arbitraria de $F \coloneqq \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$. Ahora escoja $\frac{1}{m_0} = \min\left\{\frac{1}{m} \mid \left(\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}\right) \in F\right\}$, y note que $0 < \frac{1}{m_0}$. Entonces, $\exists \alpha \in (0,1)$ tal que $0 < \alpha < \frac{1}{m_0}$. Entonces $\alpha \notin F$.

$\therefore (0,1) \nsubseteq F \Longrightarrow (0,1)$ no es compacto.

MEP

Problem 6

(5 puntos) – Sean $K_1, K_2, ..., K_n$ subconjuntos compactos del espacio métrico (X,d). Pruebe que:

$$K \coloneqq \bigcup_{j=1}^{n} K_j \tag{12}$$

es compacto.

Prueba:

Sea U una cubierta abierta para K. Entonces U cubre a $\bigcup_{j=1}^{n} K_j$, lo que implica que U cubre a $K_i \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. Pero, como K_i es compacto $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, existen subcubiertas abiertas finitas $F_i \subseteq U$ tal que F_i cubre a $K_i \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. Ahora considere:

$$F \coloneqq \bigcup_{j=1}^{n} F_j \tag{13}$$

Note que, por construcción, F es una cubierta abierta finita que cubre a K. Además, $F_i \subseteq U$ $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, lo que implica que $F \subseteq U$. Como U era arbitrario, siempre podemos construir una subcubierta abierta finita de U que cubre a K.

$\therefore K$ es compacto.

MEP

Problem 7

(4 puntos) – Dado que $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con $a < b$, definamos el conjunto: $S \coloneqq \{x \in \mathbb{Q} \mid a < x < b\}$. Demuestre que $S \subseteq \mathbb{Q}$ es cerrado y acotado (en $\mathbb{Q}$), pero no compacto (en $\mathbb{Q}$).

Prueba:

Por contradicción, suponga que $S' \nsubseteq S$, entonces $S' \neq \emptyset \Longrightarrow \exists x \in S' \setminus S$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $x \geq b$. Note que $x \in \mathbb{Q}$ y $b \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow x \neq b \Longrightarrow x > b$. Pero $x \in S' \Longrightarrow$ $U_r(x) \setminus \{x\} \cap S \neq \emptyset \ \forall r \in (0, \infty)$. Ahora, tome $\rho = \frac{x-b}{2} \in (0, \infty)$ y construya $U_\rho(x)$. Note que:

$$y \in U_\rho(x) \Longrightarrow y > x - \rho = x - \frac{|x-b|}{2} = \frac{2x - x + b}{2} = \frac{x+b}{2} \tag{14}$$

Como $x > b, \exists \alpha \in (0, \infty)$ tal que $x = b + \alpha$. Entonces:

$$\begin{aligned} y > \frac{(b+\alpha)+b}{2} = \frac{2b+\alpha}{2} = \frac{2b}{2} + \frac{\alpha}{2} = b + \frac{\alpha}{2} > b \\ \Longrightarrow y \notin S \Longrightarrow U_\rho(x) \setminus \{x\} \cap S = \emptyset. \text{※} \end{aligned} \tag{15}$$

$\therefore S' \subseteq S \Longrightarrow S$ cerrado en $\mathbb{Q}$.

Tome $p, q \in \mathbb{Q}$ tal que $p < a$ y $q > b$.
$\therefore S$ está acotado por p y q en $\mathbb{Q}$.

Sea $S_n \coloneqq B\left(\frac{b-a}{2}; \frac{b-a}{n}\right) \subseteq \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. Tome $x \in S$ y note que: $a < x < b$
$\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ tal que $a < \frac{b-a}{2} - \frac{b-a}{k} < x < \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{k} < b \Longrightarrow x \in S_k \Longrightarrow x \in \bigcup_{n=3}^{\infty} S_n$ es una cubierta abierta para S.

Tome una subcolección finita arbitraria $F \coloneqq \cup \{A_1, A_2, ..., A_k\} \subseteq \cup_{n=3}^{\infty} S_n$. Sea $\alpha = \frac{b-a}{j} \in F$ tal que $|\alpha - a| = \min\{|x-a| \mid x \in F\}$. Entonces $a < \frac{b-a}{j} \Longrightarrow \exists s \in S$ tal que $a < s < \frac{b-a}{j}$. Pero $s \notin F$. Por lo tanto $S \nsubseteq F$.

$\therefore S$ no es compacto en $\mathbb{Q}$.

MEP