MATE 5201: Tarea 2

Due on 20 de septiembre

Prof. Alejandro Vélez , C41, 20 de septiembre

Sergio Rodríguez

Resultado auxiliar:

Note que si A, B son conjuntos, y $f : A \to B$ es inyectiva, entonces podemos hacer a f biyectiva restringiendo su codominio: $f : A \to R_f$. Entonces: $\mu(A) = \mu(R_f)$. Entonces

$$\begin{aligned} & R_f \subseteq B \\ \Longrightarrow\ & \mu(R_f) \leq \mu(B) \\ \Longrightarrow\ & \mu(A) \leq \mu(B) \end{aligned} \tag{1}$$

Similarmente, si A, B son conjuntos, y $f : A \to B$ es sobreyectiva, entonces existe una función $g : B \to A$ inyectiva, pues usando el axioma de la elección puedes asignar a cada $b \in B$ un elemento de $f^{-1}(b)$. Ahora:

$$\mu(B) \leq \mu(A) \Longrightarrow \mu(A) \geq \mu(B) \tag{2}$$

Problem 1

(5 puntos) – Demuestre que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es contable, de forma explícita; esto es, construya una función biyectiva entre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$.

Prueba:

Sabemos que la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } 2 \mid n \\ \frac{1-n}{2} & \text{si } 2 \nmid n \end{cases} \tag{3}$$

es una biyección por la demostración hecha en clase.

Note que la inversa $f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n > 0 \\ 1 - 2n & \text{si } n \leq 0 \end{cases} \tag{4}$$

también es una biyección.

Ahora considere $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $g(m, n) = (f^{-1}(m), f^{-1}(n))$ y suponga, por contradicción, que g no es inyectiva, esto es: $\exists m, n, k, j \in \mathbb{Z}$ tal que $g(m, n) = g(k, j)$ y $(m, n) \neq (k, j)$. Ahora:

$$\begin{aligned} & g(m, n) = g(k, j) \\ \Longrightarrow\ & (f^{-1}(m), f^{-1}(n)) = (f^{-1}(k), f^{-1}(j)) \\ \Longrightarrow\ & f^{-1}(m) = f^{-1}(k) \ \text{ y } f^{-1}(n) = f^{-1}(j) \\ \Longrightarrow\ & m = k \ \text{ y } n = j \\ \Longrightarrow\ & (m, n) = (k, j). ※ \end{aligned} \tag{5}$$

Por lo tanto, g es inyectiva. Por otro lado: $m, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f^{-1}(m), f^{-1}(n) \in \mathbb{Z}$ existen (por sobreyectividad de f^{-1}). Note que $(f^{-1}(m), f^{-1}(n)) = g(m, n)$. Por lo tanto, g es sobreyectiva y una biyección.

Sabemos que la función $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $h(m,n) = 2^{m-1}(2n-1)$ es una biyección por la demostración hecha en clase. Entonces, sabemos que $h \circ g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ es una biyección, porque la composición de biyecciones es una biyección.

$\therefore$ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es contable.

MEP

Problem 2

(5 puntos) – Pruebe que el conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales es contable.

Prueba:

Sea $F : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ la biyección construida en el ejercicio anterior. Entonces:

$$F(m,n) = h(g(m,n)) = h((f^{-1}(m), f^{-1}(n))) = 2^{f^{-1}(m)-1}(2f^{-1}(n)-1)$$

$$\implies F(m,n) = \begin{cases} 2^{2m-1}(4n-1) & \text{si } m,\, n > 0 \\ 2^{2m-1}(1-4n) & \text{si } m > 0,\, n \le 0 \\ 2^{-2m}(4n-1) & \text{si } m \le 0,\, n > 0 \\ 2^{-2m}(1-4n) & \text{si } m,\, n \le 0 \end{cases} \tag{6}$$

Note que, dados $m, n \in \mathbb{Z}$, siempre podemos encontrar biyecciones $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ con $2 \nmid \psi(n)$ tal que $g(m,n) = 2^{\varphi(m)}\psi(n)$.

Considere la función $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ dada por $f\left(\frac{a}{b}\right) = F\left(\frac{a}{\gcd(a,b)}, \frac{b}{\gcd(a,b)}\right)$. Note que:

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{c}{d}\right) \\ \implies & F\left(\frac{a}{\gcd(a,b)}, \frac{b}{\gcd(a,b)}\right) = F\left(\frac{c}{\gcd(c,d)}, \frac{d}{\gcd(c,d)}\right) \\ \implies & 2^{\varphi\left(\frac{a}{\gcd(a,b)}\right)}\psi\left(\frac{b}{\gcd(a,b)}\right) = 2^{\varphi\left(\frac{c}{\gcd(c,d)}\right)}\psi\left(\frac{d}{\gcd(c,d)}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Sin pérdida de generalidad, suponga que $\varphi\left(\frac{a}{\gcd(a,b)}\right) \ge \varphi\left(\frac{c}{\gcd(c,d)}\right)$, entonces:

$$2^{\varphi\left(\frac{a}{\gcd(a,b)}\right) - \varphi\left(\frac{c}{\gcd(c,d)}\right)}\psi\left(\frac{b}{\gcd(a,b)}\right) = \psi\left(\frac{d}{\gcd(c,d)}\right) \tag{8}$$

Pero como $2 \nmid \psi\left(\frac{d}{\gcd(c,d)}\right)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} & \varphi\left(\frac{a}{\gcd(a,b)}\right) - \varphi\left(\frac{c}{\gcd(c,d)}\right) = 0 \\ \implies & \varphi\left(\frac{a}{\gcd(a,b)}\right) = \varphi\left(\frac{c}{\gcd(c,d)}\right) \implies \frac{a}{\gcd(a,b)} = \frac{c}{\gcd(c,d)} \text{ (1 a 1)} \end{aligned} \tag{9}$$

Sustituyendo en (6), tenemos:

$$\psi\left(\frac{b}{\gcd(a,b)}\right)=\psi\left(\frac{d}{\gcd(c,d)}\right)\Longrightarrow\frac{b}{\gcd(a,b)}=\frac{d}{\gcd(c,d)}\ (1\text{ a }1) \tag{10}$$

Multiplicando las ecuaciones (7) y (8), tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{ad}{\gcd(a,b)\gcd(c,d)} &= \frac{bc}{\gcd(a,b)\gcd(c,d)} \\ \Longrightarrow ad &= bc \\ \Longrightarrow \frac{a}{b} &= \frac{c}{d} \end{aligned} \tag{11}$$

Por lo tanto, f es inyectiva. Entonces, por el teorema de equivalencia demostrado en clase, $\mathbb{Q}$ es contable.

MEP

Problem 3

(5 puntos) – Sea A un conjunto incontable, y sea $B \subseteq A$ contable. Pruebe que $A \sim A \setminus B$.

Prueba:

Sea $C \subseteq A \setminus B$ contable. Como ambos B y C son contables, podemos hablar sobre una biyección $f : B \to C$.

Ahora, considere el mapa $\varphi : A \to A \setminus B$ dado por $\varphi(a) = \begin{cases} f(a) & \text{si } x \in B \\ a & \text{si } x \notin B \end{cases}$

Note que:

$$\varphi(a_1) = \varphi(a_2) \tag{12}$$

Caso $\varphi(a_1), \varphi(a_2) \in C$:

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow f(a_1) = f(a_2) \\ &\Longrightarrow a_1 = a_2 \end{aligned} \tag{13}$$

Caso $\varphi(a_1), \varphi(a_2) \notin C$:

$$\Longrightarrow a_1 = a_2 \tag{14}$$

Por lo tanto, φ es inyectiva.

Pero $A \setminus B \subseteq A \Longrightarrow \mu(A \setminus B) \leq \mu(A)$ y $\varphi : A \to A \setminus B$ inyectiva $\Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(A \setminus B)$. Por lo tanto, $\mu(A) = \mu(A \setminus B) \Longrightarrow A \sim A \setminus B$.

MEP

Problem 4

(5 puntos) – Un número $z \in \mathbb{C}$ es algebraico, si existen número $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k} = 0. \tag{15}$$

Si $S := \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ número algebraico}\}$, *demuestre que* S *es contable.*

Prueba:

Sea $\{p_n\}$ la secuencia de los números primos con $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$

Ahora considere el mapa $f : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{N}$ dado por

$$f(q) = \prod_{k=0}^{\deg(q)} p_{k+1}^{g(a_k)} \tag{16}$$

donde $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ es una biyección (sabemos que existe) y a_k es el coeficiente de x^k en q. Note que:

$$f(q_1) = f(q_2) \Longrightarrow \prod_{k=0}^{\deg(q_1)} p_{k+1}^{g\left(a_k^{(1)}\right)} = \prod_{k=0}^{\deg(q_2)} p_{k+1}^{g\left(a_k^{(2)}\right)} \tag{17}$$

Por el teorema fundamental de la aritmética, esto implica que $\deg(q_1) = \deg(q_2)$ y $g\left(a_k^{(1)}\right) = g\left(a_k^{(2)}\right)\ \forall k \in \{1, 2, \ldots, \deg(q_1)\}$. Pero como sabemos que g es biyectiva, entonces $a_k^{(1)} = a_k^{(2)}\ \forall k \in \{1, 2, \ldots, \deg(q_2)\}$, pero esto quiere decir que $q_1 = q_2$. Por lo tanto f es inyectiva. Por el teorema de equivalencia demostrado en clase, $\mathbb{Z}[x]$ es contable.

Considere $B_{p(x)} := \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) = 0\},\ p(x) \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}$. Note que, por el teorema fundamental del álgebra, $B_{p(x)}$ es finito $\forall p(x) \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}$. Por lo tanto,

$$U := \bigcup_{p(x) \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}} B_{p(x)} \tag{18}$$

es contable, pues es la unión contable de conjuntos finitos. Pero:

$$\begin{gathered} z \in U \Longrightarrow \exists p(x) \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\} \text{ tal que } p(z) = 0 \\ \Longrightarrow z \text{ es algebraico} \Longrightarrow z \in S \Longrightarrow U \subseteq S \end{gathered} \tag{19}$$

y

$$\begin{gathered} z \in S \Longrightarrow z \text{ es algebraico} \Longrightarrow \exists p(x) \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\} \text{ tal que } p(z) = 0 \\ \Longrightarrow z \in B_{p(x)} \Longrightarrow z \in U \Longrightarrow S \subseteq U \end{gathered} \tag{20}$$

$\therefore U = S$

$\therefore S$ es contable.

MEP

Problem 5

(5 puntos) – Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función, y definamos:*

$$A := \left\{a \in \mathbb{R} \mid \lim_{x \to a} f(x) \text{ existe, y } \lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)\right\}. \tag{21}$$

Pruebe que A es a lo más contable.

Prueba:

Si $A = \emptyset$, A es finito y terminamos.

Ahora, para cada $a \in A$, sabemos que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe. Por lo tanto, existe un intervalo $(\alpha, \beta)_a$ tal que $(\alpha, \beta)_a \cap A = \{a\}$. Ahora escoja estos α, β tal que cada intervalo sea disjunto. Ahora escoja un $q_a \in (\alpha, \beta)_a \cap \mathbb{Q}$ $\forall a \in A$. Entonces $B := \{q_i\} \subseteq \mathbb{Q}$ es a lo más contable.

Note que $f : A \to B$ dado por $f(a) = q_a$ es biyectiva por construcción.

$\therefore$ A es a lo más contable.

MEP

Problem 6

(10 puntos) – Demuestre que el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales es incontable, de la siguiente forma:

a) *(5 puntos) – Desmuestre que $\mathbb{R} \sim (0, 1)$.*

Prueba:

Considere el mapa $f : \mathbb{R} \to (0, 1)$ dado por $f(x) = 2^{-2^x}$. Note que:

$$f(x) = f(y) \implies 2^{-2^x} = 2^{-2^y} \implies -2^x = -2^y \implies 2^x = 2^y \implies x = y \tag{22}$$

por la unicidad de exponentes reales. Entonces f es inyectiva. Además:

$$x \in (0, 1) \implies \exists 2^x \in \mathbb{R} \implies \exists {-2^x} \in \mathbb{R} \implies \exists 2^{-2^x} \in \mathbb{R} \implies \exists f(x) \in \mathbb{R} \tag{23}$$

por la existencia de exponentes reales.

MEP

a) *(5 puntos) – Pruebe que $(0, 1)$ es incontable. Concluya entonces que $\mathbb{R}$ es incontable.*

Prueba:

Suponga, por contradicción, que $(0, 1)$ es contable, entonces sea $\{x_n\} = (0, 1)$. Note que cada x_i tiene una expansión decimal, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} & x_1 = 0.a_1^1 a_2^1 ... a_j^1 ... \\ & x_2 = 0.a_1^2 a_2^2 ... a_j^2 ... \\ & ... \\ & x_i = 0.a_1^i a_2^i ... a_j^i ... \\ & ... \end{aligned} \tag{24}$$

donde $x_i \neq 0.9999... \land x_i \neq 0.0000... \forall i \in \mathbb{N}$. Ahora construya $y \in (0, 1)$ como $y = 0.b_1 b_2 ... b_i ...$ donde $b_i \neq a_i^i$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Note que $y \notin \{x_n\} = (0, 1)$. ※

MEP

Problem 7

(5 puntos) – Sea $S := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ función } \mid D_f = \mathbb{R}\}$. *Demuestre que* $S \nsim \mathbb{R}$*; esto es, demuestre que no existe biyección de* S *a* $\mathbb{R}$.

Prueba:

Usando esto, considere el mapa $\varphi : S \to P(\mathbb{R}) \setminus \emptyset$ dado por $\varphi(f) = R_f$. Ahora, dado $A \in P(\mathbb{R}) \setminus \emptyset$, $a \in A$, podemos construir una función $f : \mathbb{R} \to A$ de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ a & \text{si } x \notin A \end{cases} \tag{25}$$

Note que $D_f = \mathbb{R}$ y $A \subseteq \mathbb{R}$, por lo tanto $f \in S$, entonces se cumple que $A = \varphi(f)$. Entonces φ es sobreyectiva. Entonces, $\mu(S) \geq \mu(P(\mathbb{R})) > \mu(\mathbb{R}) \Longrightarrow \mu(S) > \mu(\mathbb{R}) \Longrightarrow S \nsim \mathbb{R}$.

MEP