

MATE6551-0U1  
Prof. Ivan Cardona Torres  
13.00 - 14.20  
CNL-A-225

Topología Algebraica

Alec Zabel-Mena

Universidad de Puerto Rico, Recinto de Rio Piedras

25.08.2022

**Lectura 1: La Teorema de Puntos Fijos de Brouwer.**

Empezamos con declara notación Vamos a denotar las siguientes conjuntos:

**Definición.** Denotamos la  **$n$ -esfera** como el conjunto  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$  y la  **$n$ -bola** como el conjunto  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ , donde  $\|\cdot\|$  el la **norma** en  $\mathbb{R}^n$  que induca la topología usual de  $\mathbb{R}^n$ . Llamamos punto  $N = (0, \dots, 0, 1)$  de  $S^n$  el **polo norte** de  $s^n$  y el punto  $S = (0, \dots, -1)$  de  $S_n$  el **polo sur** de  $S^n$ . Definimos la **ecuador** de una  $n + 1$ -esfera  $S^{n+1}$  de ser la  $n$ -esfera  $S^n$ .

**Ejemplo 1.** (1)  $S^1$  es el circulo unitario en el plano  $\mathbb{R}^2$ , y  $S^2$  es el esfera unitario en el espacio  $\mathbb{R}^3$ .

(2) Nota que  $S^0 = \{-1, 1\}$  es la unica esfera no conexo en  $\mathbb{R}$ .

(3) Toda  $n$ -esfera tiene un polo norte y un polo sur. De hecho, el polo norte de  $S^0$  es 1 y el polo sur es  $-1$ .

(4) Nota que el borde de una  $n$ -bola es una  $n$ -esfera. Es decie  $\partial D^n = S^{n-1}$ .

**Definición.** Denotamos una  **$n$ -simplejo estándar** de  $\mathbb{R}^n$  de ser el conjunto  $\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0 \text{ y } \sum x_i = 1\}$ .

**Ejemplo 2.** (1)  $\Delta^0 = \{1\}\mathbb{R}$ .

(2)  $\Delta^1$  es una recta entre los puntos  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$  en  $\mathbb{R}^2$  restrinjido a la primera caudrante.

(3)  $\Delta^2$  es una tetrahedro en la primer octánate de  $\mathbb{R}$  con vertices en  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$ , y  $(1, 0, 0)$ . Se representa en la figura 1 también.

(4) Note que  $\Delta^0 \subseteq \Delta^1 \subseteq \Delta^2$ .

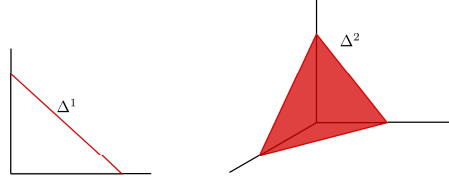


Figura 1: El 1-simplejo y 2-simplejo estándares.

- (5) Como espacios topológicos, se puede demostrar que los  $n$ -simplejos estándares son homeomorfo a los  $n$ -bolas. Es decir  $\Delta^n \simeq D^n$ .

**Definición.** Sea  $f : A \rightarrow A$  una función. Llamamos a un punto  $x \in A$  un **punto fijo** si  $f(x) = x$ .

**Teorema 1** (Teorema de Puntos Fijos de Brouwer). *Si  $f : D^n \rightarrow D^n$  es una función continua, entonces existe un punto fijo en  $D^n$  para toda  $n \geq 1$ .*

*demostración.* Demostramos la teorema para  $n = 1$ . Es decir, que toda función  $f : B^1 \rightarrow B^1$  tiene un punto fijo. Sean  $a = f(-1)$  y  $b = f(1)$ . Si  $a = -1$  o  $b = 1$ , tenemos puntos fijos y terminamos.

Ahora, considere la gráfica de  $f$ ,  $G_f = \{(x, f(x)) : x \in B^1\}$ , la diagonal de  $B^1$ ,  $\Delta(B^1) = \{(x, x) : x \in B^1\}$ , y los medio planos  $H_\Delta^+ = \{(x, y) : y > x\}$  y  $H_\Delta^- = \{(x, y) : y < x\}$ . Nota que  $\Delta(B^1)$  es la gráfica de la recta  $y = x$  restringido a  $B^1 \times B^1$ . Ahora, defina conjuntos

$$A = \{(x, f(x)) : f(x) > x\}$$

$$B = \{(x, f(x)) : f(x) < x\}$$

$$C = \{(x, f(x)) : f(x) = x\}$$

Entonces  $C$  es el conjunto de puntos fijos de  $f$ . Nota que  $A \subseteq H_\Delta^+$ ,  $B \subseteq H_\Delta^-$ , y  $C \subseteq \Delta(B^1)$ . También nota que los medio planos son abiertos en  $\mathbb{R}^2$ . Ahora, como  $B^1$  es compacto, y Hausdorff, se puede demostrar que  $G_f$  y  $\Delta(B^1)$  son cerrados. Se puede ver la gráfica de  $f$  en el figura 2

Ahora, not que  $G_f$  es conexo ya que es la imagen de la función  $i_{B^1} \times f$ . Como  $f$  y  $i_{B^1}$  son continua, entonces  $i_{B^1} \times f$  es continua. Entonces como  $B^1$  es conexo, entonces  $i_{B^1} \times f(B^1) = B^1 \times B^1$  es conexo. Ahora, nota que  $G_f = A \cup B \cup C$ . Suponga que  $C = \emptyset$ . Entonces  $G_f = A \cup B$ . Pero tenemos que  $A \subseteq H_\Delta^+$ , y  $B \subseteq H_\Delta^-$ , por lo tanto,  $A$  y  $B$  son conjuntos abiertos, y que  $A$  y  $B$  son disjuntos. Por lo tanto  $A \cup B$  es una separación abierta de  $G_f$ , una contradicción. Por lo tanto  $C \neq \emptyset$  y existe puntos fijos de  $f$  para  $n = 1$ . ■

Para  $n > 1$  no se ha encontrado una demostración general del teorema de puntos fijos. De hecho, es muy difícil para demostrar en general. Pero, se puede usar la maquinaria de la topología algebraica para construir un bosquejo de una demostración.

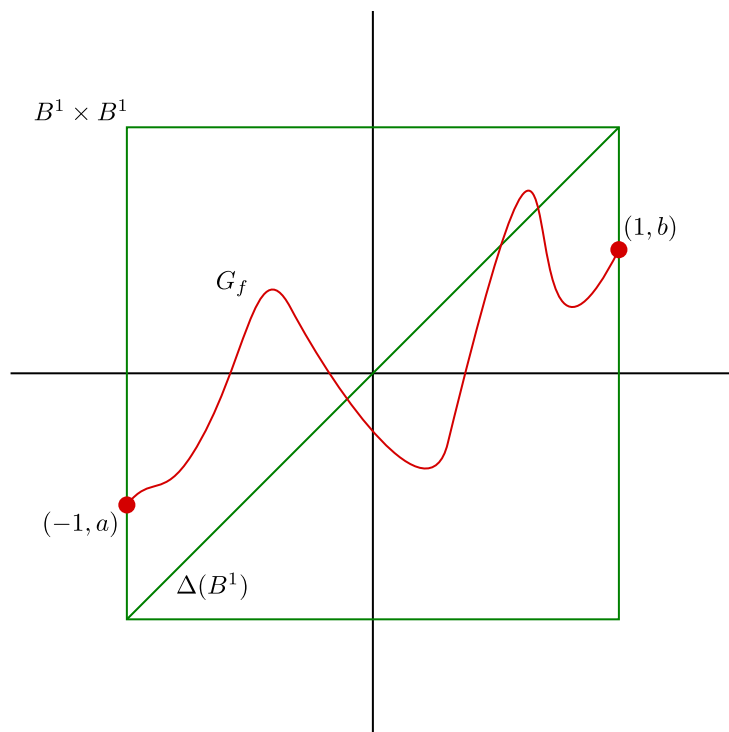


Figura 2: Demostración del teorema de puntos fijos de Brouwer.

## Lectura 2: Demostración General del Teorema de Puntos Fijos de Brouwer

**Definición.** Sea  $X$  un subespacio de un espacio topológico  $Y$ . Decimos que  $X$  es un **retracto** de  $Y$  si existe una mapa continua  $r : Y \rightarrow X$  donde  $r(x) = x$  para todo  $x \in X$ . Llamamos a  $r$  una **retracción** de  $Y$  sobre  $X$ .

Es decir que la retracción de  $Y$  sobre  $X$  lleva sus puntos fijos en todo el  $X$ . Podemos ver que  $r$  es una mapa sobre, ya que  $r(X) = X$  por definición.

Ahora recuerda que las mapas de inclusión y identidad para espacios topológicos son las mapas  $i : X \rightarrow Y$  (donde  $X$  es subespacio de  $Y$ ), y  $1_X : X \rightarrow X$  dado por  $i : x \rightarrow x$  y  $1_X : x \rightarrow x$  para todo  $x \in X$ . La definición del retracto entonces se puede ver en la siguiente

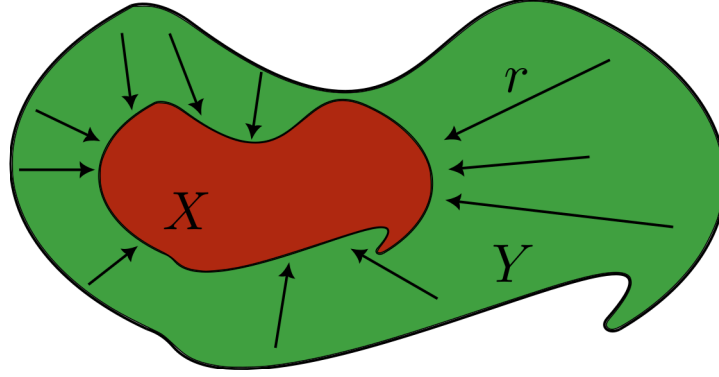
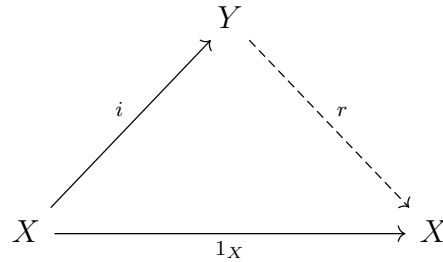


Figura 3: Un retracción  $r : Y \rightarrow X$  de un espacio  $Y$  hacia un espacio  $X$ .

diagrama, llamado una diagrama “commutativa”:



Entonces, según esta diagrama,  $r \circ i = 1_X$ .

Dado una diagrama commutativa en el “universo” de espacios topológicos, entonces queremos que las mapas sean mapas continuos. En este ejemplo, existe una “meta función” llamado un “functor”  $\mathcal{F}$  que lleva los espacios topológicos hacia grupos Abelianos, tal que las diagramas commutativos son preservados; es decir,  $\mathcal{F}$  lleva mapas continuos hacia homomorfismos.

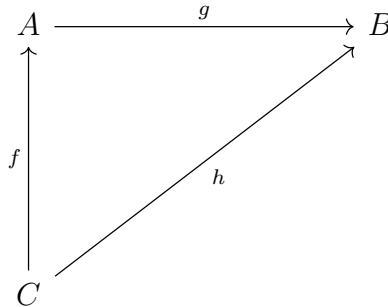
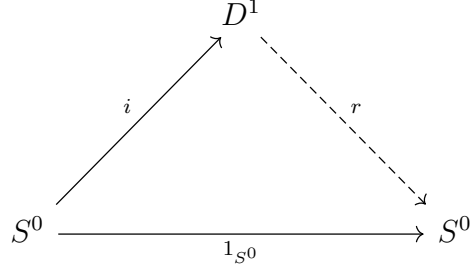


Figura 4: Una diagrama commutativa, donde  $A, B, C$  son conjuntos cualesquiera, y  $f, g$ , y  $h$  son funciones cualesquiera donde  $f \circ g = h$ .

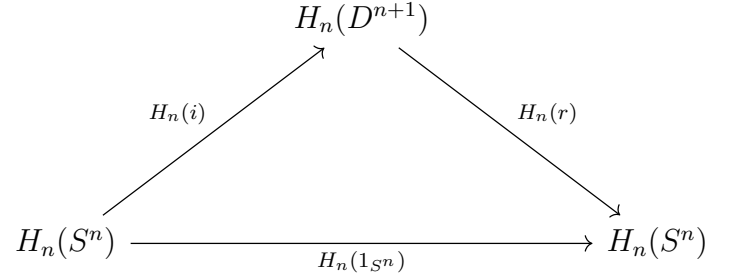
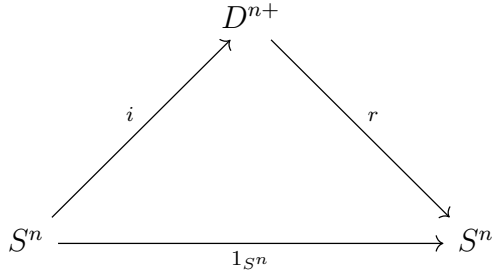
**Lema 2.** *Sí  $n \geq 0$ , entonces  $S^n$  no es un retracto de  $D^{n+1}$ .*

*demostración.* Para  $n = 0$ , es facil ver. Si  $r : D^1 \rightarrow S^0$  es un retracto, entonces la siguiente diagrama

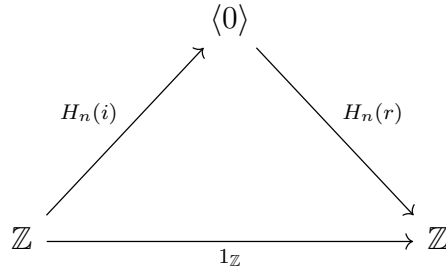


nos da  $r \circ i = 1_{S^0}$  lo cual es imposible, ya que  $S^0$  no es conéxo, y la imagen de  $D^1$  como subespacio de  $S^0$  si lo es; es decir que  $r(D^1) = \{1\}$ , ó  $r(D^1) = \{-1\}$ . Entonces  $r$  no puede ser 1-1 y sobre lo cual contradice que  $r \circ i = 1_{S^0}$  sea 1-1 y sobre.

Ahora, toma  $n > 0$ , entonces suponga que exista una retracción  $r : D^{n+1} \rightarrow S^n$ , con su diagrama de espacios topologicos y mapas continuas.



Entonces  $r \circ i = 1_{S^n}$ . Aplicando un functor particular llamado  $H_n$ , obteneos una diagrama commutativa de grupos Abelianos y homomorfismos. Las dos diagramas se pueden ver arriba. Entonces tenemos que  $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ , y  $H_n(D^{n+1}) = \langle 0 \rangle$ . Ahora tenemos que  $H_n(r) \circ H_n(i) = H_n(1_{S^n}) = 1_{\mathbb{Z}}$ . Esto es imposible ya que  $1_{\mathbb{Z}}$  no se facotriza sobre  $\langle 0 \rangle$ ; i.e.  $H_n(r) \circ H_n(i) = 0 \neq 1_{\mathbb{Z}}$ . Por lo tanto  $S^n$  no puede ser un retracto de  $D^{n+1}$ .



■

Ahora reiteremos la teorema de Brouwer para la demostración para  $n$  general.

**Teorema 3** (Teorema de Puntos Fijos de Brouwer). *Si  $f : D^n \rightarrow D^n$  es una función continua, entonces existe un punto fijo en  $D^n$  para toda  $n \geq 1$ .*

*demostración.* Para  $n > 1$ , suponga que no hay puntos fijos. Entonces sea  $f : D^n \rightarrow D^n$  y que  $f(x) \neq x$  para todo  $x \in D^n$ . Defina entonces, la mapa  $g : D^n \rightarrow S^{n-1}$  dado por la figura 5. Note que  $g$  es continua, y que  $g(x) = x$  para todo  $x \in S^{n-1}$ . Puse, vemos que  $g$  es una

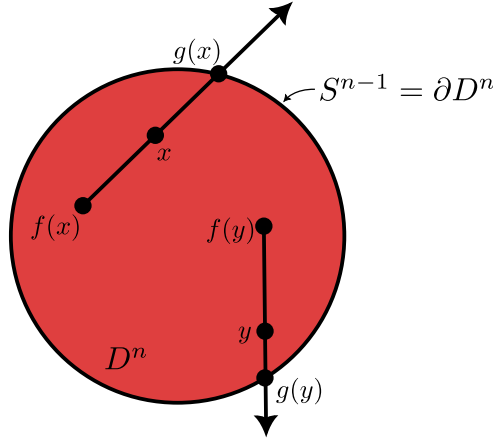


Figura 5

retracción, lo cual es imposible por el lema 2. Por lo tanto, no existen puntos fijos. ■

### Lectura 3: Categorías y Funtores.

**Definición.** Definimos una **clase** de ser una colección de objetos tal que si  $T$  y  $A$  son clases, entonces  $A \notin T$ .

**Definición.** Una **categoría**  $\mathcal{C}$  es un clase de objetos denotados por  $\text{obj } \mathcal{C}$  junto a una colección de conjuntos  $\text{Hom}(X, Y)$ , para cualesquiera  $X, Y \in \text{obj } \mathcal{C}$ , de **morfismos** de  $X$  hacia  $Y$ , cuyas elementos están denotados  $f : X \rightarrow Y$  ó  $X \xrightarrow{f} Y$ , y una operación binaria  $\circ : \text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$  llamado **composición** tal que si  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  son morfismos, entonces  $g \circ f : X \rightarrow Z$  es un morfismo y:

- (1)  $\text{Hom}(X, Y)$  y  $\text{Hom}(A, B)$  son disjuntas.
- (2) La composición  $\circ$  es asociativa si está definido. Es decir, si  $g \circ (f \circ h)$  ó  $(g \circ f) \circ h$  existen en  $\text{Hom}(X, Y)$ , entonces  $g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h$ .
- (3)  $\text{Hom}(X, X)$  no es vacío y existe al menos un morfismo  $1_X : X \rightarrow X$ , llamado la **identidad** de  $X$ , tal que  $1_X \circ f = f$  y  $g \circ 1_X = g$  para morfismos  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Z \rightarrow X$ , para cualesquiera objetos  $X, Y, Z \in \text{obj } \mathcal{C}$ .

**Definición.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Se llama el conjunto  $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$  los **morfismos de la categoría** donde  $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$  es la union de todos los conjuntos  $\text{Hom}(X, Y)$  para todos  $X, Y \in \text{obj } \mathcal{C}$ .

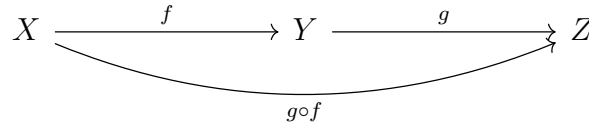


Figura 6: Un ejemplo de composición de morfismos de una categoría

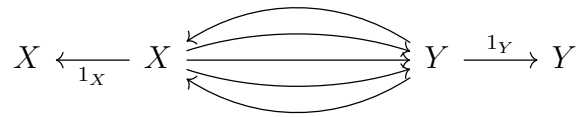


Figura 7: Morfismos entre dos objetos  $X$  y  $Y$  de una categoría incluyendo las identidades de  $X$  y  $Y$

**Ejemplo 3.** (1) Considere la categoría  $\mathcal{C} = \text{Conj}$ , donde  $\mathcal{C}$  es la clase de todo los conjuntos. Los morfismos de  $\mathcal{C}$  son funciones  $f : X \rightarrow Y$  de un conjunto  $X$  hacía un conjunto  $Y$ .

(2) Sea  $\mathcal{C} = \text{Top}$  la categoría de espacios topológicos, donde  $\text{obj } \mathcal{C}$  es la colección de todas las espacios topológicos. Los morfismos de  $\text{Top}$  son funciones continuas entre espacios topologicos. Es decir,  $\text{Hom}(X, Y) = \{f : f : X \rightarrow Y \text{ es continua}\}$ . La composición de morfismos es la composicion de funciones usual.

(3) Sea  $\mathcal{C} = \text{Grup}$  la categoría de grupos, cuyas objetos son todo los grupos. Entonces los morfismos de  $\text{Grup}$  estan definido por los conjuntos  $\text{Hom}(G, H) = \{\phi : \phi : G \rightarrow H \text{ es un homomrfismo}\}$ . La composición de morfismos es la composicion de funciones usual.

**Definición.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{A}$  categorías con  $\text{obj } \mathcal{C} \subseteq \text{obj } \mathcal{A}$ . Decimos que  $\mathcal{C}$  es una **subcategoría** de  $\mathcal{A}$  sí  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$  para todo  $X, Y \in \text{obj } \mathcal{C}$  ty la composición de  $\mathcal{C}$  es la misma de  $\mathcal{A}$ .

**Ejemplo 4.** (1) Tenemos que  $\text{Top}$  y  $\text{Grup}$  son subcategorías de  $\text{Conj}$ .

(2) La categoría  $\text{Top}^2$  de pares topologicos tiene como objetos son todas pares  $(X, A)$ , donde  $X$  es un espacio topológico y  $A \subseteq X$  es subespacio de  $X$ . Los morfismos de

$\text{Top}^2$ , para pares topológicos  $(X, Y)$  y  $(Y, B)$ , son las funciones continuas  $f : X \rightarrow Y$  donde  $f(A) \subseteq B$  es subespacio de  $B$ .

- (3) La categoría  $\text{Top}^*$  de pares topológicos  $(X, a)$ , donde  $a$  es un punto en  $X$  es una subcategoría de  $\mathbb{T}^2$ .

**Definición.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Una **diagrama** de objetos y morfismos en  $\mathcal{C}$  es un grafo dirigido cuyo conjunto de vértices es subconjunto de  $\text{obj } \mathcal{C}$  y cuyas aristas son morfismos entre esos vértices. Decimos que una diagrama es **commutativo** si para cualesquiera vértices  $A, B, C, D$  en la diagrama, y cualquier morfismos  $f : A \rightarrow B$ ,  $i : C \rightarrow D$ ,  $h : A \rightarrow C$ , y  $g : B \rightarrow D$ , tenemos que  $g \circ f = i \circ h$ .

**Ejemplo 5.** Las figuras 6 y 7 son ejemplos de diagramas de objetos y morfismos en una categoría.

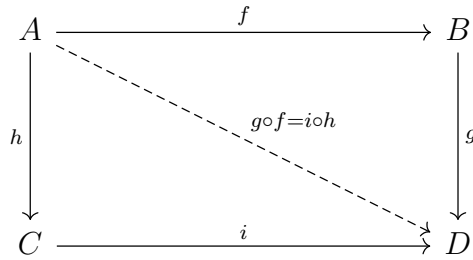


Figura 8: Un diagrama commutativa entre objetos y morfismos de una categoría.