MATE6201-0U1
Prof. Luis A. Medina
10.00 - 11.20
CNL-A-207

Algebra Moderna

Alec Zabel-Mena

Universidad de Puerto Rico, Recinto de Rio Piedras

12.10.2022

Lectura 1: Grupos y Subgrupos

Definición. Sea G un conjunto no vacío junto a una operación binaria $\cdot$. Decimos que el par $(G, \cdot)$ es un **grupo** si:

(1) $a \cdot b \in G$ para $a, b \in G$.

(2) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, para $a, b, c \in G$

(3) Existe un $e \in G$ tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$ para toda $a \in G$.

(4) Para toda $a \in G$, existe una $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Si $a \cdot b = b \cdot a$ para toda $a, b \in G$, entoces decimos que G es un grupo **Abeliano**.

Ejemplo 1. (1) Los naturales $\mathbb{N}$ junto a la multiplicación se satisface los primeros tres axiomas, pero no es un grupo. De hecho, $\mathbb{N}$ forma un estructura llamado un "monoide".

(2) El grupo mas pequeño es el conjunto $\{e\}$, que denotamos como $\langle e \rangle$. $\langle e \rangle$ es, trivialmente, un grupo Abeliano.

(3) Los enteros $\mathbb{Z}$ junto con adición $+$ forma un grupo Abeliano por la commutatividad de adición de los enteros.

(4) El conjunto $GL(n, \mathbb{R})$ de matrices $n \times n$ con entradas reales, nosingular forman un grupo con respecto a multiplicación de matrices. $GL(n, \mathbb{R})$ no es un grupo Abeliano.

(5) Sea S cualquier conjunto y $A(S)$ el conjunto de todas las funciónes 1–1 y sobre llevando elementos de S a elementos de S. Entonces $A(S)$ es un grupo no Abeliano con respecto a composición de funciónes, $\circ$. Si S tiene n elementos, entonces exscribimos $A(S) = S_n$. $A(S)$ también no se Abeliano ya que para funciónes cualquieras f, g, $f \circ g \neq g \circ f$.

Definición. Sea G un grupo. El **orden** de un grupo es su cardinalidad, y escribimos $\operatorname{ord} G = |G|$. Decimos que G es **finito** si $\operatorname{ord} G$ es finito; de lo contrario, G es **infinito**.

Definición. Sea G un grupo, y $a \in G$. El **orden** de a, denotado $\operatorname{ord} a$, es el menor entero positivo n tal que $a^n = e$ y escribimos $\operatorname{ord} a - n$. Si tal n no existe, entonces decimos que a es de orden **infinita**, y decimos que a es un elemento **torsión**.

Ejemplo 2. (1) Considera $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash 0$, entonces $\mathbb{C}^*$ tiene orden infinita, note que si $\alpha = \exp(\frac{2i\pi}{5}) \in \mathbb{C}^*$, entonces $\alpha \neq 1$, para $j \neq 1, 2, 3, 4$, pero $\alpha^5 = 1$. Entonces $\operatorname{ord} \alpha = 5$.

(2) Considere $A \in GL(6, \mathbb{R})$ con la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces, $A^3 = I$.

(3) En $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash 0$, $\mathbb{R}^*$ es infinito, y $\operatorname{ord} 2$ es infinito.

Definición. Sea G un grupo y $H \subseteq G$ no vacío. Entonces decimos que H es un **subgrupo** de G si H es un grupo bajo la misma opearación de G. Escribimos $H \leq G$.

Ejemplo 3. (1) Considere $GL(n, \mathbb{R})$ y sea $SL(n, \mathbb{R})$ los elementos $A \in GL(n, \mathbb{R})$ tales que $\det A = 1$. Entonces $SL(n, \mathbb{R}) \leq GL(n, \mathbb{R})$.

(2) Sea $C(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$. Entonces $C(\mathbb{R})$ es un grupo bajo la suma de funciónes $+$. Sea $C^1(\mathbb{R})$ el conjunto de funciónes primer diferenciables continuas sobre $\mathbb{R}$ Es decir, que f' existe y es continua. Observe lo siguiente:

(a) $(f+g)' = f' + g'$

(b) $f' + (g+h)' = (f+g)' + h'$.

(c) $c' = 0$, entonces $0 \in C^1(\mathbb{R})$

(d) $f' - f' = -f' + f' = 0$.

Suponiendo que $f', g', h' \in C^1(\mathbb{R})$, son continuas, entonces vemos que los funciones de arriba tambien son continuas. Entonces $C'(\mathbb{R}) \leq C(\mathbb{R})$.

Lema 1. *Sea G un grupo y $H \subseteq G$ no vacío. Si tenemos que $ab \in H$, implicat que $ab^{-1} \in H$, entonces $H \leq G$.*

Proof. Como $H \neq \emptyset$, sea $a \in H$. Entonces $aa^{-1} = e \in H$. Luego, tambien tenemos qie $ea^{-1} = a^{-1} \in H$. Finalmente, tenemos que si $b \in H$, entonces $ab^{-1} \in H$, por lo tanto $b^{-1} \in H$, entonces $a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$. ∎

Ejemplo 4. (1) Considere a los enteros pares $2\mathbb{Z}$. Sean $2n, 2m \in 2\mathbb{Z}$. Noten que $2n-2m = 2(n-m) \in 2\mathbb{Z}$. Entonces $2\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$.

(2) Si G es un grupo, entonces $\langle e \rangle$ y G son subgrupos de G. Llamamos a $\langle e \rangle$ el grupo **trivial**.

(3) Si G es un grupo, y $a \in G$, entonces el conjunto $\langle a \rangle = \{a^j : j \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo de G, llamado el **subgrupo generado por** a.

(4) Si G es un grupo, y $a \in G$, entonces $C(a) = \{g \in G : ag = ga\}$ y $Z(G) = \{g \in G : ag = ga \text{ para toda } a \in G\}$ son subgrupos. Nota que $Z(G) = \bigcap C(a)$. Llamamos a $C(a)$ el **cnetralizador** de a y $Z(G)$ el **centro** de G.

(5) Sea G un grupo y $H \leq G$, y sea $a \in G$, entonces $a^{-1}Ha \leq G$. Llamamos a $a^{-1}Ha$ el **conjugado** de H **con respecto** a a.

Definición. Suponga que G y H son grupos. Un mapa $\phi : G \to H$ se llama un **homomorphismo** si para toda $a, b \in G$, $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$. Si ϕ es $1-1$ y sobre, entonces lo llamamos un **isomorphismo**. Si ϕ es un isomorphismo, y $G = H$, entonces llamamos a ϕ un **automorphismo**.

Lectura 2: Grupos y Subgrupos

Ejemplo 5. (1) Considera $\mathbb{R}$ bajo la suma $+$ y $\mathbb{R}^+$ bajo la multiplicacón, $\cdot$. Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definido por $\phi : x \to \exp x$. Entonces ϕ es un homomorfismo, ya que

$\exp(x+y) = \exp x + \exp y$. De igual forma, nota que ϕ es $1-1$ y sobre, por lo tanto, existe inverso; de hecho, $\phi^{-1} = \log$, que tambien es un homomorfismo Pues, tenemos ϕ es un isomorphismo y que $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^+$.

(2) Sea $\phi : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ dado por $\phi : A \to \det A$. Entonces ϕ es un homomorphismo ya que $\det AB = \det A \det B$. Nota que $GL(n,\mathbb{R})$ no es Abeliano, pero $\mathbb{R}^*$ si, por lo tanto $GL(n\mathbb{R}) \not\simeq \mathbb{R}^*$. Esto también dice que no existe inverso $\det^{-1}$. Esto nos dice que los homomorfismos solo preservan el estructura de grupos, pero nada mas de eso.

(3) Considere $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dado por $\phi(m) = m \mod n$. Entonces $\phi(m+k) = (m+k) \mod n \equiv m \mod n + k \mod n = \phi(m) + \phi(k)$. Así que ϕ es un homomorfismo.

(4) Sea G y H grupos, y sea $\phi : G \to H$ un homomorfismo de G sobre H. Entonces si G es Abeliano, también lo es H. Nota que para $h, h' \in H$, exists $g, g' \in G$ con $\phi(g) = h$ y $\phi(g') = h'$. Entonces $hh' = \phi(g)\phi(g') = \phi(gg') = \phi(g'g) = \phi(g')\phi(g) = h'h$.

(5) Sea $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dado por $x \to 5x$. Entonces $\phi(x+y) = 5(x+y) = 5x+5y = \phi(x)+\phi(y)$.

(6) Suponga que G es Abeliano y defina $\phi : G \to G$ por la regla $\phi(a) = a^{-1}$. Entonces tenemos que $\phi(ab) = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1} = \phi(a)\phi(b)$. Así que ϕ es un homomorfismo. Nota también que por la ley de inversos de elementos, que ϕ es sobre. También tenemos que ϕ es $1-1$ ya que $a^{-1} = b^{-1}$ implica que $a = b$, por unicidad de inversos. Por lo tanto ϕ es un automorfismo.

(7) Sea $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dado por $x \to x^2$. ϕ no es un homomorfismo ya que en general, $(x+y)^2 \neq x^2 + y^2$. Peros, si tomamos la mapa $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dado por la misma regla, entonces ψ es un homomorfismo.

Definición. Sea G y H grupos, y $\phi : G \to H$ un homomorfismo de G hacia H. Definimos el **kernel** de ϕ como el conjunto $\ker\phi = \{a \in G : \phi(a) = e'\}$ donde e' es la identitad de H. Definimos también la **imagen** del homoorphismo como el conjunto $\Im\phi = \phi(G) = \{\phi(a) : a \in G\}$.

Lema 2. *Sea G y H grupos y $\phi : G \to H$ un homomorfismo de G hacia H. Entonces $\ker\phi \leq G$ y $\phi(G) \leq H$.*

Proof. Nota por definicion qiue $\ker\phi \subseteq G$. Tambien tenemos que $e \in \ker\phi$ por el ley de homomorpfismo. Entonces $\ker\phi$ no es vacio. Ahora, sea $a, b \in \ker\phi$. Entonces, tenemos $\phi(ab^{-1}) = \phi(a)\phi(b^{-1}) = \phi(a)(\phi(b))^{-1} = e'e' = e'$, pues $ab^{-1} \in \ker\phi$. ■

Ejemplo 6. (1) Considere $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ dado por $m \to m \mod 12$. Entonces $\ker\phi = \langle 12m \rangle = 12\mathbb{Z}$. Tambien $\phi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$; pues ϕ es sobre.

(2) Considere $\phi : \mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}}$ dado por $m \to 3m$. ϕ es un homomorfismo, y $\ker\phi = \{x \in \mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}} : 3x \equiv_{12} 0\} = \{0,4,8\} = \langle 4\rangle$. De igual manera, $\phi(\mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}}) = \{0,3,6,9\} = \langle 3\rangle$.

(3) Sea $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dado por $m \to 5m$. Entonces $\ker\phi = \langle 5m\rangle = \langle 0\rangle = 5\mathbb{Z}$. Nota que como ϕ es $1-1$, si $a \in 5\mathbb{Z}$, entonces $a = 5m \equiv_5 0$. Note tambien que $\phi(\mathbb{Z}) = 5\mathbb{Z}$, por lo tanto ϕ es sobre, asi que tenemos $\mathbb{Z} \simeq 5\mathbb{Z}$.

(4) Sea D_n el grupo dihedral sobre un polygano regular de n-vertices. Recuerda que $r^n = t^2 = e$ y que $tr^j = r^{n-j}t$. Considere la homomorfismo $\phi : D_8 \to \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$, donde $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ es un grupo bajo la suma de productos directos. Entonces si $\phi(r) = (1,0)$ y $\phi(t) = (0,1)$ entonces tenemos que $\ker\phi = \langle r^2\rangle$ y $\phi(D_8) = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$.

Lectura 3: Grupos Cíclicos, Clases Laterales, y La Teorema de Lagrange.

Definición. Sea G un grupo. Definimos un **grupo cíclico** de G **generado** por un elemento $a \in G$ de ser el subgrupo de G $\langle a\rangle = \{aj : j \in \mathbb{Z}\}$. Llamamos a a el **generador** del grupo. Si $G = \langle a\rangle$ para algun $a \in G$, entonces decimos que G es **cíclico**.

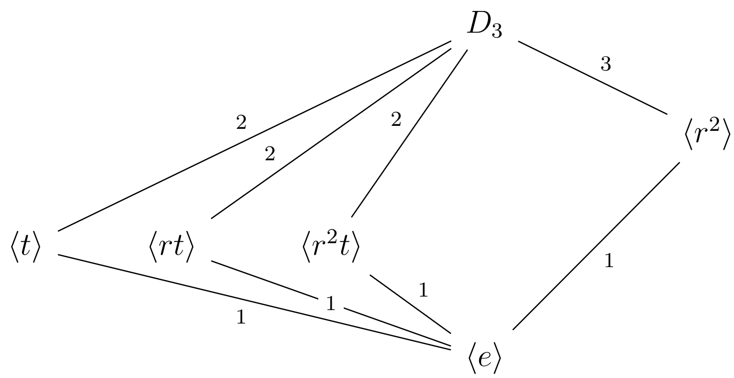
Ejemplo 7. (1) Considere el grupo $\langle A\rangle$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota que $A^4 = I$, entonces $\langle A\rangle = \{I, A, A^2, A^3\}$ es un subgrupo de orden $\operatorname{ord} A = 4$ del grupo $GL(4,\mathbb{R})$.

(2) Considere el grupo dihedral $D_3 = \{e, r, r^2, t, rt, r^t\}$ Los sobgrupos de D_3 son los sigu-

ientes en la reticulo de subgrupos sigueinte con los ordenes anotados:



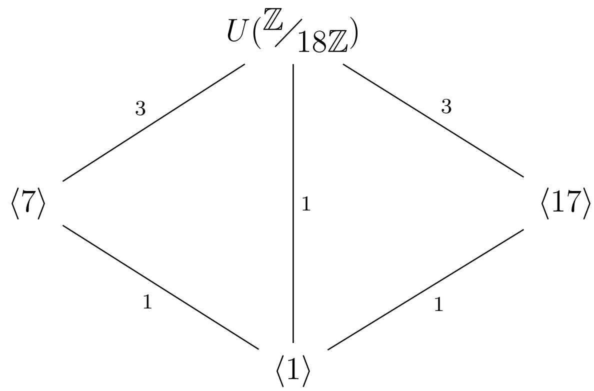
Teorema 3 (Teorema Fundamental de Grupos Cíclicos)**.** *Todo subgrupo de un grupo cíclico es cíclico. mas aún si $G = \langle a \rangle$ es un grupo cíclico de orden $G = n$, entonces G tiene un subgrupo de orden d por cada divisor d de n.*

Proof. Sea $G = \langle a \rangle$ y $H \leq G$. Observe qu si $H = \langle e \rangle$, entonces terminamos. Pues suponga que $H \neq \langle e \rangle$. Entonces existe un $h \in H$ con $h \neq e$. Es decir, que $h = a^j$ para alguna $j \in \mathbb{Z}$. Nota que si $j > 0$ entonces h es una potencia positiva de j; de igual manera, si $j < 0$ entonces $h^{-j} = (h^{-1})^j$ es una potencia psotiva de j. Es decir, H tiene potencias positivas. Por lo tanto, por el principio de buen orden, existe una potencia positiva mas peqeño, sea a^m. Sea $h \in H$, entonces $h = a^k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Entonces por la teorema de división, existe $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $k = qm + r$ y $0 \leq r < m$. Entonces $a^k = a^{qm+r} = a^{qm} a^r i = (a^m)^q a^r$. Como $a^k \in H$, y $a^m \in H$, es necesario tener $(a^m)^q a^r \in H$ para preservar que $H \leq G$. Entonces, si $a^r \neq e$, tenemos una potencia de a mas pequeño que a^m, lo cual no puede pasar. Es decir $a^r = e$, y $a^k = (a^m)^q$. Es decir todo elemento de h es una potencia del elemento a^m, por lo tanto $H = \langle a^m \rangle$ es cíclico.

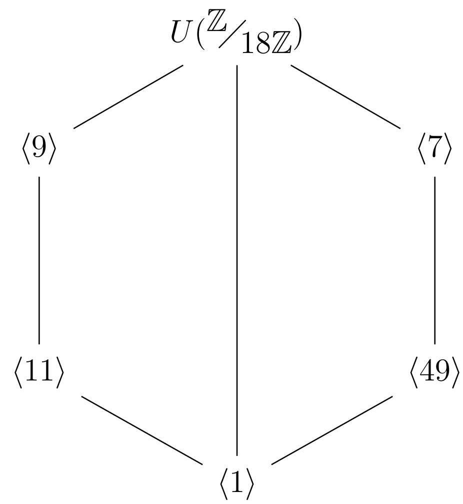
Ahora sea $\operatorname{ord} G = n$ y sea d un divisor positivo de n. Como $d | n$, entonces existe un $k \in \mathbb{Z}^+$ con $n = kd$. Ahora considere el subgrupo $\langle a^k \rangle$ Entonces sea $j \in \mathbb{Z}$ y considere $(a^k)^j$. Nota que $(a^k)^d = a^{kd} = a^n = e$, y si $0 < d < j$ entonces $(a^k)^j = a^{kj} \neq e$ por lo tanto $\operatorname{ord} a^k = d$, lo cual dice que $\operatorname{ord} \langle a^k \rangle = d$. ■

Ejemplo 8. (1) Sea $U(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}) = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$ el grupo de unidades dde $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$. Observe que $U(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}) = \langle 5 \rangle$, y que $\operatorname{ord} U(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}) = \operatorname{ord} \langle 5 \rangle = 6$. Entonces $U(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})$

tiene los siguientes subgrupos mostrado en la siguiente reticulo con ordenes anotados:



(2) El grupo de unidades de $\mathbb{Z}/50\mathbb{Z}$, $U(\mathbb{Z}/50\mathbb{Z}) = \langle 3 \rangle$ tiene el siguiente retículo de subgrupos:



Teorema 4 (Criterio de Igualdad de Potencias)**.** *Suponga que G es un grupo. Sea $a \in G$, y sea $i, j \in \mathbb{Z}$ tales que $a^i = a^j$. Si a es de orden infinito, entonces $i = j$; de igual manera, si $\operatorname{ord} a = n$, entonces $i \equiv j \mod n$.*

Corolario. *Sí $j \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\langle a^j \rangle = \langle a^{(j,n)} \rangle$, y $\operatorname{ord} a^j = \frac{n}{(j,n)}$, donde (j, n) es el maximo común divisor de j y n.*

Corolario. *Sí $G = \langle a \rangle$, y $\operatorname{ord} G = \operatorname{ord} \langle a \rangle = n$, entonces a^j es generador de G sí y solo sí $(j, n) = 1$. La cantidad de generadores de G está dado por $\phi(n)$ donde ϕ es la función Euler-ϕ.*

Ejemplo 9. Considere de nuevo $U(\mathbb{Z}/50\mathbb{Z}) = \langle 3 \rangle$. Tenemos que $\phi(50) = 20$, así que los generadores de $U(\mathbb{Z}/_{50\mathbb{Z}})$ son potencias 3^j donde $(j,n)=1$. Es decir, los generadores son:

$$3^1 \qquad 3^3 \qquad 3^7 \qquad 3^9 \qquad 3^{11} \qquad 3^{13} \qquad 3^{17} \qquad 3^{19}$$

Teorema 5. *Sea G un grupo cíclico. Entonces $G \simeq \mathbb{Z}$ ó $G \simeq \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$.*

Proof. Sea G un grupo cíclico. Suponga que G es infinito. Como los elementos de G son de la forma a^j para $j \in \mathbb{Z}$, considere el mapa $\phi : G \to \mathbb{Z}$ dado por $a^j \to j$. Entonces ϕ es un homomorfismo de G sobre $\mathbb{Z}$, ya que j corresponde a la potencia de uno de los infinito elementos de G. Mas aún, ϕ es 1–1, ya que $a^i = a^k$ implica que $i = k$. Es decir ϕ define un isomprfismo entre G y $\mathbb{Z}$.

De igaul forma, suponga que $\operatorname{ord} G = n$. Nota entonces que G tiene la forma $G = \{a^j : j \in \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\}$. Define entonces $\phi : G \to \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ dado por $a^j \to j \mod n$. ϕ es un homomorfismo de G sobre $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$, por definición. ϕ tambien es 1–1 ya que $a^i = a^j$ implica $i \equiv j \mod n$. Esto define un isomorfismo de G sobre $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$. ∎

Ejemplo 10. Considere $\mathbb{C}$ y sea $i \in \mathbb{C}$. Entonces $\langle i \rangle = \{1, i, -1, -i\}$ por multiplicación, así que $\operatorname{ord}\langle i \rangle = \operatorname{ord} i = 4$. Por la teorema anterior, esto hace $\langle i \rangle \simeq \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$.

Definición. Sea G un grupo y $H \leq G$. Sí $a \in G$ definimos la **clase lateral por la derecha** de H **generado** por a de ser el conjunto $Ha = \{ha : h \in H\}$. De igual forma, definimos la **clase lateral por la izquierda** de H **generado** por a de ser el conjunto $aH = \{ah : h \in H\}$.

Definición. Sea G un grupo y $H \leq G$. Defina la relación $\equiv$ sobre G de la siguiente forma: $a \equiv b$ sí y solo sí $ab^{-1} \in H$. Llamamos a $\equiv$ **congruencia modulo** H. Escribimos $a \equiv b \mod H$, ó simplements $a \equiv_H b$.

Lema 6. *Sea G un grupo y $H \leq G$. Entonces la relación de congruencia modulo H sobre G es una relación de equivalencia.*

Proof. Como $H \leq G$, tenemos que $e = aa^{-1} \in H$, así que $a \equiv a \mod H$. Ahora, suponga que $a \equiv b \mod H$, entonces $ab^{-1} \in H$. Entonces $(ab^{-1})^{-1} = ba^{-1} \in H$, por lo tanto $b \equiv a \mod H$. Finalmente, sea $a \equiv b \mod H$, y $b \equiv c \mod H$. Entonces $ab^{-1}, bc^{-1} \in H$, así que $(ab^{-1})(bc^{-1}) = a(bb^{-1})c^{-1} = ac^{-1} \in H$, así que $a \equiv c \mod H$. ∎

Corolario. *Los clases de equivalencia de $\equiv_H$ sobre G son precisamente los clases laterales por la izquierda aH.*

Proof. Exercise. ∎

Corolario. *Tenemos que* $\operatorname{ord} H = |aH|$.

Proof. Considere la mapa $f : H \to aH$ dado por la regla $h \to ah$. A todo $ah \in H$ podemos asignarlo a h, así que f lleva H sobre aH. De igual forma, si $ah = ah'$ para $h, h' \in H$, entonces por cancelación $h = h'$. Es decir f es 1–1. ∎

Corolario. *La cantidad de clases laterales por la izquierda de H en G es la misma que la del los clases laterales por la derecha de H en G.*

Proof. Considere la mapa $f : aH \to Ha$. ∎

Definición. Sea G un grupo y $H \leq G$. Definimos el **indice** de H en G, denotado por $[G : H]$, de ser la cantidad de clases laterales de H en G.

Teorema 7 (La Teorema de Lagrange)**.** *Sea G un grupo y $H \leq G$. Entonces tenemos*

$$\operatorname{ord} G = [G : H] \operatorname{ord} H$$

Proof. Sabemos que $G = \bigcup_{a \in H} aH$ es una unión disjunta. Como $aH \cap bH = \emptyset$ sí y solo sí $a \neq b$, entonces tenemos repeticiones. Ahora suponga que el conjunto de clases laterales de H en G está indexado por J. Entonces tenmos que

$$\operatorname{ord} G = \sum_{j \in J} |a_j H| = \sum_{j \in J} \operatorname{ord} H = |J| \operatorname{ord} H$$

Nota que $|J| = [G : H]$. ∎

Corolario. *Si G y H son finito, entonces el orden de H divide el orden de G. Mas aún, tenemos que* $\frac{\operatorname{ord} G}{\operatorname{ord} H} = [G : H]$

Lectura 4: Gurpos Cocientes

Definición. Dado un grupo G y un subgrupo H de G, definimos el **producto de clases laterales** de ser el producto $aHbH = abH$.

Definición. Sea G un grupo. Decimos que un subgrupo H de G es **noraml** si para cualquier $a \in G$, $aH = Ha$. Escribimos $H \trianglelefteq G$.

Lema 8. *Sea H un subgrupo normal de un grupo G. Entonces los siguientes son equivalentes para todo $a \in H$:*

(1) $aHa^{-1} \subseteq H$.

(2) $aHa^{-1} = H$.

(3) Para todo $a \in G$*, existe un* $b \in G$ *tal que* $aH = Hb$.

Proof. Sí $aHa^{-1} = H$, entonces $aHa^{-1} \subseteq H$. Por el otro lado, si $aHa^{-1} \subseteq H$, entonces para $h, h' \in H$, $aha^{-1} = h'$, así que $h' \in aHa^{-1}$, así que $H \subseteq aHa^{-1}$.

Ahora, si $aHa^{-1} = H$, entonces tenemos que $aH = Ha$ para todo $a \in H$, por el otro lado, suponga que $a, b \in H$ tal que $aH = Hb$. Entonces nota que $a \in Hb$ y $a \in Ha$, así que $Ha \cap Hb \neq \emptyset$. Como Ha y Hb son clases de equivalencias, esto forza a $a = b$. ■

Ejemplo 11. $SL(n\mathbb{R}) \trianglelefteq GL(n, \mathbb{R})$, nota que para cualquier $A \in SL(n, \mathbb{R})$ y $B \in GL(n, \mathbb{R})$ que $\det(BAB^{-1}) = (\det B)(1)(\det B^{-1}) = 1$.

Teorema 9. *Sí* G *es un grupo y* $H \trianglelefteq G$ *es subgrupo notmal de* G*, entonces las clases laterales de* H *en* G *forman un grupo bajo el producto de clases.*

Proof. Define la operación $(aH, bH) \to aHbH = \{ahbh' : h, h' \in H\} = abH$. Ya que aH y bH son clases de equivalencia, el producto es bien definida.

Ahora sea aH y bH, como $H \trianglelefteq G$, tenemos que $aHbH = abHH = abH$, así que abH es clase lateral de H en G; nota tambien que $aH(bHcH) = aH(bcH) = a(bc)H = abcH = (ab)cH = abHcH - (aHbH)cH$, así que el producto es associativa.

Ahora toma la identidad de H, $e \in H \trianglelefteq G$ y para cada $a \in G$, toma a^{-1}. Entonces tenemos que $aHeH = aeH = eaH = eHaH = H$ y que $eH = H$. De igual forma $aHa^{-1}H = aa^{-1}H = a^{-1}aH = a^{-1}HaH = H$. Así que H es la identidad,y $a^{-1}H$ la inversa de aH. ■

Definición. Sea G un grupo. Denotamos el conjunto de todos clases laterales de un subgrupo H en G como ${}^{G}\!/_{H}$. Sí H es un subgrupo normal, entonces ${}^{G}\!/_{H}$ forma un grupo llamado el **grupo cociente** de G sobre H.

Lema 10. *Sea* G *un grupo. Todo subgrupo de* G *es normal sí y solo sí* H *es el kernel de algún homomorfismo* ϕ *en* G*.*

Proof. Sea $H \trianglelefteq G$ Considere la mapa $\phi : G \to {}^{G}\!/_{H}$ tal que $\phi : a \to aH$. Entonces $\ker \phi = \{a \in G : aH = h\}$. Así que si $a \in \ker \phi$, tenemos $aH = H$, que nos dice que $a \in H$. Por otro lado, $a \in H$ implica $aH = H$, así que $a \in \ker \phi$. Es decir $H = \ker \phi$.

Por otro lado considere $\ker \phi$ para algún mapa en G Considere cualquier $a \in G$ y $h \in \ker \phi$. Entonces $\phi(a)\phi(h)\phi^{-1}(a) = \phi(a)e'\phi^{-1}(a) = \phi(a)\phi^{-1}(a) = e'$, donde e' es la identidad de G'. Entonces como a y h eran arbitraros, vemos que $\phi(a) \ker \phi\phi^{-1}(a) \subseteq \ker \phi$. Así que $\ker \phi \trianglelefteq G$. ■

Lema 11. *Sea G un grupo y $\phi : G \to G'$ un homomorfismo. Entonces tenemos que Si $H \trianglelefteq G$ y ϕ es sobre, entonces $\phi(H) \trianglelefteq G'$. Mas aún sí $H' \trianglelefteq G'$, entonces $\phi^{-1}(H') \trianglelefteq G$.*

Proof. Sea $\phi : G \to G'$ una mapa de G sobre G'. Suponga tambien que $H \trianglelefteq G$. Entonces tome $y \in G'$. Pues entonces existe un $x \in G$ tal que $y = \phi(x)$. Tambien existe un $h \in H$ con $\alpha = \phi(h)$. Entonces considere $y\alpha y^{-1} = \phi(x)\phi(h)\phi^{-1}(y) = \phi(xhx^{-1}) = \phi(h')$. Por lo tanto $y\alpha y^{-1} \in \phi(H)$ lo que hace $y\phi(H)y^{-1} \subseteq \phi(H)$. Así que $\phi(H)$ es normal en G'. Ahora considere $H' \trianglelefteq G'$, entonces para todo $a' \in G$ y $h' \in H'$, $a'h'a'^{-1} \in H$. Como ϕ es sobre, tenemos que existen $x \in G$ y $h \in H$ con $x = \phi(a')$ y $h = \phi(h)$, osea $x \in \phi^{-1}(G')$ y $h \in \phi^{-1}(H')$. Entonces $xhx^{-1} = \phi(a')\phi h\phi^{-1}(a') = \phi(a'ha'^{-1}) \in \phi^{-1}(H')$. Entonces $x\phi^{-1}(H')x^{-1} \subseteq \phi^{-1}(H')$, así que $\phi^{-1}(H') \trianglelefteq G$. ∎

Teorema 12 (Teorema del Factor)**.** *Suponga que G y G' son grupos y $H \trianglelefteq H$. Sea $\phi : G \to G'$ y $\pi : G \to {}^{G}\!/_{H}$ dado por $\pi : a \to aH$. Enotnces existe un uúnico $\tilde{\phi} : {}^{G}\!/_{H} \to G'$ tal que $\phi = \tilde{\phi} \circ \pi$.*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & G' \\ {}^{G}\!/_{H} \arrow[ur, dashed, "\tilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

Proof. Suponga primero que existe tal $\tilde{\phi}$. Sea $\overline{\phi} : {}^{G}\!/_{H} \to G'$ otro homomorfismo tal que $\phi = \overline{\phi} \circ \pi$. Entonces tenemos que $\tilde{\phi} \circ \pi(a) = \overline{\phi} \circ \pi(a)$. Es decir que $\tilde{\phi}(aH) = \overline{\phi}(aH) = \phi(a)$. Esto hace que $\tilde{\phi}({}^{G}\!/_{H}) = \overline{\phi}({}^{G}\!/_{H}) = \phi(G)$, así que tienen el misma imagen y misma relación. Así que $\tilde{\phi} = \overline{\phi}$.

Ahora define la mapa $\tilde{\phi} : {}^{G}\!/_{H} \to G'$ dado por $aH \to \phi(a)$. Sea entonce$_3$sb $\in aH$, así que $aH = bH$, entonces tenemos $a^{-1}b \in H = \ker\phi$. Entonces $\phi(a^{-1}b) = e'$, la identidad de G', entonces $\phi(a) = \phi(b)$. Pues $\tilde{\phi}$ esta bien definida. Por ultimo, note que $\tilde{\phi}(aH) = \tilde{\phi}(\pi(a)) = \tilde{\phi} \circ \pi(a)$. ∎

Corolario. *ϕ es sobre sý y solo sí $\tilde{\phi}$ es sobre, y ϕ es 1–1 sí y solo sí $\ker\phi = H$.*

Proof. Nota que como $\tilde{\phi}({}^{G}\!/_{H}) = \phi(G)$, entonces sí $\tilde{\phi}$ es sobre, entonces ϕ tiene que ser sobre. Por el otro lado, el mismo es cierto.

Ahora sí $\ker\phi = H$, como H es identidad del ${}^{G}\!/_{H}$, entonces ϕ es 1–1. Por el otro lado, sí ϕ es 1–1, entonces $\ker\phi = \langle e_{{}^{G}\!/_{H}} \rangle$, donde $e_{{}^{G}\!/_{H}}$ es la identidad de ${}^{G}\!/_{H}$; pero $e_{{}^{G}\!/_{H}} = H$. ∎

Lectura 5: Teoremas de Isomorfismo.

Teorema 13 (Primer Teorema del Isomorphismo)**.** *Sí $\phi : G \to H$ es un homomorfismo con kernel K, entonces*

$$\phi(G) \simeq {}^{H}\!/_{K}$$

Proof. Por el teorema del factor, sea $\tilde{\phi} : {}^{H}\!/_{K} \to H$. Entonces $\tilde{\phi}$ es un isomorfismo sí y solo sí ϕ es sobre. Nota que $\phi : G \to \phi(G)$ hace ϕ sobre. ■

Ejemplo 12. $SL(n, \mathbb{R}) \trianglelefteq GL(n, \mathbb{R})$. Considere entonces $\det : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, entonces $\ker \det = SL(n, \mathbb{R})$, así que por el primer teorema del isomorphismo, $\det(GL(n, \mathbb{R})) = \mathbb{R}^* \simeq {}^{GL(n,\mathbb{R})}\!/_{SL(n,\mathbb{R})}$.

Definición. Sea $\{G_n\}$ una colección de grupos, y $\{\phi_n\}$ una colección de homomorfismos de $G_i \to G_{i+1}$. Llamamos la secuencia $\to G_1 \xrightarrow{\phi_1} G_2 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{n-1}} G_n \xrightarrow{\phi_n} \dots$ una **secuencia exacta en un punto** G_i sí $\phi_i(G_i) = \ker \pi_{i+1}$. Llamamos la secuencia **exacta** sí es exacta en todo G_i para $i \in \mathbb{Z}^+$.

Definición. Una **secuencia exacta corta** es una secuencia exacta de la forma:

$$\langle e \rangle \xrightarrow{i} G_1 \xrightarrow{\phi_1} G_2 \xrightarrow{\phi_2} G_3 \xrightarrow{j} \langle e \rangle$$

Donde $i : \langle e \rangle \to G_1$ es la inclusión y $j : G_3 \to \langle e \rangle$ es la constante dado por $j : g \to e$ para todo $g \in G_3$.

Lema 14. *Dada una secuencia exacta corta, tenemos que ϕ_1 es 1–1 y que ϕ_2 es sobre.*

Proof. De seguro, tenemos que $i(\langle e \rangle) = \langle e \rangle = \ker \phi_1$ por definición, así que ϕ_1 es 1–1. Igualmente, tenemos que $\phi_2(G_2) = \ker j = G_3$, como j es la constante, así que ϕ_2 es sobre. ■

Lema 15. *Dada una secuencia exacta corta, $\phi(1)(G_1) \trianglelefteq G_2$ y ${}^{G_2}\!/_{\phi_1(G_1)} \simeq G_3$.*

Proof. Como $\langle e \rangle \xrightarrow{i} G_1 \xrightarrow{\phi_1} G_2 \xrightarrow{\phi_2} G_3 \xrightarrow{j} \langle e \rangle$ es exacta corta, tenemos que $\phi_1(G_1)$ es un kernel, así que $\phi_1(G_1)$ es normal en G_2. Mas aún, por el primer teorema del isomorfismo, como $\phi_2 : G_1 \to G_3$, lo cual tiene kernel $\phi_1(G_1)$, y como $\phi_2(G_2) = G_3$ tenemos que

$${}^{G_2}\!/_{\phi_1(G_1)} \simeq G_3$$

■

Teorema 16 (Segundo Teorema del Isomorphismo)**.** *Sí G es un grupo con $H \leq G$ un subgrupo, y $N \trianglelefteq G$ un subgrupo normal en G, entonces:*

$$HN/N \simeq H/H \cap N$$

Teorema 17 (Tercer Teorema del Isomorphismo)**.** *Sí G es un grupo, y $H, N \trianglelefteq G$ subgrupos normales en G, con $N \leq H$, entonces*

$$(G/N)/(H/N) \simeq G/H$$

Ejemplo 13. Nota que $8\mathbb{Z} \leq 4\mathbb{Z}$, así que $4\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \{8\mathbb{Z}, 4 + 8\mathbb{Z}\}$. De igual forma, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \{8\mathbb{Z}, 1 + 8\mathbb{Z}, 2 + 8\mathbb{Z}, 3 + 8\mathbb{Z}, 4 + 8\mathbb{Z}, 5 + 8\mathbb{Z}, 6 + 8\mathbb{Z}, 7 + 8\mathbb{Z}\}$. Entonces vemos que

$$(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})/(4\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \{4\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, (1 + 8\mathbb{Z}) + 4\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, (2 + 8\mathbb{Z}) + 4\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, (3 + 8\mathbb{Z}) + 4\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\}$$

Nota que $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})/(4\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ es cíclico de 4 elementos, así q ue $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})/(4\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, con acuerdo a la tercer teorema del isomorfismo.

Teorema 18 (Teorema de la Correspondencia)**.** *Sea $\phi : G \to G'$ u homomorfismo de G sobre G' con kernel K. Sí $H' \leq G'$, y $\phi^{-1}(H') = H$, entonces $H \leq G$, $K \trianglelefteq H$, y $H/K \simeq H'$.*

Proof. Tenemos que $e \in H$, como $\phi(e) = e' \in H'$. Ahora sí $a, b \in H$, entonces $\phi(a), \phi(a) \in H'$, así que $\phi(ab^{-1}) \in H'$, lo que hace $ab^{-1} \in H$. Por lo tanto $H \leq G$. Tambi$n$ tenemos que $\phi(K) = \langle e' \rangle$, lo que hace $K \trianglelefteq H$.

Ahora considere la mapa $\phi' : H \to H'$ dado por $\phi' : h \to \phi(h)$. Entonces ϕ' es sobre, por definición de H, y $\ker \phi' = K$. Por lo tanto el primer teorema del isomorfismo garantiza que $H/K \simeq H'$. ∎

Corolario. *Sí $H' \trianglelefteq G'$, entonces $H \trianglelefteq G$.*

Proof. Sí $H' \trianglelefteq G'$, entonces como $H = \phi^{-1}(H')$, sí $a \in G$ y $h \in H$, entonce por normalidad, $\phi(a)\phi(h)\phi^{-1}(a) = \phi(aha^{-1}) \in H'$, tenemos que $aha^{-1} \in H$. Esto hace $H \trianglelefteq G$. ∎

Ejemplo 14. Sea $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$. Los subgrupos de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$ estan desplegados en los siguientes reticulos del figura 1. Nota, que en el reticulo de $\mathbb{Z}$, se repreduce el reticulo de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$. Así que $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ tiene subreticulo en el reticulo de $\mathbb{Z}$, deplegado por el figura 2.

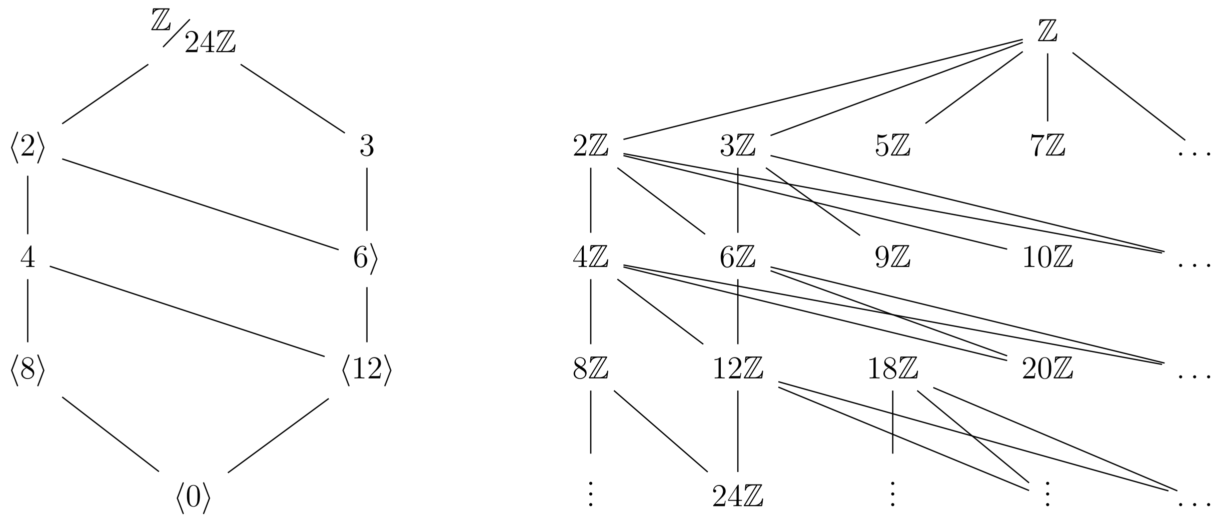


Figure 1: El reticulo de subgrupos de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ al lado del reticulo de subgrupos de $\mathbb{Z}$.

Lectura 6: Sumas Directas y Productos Semidirectas.

Definición. Dado grupos G y H, definimos el **producto directo** de G y H de ser el grupo $G \times H$ bajo la operacion $((a,b),(g,h)) \to (ah, bg)$.

Lema 19. *Sean G y H grupos, entonces el producto directo de G y H es un grupo bajo su operación.*

Ejemplo 15. (1) El grupo Klein-4 es un producto directo, $V_4 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(2) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(3) $\mathbb{Z}/70\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Lema 20. *Sí $G \times H$ es un producto directo, entonces $G \times H$ contine subgrupos G' y H' con $G' \simeq G$ y $H' \simeq H$.*

Proof. Sea $G' = \{(g, e_H) : g \in G\}$ y $H' = \{(e_G, h : h \in H)\}$. Considere entonces las proyecciones del primer y segundo partes, $\pi : G \times H \to G$ y $\pi_2 : G \times H \to H$ dados por $\pi_1 : (g, e_H) \to g$ y $\pi_2 : (e_G, h) \to h$. Entonces π_1 y π_2 son isomorfismos. ∎

Corolario. *G' y H' son normales en $G \times H$.*

Corolario. *$G'H' = G \times H$ y $G' \cap H' = \langle e\rangle$, donde $e = (e_G, e_H)$ es la identidad de $G \times H$.*

Definición. Decimos que G es un **producto directo interior** sí existen subgrupos G' y H' tales que:

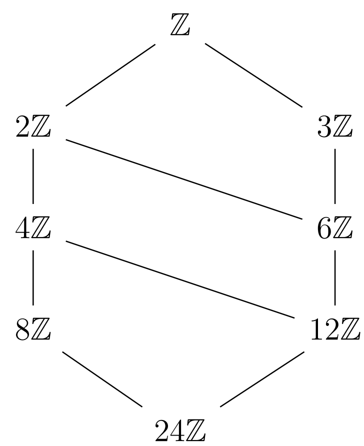


Figure 2: ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{24\mathbb{Z}}$ como subreticulo del reticulo de $\mathbb{Z}$.

(1) G' y H' son normales en G.

(2) $G' \cap H' = \langle e \rangle$.

(3) $G'H' = G$.

Teorema 21. *Sí $G = HK$ es un grupo donde $H, K \leq G$, entonces $G \simeq H \times K$.*

Proof. Defina $\phi : H \times K \to HK$ pro $(h,k) \to hk$. Nota que $h \in H$ y $k \in K$ implica que $hk = kh$. Sí $(h^{-1}k^{-1}h)K \in K$ y $h^{-1}(k^{-1}hk) \in H$, entonces $h^{-1}k^{-1}hk \in H \cap K = \langle e \rangle$. Nota que sí (h_1, k_1) y $(h_2, k_2) \in H \times K$, entonces $\phi((h_1,k_1),(h_2,k_2)) = (h_1h_2, k_1k_2) = h_1h_2k_1k_2 = h_1k_1h_2k_2 = \phi(h_1,k_1)\phi(h_2,k_2)$. Entonces ϕ es un homomorfismo

Ahora suponga que $\phi(h,k) = e$. Entonces $hk = e$, así loq que dice que $h \in K$ y $k \in H$, entonces $h = k = e$. Por lo tanto $\ker \phi = \langle e \rangle$. Mas aún, ϕ es sobre por definición, así que $HK \simeq H \times K$. ■

Definición. Sí G es un grupo que contienes subgrupos normales $\{H_i\}_{i=1}^{n}$, y $g \in G$ se puede escribir unicamente como $g = h_1 \ldots h_n$, donde h_i, entonces se llama G el **producto directo interno** de $\{H_i\}$.

Lema 22. *Suponga que $H = H_1 \ldots H_n$ donde $H_i \trianglelefteq G$ para toda $1 \leq i \leq n$. Los sigueintes enunicados son equivalente:*

(1) G es producto directo interno de $\{H_i\}$.

(2) $(H_1 \ldots H_{i-1}) \cap H_i = \langle e \rangle$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Proof. Supong que G es producto directo interno de $\{H_i\}$. Entonces, para todo $g \in G$, $g = h_1 \dots h_n$. Sea que $g \in (H_1 \dots H_{i-1}) \cap$

H$_i$. Entonces $g \in H_1 \dots H_{i-1}$, entonces $g = h_1 \dots h_i - 1 e_i e_{i+1} \dots e_n$. Ahora tambien tenemos que $g \in H_i$, así que $g = e_1 \dots e_{i-1} g e_{i+1} \dots e_n$. Como g es de representacion unica, $h_1 \dots h_{i-1} e_i \dots e_n = e_1 e_2 \dots g e_{i+1} \dots e_n$. Por correspondencia, tenemos que $g = e$. Por lo tanto $(H_1 \dots H_{i-1}) \cap H_i = \langle e \rangle$.

Suponga ahora que $(H_1 \dots H_{i-1}) \cap H_i = \langle e \rangle$. Suponga que $g = h_1 \dots h_{i-1} \in (H_1 \dots H_{i-1})$ y $g = k_1 \dots k_n \in H_i$. Como $H_i \trianglelefteq G$, tenemos que $h_i k_i = k_i h_i$. Por lo tanto, como $h_1 \dots h_n = k_1 \dots k_n$. Entonces tenemos $h_2 \dots h_n = (h_1^{-1} k_1) k_2 \dots k_n$, y que $h_3 \dots h_n = (h_1^{-1} k_1)(h_2^{-1} k_2) k_3 \dots k_n$. Procediendo recursivamente, tenemos que $(h_1^{-1} k_1) \dots (h_{n-1}^{-1} k_{n-1}) = h_n k k_n^{-1}$, y comoe $h_n k_n^{-1} \in H_n \cap (H_1 \dots H_{n-1})$, tenemos que $h_i^{-1} k_i = e$ para todo i. Por lo tanto $h_i = k_i$ y g tiene representación unica. Como $G = H_1 \dots H_n$, esto hace G el producto directo interno de $\{H_i\}$. ■

Ejemplo 16. $D_3 = \langle r \rangle \langle t \rangle$ y es una representacion unica, pero ord $\langle r \rangle = 3$ y ord $\langle t \rangle = 2$, pero D_3 no es abeliano, asi que D_3 no puede ser el producto directo interno de $\langle r \rangle$ y $\langle t \rangle$.

Definición. Sea G un grupo, definimos a $\operatorname{Aut} G$ el **grupo de automorfismos** de G sobre si mismo.

Lema 23. *Sean H, K grupos, y sea $r : K \to \operatorname{Aut} H$ dado por $k \xrightarrow{r} r_k$ y $r_k : H \to H$ es un autmorfismo de H. Considere la operacion bianria $(H \times K) \times (H \times K) \to H \times K$ dado por $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \to (h_1 r_k(h_2), k_1 k_2)$. Esta operación induce un grupo sobre $H \times K$.*

Proof. Como r_k es un automorfismo de H, es un homomorfismo, así que tenemos que $r(kn) = r_{kn} = r_k r_n = r(k) r(n)$, as i que r es un homorfismo, y se cierra la operación en $H \times K$.

Ahora nota que $(h, k)(e_H, e_K) = (h r_k(e_H), k e_K) = (h e_H, k e_k) = (h, k)$ y $(e_H, e_K)(h, k) = (e_H r_{e_K}(h), e_K k) = (e_H h, e_K, k) = (h, k)$, como r_{e_H} es la identidad. Aís que $e = (e_H, e_K)$ es la identidad.

De igaul manera, tenemos $(h, k)(r_k^{-1}(h^{-1}), k^{-1}) = (h r_k(r_k^{-1}(h^{-1})), k k^{-1}) = (h h^{-1}, k k^{-1}) = e$, y $(r_k^{-1}(h^{-1}), k^{-1})(h, k) = (r_k^{-1}(h^{-1}) r_h(h), k^{-1} k) = (r_{e_H}(h^{-1}), k^{-1} k) = (h^{-1} h, k^{-1} k) = e$, com $r_k^{-1} r_k = r_{e_H}$, la identidad. Así que $H \times K$ tiene inversos.

Finalmente, nota que

$$\begin{aligned}
((h_1, k_1)(h_2, k_2))(h_3, k_3) &= (h_1 r_{k_1}(h_2), k_1 k_2)(h_3, k_3) \\
&= ((h_1 r_{k_1}(h_2)) r_{k_3}(h_3), k_1 k_2 k_3) \\
&= (h_1 h_2 r_{k_1 k_3}(h_2 h_3), k_1 k_2, k_3)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(h_1, k_1)((h_2, k_2)(h_3, k_3)) &= (h_1, k_1)(h_2 r_{k_3}(h_3), k_2 k_3) \\
&= (h_1 h_2 r_{k_1 k_3}(h_2 h_3), k_1 k_2 k_3)
\end{aligned}
$$

y associatividad se preserva. ∎

Definición. Sea H, K grupos, y $r : K \to \operatorname{Aut} H$ un homomorfismo. Definimos el **producto semidirecto externo** de ser el grupo $H \times_r K$ bajo la operación $(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1 r_{k_1}(h_2), k_1 k_2)$.

Ejemplo 17. (1) $D_3 \simeq \langle r \rangle \times_r \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times_r \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donde $r : x \to -x$. En ambos grupos.

(2) Sea $G = H \times_r K$. Sea $H' = \{(h, e_K), h \in H\}$ y $K' = \{(e_H, k) : k \in K\}$. Nota que $H' \simeq H$, que $K' \simeq K$, y que $H' \trianglelefteq H \times_r K$, pero no necesariamente $K' \trianglelefteq H \times_r K$. Tambien tenemos que $H' \cap K' = \langle e \rangle$. Ahora, $(h, e_K)(e_H, k) = (h r_{e_H}(e_H), e_K k) = (h e_H, e_K, k) = (h, k)$, así que $H \times_r K = H'K'$.

Definición. Sea G un grupo, y $H \trianglelefteq G$ y $K \leq G$. Decimos que G es el **producto semidirecto interno** sí $G = HK$ y $H \cap K = \langle e \rangle$. Lo denotamos como $G = H \rtimes K$.

Ejemplo 18. $D_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \langle r \rangle \rtimes \langle t \rangle$. Nota que $\langle r \rangle \trianglelefteq D_n$ y que $[D_n, \langle r \rangle] = 2$.

Lema 24. *Suponga que G es un grupo semidirecto interno de $H \trianglelefteq G$, y $K \leq G$. Entonces $G \simeq H \times_r K$, donde $r : K \to \operatorname{Aut} H$ esta dado por $r_k : h \to khk^{-1}$.*

Proof. Note que r_k es un automorfismo de H, como $H \trianglelefteq G$ así que r esta bien definida. Por la lemma 22, todo $g \in G$ se escribe unicamenet como hk. Por lo tanto, sea $\phi : H \times_r K \to G$ dado por $(h, k) \to hk$. Vemos que ϕ es 1–1, y que es sobre.

Ahora dado (h, k) y (h', k'), tenemos que $\phi((h, k)(h', k')) = \phi(h r_k(h'), kk') = \phi(hkhk^{-1}, kk') = (hkh'k^{-1})(kk') = (hk)(h'k') = \phi(h, k)\phi(h', k')$. Por lo tanto ϕ es un ismomorfismo y terminanmos. ∎

Lema 25. *Sea G un grupo y $H, K \leq G$. Suponga que $G = HK$, y que $H \cap K = \langle e \rangle$. Entonces para todo $g \in G$, se puede escribir de manera unica de la forma $g = hk$ donde $h \in H$ y $k \in K$.*

Lectura 7: Acciones de Grupos.

Teorema 26 (EL Teorema de Cayley)**.** *Todo grupo es isomorfo a un subgrupo del grupo de simetrico.*

Proof. Sea G un grupo y $A(G)$ el grupo simetrico de G. Defnia $\lambda : G \to A(G)$ dado por $g \to \lambda_g$, donde $\lambda_g : G \to G$ esta dado por $x \to gx$. Note que λ_g es un permutacion de los elementos de G, es sobre, y es 1–1 por cancelacion, así que $\lambda_g \in A(G)$. Así que λ es bien definido.

Ahora suponga que que $\lambda(g) = \lambda(h)$, entonces para algún $x \in G$, $\lambda_g(x) = \lambda_g(h)$, pues $gx - gh$. Por cancelación, tenemos que $g = h$. sí que λ es 1–1. Ahora dado $x \in G$, que $(gh)(x) = \lambda_{gh}(x) = (gh)x = g(hx) = g(_h(x)) = \lambda_g(\lambda_h(x)) = \lambda_G\lambda_h(x)$. Así que λ definia una isomorfismo de G hacía $\lambda(G)$ lo cual es subgrupo de $A(G)$. ∎

Ejemplo 19. Por la teorema de Cayley, tenemos que $D_3 \simeq S_6$.

Definición. Un grupo G **actua** sobre un conjunto X sí para todo $g \in G$, existe una mapa $G \times X \to X$ dado por $(g, x) \to g \cdot x$ tal que:

(1) $h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x$.

(2) $e \cdot x = x$ para todo $x \in X$.

Ejemplo 20. (1) Todo grupo actua sobre si mismo bajo multiplicacion pr la izquierda. Llamamos esto el **accion regular**.

(2) Todo grupo actua sobre si mismo via la accion de **conjugacion** definido pro $(g, x) \to gxg^{-1}$. Nota que $h \cdot (g \cdot x) = h \cdot (gxg^{-1}) = hgxg^{-1}h^{-1} = (hg)x(hg)^{-1} = (hg) \cdot x$. Tambein $e \cdot x = exe^{-1} = x$.

Definición. Definimos el **kernel** de una accion $G \times X \to X$ de ser el conjunto $= \{g \in G : g \cdot x = x\}$.

Ejemplo 21. (1) Sí G actua sobre si mismo via conjugacion, entonces si $gxg^{-1} = x$, tenemos que $gx = xg$ para todo $x \in G$. Por lo tanto $\ker = \{g \in G : gx = xg \text{ para todo } x \in G\}$. Llamamos este kernel el **centro** de G, y lo denotamos como $Z(G)$.

(2) Conisdere $\mathcal{B}_n$ el conjunto de todos funciones booleanas $f : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n$ en n variables. Defina una operacion de S_n sobre $\mathcal{B}_n$ definida por $s \cdot f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{s(1)}, \ldots, x_{s(n)})$. Este operación defina una acción de grupos de S_n sobre $\mathcal{B}_n$. Nota que el kernel de este accion es trivial.

Definición. Sea G un grupo que actua sobre un conjunto X. La **órbita** de un $x \in X$ es el conjunto $\mathcal{O}(x) = \{g \cdot x : g \in G\}$.

Ejemplo 22. (1) Sea G un grupo actuando sobre si mismo por su multiplicacion (por izquierda). Suponga que $x \in G$ y sea $g \in G$ un elemento cualquiera. Entonces existe un $g_0 \in G$ tal que $g = g_0 x$. Esto hace $G \subseteq \mathcal{O}(x)$. Por lo tanto $\mathcal{O}(x) = G$.

(2) Considere un grupo G actuando sobre si mismo mediante conjugacion. Sea $x \in G$. Entonces $\mathcal{O}(x) = \{gxg^{-1} : g \in G\} = \operatorname{cl} x$. Llamamos a $\operatorname{cl} x$ la **clase de conjugacion** de x.

(3) Considere $\mathcal{B}_3$ y defina $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2x_3 + x_1x_2x_3$. Sea $S_3 = \{(1), (2\,3), (1\,2), (1\,2\,3), (1\,3\,2), (1\,3)$ Entonces:

$$
\begin{aligned}
(1) \cdot f &= x_1 + x_2x_3 + x_1x_2x_3 = f \\
(2\ 3) \cdot f &= x_1 + x_3x_2 + x_1x_3x_2 = f \\
(1\ 2) \cdot f &= x_2 + x_1x_3 + x_2x_1x_3 = f_1 \\
(1\ 2\ 3) \cdot f &= x_2 + x_3x_1 + x_3x_2x_1 = f_1 \\
(1\ 3\ 2) \cdot f &= x_3 + x_1x_2 + x_3x_1x_2 = f_2 \\
(1\ 3) \cdot f &= x_3 + x_2x_1 + x_3x_2x_1 = f_2
\end{aligned}
$$

Así que $\mathcal{O}(f) = \{f, f_1, f_2\}$. Nota que $|\mathcal{O}(x)|$ divide a $\operatorname{ord} S_3$.

Lema 27. *Sea G un grupo que actua sobre un conjunto X. Entonces las órbitas de X particionan a X.*

Proof. Sea $x \in \mathcal{O}(y)$ y $x \in \mathcal{O}(z)$ para $x, y, z \in X$. Entonces vemos que $x = gy$ y $x = hz$, por lo tanto $gy = hz$. Es decir $y = (g^{-1}h)z$, por lo tanto $y \in \mathcal{O}(z)$. De igual forma, $z \in \mathcal{O}(y)$. Esto hace que $\mathcal{O}(y) = \mathcal{O}(y)$. ■

Definición. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X. El **estabilizador** de $x \in X$ es el conjunto $\operatorname{stab} x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$.

Lema 28. *Sea G un grupo que actua sobre un conjunto X. Entonces el estabilizador de todo x1X es subgrupo de G.*

Proof. Sea $x \in X$ y sea $g, h \in \operatorname{stab} x$. Entonces $x = gx$ y $x = h^{-1}x$. Por lo tanto $(gh^{-1}) \cdot x = x$. ■

Ejemplo 23. Para cualquier grupo actuando sobre si mismo bajo conjugacion, $\operatorname{stab} x = \{g : gx = xg\} = C(x)$ que se llama el **centralizador** de x.

Teorema 29 (Teorema del Órbita-Estabilizador.)**.** *Suponga que G es un grupo que actua sobre un conjunto X. Sean $\mathcal{O}(x)$ y $\operatorname{stab} x$ la órbita y estabilizador de un $x \in X$. Entonces:*

$$|\mathcal{O}(x)| = [G : \operatorname{stab} x]$$

Proof. Suponga que $y \in \mathcal{O}(x)$. Entonces $y = g \cdot x$ para algún $g \in G$. Defina ahora la mapa $f : \mathcal{O}(x) \to {}^{G}\!/_{\operatorname{stab} G}$ dado por $y = g \cdot x \to g \operatorname{stab} x$. Sea ahora $y = g \cdot x = h \cdot x$. Entonces vemos que $x = (g^{-1}h) \cdot x$, así que $g^{-1}h \in \operatorname{stab} x$. Esto hace que $g \operatorname{stab} x = h \operatorname{stab} x$. Por lo tanto f es bien definida.

Ahora, vemos que f es sobre; sí $y \in \mathcal{O}(x)$, entonces $y = g \cdot x$ para algún $g \in G$, así que a cada $y \in \mathcal{O}(x)$ está asignada a un $g \operatorname{stab} x$. Más aun, f es 1–1. Sean $y = gx$ y $y' = hx$. Sí $g \operatorname{stab} x = h \operatorname{stab} x$, entonces $g^{-1}h \in \operatorname{stab} x$, así que $gx = hx$, es decir $y = y'$. Por lo tanto, tenemos una mapa 1–1 de $\mathcal{O}(x)$ sobre el conjunto ${}^{G}\!/_{\operatorname{stab} x}$, que tiene cardinalidad $[G : \operatorname{stab} x]$. ■

Corolario. *Sí G es un grupo finito, entonces $|\mathcal{O}(x)|$ divida a $\operatorname{ord} G$. En particular*

$$|\mathcal{O}(x)| = \frac{\operatorname{ord} G}{\operatorname{ord}(\operatorname{stab} x)}$$

Ejemplo 24. Sea G un grupo finito y sea la accion de G sobre si mismo la congugacion. Entonces $\mathcal{O}(x) = \operatorname{cl} x$. Nota que $x \in \operatorname{cl} x$. Suponga que $|\operatorname{cl} x| = 1$, entonces $gxg^{-1} = x$ asi que $gx = xg$ lo que hace $x \in Z(G)$. Nota igualmente que $G = \bigcup \operatorname{cl} x$. Entonces

$$\operatorname{ord} G = \sum \operatorname{cl} x = \operatorname{ord} Z(G) + \sum [G : C(x)] = \operatorname{ord} Z(G) + \sum \operatorname{cl} x$$

Llamamos a esta equacion la **ecuacion de clase**.

Teorema 30 (Conteo de Órbitas)**.** *Sea G un grupo finito que actua sobre un conjunto finitio X. Denota $X^g = \{x \in X : g \cdot x = x\}$. Sea $\mathcal{O}$ la colleccion de todas las orbitas de $x \in X$. Entonces:*

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{\operatorname{ord} G} \sum |X^g|$$

Proof. Sabemos que $X^g = \{(g,x) \in G \times X : g \cdot x = x\}$. Sea:

$$\begin{array}{cccccc}
(g_1, x_1) & & (g_1, x_3) & (g_1, x_4) & & \\
& (g_2, x_2) & (g_2, x_3) & & (g_2, x_5) \\
(g_3, x_1) & & (g_3, x_3) & (g_3, x_4) & \dots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

Nota que las columnas de este arreglo forman los estabilizadores de los x_i, ahora vemos que

$$\sum |X^g| = \sum \operatorname{stab} x = \sum \frac{\operatorname{ord} G}{|\mathcal{O}(x)|}$$

Por el teorema del órbiata estabilizador, tenemos que

$$\operatorname{ord} G \sum \frac{1}{|\mathcal{O}(x)|} = \operatorname{ord} G \sum_{\mathcal{O}(x) \in \mathcal{O}} \sum_{x} |\mathcal{O}(x)| = \operatorname{ord} G |\mathcal{O}|$$

Rearreglando los terminos, tenemos el resultado. ■

Lectura 8: Las Teoremas de Sylow

Definición. Sea $p \in \mathbb{Z}^+$ un primo. Llamos a un grupo G un p-**grupo** sí cada $g \in G$ es una potencia de p.

Ejemplo 25. (1) El grupo Klein $V_4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es un 2-grupo.

(2) Los grupose $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y D_{16} son 2-grupos.

(3) El grupo $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/5^n\mathbb{Z}$ es un 5-grupo, pero $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/5^n\mathbb{Z}$ solo es un 5-grupo cuando $n = 1$.

Definición. Sí G es un grupo con orden $p^r m$ donde p es primo y $p \nmid m$, entonces llamamos un subgrupo $P \leq G$ un p-**subgrupo de Sylow**, o un p-**Sylow** sí $\operatorname{ord} P = p^r$.

Lema 31. *Sí G es u grupo de orden $p^r m$ con p primo, y $p \nmid m$ y $P \leq G$ es un p-Sylow de G, entonces P es de orden lo maximo posible.*

Proof. Por el teorema de Lagrange. ■

Ejemplo 26. $|D_6| = 2^2 \cdot 3$. Nota que $P_1 = \{e, r^3, tr^3t\}$, $P_2 = \{e, r^3, rt, r^4t\}$, y $P_3 = \{e, r^3, r^2t, r^5t\}$ son 2-Sylows de D_6 y $P = \{e, r, r^4\}$ es 3-Sylow.

Lema 32. *Sí $n = p^r m$ con p primo y $p \not| m$, entonces*

$$\binom{n}{p^r} \equiv m \mod p$$

Proof. Nota que $(x+1)^{p^r} = \sum_{k=1}^{p^r} \binom{p^r}{k} x^{p^r - k} \equiv x^{p^r m} + 1 \mod p$. Entonces $(x+1)^{p^r m} \equiv (x^{p^r} + 1)^m \mod p$, así que

$$\sum \binom{p^r m}{k} x^{p^r m - k} \equiv \sum \binom{m}{k} (x^{p^r})^{m-k} \mod p$$

Mirando el coeficiente de x^{p^r}, en la izquierd, tenemos que este termino occure cuando $k = p^r(m-1)$, y obtenemeos $\binom{p^r m}{p^r} = \binom{n}{p^r}$. Por el lado derecho, el termino x^{p^r} occure cuando $k = m-1$ y por simetria obtenemos $\binom{m}{1} = m$. ∎

Teorema 33 (El Primer Teorema de Sylow)**.** *Sea G un grupo finito de orden $p^r m$ donde p es primo, y $p \not| m$. Entonces existe al menos un p-subgrupo de Sylow, de G.*

Proof. Sea $X = \binom{G}{p^r}$. Note que G actua sobre X vá la multiplicacion por la izquierda. Ahora, este accion induce en X una particion de X en orbitas. Es decir

$$\binom{G}{p^r} = \bigcup \mathcal{O}(S)$$

entonces $p \not| \sum |\mathcal{O}(S)|$. Por lo tanto, existe un $S \in X$ con $p \not| |\mathcal{O}(S)|$. Sea $P = \operatorname{stab} S$ Entonces por el teoream del órbita-estabilizador, tenemos

$$|\mathcal{O}(S)| = \frac{\operatorname{ord} G}{\operatorname{ord} P} = \frac{p^r m}{\operatorname{ord} P}$$

Como $p \not| |\mathcal{O}(S)|$, $\operatorname{ord} P$ tiene que ser un multiplo de p^r, es decir que $p^r | \operatorname{ord} P$, por lo tanto $p^r \leq \operatorname{ord} P$.

Por otro lado, defina la mapa $\lambda_x : P \to S$, para $x \in S$ dado por $\lambda_x : g \to \lambda_x(g) = g \cdot x$. Vemos que esta mapa es bien definida, y que es 1–1. Por lo tanto $\operatorname{ord} P \leq |S| = p^r$. Por lo tanto P es un p-subugrupo de Sylow. ∎

Ejemplo 27. Sea $GL(n, \mathbb{F}_p)$, y escoje una matriz $A \in GL(n, \mathbb{F}_p)$. Note que para la fila k de A, hay $p^n - p^k$ posubles entradas, asi que $\operatorname{ord} GL(n, \mathbb{F}_p) = p^n - p^k = p^{\frac{n(n-1)}{2}} p^j - 1$. Entonces cualquier p-Sylow de $GL(n, \mathbb{F}_p)$ tiene orden $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Teorema 34 (El Teorema de Cauchy)**.** *Sí p es un primo y $p | \operatorname{ord} G$, entonces G tiene un elemento de orden p.*

Proof. Sea P un p-Sylow de G y escoja $g \in P$ tal que $g \neq e$. Entonces $\operatorname{ord} g = p^l$ para $l \in \mathbb{Z}^+$. Sí $l = 1$, terminamos, y sí $l > 1$, note que $(g^{pl-1})^p = g^{p^l} = e$. ■

Lema 35. *Sean H y K subgrupos de un grupo G. Entonces:*

$$\operatorname{ord} HK = \frac{\operatorname{ord} H \operatorname{ord} K}{|H \cap K|}$$

Proof. Considere la mapa $f : H \times K \to HK$ dado por $(h, k) \to hk$. Entonces f es sobre y $\operatorname{ord} HK \leq |H \times K|$. Sea entonces $h_1k_1, dots, h_dk_d$ los elementos distintos de HK. entoncece $H \times K = \bigcup f^{-1}(h_ik_i)$, para todo $1 \leq i \leq d$. Ahora, $f^{-1}(hk) = \{(hk, g^{-1}k) : g \in H \cap K\}$. Entonces $|f^{-1}(hk)| = |H \cap K|$. Entonces tenemos que $|H \times K| = \operatorname{ord} H \operatorname{ord} K|H \cap K| = \operatorname{ord} HK|H \cap K|$. ■

Teorema 36 (El Segundo Teorema de Sylow)**.** *Sea G un grupo finito con orden p^rm donde p es primo y $p \not| m$. Sea $n_p(G)$ el numero de todos los p-subgrupos de Sylow de G, entonces:*

$$n_p(G) \equiv 1 \mod p$$

Proof. Considere $X = \{P \leq G : P \text{ es } p\text{-Sylow}\}$. Por el primer teorema de Sylow, $X \neq \emptyset$. Entonces $|X| = n_p(G)$. Sea que $P \in X$ actua sobre X mediante conjugacion. Sea Q ub p-Sylow de G, entonces por el teorema órbita-estabilizador, tenemos que

$$|\mathcal{O}(Q)| = \frac{p^r}{\operatorname{ord} \operatorname{stab} Q} \in \mathbb{Z}^+$$

así que $|\mathcal{O}(Q)||p^r$. As'ıque $\mathcal{O}(Q)$ tiene largo 1, o tiene largo p. Ahora, como

$$|X| = \sum |\mathcal{O}(Q)| = \sum |\mathcal{O}(Q')| + \sum |\mathcal{O}(Q'')|$$

donde Q' y Q'' son subgrupos cuyas orbitas tiene 1 o 2 elementos, respectivamente, tenemos que $p| \sum |\mathcal{O}(Q'')|$, por lo tanto

$$|X| \equiv |\mathcal{O}''| \mod p$$

donde $\mathcal{O}''$ es la coleccion de todas las orbitas de largo 1.

Ahora, nota que $\mathcal{O}(P) - \{P\}$. Suponga entonces que existe un p-Sylow Q tal que $g \cdot Q = gQg^{-1} = Q$ para todo $g \in P$. Entonces, $gQ = Qg$, así que $PQ = QP$ y $PQ \leq G$. Entonces por el lema de arriba, tenemos que

$$\operatorname{ord} PQ = \frac{\operatorname{ord} P \operatorname{ord} Q}{|P \cap Q|}$$

Pero $p^r \leq \operatorname{ord} PQ \leq p^r$, por lo tanto $Q \subseteq P$. Somo P y Q tienen el mismo orden, tenemos que $P = Q$, as'ıque $|\mathcal{O}''| = 1$ ■

Teorema 37 (El Tercer Teorema de Sylow)**.** *Sea G un grupo finito con orden $p^r m$, donde p es primo y $p \not| m$. Entonces todos los p-subgrupos de Sylow son conjugados.*

Proof. Sea P un p-Sylow de G y R un p-subgrupo de G. Deje que R actua sobre ${}^{G}\!/_{P}$ (no necesariamente el grupo cociente) mediante multiplicacion. Por el teorema de Lagrange, tenemos que $\operatorname{ord} {}^{G}\!/_{P} = [G : P] = \frac{p^r m}{p^r} = m$. Tambien nota que ${}^{G}\!/_{P} = \bigcup \mathcal{O}(gP)$, así que

$$\sum |\mathcal{O}(gP)| = m$$

y existe una orbita cuya longitud no esta dividido por p, como $p \not| m$. Por el teorema del órbita-establilizador, tenemos que $|\mathcal{O}(gP)| | \operatorname{ord} R = p^l$, para $l \in \mathbb{Z}^+$. Así que $\mathcal{O}(gP)$ tiene largo 1, o p^l. Ahora, sea $gP \in {}^{G}\!/_{P}$, un elemento cuya orbita tiene largo 1. Entonces $g \cdot gP = (hg)P = gP$, para todo $h \in R$, lo que dice que $g^{-1}hg \in P$, por lo tanto $h \in gPg^{-1}$ lo que hace $R \subseteq gPg^{-1}$. El resultado entonces se obtiene escogiendo a R un p-Sylow. ■

Corolario. *Todo p-subgrupo de G está contenido en un p-subgrupo de Sylow. Ademas, tenemos que $n_p(G)|m$*

Lectura 9: Grupos Simples

Definición. Un grupo $G \neq \langle e \rangle$ es **simple** sí sus unicons subgrupos normales son el mismo y $\langle e \rangle$.

Ejemplo 28. (1) ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{5\mathbb{Z}}$ tiene como subgrupos $\langle 0 \rangle$ y ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{5\mathbb{Z}}$. Entonces ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{5\mathbb{Z}}$ es simple.

(2) El grupo dihedral D_n no es normal porque tiene $\langle r \rangle$ como subgrupo simple; pues $[D_n : \langle r \rangle] = 2$.

Lema 38. *Sí P es un p-grupo finito no trivial, entonces $Z(P)$ no es trivial.*

Proof. Deje que P actue sobre si mismo via conjugacion. Las órbitas de este accion son las clases de conjugacion $\operatorname{cl} g$, donde $g \in P$. Tenemos que $x \in P$ esta en una clase de tamaño 1 sí y solo sí $x \in Z(P)$. Por el teorema del órbita-estabilizador, tenemos que el tamaño de los $\operatorname{cl} g$ divide a $\operatorname{ord} P = p^r$, donde $p, r \in \mathbb{Z}^+$ y p es primo.

Ahora, sí $Z(P) = \langle e \rangle$, entonces hay una sola órbita de tamaño 1. Entonces los demas $\operatorname{ord} \operatorname{cl} x | \operatorname{ord} P$. Esto es una contradicción de que P es un p-grupo. ■

Corolario. *Sí P es un p-grupo no isomorfo a ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{p\mathbb{Z}}$, para p primo, entonces P no es simple.*

Proof. Nota que $Z(P) \trianglelefteq P$. ■

Lema 39. *El subgrupo P de un grupo G es un p-Sylow normal de G sí y solo sí es el único p-Sylow de G.*

Lema 40. *Sea G un grupo finito noabeliano y simple. Sí $p|\operatorname{ord} G$, para p primo, entonces $n_p(G) > 1$.*

Proof. Sí p es unico, entonces $\operatorname{ord} G = p^r$ y G es un p-grupo no trivial. Entonces $Z(G)$ tambien no es trivial. Como $Z(G) \trianglelefteq G$ y G es simple entonces $Z(G) = G$, lo cual no puede pasar.

Ahora, sí P es un p-Sylow de G, entonces $\langle e \rangle \leq P \leq G$, donde la segundo inclusión es estricta. Sí $n_p(G) = 1$, entonces $P \trianglelefteq G$, lo cual no puede pasar. Por lo tanto $n_p(G) > 1$. ■

Lema 41. *Sea G un grupo de orden pq, donde p y q son primos distintos. Entonces:*

(1) Sí $q \not\equiv 1 \mod p$, entonces G tiene un p-Sylow normal.

(2) Sí $q \not\equiv 1 \mod p$, y $p \not\equiv 1 \mod q$, entonces G es ciclico.

(3) G no es simple.

Proof. Note que $n_p(G) \equiv 1 \mod p$ y $n_p(G)|q$ por el tercer teorema de Sylow. Entonces o $n_p(G) = 1$, o $n_p(G) = q$. Como $q \not\equiv 1 \mod p$, tenemos que $n_p(G) = 1$ y G tiene un unico p-Sylow, y es normal.

Ahora, suponga que $q \not\equiv 1 \mod p$ y $p \not\equiv 1 \mod q$. Tenemos que G tiene un p-Sylow unico P, y un q-Sylow unico Q. Mas aún P y Q son ciclicos. Existen $x \in P$ y $y \in Q$ con $P = \langle x \rangle$ y $Q = \langle y \rangle$. Por supuesto $\operatorname{ord} P = p$ y $\operatorname{ord} Q = q$. Ahora, como $P, Q \trianglelefteq G$ y $P \cap Q = \langle e \rangle$ entonces tenemos que $xy = yx$; entonces $(xy)^n = x^n y^n$. Por lo tanto $(xy)^{pq} = e$. Esto hace G ciclico.

Por ultimo, sin perder la generalidad, asume que $p > q$. Por lo tanto, tenemos que $p \not| q - 1$ y $q \not\equiv 1 \mod p$. Por arriba, G tiene un unico p-Sylow normal, lo que hace que G no sea simple. ■

Lema 42. *Sea G un grupo con noabeliano orden $p^2 q$ con p y q primos distintos. Entonces G contiene un p-Sylow normal o un q-Sylow normal.*

Proof. Supong lo contrario. Sea $n_p(G) > 1$ y $n_q(G) > 1$. Note que un q-Sylow tiene orden q, y por lo tanto es ciclico. Entonces tenemos $q - 1$ elementos de orden q. Entonce cualquier y del q-Sylow genera un unico q-Sylow. Por lo tanto $q = n_q(q - 1)$. Ahora, $n_q(G)|p^2$ así que o $n_q(G) = p$ o $n_q(G) = p^2$. Sí $n_q(G) = p^2$, entonces el unmero de elementos de orden diferente a q es $p^2q - p^2(q-1) = p^2$ lo que dice que hay un p-Sylow unico. Por lo tanto, G no es simple.

Por otro lado, sí $n_q(G) = p$, entonces $n_q(G) \equiv 1 \mod q$ y $p \equiv 1 \mod q$, lo que dice $p > q$. Peron $n_p(G)|q$ y como q es primo, entonces $n_p(G) = q$, luego, $n_p(G) \equiv 1 \mod p$ implica que $q \equiv 1 \mod p$ lo que dice que $q > p$. Una contradiccion. ■

Corolario. *G no es simple.*

Ejemplo 29. (1) Por los resultados arriba, el primer grupo noabeliano simple es el grupo A_5 de orden $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

(2) Suponga que G es u grupo de orden $2552 = 2^3 \cdot 11 \cdot 29$. Suponiendo que G es simple, entonces $n_{11} > 1$ y $n_{29} > 1$. Ahora, como $n_{11}(G) \equiv 1 \mod 11$, y $n_{11}(G)|2^3 \cdot 29$. los divisores positivos de $8 \cdot 29$ son dados por

$$1 \qquad 2 \qquad 4 \qquad 8 \qquad 29 \qquad 58 \qquad 116 \qquad 232$$

Por lo tanto $n_{11}(G) = 232$, y hay 232 11-Sylows. Como el orden de cada uno de ellos es 11, entonces ellos son ciclicos, con interseccion trivial entre ellos, y por lo tanto G tiene 2320 elementos de orden 11.

Por el mismo lado, tenemos $n_{29} \equiv 1 \mod 29$ y $n_{29}|8 \cdot 11$ lo que tiene divisores

$$1 \qquad 2 \qquad 4 \qquad 8 \qquad 11 \qquad 22 \qquad 44 \qquad 88$$

Así que $n_{29} = 88$ y G tiene 2464 elementos de orden 29. Por lo tanto $\operatorname{ord} G \geq 2320 + 2464 > 2552$ una contradiccion. Así que G no es simple.

Lectura 10: El Teorema de Jordan-Hölder

Definición. Sea G un grupo y $G_0, \ldots, G_n$ donde $G_n = \langle e \rangle$ y $G_0 = G$ tal que $G_{i+1} \trianglelefteq G_i$. Entonces se llama el serie

$$G_n \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_0$$

una **serie subnormal** de G.

Ejemplo 30.

(1) Coje $G_0 = D_8$, $D_1 = \langle r \rangle$, $G_2 = \langle r^2 \rangle$, $G_3 = \langle r^4 \rangle$ y $G_4 = \langle e \rangle$. Entonces $G_4 \trianglelefteq G_3 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_0$.