

MATE6551-0U1
Prof. Ivan Cardona Torres
13.00 - 14.20
CNL-A-225

Linear Algebra

Alec Zabel-Mena

Universidad de Puerto Rico, Recinto de Rio Piedras

20.08.2022

Lectura 1: La Teorema de Puntos Fijos de Brouwer.

Empezamos con declara notación Vamos a denotar las siguientes conjuntos:

Definición. Denotamos la **n -esfera** como el conjunto $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ y la **n -bola** como el conjunto $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, donde $\|\cdot\|$ el la **norma** en \mathbb{R}^n que induca la topología usual de \mathbb{R}^n . Llamamos punto $N = (0, \dots, 0, 1)$ de S^n el **polo norte** de S^n y el punto $S = (0, \dots, -1)$ de S_n el **polo sur** de S^n . Definimos la **ecuador** de una $n + 1$ -esfera S^{n+1} de ser la n -esfera S^n .

Ejemplo 1. (1) S^1 es el circulo unitario en el plano \mathbb{R}^2 , y S^2 es el esfera unitario en el espacio \mathbb{R}^3 .

(2) Nota que $S^0 = \{-1, 1\}$ es la unica esfera no conexo en \mathbb{R} .

(3) Toda n -esfera tiene un polo norte y un polo sur. De hecho, el polo norte de S^0 es 1 y el polo sur es -1 .

(4) Nota que el borde de una n -bola es una n -esfera. Es decie $\partial B^n = S^{n-1}$.

Definición. Denotamos una **n -simplejo estándar** de \mathbb{R}^n de ser el conjunto $\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0 \text{ y } \sum x_i = 1\}$.

Ejemplo 2. (1) $\Delta^0 = \{1\}\mathbb{R}$.

(2) Δ^1 es una recta entre los puntos $(0, 1)$ y $(1, 0)$ en \mathbb{R}^2 restrinjido a la primera caudrante.

(3) Δ^2 es una tetrahedro en la primer octánate de \mathbb{R} con vertices en $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, y $(1, 0, 0)$. Se representa en la figura 1 también.

(4) Note que $\Delta^0 \subseteq \Delta^1 \subseteq \Delta^2$.

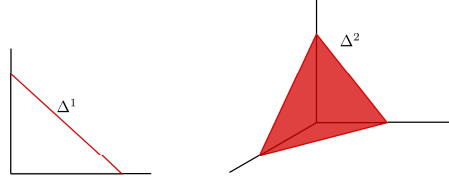


Figura 1: El 1-simplejo y 2-simplejo estándares.

- (5) Como espacios topológicos, se puede demostrar que los n -simplejos estándares son homeomorfo a los n -bolas. Es decir $\Delta^n \simeq B^n$.

Definición. Sea $f : A \rightarrow A$ una función. Llamamos a un punto $x \in A$ un **punto fijo** si $f(x) = x$.

Teorema 1 (Teorema de Puntos Fijos de Brouwer). *Si $f : B^n \rightarrow B^n$ es una función continua, entonces existe un punto fijo en B^n para toda $n \geq 1$.*

demostración. Demostramos la teorema para $n = 1$. Es decir, que toda función $f : B^1 \rightarrow B^1$ tiene un punto fijo. Sean $a = f(-1)$ y $b = f(1)$. Si $a = -1$ o $b = 1$, tenemos puntos fijos y terminamos.

Ahora, considere la gráfica de f , $G_f = \{(x, f(x)) : x \in B^1\}$, la diagonal de B^1 , $\Delta(B^1) = \{(x, x) : x \in B^1\}$, y los medio planos $H_\Delta^+ = \{(x, y) : y > x\}$ y $H_\Delta^- = \{(x, y) : y < x\}$. Nota que $\Delta(B^1)$ es la gráfica de la recta $y = x$ restringido a $B^1 \times B^1$. Ahora, defina conjuntos

$$A = \{(x, f(x)) : f(x) > x\}$$

$$B = \{(x, f(x)) : f(x) < x\}$$

$$C = \{(x, f(x)) : f(x) = x\}$$

Entonces C es el conjunto de puntos fijos de f . Nota que $A \subseteq H_\Delta^+$, $B \subseteq H_\Delta^-$, y $C \subseteq \Delta(B^1)$. También nota que los medio planos son abiertos en \mathbb{R}^2 . Ahora, como B^1 es compacto, y Hausdorff, se puede demostrar que G_f y $\Delta(B^1)$ son cerrados. Se puede ver la gráfica de f en el figura 2

Ahora, not que G_f es conexo ya que es la imagen de la función $i_{B^1} \times f$. Como f y i_{B^1} son continua, entonces $i_{B^1} \times f$ es continua. Entonces como B^1 es conexo, entonces $i_{B^1} \times f(B^1) = B^1 \times B^1$ es conexo. Ahora, nota que $G_f = A \cup B \cup C$. Suponga que $C = \emptyset$. Entonces $G_f = A \cup B$. Pero tenemos que $A \subseteq H_\Delta^+$, y $B \subseteq H_\Delta^-$, por lo tanto, A y B son conjuntos abiertos, y que A y B son disjuntos. Por lo tanto $A \cup B$ es una separación abierta de G_f , una contradicción. Por lo tanto $C \neq \emptyset$ y existe puntos fijos de f para $n = 1$. ■

Para $n > 1$ no se ha encontrado una demostración general del teorema de puntos fijos. De hecho, es muy difícil para demostrar en general. Pero, se puede usar la maquinaria de la topología algebraica para construir un bosquejo de una demostración.

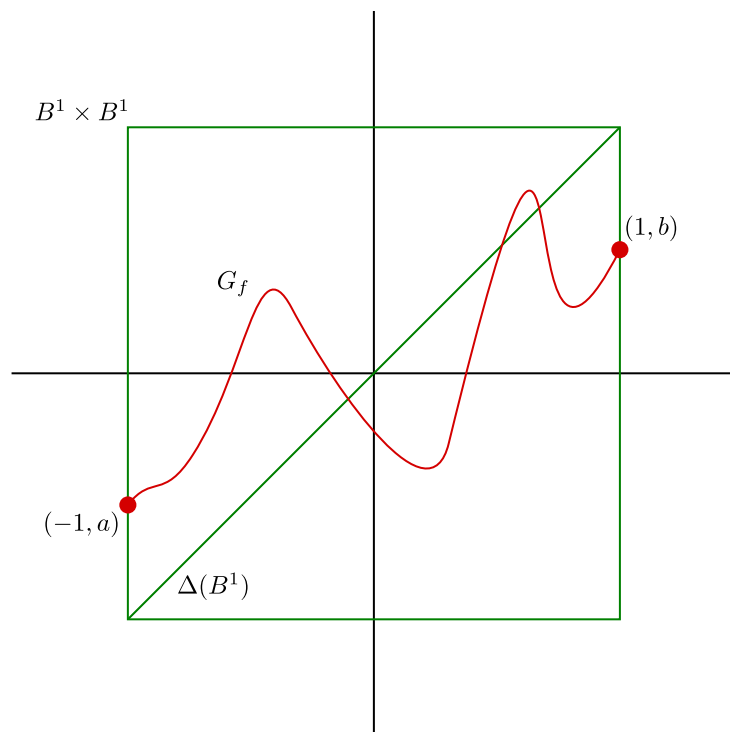


Figura 2: Demostración del teorema de puntos fijos de Brouwer.

Lectura 2