MATE6551-0U1
Prof. Ivan Cardona Torres
13.00 - 14.20
CNL-A-225

Topología Algebraica

Alec Zabel-Mena

Universidad de Puerto Rico, Recinto de Rio Piedras

11.10.2022

Lectura 1: La Teorema de Puntos Fijos de Brouwer.

Empezamos con declara notación Vamos a denotar las siguentes conjuntos:

Definición. Denotamos la n-**esfera** como el conjuno $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ y la n-**bola** como el conjunto $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, donde $\| \cdot \|$ el la **norma** en $\mathbb{R}^n$ que induca la topología usual de $\mathbb{R}^n$. Llamamos punto $N = (0, \dots, 0, 1)$ de S^n el **polo norte** de s^n y el punto $S = (0, \dots, -1)$ de S_n el **polo sur** de S^n. Definimos la **ecuador** de una $n+1$-esfera S^{n+1} de ser la n-esfera S^n.

Ejemplo 1. (1) S^1 es el circulo unitario en el plano $\mathbb{R}^2$, y S^2 es el esfera unitario en el espacio $\mathbb{R}^3$.

(2) Nota que $S^0 = \{-1, 1\}$ es la unica esfera no conexo en $\mathbb{R}$.

(3) Toda n-esfera tiene un polo norte y un polo sur. De hecho, el polo norte de S^0 es 1 y el polo sur es -1.

(4) Nota que el borde de una n-bola es una n-esfera. Es decir $\partial D^n = S^{n-1}$.

Definición. Denotamos una n-**simplejo estándar** de $\mathbb{R}^n$ de ser el conjunto $\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0 \text{ y } \sum x_i = 1\}$.

Ejemplo 2. (1) $\Delta^0 = \{1\} \subseteq \mathbb{R}$.

(2) Δ^1 es una recta entre los puntos $(0, 1)$ y $(1, 0)$ en $\mathbb{R}^2$ restrinjido a la primera caudrante.

(3) Δ^2 es una tetrahedro en la primer octánte de $\mathbb{R}$ con vertices en $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, y $(1, 0, 0)$. Se representa en la figura 1 también.

(4) Note que $\Delta^0 \subseteq \Delta^1 \leq \Delta^2$.

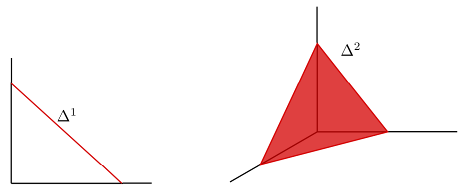

Figura 1: El 1-simplejo y 2-simplejo estánderes.

(5) Como espacions topologicos, se puede demostrar que los n-simplejos estándares son homeomorfo a los n-bolas. Es decir $\Delta^n \simeq D^n$.

Definición. Sea $f : A \to A$ una función. Llamamos u punto $x \in A$ un **punto fijo** si $f(x) = x$.

Teorema 1 (Teorema de Puntos Fijos de Brouwer)**.** *Sí $f : D^n \to D^n$ es una función continua, entonces existe un punto fijo en D^n para toda $n \geq 1$.*

demostración. Demostramos la teorema para $n = 1$. Es decir, que toda función $f : B^1 \to B^1$ tiene un punto fijo. Sean $a = f(-1)$ y $b = f(1)$. Sí $a = -1$ o $b = 1$, tenemos puntos fijos y terminamos.

Ahora, considere la gráfica de f, $G_f = \{(x, f(x)) : x \in B^1\}$, la diagonal de B^1, $\Delta(B^1) = \{(x, x) : x \in B^1\}$, y los medio planos $H_\Delta^+ = \{(x, y) : y > x\}$ y $H_\Delta^- = \{(x, y) : y < x\}$. Nota que $\Delta(B^1)$ es la grafica de la recta $y = x$ restringido a $B^1 \times B^1$. Ahora, defina conjuntos

$$A = \{(x, f(x)) : f(x) > x\}$$
$$B = \{(x, f(x)) : f(x) < x\}$$
$$C = \{(x, f(x)) : f(x) = x\}$$

Entonces C es el conjunto de puntos fijos de f. Nota que $A \subseteq H_\Delta^+$, $B \subseteq H_\Delta^-$, y $C \subseteq \Delta(B^1)$. Tambien nota que los medio planos son abiertos en $\mathbb{R}^2$. Ahora, como B^1 es compacto, y Hausdorff, se puede demostrar que G_f y $\Delta(B^1)$ son cerrados. Se puede ver la grafica de f en el figura 2

Ahora, not que G_f es conexo ya que es la imagen de la función $i_{B^1} \times f$. Como f y i_{B^1} son continua, entonces $i_{B^1} \times f$ es continua. Entonces como B^1 es conexo, entonces $i_{B^1} \times f(B^1) = B^1 \times B^1$ es conexo. Ahora, nota que $G_f = A \cup B \cup C$. Suponga que $C = \emptyset$. Entonces $G_f = A \cup B$. Pero tenemos que $A \subseteq H_\Delta^+$, y $B \subseteq H_\Delta^-$, por lo tanto, A y B son conjuntos abiertos, y que A y B son disjuntos. Por lo tanto $A \cup B$ es una separación abierta de G_f, una contradicción. Por lo tanto $C \neq \emptyset$ y existe puntos fijos de f para $n = 1$. ∎

Para $n > 1$ no se ha encontrado una demostración general del teorema de puntos fijos. De hecho, es muy dificil para demostrar en general. Pero, se puede usar la maquinaria de la topologiía algebraica para construir un bosquejo de una demostración.

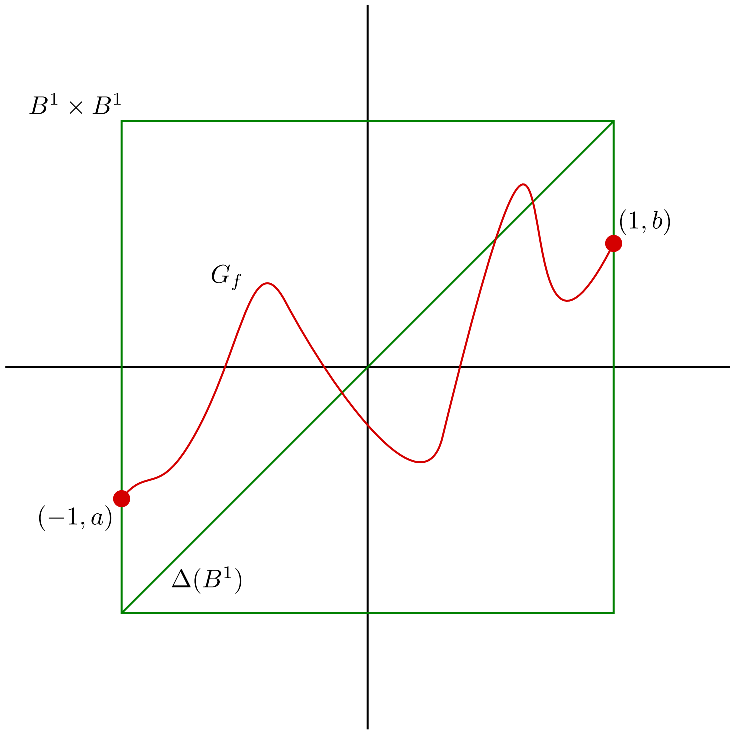

Figura 2: Demostración del teorema de puntos fijos de Brouwer.

Lectura 2: Demostración General del Teorema de Puntos Fijos de Brouwer

Definición. Sea X un subsepacio de un espacio topologico Y. Decimos que X es un **retracto** de Y sí existe una mapa continua $r : Y \to X$ donde $r(x) = x$ para todo $x \in X$. Llamamos a r una **retracción** de Y sobre X.

Es decir que el retracción de Y sobre X lleva sus puntos fijos en todo el X. Podemos ver que r es una mapa sobre, ya que $r(X) = X$ por definición.

Ahora recuerda que las mapas de inclusión y identidad para espacios topológicos son las mapas $i : X \to Y$ (donde X es subespacio de Y), y $1_X : X \to X$ dado por $i : x \to x$ y $1_X : x \to x$ para todo $x \in X$. La definición del retracto entonces se puede ver en la siguiente

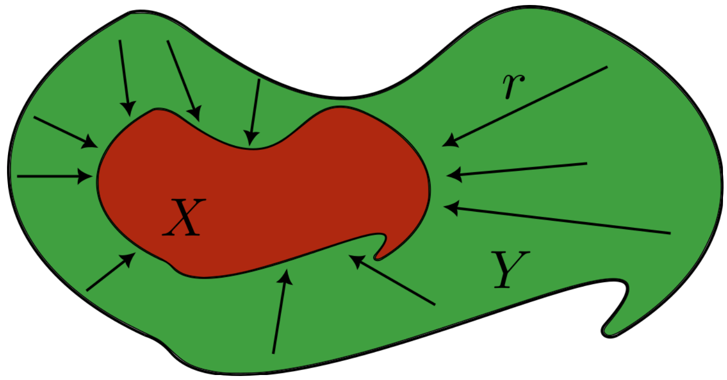

Figura 3: Un retracción $r : Y \to X$ de un espacio Y hacía un espacio X.

diagrama, llamado una diagrama “commutativa”:

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dr, dashed, "r"] & \\
X \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "1_X"'] & & X
\end{tikzcd}$$

Entonces, según esta diagrama, $r \circ i = 1_X$.

Dado una diagrama commutativa en el “universo“ de espacios topologicos, entonces queremos que las mapas sean mapas continuas. En este ejemplo, existe una “meta función“ llamado un “functor” $\mathcal{F}$ que lleva las espacios topologicos hacia grupos Abelianos, tal que las diagramas commutativas son preservada; es decir, $\mathcal{F}$ lleva mapas continuas hacia homomorfismos.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] & B \\
C \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 4: Una diagrama commutativa, donde A, B, C son conjuntos cualquieras, y f, g, y h son funciones cualquieras doned $f \circ g = h$.

Lema 2. *Sí $n \geq 0$, entonces S^n no es un retracto de D^{n+1}.*

demostración. Para $n = 0$, es facil ver. Si $r : D^1 \to S^0$ es un retracto, entonces la siguente diagrama

$$\begin{tikzcd} & D^1 \arrow[dr, dashed, "r"] & \\ S^0 \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "1_{S^0}"'] & & S^0 \end{tikzcd}$$

nos da $r \circ i = 1_{S^0}$ lo cual es imposible, ya que S^0 no es conéxo, y la imagen de D^1 como subsepacio de S^0 si lo es; es decir que $r(D^1) = \{1\}$, ó $r(D^1) = \{-1\}$. Entonces r no puede ser 1–1 y sobre lo cual contradice que $r \circ i = 1_{S^0}$ sea 1–1 y sobre.

Ahora, toma $n > 0$, entonces suponga que exista una retracción $r : D^{n+1} \to S^n$, con su diagrama de espacios topologicos y mapas continuas.

$$\begin{tikzcd} & D^{n+} \arrow[dr, "r"] & \\ S^n \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "1_{S^n}"'] & & S^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & H_n(D^{n+1}) \arrow[dr, "H_n(r)"] & \\ H_n(S^n) \arrow[ur, "H_n(i)"] \arrow[rr, "H_n(1_{S^n})"'] & & H_n(S^n) \end{tikzcd}$$

Entonces $r \circ i = 1_{s^n}$. Aplicando un functor particular llamado H_n, obtemeos una diagrama commutativa de grupos Abelianos y homomorfismos. Las dos diagramas se pueden ver arriba. Entonces tenemos que $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$, y $H_n(D^{n+1}) = \langle 0 \rangle$. Ahora tenemos que $H_n(r) \circ H_n(i) = H_n(1_{S^n}) = 1_{\mathbb{Z}}$. Esto es imposible ya que $1_{\mathbb{Z}}$ no se facotriza sobre $\langle 0 \rangle$; i.e. $H_n(r) \circ H_n(i) = 0 \neq 1_{\mathbb{Z}}$. Por lo tanto S^n no puede ser un retracto de D^{n+1}.

$$\begin{tikzcd} & \langle 0 \rangle \arrow[dr, "H_n(r)"] & \\ \mathbb{Z} \arrow[ur, "H_n(i)"] \arrow[rr, "1_{\mathbb{Z}}"'] & & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

■

Ahora reiteremos la teorema de Brouwer para la demostración para n general.

Teorema 3 (Teorema de Puntos Fijos de Brouwer)**.** *Sí $f : D^n \to D^n$ es una función continua, entonces existe un punto fijo en D^n para toda $n \geq 1$.*

demostración. Para $n > 1$, suponga que no hay puntos fijos. Entonces sea $f : D^n \to D^n$ y que $f(x) \neq x$ para todo $x \in D^n$. Defina entonces, la mapa $g : D^n \to S^{n-1}$ dado por la figura 5. Note que g es continua, y que $g(x) = x$ para todo $x \in S^{n-1}$. Puse, vemos que g es una

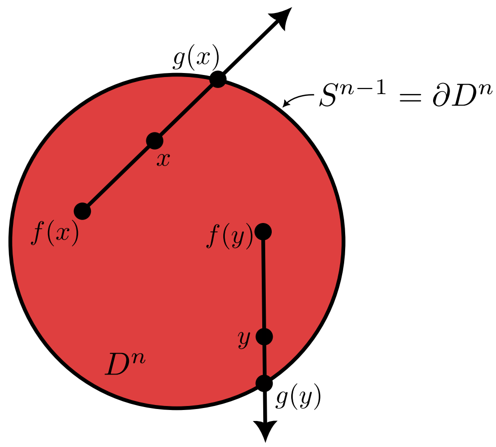

Figura 5

retracción, lo cual es imposible por el lema 2 Por lo tanto, no existen puntos fijos. ∎

Lectura 3: Categorías y Funtores.

Definición. Definimos una **clase** de ser una colección de objetos tal que sí T y A son clases, entonces $A \notin T$.

Definición. Una **categoría** $\mathcal{C}$ es un clase de objetos denotados por $\operatorname{obj} \mathcal{C}$ junto a una colección de conjuntos $\operatorname{Hom}(X, Y)$, para cualquieras $X, Y \in \operatorname{obj} \mathcal{C}$, de **morfismos** de X hacía Y, cuyas elementos estan denotados $f : X \to Y$ ó $X \xrightarrow{f} Y$, y una operación binaria $\circ : \operatorname{Hom}(X, Y) \times \operatorname{Hom}(Y, Z) \to \operatorname{Hom}(X, Z)$ llamado **composición** tal que si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son morfismos, entonces $g \circ f : X \to Z$ es un morfismo y:

(1) $\operatorname{Hom}(X, Y)$ y $\operatorname{Hom}(A, B)$ son disjuntas.

(2) La composición $\circ$ es associativa sí esta definido. Es decir, sy $g \circ (f \circ h)$ ó $(g \circ g) \circ h$ existen en $\operatorname{Hom}(X, Y)$, entonces $g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ g$.

(3) $\operatorname{Hom}(X, X)$ no es vacío y existe al menos un morfismo $1_X : X \to X$, llamado la **identidad** de X, tal que $1_X \circ f = f$ y $g \circ 1_X = g$ para morfismos $f : X \to Y$ y $g : Z \to X$, para cualquieras objetos $X, Y, Z \in \operatorname{obj} \mathcal{C}$

Definición. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Se llama el conjunto $\mathcal{M}_\mathcal{C}$ **los morfismos de la categoría** donde $\mathcal{M}_\mathcal{C}$ es la union de todos los conjuntos $\mathrm{Hom}\,(X, Y)$ para todos $X, Y \in \mathrm{obj}\,\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

Figura 6: Un ejemplo de composición de morfismos de una categoría

$$\begin{tikzcd}
X & X \arrow[l, "1_X"'] \arrow[r, bend left=15] \arrow[r] \arrow[r, bend right=15] & Y \arrow[l, bend right=40] \arrow[l, bend left=40] \arrow[r, "1_Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

Figura 7: Morfismos entre dos objetos X y Y de una categoría incluyendo las identidades de X y Y

Ejemplo 3. (1) Considere la categoría $\mathcal{C} = \mathrm{Conj}$, donde $\mathcal{C}$ es la clase de todo los conjuntos. Los morfismos de $\mathcal{C}$ son funciónes $f : X \to Y$ de un conjunto X hacía un conjunto Y.

(2) Sea $\mathcal{C} = \mathrm{Top}$ la categoría de espacios topológicos, donde $\mathrm{obj}\,\mathcal{C}$ es la colección de todas las espacios topológicos. Los morfismos de Top son funciónes continuas entre espacios topologicos. Es decir, $\mathrm{Hom}\,(X, Y) = \{f : f : X \to Y \text{ es continua}\}$. La composición de morfismos es la composicion de funciones usual.

(3) Sea $\mathcal{C} = \mathrm{Grp}$ la categoría de grupos, cuyas objetos son todo los grupos. Entonces los morfismos de Grp estan definido por los conjuntos $\mathrm{Hom}\,(G, H) = \{\phi : \phi : G \to H \text{ es un homomrfismo}\}$. La composición de morfismos es la composicion de funciones usual.

Definición. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{A}$ categorías con $\mathrm{obj}\,\mathcal{C} \subseteq \mathrm{obj}\,\mathcal{A}$. Decimos que $\mathcal{C}$ es una **subcategoría** de $\mathcal{A}$ sí $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}\,(X, Y) \subseteq \mathrm{Hom}_\mathcal{A}\,(X, Y)$ para todo $X, Y \in \mathrm{obj}\,\mathcal{C}$ ty la composición de $\mathcal{C}$ es la misma de $\mathcal{A}$.

Ejemplo 4. (1) Tenemos que Top y Grp son subcategorías de Conj.

(2) La categoría Top^2 de pares topologicos tiene como objetos son todas pares (X, A), donde X es un espacio topológico y $A \subseteq X$ es subsepacio de X. Los morfismos de

Top^2, para pare topologicos (X, Y) y (Y, B), son las funciones continuas $f : X \to Y$ donde $f(A) \subseteq B$ es subespacio de B.

(3) La categoría Top* de pares topologicos (X, a), donde a es un punto en X es una subcategoría de Top^2.

Definición. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Una **diagrama** de objetos y morfismos en $\mathcal{C}$ es un grafo dirigido cuya cunjunto de vertices es subconjunto de $\operatorname{obj} \mathcal{C}$ y cuyas aristas son morfismos entre esos vertices. Decimos que una diagrama es **commutativo** si para cualquieras vertices A, B, C, D en la diagrama, y cualquier morfismos $f : A \to B$, $i : C \to D$, $h : A \to C$, y $g : B \to D$, tenemos que $g \circ f = i \circ h$.

Ejemplo 5. Las figuras 6 y 7 son ejemplos de diagramas de objetos y morfismos en una categoriía.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, dashed, "g\circ f = i\circ h"] & B \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, "i"] & D
\end{tikzcd}
$$

Figura 8: Un diagrama commutativa entre objetos y morfismos de una categoría.

Lectura 4: Congruencias y Funtores.

Definición. Una **congruencia** es una categoría $\mathcal{C}$ junto con una relación de equivalencia $\sim$ sobre morfismos de $\mathcal{C}$ definido tal que si $f \in \operatorname{Hom}(A, B)$, y $f \sim g$, entonces $g \in \operatorname{Hom}(A, B)$, y si $f \sim f'$ y $g \sim g'$, entonces $g \circ f \sim g' \circ f'$.

Definición. Sea $\mathcal{C}$ una congruencia con relación de equivalencia $\sim$. Definimos la **categoría cociente**, ${}^{\mathcal{C}}\!/_{\sim}$ como la categoría cuya objetos son los objetos de $\mathcal{C}$ y morfismos son las clases de equivalencias de $\sim$. Si $[f] : A \to B$ es ub morfismo de ${}^{\mathcal{C}}\!/_{\sim}$, entonces denotamos su conjunto como $[f] \in [A, B]$.

Teorema 4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\sim$ una relación de equivalencia entre morfismos de $\mathcal{C}$. Entonces el coategoría cociente ${}^{\mathcal{C}}\!/_{\sim}$ es una categoría.*

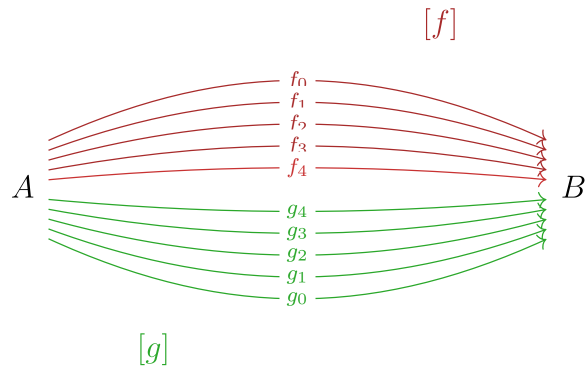

Figura 9: Una relación de equvalencia entre morfismos.

demostración. Nota que por definición que $\operatorname{obj} \mathcal{C}/{\sim} = \operatorname{obj} \mathcal{C}$, así que por hipotesis, $\operatorname{obj} \mathcal{C}/{\sim}$ es una clase. De igual manera, defina para todo $A, B \in \operatorname{obj} \mathcal{C}$, $[A, B] = \{[f] : f \in \operatorname{Hom}(A, B)\}$. Como $\operatorname{Hom}(A, B)$ es un conjunto para todo A y B, y $\sim$ particiona el conjunto de todos los $\operatorname{Hom}(A, B)$, entonces resulta que $[A, B]$ tiene que ser un conjunto tambien.

Ahora sean f y g morfismos de $\mathcal{C}$. Nota que por definición de una congruencia, que como $f \sim f'$ y $g \sim g'$ implica que $g \circ f \sim g' \circ f'$, entonces la comopsición $[g] \circ [f] = [g \circ f]$ esta bien definido, si existe. Ahora sea h un mrofismo. Entonces nota que $([g] \circ [f]) \circ [h] = [g \circ f] \circ [h] = [(g \circ f) \circ h] = [g \circ f \circ h]$ y $[g] \circ ([f] \circ [h]) = [g] \circ [f \circ h] = [g \circ (f \circ h)] = [g \circ f \circ h]$. Entonces tenemos que $\circ$ es associativa si $([g] \circ [f]) \circ [h]$ ó $[g] \circ ([f] \circ [h])$ esta definida.

Por ultimo, considere la identidad 1_A sobre el objeto A. Entonces nota que $[g] \circ [1_A] = [g \circ 1_A] = [g]$ y $[1_A] \circ [f] = [1_A \circ f] = [f]$; así que $[1_A]$ es la identidad de A en $\mathcal{C}/{\sim}$. Así que $\mathcal{C}/{\sim}$ es una categoría. ■

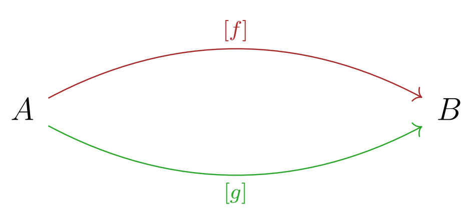

Figura 10: La categoría cociente $\mathcal{C}/{\sim}$, donde $\mathcal{C}$ es la categoría de la figura 9.

Definición. Sea $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ dos categorías. Un **funtor covariante** $T : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ es una map definido tal que si $A \in \operatorname{obj} \mathcal{A}$, entonces $T(A) \in \operatorname{obj} \mathcal{C}$ y si $f : A \to B$ es un morfismo en

$\mathcal{A}$, entonces $T(f) : T(A) \to T(B)$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, y que $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$ y $T(1_A) = 1_{T(A)}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} & & & & \mathcal{C} & \\
A & A \arrow[l, "1_A"'] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[r, Rightarrow, bend left, "T"] & T(A) & T(A) \arrow[l, "1_{T(A)}"] \arrow[r, "T(f)"] \arrow[dr, "T(g)\circ T(f)"'] & T(B) \arrow[d, "T(g)"] \\
 & & C & & & T(C)
\end{tikzcd}$$

Figura 11: Un funtor T covariante entre dos diagramas commutativas bajo las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$.

Definición. Sea $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ dos categorías. Un **funtor contravariante** $S : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ es una map definido tal que si $A \in \operatorname{obj} \mathcal{A}$, entonces $S(A) \in \operatorname{obj} \mathcal{C}$ y si $f : A \to B$ es un morfismo en $\mathcal{A}$, entonces $S(f) : T(B) \to T(A)$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, y que $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$ y $T(1_A) = 1_{T(A)}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} & & & & \mathcal{C} & \\
A & A \arrow[l, "1_A"'] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[r, Rightarrow, bend left, "S"] & S(A) \arrow[r, "1_{S(A)}"'] & S(A) & S(B) \arrow[l, "S(f)"'] \\
 & & C & & & S(C) \arrow[u, "S(g)"'] \arrow[ul, "S(f)\circ S(g)"]
\end{tikzcd}$$

Figura 12: Un funtor S contravariante entre dos diagramas commutativas bajo las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$.

Ejemplo 6. (1) Considere el funtor $F : \text{Top} \to \text{Conj}$ tal que sí X es un espacio topológico, entonces $T(X) = X$ como conjunto general y sí $f : X \to Y$ es una mapa continua, entonces $T(f) : X \to Y$ es una mapa general. Es decir este funtor lleva los espacios topologicos los funciones continuas a si mismos, pero quitando las nociones de topología. Este funtor es covariante, y se llama el **funtor olvidadizo**.

(2) El **funtor identidad** $J : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es el funtor que lleva objetos de $\mathcal{C}$ a si mismos, y morfismos de $\mathcal{C}$ a si mismos. Es decir, no cambia la categoría.

(3) Sea M un espacio topológico. Defina T_m : Top $\to$ Top definida por $T_M : X \to X \times M$ en el topologia producto, y $T_M : f \to f \times 1_M$, para cualquier mapa continua $f : X \to Y$. Entonces T_m es un funtor covariante.

Definición. Definimos una **equivalencia** de una categoría $\mathcal{C}$ de ser un morfismo $f : A \to B$ para lo cual existe un morfismo $g : B \to A$ tal que $g \circ g = 1_B$ y $g \circ f = 1_A$.

Ejemplo 7. Los equivalencias de la categoría Top son los homeomorfismos, y las equivalencias de Grp son los isomorfismos.

Teorema 5. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ categorías y $T : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ una functor. Entonces sí f es una equivalencia en $\mathcal{A}$, entonces $T(f)$ es una equivalencia en $\mathcal{C}$.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[l, bend left, "h"] \arrow[rr, bend left, Rightarrow, "T"] & & T(A) \arrow[r, bend left, "T(f)"] & T(B) \arrow[l, bend left, "T(h)"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[l, bend left, "h"] \arrow[rr, bend left, Rightarrow, "S"] & & S(A) \arrow[r, bend right, "S(h)"'] & S(B) \arrow[l, bend right, "S(f)"']
\end{tikzcd}$$

demostración. Suponga primero que T es covariante. Es decir que para cualquier morfismo $f : A \to B$, $T(f) : T(A) \to T(B)$ lleva a $T(A)$ a $T(B)$, y $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$. Ahora suponga que $f : A \to B$ es una equvalencia en $\mathcal{A}$. Entonces existe un morfismo $h : B \to A$ tal que $h \circ f = 1_B$ y $f \circ h = 1_A$. Entonoces $T(h \circ f) = T(h) \circ T(f) = 1_{T(B)}$ y $T(f \circ h) = T(f) \circ T(h) = 1_{T(A)}$. Entonces por definición, podemos ver que $T(f)$ es una equivalencia en $\mathcal{C}$.

De igual forma de T se contravariante, la demostración procede el mismo manera, con la diferencia que notamos que $T(f) : T(B) \to T(A)$ lleva a $T(B)$ a $T(A)$ para todo $f : A \to B$ y que $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$. ■

Lectura 5: Homotopía.

Definición. Sean X y Y espacios topologicos, y sean $f_0 : X \to Y$ y $f_1 : X \to Y$ mapas continuas. Decimos que f_0 es **homotópico** a f_1 sí existe una mapa continua $F : X \times I \to Y$ tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ y $F(x, 1) = f_1(x)$ para todo $X \in X$. Decimos que f_0 y f_1 son **homotópicos** y escribimos $f_0 \simeq f_1$.

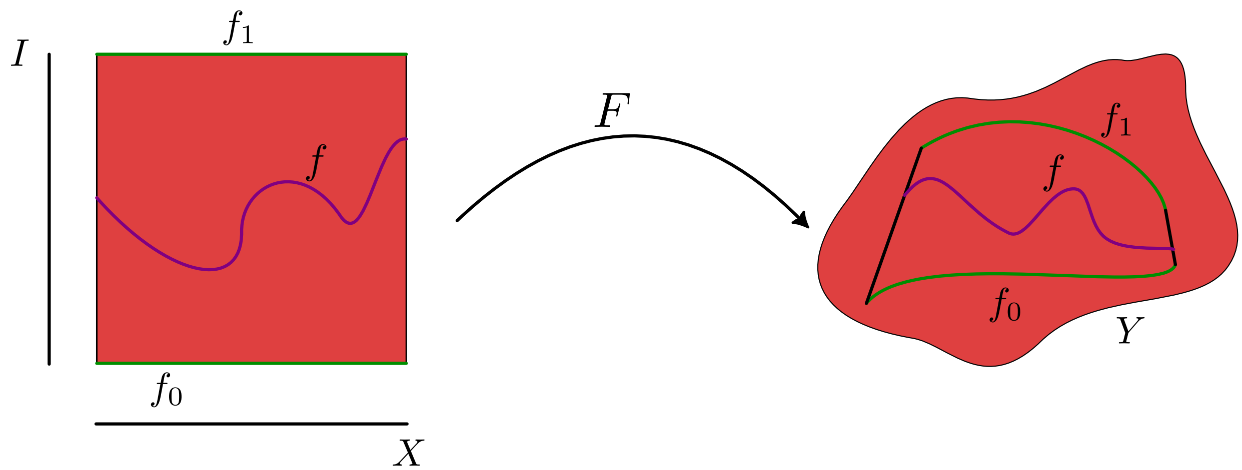

Figura 13: Dos mapas continuas f_0 y f_1 homotópicos.

Teorema 6 (Primer Teorema de Empaste)**.** *Sean X y Y espacios topologicos y $f : X \to Y$ una mapa. Entonces:*

(1) Sí $\{U_\alpha\}$ es una colección de conjuntos abiertos de X con $X = \bigcup U_\alpha$, tal que $f|_{U_\alpha}$ es continua, entonces f es continua.

(2) Sí $\{U_\alpha\}$ es una colección de conjuntos cerrados de X con $X = \bigcup U_\alpha$, tal que $f|_{U_\alpha}$ es continua, entonces f es continua.

Lema 7 (Segundo Teorema de Empaste)**.** *Sea X un espacio topologico que es una union finita de conjuntos cerrados en X, $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$. Sí Y es un espacio y $\{f_i\}_{i=1}^n$ una coleccion de mapas $f_i : X_i \to Y$ continuas que coincidan en la intersección, entonces existe una mapa continua $f : X \to Y$ tal que $f|_{X_i} = f_i$.*

demostración. Considere la mapa $f(x) = f_i(x)$ para todo $x \in X_i$. Entonces f coincida en la intersección con todo f_i, así que es bien definida, y es claro que $f|_{X_i} = f_i$.

Ahora sea C un conjunto cerrado en Y. Entonces $f^{-1}(C) = X \cap f^{-1}(C) = \bigcup_{i=1}^n X_i \cap f^{-1}(C) = \bigcup_{i=1}^n (X_i \cap f(C)) = \bigcup (X_i \cap f_i^{-1}(C))$. Ahora, X_i y f_i^{-1} están cerrados así que $X_i \cap f_i^{-1}(X)$ es cerrado. Entonces el union finita de ellos para todo i es cerrado, así que $f^{-1}(C)$ es cerrado en X, lo cual hace f continua. ∎

Lema 8 (Tercer Teorema de Empaste)**.** *Sea X un espacio topologico que es una union arbitraria de conjuntos abiertos en X, $X = \bigcup X_\alpha$. Sí Y es un espacio y $\{f_\alpha\}$ una coleccion de mapas $f_\alpha : X_\alpha \to Y$ continuas que coincidan en la intersección, entonces existe una mapa continua $f : X \to Y$ tal que $f|_{X_\alpha} = f_\alpha$.*

Lema 9. *La homotopía es una relación de equivalencia sobre mapas continuas.*

demostración. Sea X y Y espacios topologicos. Sea $f : X \to Y$ una mapa continua y define $F : X \times I \to Y$ con $F(x,t) = f(x)$ para todo $(x,t) \in X \times I$. Nota que para algún mapa continua $h : X \times I \to X \times I$, que $F = \pi_1 \circ h$ donde π_1 es la proyección de la primer parte.F es continua porque es la composición de mapas continuas. Entonces vemos que $(x,t) \xrightarrow{h} (f(x),t) \xrightarrow{\pi_1}\!\!\to f(x)$. Entonces podemos ver que $F(x,0) = F(x,1) = f(x)$, así que $f \simeq f$.

Ahora considere $f : X \to Y$, y $g : Y \to Z$ continuas tal que $f \simeq g$. Sea $F : X \times I \to Y$ la homotopía de esos dos mapas. Entonces $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = g(x)$. Defina la mapa $G : X \times I \to Y$ dado por $G(x,t) = F(x, 1-t)$. Como G solo transforma coordinadas, G es continua. Entonces vemos que $G(x,0) = F(x,1) = g(x)$ y $G(x,1) = F(x,0) = f(x)$; así que $g \simeq f$.

Por ultimo, sea $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ y $h : X \to Y$ mapas continuas tales que $f \simeq g$ y $g \simeq h$. Entonces existe homotopias $F : X \times I \to Y$ y $G : X \times I \to Y$ con $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$ y $G(x,0) = g(x)$, $G(x,1) = h(x)$. Considere la mapa $H : X \times I \to Y$ dado por:

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t), & \text{sí} 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1), & \text{sí } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Vemos que los dominios de F y H conininciden, y que son continuas. Así que por la teorema del empaste, H es continua. Entonces vemos que $H(x,0) = F(x,0) = f(x)$ y que $H(x,1) = G(x,1) = h(X)$ lo que hace $f \simeq h$. ■

Definición. Sea X y Y espacios topologicos y $f : X \to Y$ una mapa continua. La **clase de homotopía** de f es el conjunto de todo mapa continua homotopico a f; es decir $[f] = \{g : X \to Y : g \text{ es continua y } g \simeq f\}$.

Teorema 10. *Sean X y Y espacios topologicos y sea $f_i : X \to Y$ y $g_i : X \to Y$ mapas continuas para todo $i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Sí $f_0 \simeq f_1$ y $g_0 \simeq g_1$, entonces tenemos que $g_0 f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.*

demostración. Sean $F : X \times I \to Y$ y $G : X \times I \to Y$ homotopias entre f_0, f_1 y g_0, g_1, respectivamente. Afirmamos que $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_0$. Sea $H : X \times I \to Y$ la mapa definida como $H = G \circ f_0$. Es decir que $H(x,t) = G(f_0(x), t)$. Nota que como G y f_0 son continuas, entonces H es continua, y que $H(x,0) = G(f_0(x), 0) = g_0 \circ f_0(x)$ y $H(x,1) = G(f_0(x), 1) = g_1 \circ f_0(x)$. Así que $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_0$.

Ahora afirmamos que $g_1 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$. Considere $K : X \times I \to Y$ dado por $K = g_1 \circ F$. Como g_1 y F son continuas, tenemos K continua. Entonces $K(x,0) = g_1 \circ f_0(x)$ y $K(x,1) = g_1 \circ f_1(x)$. Entonces $g_1 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$. Por lo tanto, como homotopia es transitiva, obtenemos que $g_0 \circ f_0 g_1 \circ f_1$. ■

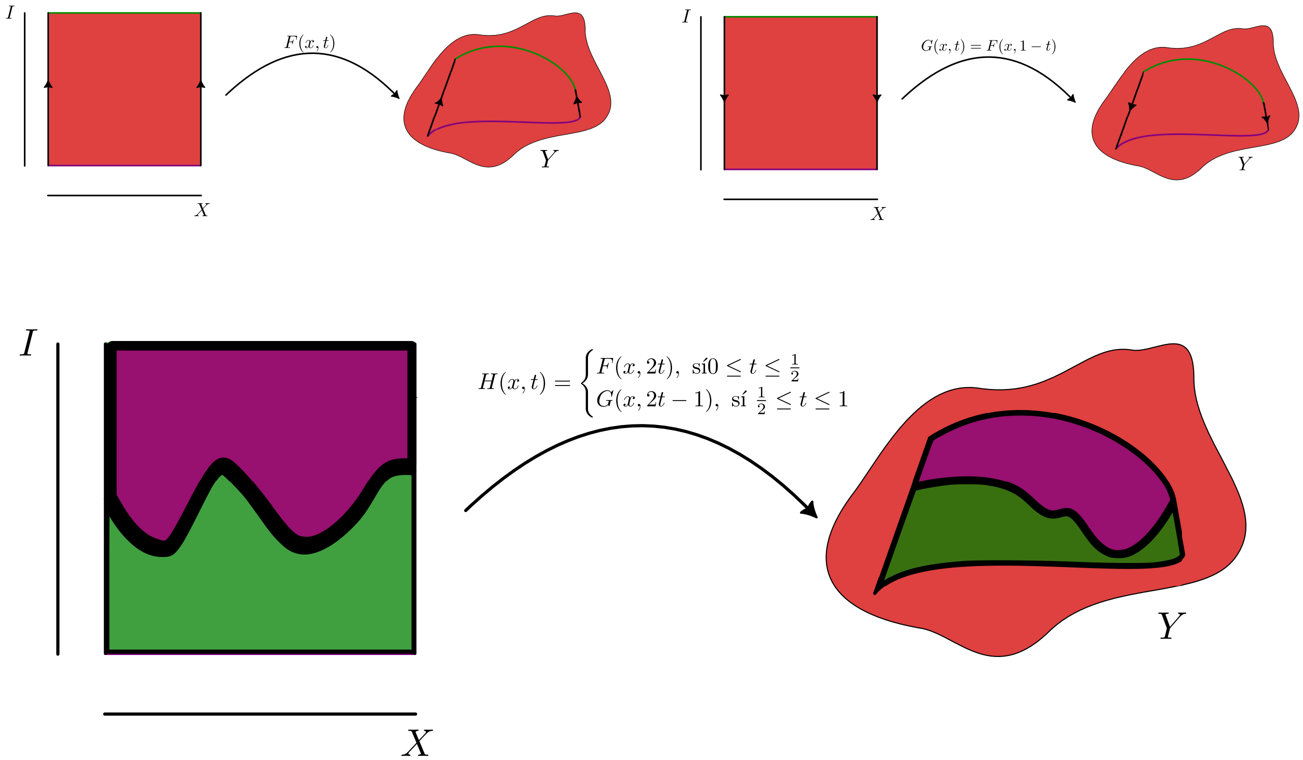

Figura 14: La equivalencia de Homotopía.

Corolario. *Homotoía defina una congruencia en la categoría* Top*.*

Definición. Definimos el **categoría homotópico** de ser la categoría cociente de Top bajo homotopía, y lo denotamos hTop.

Definición. Una mapa continua $f : X \to Y$ es una **equivalencia de homotopía** sí existe un $g : Y \to X$ tal que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$. Decimos entonces que X es de la misma **tipo de homotopía** que Y.

Ejemplo 8. Un circulo y un disco perforado no son homeomorfos, per sí son del mismo tipo de homotopia.

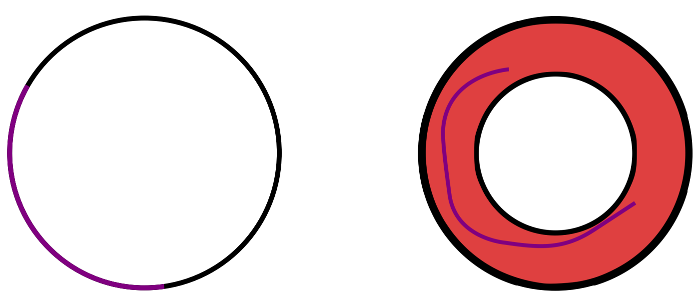

Figura 15

Definición. Sean X y Y espacios topologicos. Decimos que un mapa $f : X \to Y$ es **homotopicamente nula** sí es homotopico a una mapa constante en Y.

Lectura 6: La Teoreman Fundamental del Algebra.

Teorema 11 (La Teorema Fundamental del Algebra)**.** *Todo polinomio con coeficientes complejas tiene al menos una raíz complejo.*

demostración. Sea $\Sigma_\rho \subseteq \mathbb{C}$ el circulo de radio ρ en $\mathbb{C}$. Considere la mapa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dado por $f(z) = z^n$, y denota $f_\rho^n = f|_{\Sigma_\rho}$. Nota que los f_ρ^n son homotopicamentes nulas.

Ahora, considere el polinomio $g(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ donde $a_i \in \mathbb{C}$ para todo $0 \leq i \leq n$ y $\deg g = n \geq 1$. Escoga $\rho > \max\{1, \sum |a_i|\}$, y defina la mapa $F : \Sigma_\rho \times I \to \mathbb{C}$ dado por

$$F(z,t) = z^n + \sum_{i=0}^{n-1} (1-t) a_i z^i$$

Por la contunuidad de polinomios en $\mathbb{C}$, tenemos que F es continua. Mas aún tenemos que $F(z,0) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z_1 + a_0 = g(z)$ y $F(z,1) = z^n = f_\rho^n$. Así que $f_\rho^n \simeq g$ son homotopicos atraves de la homotopia F.

Afirmamos que $F(z,t) \neq 0$. Por lo contrario, asuma que existe un $(z,t) \in \Sigma_\rho \times I$ tal que $F(z,t) = 0$. Entonces tenemos que

$$z^n = -\sum_{i=0}^{n-1} (1-t) a_i z^i$$

Por la desigualdad de triangulo, tenemos

$$|z^n| = \rho^n \leq \sum (1-t)|a_i|\rho^i \leq \rho^{n-1} \sum (1-t)|a_i|$$

como $\rho > 1$ y $t \in I$ implica que $\sum (1-t)|a_i| \leq \sum |a_|$, tenemos que

$$\rho \leq \sum_{i=0}^{n-1} (1-t)|a_i|$$

lo cual contradice neustor escojido de ρ. Asi que $F(z,t) \neq 0$ para todos $(z,t) \in \Sigma_\rho \times I$.

Finalmente, tenemos que $F : \Sigma_\rho \times I \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Entonces suponga que $g(z)$ no tiene raices complejas. Defina $G : \Sigma_\rho \times I \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ dado por $G(z,t) = g((1-t)z)$. Tenemos que $(1-t)z$ es una mapa continua, y que g es continua; por lo tanto por composición, G tambien es continua (de hecho, es continua en z y en t). Mas aún, tenemos $G(z,0) = g(z)$ y

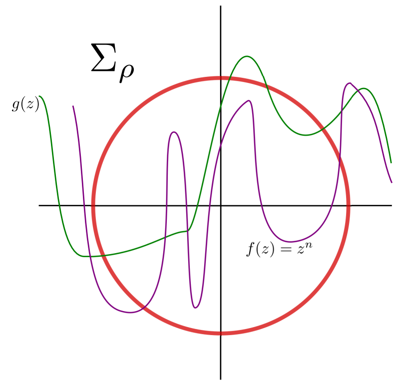

Figura 16: La teorema Fundamental del Algebra. Nota que f_ρ^n consiste de cuyas puntos de $f(z) = z^n$ cuyas puntos intersecan con Σ_ρ.

$G(z, 1) = g(0) = a_0$. Así que g es homotopica a la mapa constante $k : z \to a_0$, por lo tanto es homotopicamente nula. Por transitividad de homotopia, f_ρ^n tambien es homotopicamente nula, lo cual es imposible. Por lo tanto, g tiene que tener al menos una raiz en $\mathbb{C}$. ■

Lectura 7

Definición. Sea Y y Z espacios topologicos y $X \subseteq Z$ subespacio de Y. Sí $f : X \to Z$ es una mapa continua, entonces llamamos a la mapa $g : Y \to Z$ una **extensión** de X sí $g \circ i = f$ donde $i : X \to Y$ es la inclusión.

Teorema 12. *Sea $f : S^{n-1} \to Y$ unan mapa continua. Entonces los siguientes son equivalentes:*

(1) f es homotopicamente nula.

(2) f puede ser extendido a una mapa $g : D^n \to Y$.

(3) Sí $x_0 \in S^{n-1}$, y $k : S^{n-1} \to Y$ es una constante dado por $k : x \to f(x_0)$, entonces existe una homotopía F entre $f : S^{n-1} \times I \to Y$ y k con $F(x, t) = f(x_0)$ para todo x y t.

demostración. Ciertamente la condición (3) implica el (1). Suponga ahora que f es homotopicamente nula. Sea $F : f \simeq c_{y_0}$ la homotopía correspondiente, con $y_0 \in Y$. Defina $g : D^n \to Y$ como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} y_0, & \text{sí } 0 \leq \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ F(\frac{x}{\|x\|}, 2 - 2\|x\|), & \text{sí } \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1 \end{cases}$$

Nota que sí $\|x\| = \frac{1}{2}$, entonce $g(x) = F(2x, 1) = y_0$, así por la teorema del empaste, g es continua. Mas aún, si $\|x\| = 1$, $g(x) = F(x, 0) = f(x)$, así que g es una extensión de f.

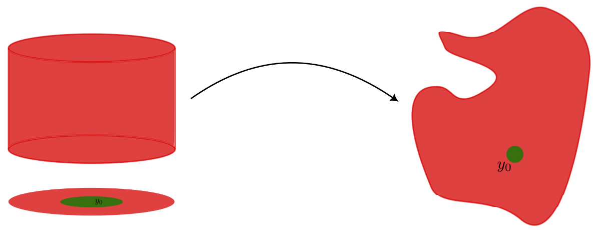

Figura 17: La definición de $g(x)$ que lleva a un cilindro a un disco perforado y rellena el hueco con y_0

.

Suponga ahora que existe un extensión $g : D^{n+1} \to Y$ de f. Como S^n es subsespacio de D^{n+1}, tenemos que $g \circ i = g|_{S^n} = f$. Sea $x_0 \in S^n$, y $k : x \to f(x_0)$ una mapa constante. Defina $F : S^n \times I \to Y$ dado por $F(x, t) = g((1-t)x + x_0 t)$. Entonces F es continua por composicion de mapas continuas, ademas $F(x, 0) = g(x) = f(x)$, como $x \in S^n$, y $F(x, 1) = g(x_0) = f(x_0) = k(x)$, como $x_0 \in S^n$. Por lo tanto, F defina una homotopia entre f y k. ■

Ejemplo 9. Considere S^{n-1} y D^n y considere la siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "1_{S^{n-1}}"] \arrow[d, "i"'] & S^{n-1} \\ D^n \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Sí g es una extensión de $1_{S^{n-1}}$, entonces tenemos que la diagrama es commutativa y que $g \circ i = 1_{S^{n-1}}$; es decir que g es una retracción de S^{n-1}, lo cual es imposible. Así que por la teorema anterior, $1_{S^{n-1}}$ no puede ser nulhomotopico.

Lectura 8: Espacios Contractibles y Convexidad.

Definición. Un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ se llama **convexo** sí para todo puntos $x, y \in X$, la recta trazada entre x y y esta contenido en X. Es decir, que para todo $t \in [0, 1]$, $(1-t)x + ty \in X$.

Definición. Llamamos a un espacio topologico X **contractible** sí la identidad en 1_X es homotopicamente nula.

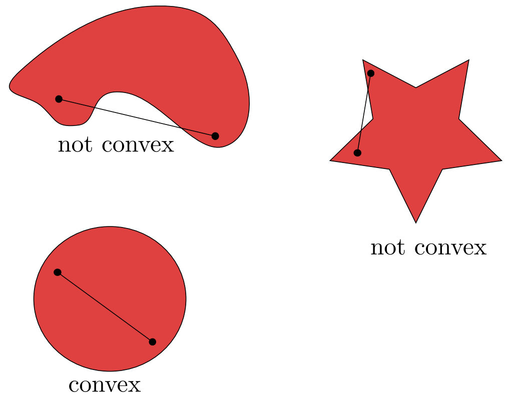

Figura 18: Espacios convexos y no convexos en $\mathbb{R}^n$. Nota que las estrellas no son convexos, pero el disco si es convexo.

Lema 13. *Espacios convexos son contractibles.*

Ejemplo 10. (1) El disco D^n es contracible como es convexo, pero la esfera S^{n-1} no es contractible como $1_{S^{n-1}}$ no puede ser homotopicamente nula.

(2) EL hemisferio norte de S^{n-1}, $H^+ = \{x \in S^{n-1} : x_{n-1} = 0\}$ es contractible, pero no convexo. Sí una considere los geodesicos sobre H^+ como las rectas, entonces resulta que sí H^+ es convexo.

Definición. Sea X un espacio topologico y X' una partición de X en conjuntos disjuntos X_α. Definimos la **aplicación canonica** de X sobre X' de ser la mapa $q : X \to X'$ tal que $q : x \to X_\alpha$ sí $x \in X_\alpha$.

Definición. Sea X un espacio topologico, X' una partición de X, y $q : X \to X'$ la aplicación canonica de X sobre X'. Definimos el **topologia cociente** de X' de ser la colección

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X' : q^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$$

Llamamos a X' bajo este topologia el **espacio cociente** de X.

Lema 14. *Sí X es un espacio topologico, y X' es su espacio cociente, entonces la aplicación canonica de X sobre X' es continua. Es decir que $q \in \mathrm{Hom}\,(X, X')$ en la categoria* Top.

Definición. Sea X un espacio topologico y $A \subseteq A$. Defina ${}^{X}\!/_{A} = \{A\} \cup \{y \in X : y \notin A\}$. Se llama a ${}^{X}\!/_{A}$ bajo el topología cociente el **espacio cociente** de X **colapsada** por A. Decimos que A **colapsa** a un punto bajo la topologia cociente.

Ejemplo 11. (1) Sí $X = [0, 1]$ y $A = \{0, 1\}$, entonces el espacio cociente ${}^{X}\!/_{A} \simeq S^1$ es homeomorfo al circulo. Se mostra de como se puede llegar de $[0, 1]$ hasta S^1 en el figura 19.

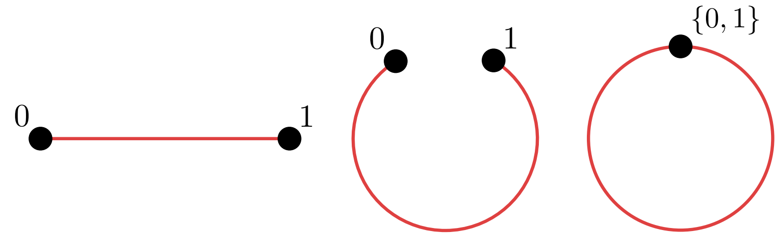

Figura 19: Se puede pensar en la aplicación canonica de $^{[0,1]}\!\diagup_{\{0,1\}}$ de coger el intervalo $[0, 1]$ y deformandolo hasta que pegas el punto 0 con el punto 1. El espacio resultante es S^1.

(2) $^{D^n}\!\diagup_{\partial D^n} = S^{n-1}$, que no es contractible.

(3) Sean $h : X \to Y$ una mapa. Defina la relacion $\ker h$ dado por $x \ker h x'$ sí y solo sí $h(x) = h(x')x'$. Entonces $^{X}\!\diagup_{h} = \{\phi([x]), x \in X\}$, donde $\phi([x]) = h(x)$ forma una topologia bajo la cociente.

Ahora sea $\phi : {}^{X}\!\diagup_{\ker h} \to Y$ 1–1. Se hace la siguiente diagrama commutativa:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "h"] \arrow[d, "q"'] & & Y \\
^{X}\!\diagup_{kerh} \arrow[urr, "\phi"'] & &
\end{tikzcd}$$

note que h es continua sí y solo sí ϕ es continua, mas aún, sí h lleva a X sobre Y, entonces ϕ es un homeomorfismo.

Definición. Sean X y Y espacios topologicos. Una mapa continua de $f : X \to Y$ de X sobre Y se llama una **identificación** si para todo U abierto en Y, $f^{-1}(U)$ esta abierto en X.

Ejemplo 12. (1) Sí $f : X \to Y$ es continua de X sobre Y, y abieerto o cerrado (Es decir U abierto o cerrado en X implica $f(U)$ abierto o cerrado en Y), entonces f es una identifación. Nota, que sí U esta abierto en Y, entonces por continuidad $f^{-1}(U)$ es abierto en X; además, por ser sobre, $U = f(f^{-1}(U))$ que esta abierto en Y. De igaul manera se produce lo mismo para cerrados, pero usnado complementos.

(2) Unas identificaciónes son la relación $\ker h$ y la aplicacón canonica.

Definición. Sean X, y Y espacios topologicos, y $f : X \to Y$ una identificación. Una mapa $s : X \to Y$ se llama una **sección** sí $f \circ s = 1_Y$.

Definición. Sea $f : X \to Y$ una mapa de un espacio topologico X hacia un espacio topologico Y. Sí $y \in Y$, llamamos $f^{-1}(y)$ la **fibra** de f sobre y.

Ejemplo 13. Las fibras de la aplicacion canonica q son los clases de equivalencias $[x] \in X/_{\ker h}$, para una mapa $h : X \to Y$.

Teorema 15. *Sea $f : X \to Y$ continua de espacios topologicos X sobre Y. Entonces, f es una identificación sıy solo sí para todo espcaio topologico Z, y un mapa $g : Y \to Z$, tenemos que g es continua sí y solo 'i $g \circ f$ es continua.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g\circ f"'] & Y \arrow[dl, "g"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

demostración. Suponga que f es una identifiacion. Sea Z un espacio topologico y $g : Y \to Z$. Sí g es continua, entonces $g \circ f$ es continua por composiciones. Ahora, por otro lado, si $g \circ f$ es continua, entonces dado V abierto en Z, tenemos que $f^{-1}(g^{-1}(V))$ es abierto en X. Como f es sobre, esto hace que $g^{-1}(V)$ sea abierto en Y.

Ahora considere el espacio Z, junto al mapa $g : Y \to Z$ tal que g es continua sí y solo sí $g \circ f$ es continua. Sea f continua de X sobre Y, y sea $Z = X/_{\ker f}$. Considera la aplicación canonica y la mapa $\phi([x]) = f(x)$, donde ϕ es 1–1.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/_{\ker f} \arrow[ur, "\phi^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

La diagrama arriba es commutativa, así que $f = \phi^{-1} \circ q$. Así que $\phi \circ f = q$, hacinedo q una identificacion. Entonces, sea $g = \phi^{-1}$. Tenemos que $g \circ f$ es continua, como $g \circ f = q$, así que por hipotesis, $g = \phi^{-1}$ tiene que ser continua. Como q tambien es una identificacion, esto hace que ϕ sea continua, así que ϕ es un homeomorfismo. Mas aún, $f = \phi^{-1} \circ q$, así que $f^{-1}(U) = (\phi^{-1} \circ q)^{-1}(U) = q^{-1}\phi(U)$. Como q es una identificación, $\phi(U)$ es abierto, esto hace que $f^{-1}(U)$ sea abierto. Es decir, f es una identificaion. ■

Corolario. *Si f es una identificacion, y $h : X \to Y$ continua, y constante en casda fibra de f, entonces $h \circ f^{-1} : Y \to Z$ es continua.*

Corolario. *Sí $h : X \to Z$ es una identificación, entonces la aplicación $\phi : {}^{X}\!/_{\ker h} \to Z$ definida por $\phi([x]) = h(x)$ es un homeomorfismo.*

Definición. Sea X un espacio topologico. Defina una relacion de equivalencia sobre $X \times I$ dado por $(x,t) \sim (x',t')$ sí y solo sí $t = t' = 1$. Denota la clase de equivalencia de (x,t) $[x,t]$. Entonces llamamos el espacio cociente ${}^{X \times I}\!/_{\sim}$ el **cono** sobre X, denotado por CX.

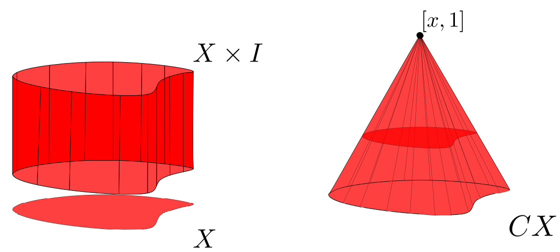

Figura 20: El cono CX sobre X, con vertice $[x,1]$.

Teorema 16. *Para todo espacio topologico X, el cono, CX es contractible.*

demostración. Defina la mapa $F : CX \times I \to CX$ por $[x,1]$. ■

Teorema 17. *El espacio topologico X tiene el mismo tipo de homotopia que un punto sí y solo sí X es contractible.*

demostración. Sea $\{a\}$ y suponga que $X \simeq \{a\}$. Entonces existen una mapas $f : X \to \{a\}$ y $g : \{a\} \to X$ con $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_{\{a\}}$. Pero vemos que $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(a) = x_0$ para algún $x_0 \in X$, así que $1_X \simeq c_{x_0}$.

Por otro lado, sí $1_X \simeq c_{x_0}$ para algún $x_0 \in X$, definia las mapas $f : X \to \{x_0\}$ y $g : \{x_0\} \to X$ dados por $x \xrightarrow{f} x_0$ y $x_0 \xrightarrow{g} x_0$. Entonces, $f \circ g = 1_{x_0}$y $g \circ f = 1_X$. ■

Corolario. *Sí Y es una espacio contractible, entonces cualqueiras dos mapas de $X \to Y$ son homotopicamente nulas.*

demostración. Sea $1_Y \simeq c_{y_0}$ para $y_0 \in Y$. Defina $g : X \to Y$ por $x \xrightarrow{g} y_0$ para todo $x \in X$. Entonces, $g \simeq c_{y_0}$. Ahora, sea $f : X \to Y$ una mapa cualquiera, entonces $1_Y \circ f \simeq c_{y_0} \circ f$. Nota que $1_Y \circ f = f$ y $c_{y_0} \circ f = g$, así que $f \simeq g$. ■

Lectura 9: Caminos y Conexidad por Caminos.

Definición. Un **camino** en un espacio topologica X es una mapa continua $f[0,1] \to X$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$ para algunos $a, b \in X$. Decimos que a es el **punto inicial**, y b el **punto final**. Decimos que f empieza **desde** a **hacia** b.

Definición. Un espacio topologico X es **conexo por caminos** sí para toda $a, b \in X$, existe un camino $f : [0,1] \to X$ desde a hacia b.

Teorema 18. *Sí un espacio topologico X es conexo por caminos, entonces es conexo.*

demostración. Sea X no conexo. Entonces existe una separacion de X en conjuntos abiertos U y V disjuntos; osea, $X = U \cup V$. Sea $a \in U$ y $b \in V$. Sí $f[0,1] \to X$ es un camino desde a hacia b, entonces existe una separación de la imagen $f([0,1])$. Pero $[0,1]$ es un conjunto conexo, por lo tanto, $f([0,1])$ tambien tiene que ser conexo. Esto es una contradicción. ■

Ejemplo 14. No todo los conjuntos conexos son conexos por camino.

(1) Considera la curva seno del topologo.

(2) Considera el **remolinon del topologo** definido de ser la siguiente curva: $S^1 \cup \{r \in \mathbb{R}^2 : r = \frac{\theta}{1+\theta}, \text{ donde } 0 \leq \theta\}$. El remolino es conexo, pero no es conexo por camino; la demostración de esto es similar al del curva seno del topologo.

Teorema 19. *Sí X es un espacio topologico, entonces la relación $\sim$ dado por $a \sim b$ sí y solo sí existe un camino desde a hacia b. Entonces $\sim$ es una realción de equivalencia.*

demostración. El camino constante $[0,1] \to X$ dado por $x \to a$ hace que $a \sim a$. Entonces, considere $a \sim b$. Entonces existe un camino $f : [0,1] \to X$ dado por $f : 0 \to a$ y $f : 1 \to b$. Defina entonces $g = f(1-t)$. g es continua por composicion, y $g : 0 \to b$ y $g : 1 \to a$. Así que $b \sim a$.

Finalmente, sea $a \sim b$ y $b \sim c$. Entonces existen caminos $f : [0,1] \to X$ y $g : [0,1] \to X$ dados por $f : 0 \to a, 1 \to b$ y $g : 0 \to b, 1 \to c$. Defina la mapa $h : [0,1] \to X$ dado por

$$h(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{sí } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \text{sí } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Por la teorema del empaste, h es continua. Mas aún, $h : 0 \to f(0) = a, 1 \to g(1) = c$. Así que ac. ■

Definición. Se llama las clases de equivalencia del espacio topologico X bajo conexidad de caminos los **componentes de caminos** de X. Escribimos $\pi_0(X) = X/\sim$ el conjunto de los componentes de camino. Dado $f : X \to Y$, definimos $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ la mapa que envia un conjunto de caminos, C de X a los unicos compnentes de caminos de Y, que contienen a $f(C)$.

Teorema 20. *$\pi_0 : \mathrm{Top} \to \mathrm{Conj}$ es un funtor.*

demostración. Sea $1_X : X \to X$, y sea $\pi_0(x) = \{X_\alpha\}$ donde X_α es un componente de camino. Entonces $\pi_0(1_X) : X_\alpha \to X_\beta$, así que $X_\alpha \subseteq X_\beta$. Como X_α y X_β son clases de equivalencia, entonces $X_\alpha = X_\beta$, es decir, $\alpha = \beta$. Por lo tanto $\pi_0(1_X) = 1_{\pi_0(X)}$.

Ahora sean $f : X \to Y$y $g : Y \to Z$ continuas. Sean $\pi_0(X) = \{X_\alpha\}$, $\pi_0(Y) = \{Y_\beta\}$, y $\pi_0(Z) = \{\mathbb{Z}_\gamma\}$ los conjuntos de componentes de caminos de, X, Y, y Z respectivamente. Considere X_α y Z_γ tales que $\pi_0(g \circ f)(X_\alpha) = Z_\gamma$. Entonces Z_γ contiene a $g \circ f(X_\alpha) = g(f(X_\alpha))$. Sea Y_β el comoponente que contiene a $f(X_\alpha)$, es decir, $\pi_0(f)(X_\alpha) = Y_\beta$. Entonces Y_γ es el unico tal componente, así que vemos que $g(f(X_\alpha)) \subseteq g(Y_\beta) \subseteq Z_\gamma$, y Z_γ es el unico componente que contienes a Y_β, y a X_α. Por lo tanto, tenemos que $\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$. Esto hace a π_0 un funtor en Top . ∎

Corolario. *Sí $f \simeq g$, son del mismo tipo de homotopia, entonces $\pi_0(f) = \pi_0(g)$.*

demostración. Suponga que $f \simeq g$ atraves de una homotopía F. Sea C un componente por caminos de X, entonces, $C \times I$ es conexo por caminos. Entonces, tenemos que $F(C \times I)$ es continua, por lo tanto, $F(C \times I)$ es conexo por caminos. Ahora, tenemos que $f(C) = F(C \times 0) \subseteq F(C \times I)$; de igaul forma, $g(C) \subseteq F(C \times 1) \subseteq F(C \times I)$. Así que el componente por caminos unico conteniendo a $F(C \times I)$ contiene a $F(C)$ y a $g(C)$. Por lo tanto, $\pi_0(f) = \pi_0(g)$. ∎

Corolario. *Sí dos espacios tienen el mismo tipo de homotopia, entonces tienen el mismo numero de componenetes por caminos.*

demostración. Suponga, que $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ son continuas, y satisfacen $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$. Aplicando π_0, venos que $\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f) = 1_{pi_0(X)}$ y $\pi_0(f \circ g) = \pi_0(f) \circ \pi_0(g) = 1_{pi_0(Y)}$. Esto implica que $\pi_0(g)$ es sobre, y que $\pi_0(f)$ es 1–1 en la categoria Conj. De igaul manera, vemos que $\pi_0(f)$ es sobre, y que $\pi_0(g)$ es 1–1, así que $\pi_0(f)$ y $\pi_0(g)$ son ambos 1–1 y sobre. Así que $\pi_0(X)$ y $\pi_0(Y)$ son equienumerables, así que tienen el mismo numero de componentes por caminos. ∎

Definición. Un componente de camino de un espacio topologico X se llama **maximal** si no hay ningun otro componente de camino que lo contiene. Es decir si C y B son componented de camino, con C maximal y $C \subseteq B$, entonces $C = B$.

Definición. Decimos que un espacio topologico es **localmente conexo por caminos** si para todo $x \in X$ y toda vecindad U de x, existe un abierto en X, V, con $x \in V \subseteq U$ tal que para todo $v_1, v_2 \in V$, existe un camino f en U con $f(0) = v_1$ y $f(1) = v_2$.

Teorema 21. *Un espacio topologico es localmente conexo por caminos sí, y solo sí los componentes de caminos de abiertos son abiertos.*

demostración. Sea X un espacio localmente conexo por caminos y sea U abierto en X, y C un componente de camino de U. Sea $c \in C$, por hipotesis, tenemos que existe un abierto V con $c \in V \subseteq U$ tal que para todo $x, y \in V$ existe un camino f en U desde x hacia y. Entonces V esta en un componente de camino de X. Como $c \in V$, tenemos que $c \in V \subseteq C$, lo cual hace C abierto.

Por otro lado, sean los componentes de caminos de conjuntos abiertos de X abiertos, y sea U un abierto de X. Sea C un componente de camino de X con $x \in C$, donde $x \in U$. Entonces $x \in C \subseteq U$, y por definicion, X es localmente conexo por caminos. ■

Corolario. *Sí X es un espacio localmente conexo por caminos, entonces todos los componentes de caminos de X son abiertas.*

Corolario. *X es un espacio localmente por caminos sí y solo sí para todo $x \in X$ y U una vecindad de x, existe un componente por camino V con $x \in V \subseteq U$.*

Corolario. *Sí X es localmente conexo por caminos, los componentes de caminos de X coincidan con los componentes convexos de X.*

demostración. Sea X localmente conexo por caminos, u U abierto en X, y C un componente conexo de X. Sea $\{A_\alpha\}$ una coleccion de componentes de caminos de C, entonces $C = \bigcup A_\alpha$ es una union disjunta de los A_α. Mas aun, A_α esta abierto en C (como subespacio de X). Entonces nota que $C \backslash A_\alpha = \bigcup_{\beta \neq \alpha} A_\beta$ lo que hace A_α cerrado en C. Ahora, si hay mas de una indice α, entonces tenemos una separación de C, lo cual es imposible. Es decir, $C = A_\alpha$. ■

Corolario. *Sí X es un espacio conexo, y localmente conexo por caminos, entonces X es conexo por caminos.*

Definición. Sea A un subespacio de un espacio topologico X. Llamamos a A un **retracto de deformación** sí existe una mapa $f : X \to A$ tal que $r \circ i = 1_A$ y $i \circ r \simeq 1_X$, donde $i : A \to X$ es la inclusion.

Teorema 22. *Sí A es una retracto de deformacion de un espacio topologico X, entonces A y X tienen el mismo tipo de homotopia.*

Ejemplo 15. S^1 es un retracto de deformacion de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, y igualmente de $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$.

Lectura 10: Simplejas.

Definición. Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es **afín** sí para todo $x, y \in A$, la recta l que pasa por x y y esta contenido en A.

Lema 23. *Sí $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es afín, entonces es convexo.*

Ejemplo 16. Los conjuntos $\emptyset$ y $\{x\}$, con $x \in \mathbb{R}^n$ son afín.

Teorema 24. *Sí $\{X\alpha\}$ es una colección de conjuntos afines en $\mathbb{R}^n$, entonces el interseccion de todos es afin.*

demostración. Sea $X = \bigcap X_\alpha$ con $X_\alpha \in \mathbb{R}^n$ afín. Sean $x, y \in X$ y $l(x, y)$ la recta que pasa por x y y. Entonces $l(x, y) \in X_\alpha$ para todo α lo cual hace $l(x, y) \in X$. Por lo tanto X es afín. ■

Corolario. *Sí $\{X\alpha\}$ es una colección de conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$, entonces el interseccion de todos es convexos.*

Definición. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Llamamos al interseccion de todos los conjuntos afines conteniendo a X el **casco afín** abarcado por X. De igual forma, la interseccion de todos conjuntos convexos conteniendo a X se llama el **casco convexo** abarcado X. En ambos casos, denotamos el casco afin o convexo como $[X]$. Sí $x_0, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$, escribimos $[\{x_0, \ldots, x_m\}] = [x_0, \ldots, x_m]$.

Definición. Una **combianción afín** de puntos $x_0, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ es un punto x tal que:

$$x = t_0 x_0 + \cdots + t_m x_m$$

donde $\sum t_i = 1$. Una **combinación convexo** es una combinacion afin donde $y_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq m$.

Teorema 25. *Sí $x_0, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$, entonces $[x_0, \ldots, x_m]$ el casco convexo abarcado por estos puntos es el conjunto de toda las combinaciones convexas de $x_0, \ldots, x_m$.*

demostración. Sea S el conjunto de todas las combinaciones convexas de $x_0, \ldots, x_m$. Entonces $[x_0, \ldots, x_m] \subseteq S$; pues, sea $t_j = 1$ y $t_i = 0$ para todo $i \neq j$, entonces $x_j \in S$, as í que $\{x_0, \ldots, x_m\} \subseteq S$. Ahora, sea $\alpha = \sum a_i x_i$ y $\beta = \sum b_i x_i$ donde $a_i, b_i \geq 0$ y $\sum a_i = \sum b_i = 1$. Nota que

$$t\alpha + (1-t)\beta = \sum (ta_i + (1-t)b_i)x_i$$

mas aun, $\sum ta_i + (1-t)b_i = 1$ y que $ta_i + (1-t)b_i \geq 0$ para todo $0 \leq i \leq m$. Así que S es convexo.

Ahora, sea X convexo con $\{x_0, \ldots, x_m\} \subseteq X$ por induccion en m, sí $m = 0$, $S = \{x_0\}$ lo que hace $S \subseteq X$. Ahora, considere para $m \geq 0$. Sea $t_i \geq 0$ y $\sum t_i = 1$ tal que $x = \sum t_i x_i$. Si $t_0 = 1$, entonces $p = \sum t_i x_i = x_0 \in X$. Ahora, si $t_0 \neq 1$, considere la combinacion

$$q = (\frac{t_1}{1-t_0})x_1 + \cdots + (\frac{t_m}{1-t_0})x_m$$

Entonces, vemos q es una combinacion convexa, y por hipotesis, $q \in X$. Entonces la combinacion $x = t_0x_0 + (1 - t_0)q \in X$, lo que hace X convexo. Ahora, nota que $[x_0, \ldots, x_m]$ es convexo y contiene $\{x_0, \ldots, x_m\}$, por lo tanto $S \subseteq [x_0, \ldots, x_m]$. ■

Definición. Una colección de puntos $x_0, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ son **afín independiente** si la colección $x_1 - x_0, \ldots x_m - x_0$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial.

Ejemplo 17. $\emptyset$ y $\{x_0\}$ son afin independientes en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 26. *Las siguientes enunciados son equivalentes para todo $x_0, , x_m \in \mathbb{R}^n$:*

(1) $x_0, \ldots, x_m$ son afín independiente.

(2) Sí $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ tales que $\sum a_ix_i = 0$ y $\sum a_i = 0$, entonces $a_0 = \cdots = a_m = 0$.

(3) Sí A es abarcado afinmente por $x_0, \ldots, x_m$, entonces cada $x \in A$ tiene una representacion unica como combinacion afin de $x_0, \ldots, x_m$.

demostración. Suponga, primero, que $x_0, \ldots, x_m$ son afín independiente. Ahora, sea $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ tales que $\sum a_i = 0$, y que $\sum a_ix_i = 0$. Entonces vemos que

$$\sum a_ix_i = \sum a_{xi} - 0 \cdot x_0 = \sum (a_ix_i - x_0 \sum a_i) = \sum a_i(x_i - x_0) = 0$$

Como $x_0, ;x_m$ son afín independientes, entonces $x_1 - x_0, \ldots, x_m - x_0$ son linealmente independiente, lo cual implica que $a_0 = \cdots = a_m = 0$.

Ahora, suponga que el segundo enunciado sea cierto. Sea A abarcado por $x_0, \ldots, x_m$, y suponga que $x \in A$ tal que $x = \sum a_ix_i$ y $\sum a_i = 1$. Sea tambien $x = \sum b_ix_i$ donde $\sum b_i = 1$. Entonces tenemos que $\sum a_ix_i = \sum b_ix_i$ por lo tanto $\sum (a_i - b_i)x_i = 0$, mas aun $\sum a_i - b_i = \sum a_i - \sum b_i = 0$. Entonces, vemos que $a_i - b_i = 0$ lo que hace $a_i = b_i$.

Por ultimo, suponga que A es abaracado por x_0, x_m y que todo $x \in A$ se puede escribir unicamente como una combinacion afín de $x_0, \ldots, x_m$. Es decir, $x = \sum a_ix_i$. Sí $m = 1$, tenemos el resultado. Ahora, suponga quie $m \geq 1$. Suponga que $x_1 - x_0, \cdots x_m - x_0$ son linealmente dependientes. Entonces existen $r_i \in \mathbb{R}$, no todos 0 con $\sum r_i(x_i - x_0) = 0$. Entonces para una $r_j \neq 0$.

$$\sum \frac{r_i}{r_j}(x_i - x_0) = 0$$

Suponga, sin perder la generalidad, que hay un $r_j = 1$. Entonces $x_j \in \{x_0, \ldots, x_m\}$ y tiene las representaciones:

$$\begin{aligned} x_j &= x_j = 1 \cdot x_j \\ x_j &= -\sum_{i\neq j} r_i x_i + (1 + \sum_{i\neq j} r_j) x_0 \end{aligned}$$

Esto contradice que cada $x \in X$ tiene representación unica, por lo tanto $x_1 - x_0, \dots, x_m - x_0$ tienen que ser linealmente indpendiente, por lo tanto $x_0, \dots, x_m$ es afín independiente. ■

Corolario. *Una combinación afín es independiented del orden en lo que esta dado.*

Corolario. *Sí A es afín en $\mathbb{R}^n$, y esta abarcado por $p_0, \dots, p_m$, afín independientes, entonces A es una traslación de un subespacio vectorial m-dimensional de $\mathbb{R}^n$. A saber, $A = V + x_0$.*

demostración. Sean $x_0 = p_0$ y V el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ con base $\{p_1 - p_0, \dots, p_m - p_0\}$, Por un lado, sí $z \in A$, entonces $z = \sum t_i p_i$ donde $\sum t_i = 1$. Entonces $z = \sum t_i p_i + t_0 p_0 = \sum t_i p_i - \sum t_i p_0 + (t_0 + \sum t_i) p_0 = \sum t_i (p_i - p_0) + p_0 \in V + x_0$. Por otro lado, sí $z \in V + x_0$, entonces $z = \sum t_i (p_i - p_0) + x_0 = \sum t_i (p_i - p_0) + p_0 = \sum t_i p_i$ y vemos que $\sum t_i = 1$, así que $z \in Z$. ■

Definición. Sea $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ afín indpendientes. Sí $t_0, \dots, t_m \in \mathbb{R}$ tales que $x = \sum t_i x_i$, llamamos a los $t_i a_i$ las **coordinadas baricentricas** de $x \in \mathbb{R}^n$ y lo representamos como $(t_0 x_0, \dots, y_m, x_m)$.

Definición. Sea $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ afín independiente. Llamamos al casco convexo, $[x_0, \dots, x_m]$ abarcado por los puntos un m**-simplejo** con **vértices** $x_0, \dots, x_m$. Llamamos el m-simplejo $[e_0, \dots, e_m]$ el m-simplejo **estandar**, donde $\{e_0, \dots, e_m\}$ es el base estandar de $\mathbb{R}^{m+1}$, y lo denotamos Δ^m.

Lema 27. *Sea $[e_0, \dots, e_m]$ el m-simplejo estandar. Entonces las coordinadas baricentricas de un punto $x \in [e_0, \dots, e_m]$ coenciden con las coordinadas cartesianas de x.*

Definición. Sea $[x_0, \dots, x_m]$ un m-simplejo. La **cara opuesta** a x_i, para $0 \leq i \leq m$ es el $m-1$-simplejo, denotado $[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_m] = \{\sum a_j x_j : a_j \geq 0, \sum a_j = 1, a_i = 0\}$. Para $0 \leq k \leq m-1$, una k**-cara** es un k-simplejo formado por $k+1$ elementos de un m-simplejo.

Definición. Definimos el **borde** de un m-simplejo $[x_0, \dots, x_m]$ de ser la union de todas las caras opuestas a x_i, para $0 \leq i \leq m$. Lo denotamos como $\partial[x_0, \dots, x_m]$.

Ejemplo 18. Las 1-caras del 3-simplejo $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ son $[x_0, x_1], [x_0, x_3], [x_1, x_2], [x_1, x_3]$, $[x_2, x_3]$, y $[x_0, x_3]$. Nota que hay $\binom{4}{2} = 6$ 1-caras. Nota que los 1-caras son los aristas del tetrahedo.

Definición. Definimos al **baricentro** de un m-simplejo $[x_0, \ldots, x_m]$ de ser el punto $\frac{1}{m+1} \sum x_i$

Teorema 28. *Denote al n-simplejo $[x_0, \ldots, x_n]$ por S. Entonces:*

(1) Sí $u, v \in S$, entonces $\|u - v\| \leq \sup_i \|u - x_i\|$.

(2) $\operatorname{diam} S = \sup_{i,j} \|x_i - x_j\|$.

(3) Sí b es el baricentro de S, entonces $\|b - x_i\| \leq \frac{n}{n+1} \operatorname{diam} S$

demostración. Sean $u, v \in S$ y $v = \sum t_i x_i$ donde $\sum t_i = 1$ y $t_i \geq 0$. Entonces $\|u - v\| = \|u \sum t_i = \sum t_i v_i\| \leq t_i \|u - x_i\| \leq \sum t_i \sup_i \|i - x_i\| = \sup_i u - x_i$.

Ahora, note que por la condicion de arriba, $\|u - x_i\| \leq \sup_j \|x_i - x_j\| \leq \sup_i (\sup_j \|x_i - x_j\|) = \sup_{i,j} \|x_i - x_j\|$. Por lo tanto, $\operatorname{diam} S \leq \sup_{i,j} \|x_i - x_j\|$.

Por ultimo, sea $b = \frac{1}{n+1} \sum x_i$. Entonces tenemos que $\|b - x_i\| = \| \sum \frac{1}{n+1} x_j - p_i\| = \| \sum \frac{1}{n+1} x_j - \sum \frac{1}{n+1} x_i\| \leq \frac{1}{n+1} \sum \|x_j - x_i\| \leq \frac{1}{n+1} \sum \sup_{i,j} \|x_j - x_i\| \leq \frac{n}{n+1} \sup \|x_j - x_i\|$. ■

Definición. Sea $x_0, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ afín independientes y sea A el conjunto afín abarcado por estos puntos. Una **aplicación afín** es una mapa $T : A \to \mathbb{R}^k$, para $1 \leq k \leq n$ tal que:

$$T(\sum t_i x_i) = \sum t_i t(x_i)$$

donde $\sum t_i = 1$.

Lema 29. *Una aplicación afín preserva las combinaciones convexos.*

Teorema 30. *Sean $[x_0, \ldots, x_m]$ y $[y_0, \ldots, y_n]$ m y n-simplejos, respectivamente. Sí $f : \{x_0, \ldots, x_m\} \to [y_0, \ldots, y_n]$ es una mapa, entonces existe una unica aplicaion afin $T : [x_0, \ldots, x_m] \to [y_0, \ldots, y_n]$ tal que $T(x_i) = f(x_i)$ para todo $1 \leq i \leq m$.*

demostración. Defina $T(\sum t_i x_i) = \sum t_i f(x_i)$, donde $\sum t_i = 1$. Esta mapa es una aplicacion afin, y su unicidad es consequencia de la unicidad de las coordenadas baricentricas. ■

Lectura 11: El Grupo Fundamental.

Definición. Sea X un espacio topologico y $f : [0, 1] \to X$ y $g : [0, 1] \to X$ caminos en X con $f(1) = g(0)$. Definimos el **producto de caminos** de ser la operacion $*$ que lleva

$(f, g) \to f * g$ tal que

$$f * g(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{sí } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \text{'i } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Lema 31. *El producto de caminos es una mapa continua.*

demostración. Esto sigue del teorema del empaste. ■

Corolario. *El producto de caminos es un camino.*

Definición. Sea X un espacio topologico, y A subespacio de X. Sean $f_0 : X \to Y$ y $f_1 : X \to Y$ mapas continuas con $f_0|_A = f_1|_A$. Decimos que f_0 es **relativamente homotopico** a f_1, relativo a A sí existe una mapa continua $F : X \times [0, 1] \to Y$ tal que $F : f_0 \simeq f_1$ y $F(a, t) = f_0(a) = f_1(a)$ para todo $a \in A$. Escribimos $f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} A$ y llamamos a $F : f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} A$ la **homotopia relativa** entre f_0 y f_1.

Ejemplo 19. Sea X un espacio topologico y $A = \emptyset$. Entonces la relacion $f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} A$ es nada mas que la homotopia usual $f_0 \simeq f_1$. Llamamos a este homotopia relativa la **homotopia libre**.

Lema 32. *La relacion $\simeq_A$ de homotopia relativa es una relacion de equivalencia.*

Definición. Sea ∂I el borde de $I = [0, 1]$. Llamaos las clases de equivalencias de la homotopia relativa $\simeq_{\partial I}$ **clases de caminos**. Sí f es un camino, denotamos el clase de caminos de f por $[f]$.

Teorema 33. *Suponga que f_0, f_1 y g_0, g_1 son caminos en un espacio topologico X tales que $f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} \partial I$ y $g_0 \simeq g_1 \operatorname{rel} \partial I$. Sí $f_0(1) = g_0(0)$ y $f_1(1) = g_1(0)$, entonces $f_0 * g_0 \simeq f_1 * g_1 \operatorname{rel} \partial I$.*

demostración. Sean $F : f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} I$ y $G : g_0 \simeq g_1 \operatorname{rel} I$ homotopias relativas entres f_0 y f_1, y g_0 y g_1. Defina la mapa $H : [0, 1] \times [0, 1] \to Y$ dado por

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t), & \text{sí } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s-1, t), & \text{sí } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Por el teorema del empaste, vemos que H es continua, ademas vemos que $H(0, t) = F(0, t) = f_0 * g_0(t)$, y $H(1, t) = G(1, t) = f_1 * g_1(t)$. Así que $H : f_0 * g_0 \simeq f_1 * g_1 \operatorname{rel} \partial I$ es una homotopia relativa. ■

Corolario. $[f_0 * g_0] = [f_1 * g_1]$.