MATE6551-0U1
Prof. Ivan Cardona Torres
13.00 - 14.20
CNL-A-225

Topología Algebraica

Alec Zabel-Mena

Universidad de Puerto Rico, Recinto de Rio Piedras

23.08.2022

Lectura 1: La Teorema de Puntos Fijos de Brouwer.

Empezamos con declara notación Vamos a denotar las siguentes conjuntos:

Definición. Denotamos la n-**esfera** como el conjuno $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ y la n-**bola** como el conjunto $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, donde $\| \cdot \|$ el la **norma** en $\mathbb{R}^n$ que induca la topología usual de $\mathbb{R}^n$. Llamamos punto $N = (0, \dots, 0, 1)$ de S^n el **polo norte** de s^n y el punto $S = (0, \dots, -1)$ de S_n el **polo sur** de S^n. Definimos la **ecuador** de una $n+1$-esfera S^{n+1} de ser la n-esfera S^n.

Ejemplo 1. (1) S^1 es el circulo unitario en el plano $\mathbb{R}^2$, y S^2 es el esfera unitario en el espacio $\mathbb{R}^3$.

(2) Nota que $S^0 = \{-1, 1\}$ es la unica esfera no conexo en $\mathbb{R}$.

(3) Toda n-esfera tiene un polo norte y un polo sur. De hecho, el polo norte de S^0 es 1 y el polo sur es -1.

(4) Nota que el borde de una n-bola es una n-esfera. Es decie $\partial D^n = S^{n-1}$.

Definición. Denotamos una n-**simplejo estáandar** de $\mathbb{R}^n$ de ser el conjunto $\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0 \text{ y } \sum x_i = 1\}$.

Ejemplo 2. (1) $\Delta^0 = \{1\}\mathbb{R}$.

(2) Δ^1 es una recta entre los puntos $(0, 1)$ y $(1, 0)$ en $\mathbb{R}^2$ restrinjido a la primera caudrante.

(3) Δ^2 es una tetrahedro en la primer octánte de $\mathbb{R}$ con vertices en $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, y $(1, 0, 0)$. Se representa en la figura 1 también.

(4) Note que $\Delta^0 \subseteq \Delta^1 \leq \Delta^2$.

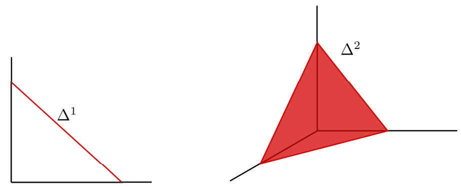

Figura 1: El 1-simplejo y 2-simplejo estánderes.

(5) Como espacions topologicos, se puede demostrar que los n-simplejos estándares son homeomorfo a los n-bolas. Es decir $\Delta^n \simeq D^n$.

Definición. Sea $f : A \to A$ una función. Llamamos u punto $x \in A$ un **punto fijo** si $f(x) = x$.

Teorema 1 (Teorema de Puntos Fijos de Brouwer)**.** *Sí $f : D^n \to D^n$ es una función continua, entonces existe un punto fijo en D^n para toda $n \geq 1$.*

demostración. Demostramos la teorema para $n = 1$. Es decir, que toda función $f : B^1 \to B^1$ tiene un punto fijo. Sean $a = f(-1)$ y $b = f(1)$. Sí $a = -1$ o $b = 1$, tenemos puntos fijos y terminamos.

Ahora, considere la gráfica de f, $G_f = \{(x, f(x)) : x \in B^1\}$, la diagonal de B^1, $\Delta(B^1) = \{(x, x) : x \in B^1\}$, y los medio planos $H^+_\Delta = \{(x, y) : y > x\}$ y $H^-_\Delta = \{(x, y) : y < x\}$. Nota que $\Delta(B^1)$ es la grafica de la recta $y = x$ restringido a $B^1 \times B^1$. Ahora, defina conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{(x, f(x)) : f(x) > x\} \\ B &= \{(x, f(x)) : f(x) < x\} \\ C &= \{(x, f(x)) : f(x) = x\} \end{aligned}$$

Entonces C es el conjunto de puntos fijos de f. Nota que $A \subseteq H^+_\Delta$, $B \subseteq H^-_\Delta$, y $C \subseteq \Delta(B^1)$. Tambien nota que los medio planos son abiertos en $\mathbb{R}^2$. Ahora, como B^1 es compacto, y Hausdorff, se puede demostrar que G_f y $\Delta(B^1)$ son cerrados. Se puede ver la grafica de f en el figura 2

Ahora, not que G_f es conexo ya que es la imagen de la función $i_{B^1} \times f$. Como f y i_{B^1} son continua, entonces $i_{B^1} \times f$ es continua. Entonces como B^1 es conexo, entonces $i_{B^1} \times f(B^1) = B^1 \times B^1$ es conexo. Ahora, nota que $G_f = A \cup B \cup C$. Suponga que $C = \emptyset$. Entonces $G_f = A \cup B$. Pero tenemos que $A \subseteq H^+_\Delta$, y $B \subseteq H^-_\Delta$, por lo tanto, A y B son conjuntos abiertos, y que A y B son disjuntos. Por lo tanto $A \cup B$ es una separación abierta de G_f, una contradicción. Por lo tanto $C \neq \emptyset$ y existe puntos fijos de f para $n = 1$. ∎

Para $n > 1$ no se ha encontrado una demostración general del teorema de puntos fijos. De hecho, es muy dificil para demostrar en general. Pero, se puede usar la maquinaria de la topologiía algebraica para construir un bosquejo de una demostración.

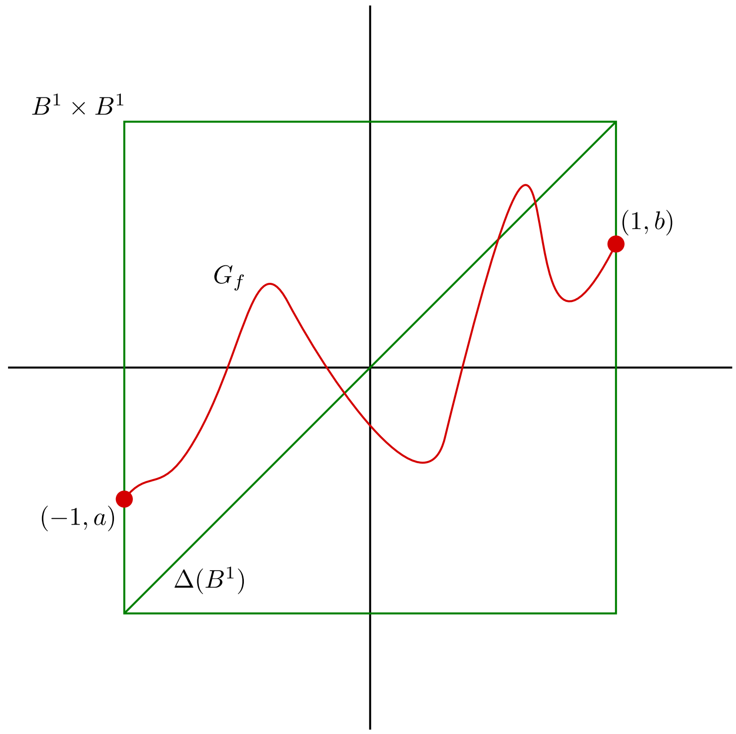

Figura 2: Demostración del teorema de puntos fijos de Brouwer.

Lectura 2: Demostración General del Teorema de Puntos Fijos de Brouwer

Definición. Sea X un subsepacio de un espacio topologico Y. Decimos que X es un **retracto** de Y sí existe una mapa continua $r : Y \to X$ donde $r(x) = x$ para todo $x \in X$. Llamamos a r una **retracción** de Y sobre X.

Es decir que el retracción de Y sobre X lleva sus puntos fijos en todo el X. Podemos ver que r es una mapa sobre, ya que $r(X) = X$ por definición.

Ahora recuerda que las mapas de inclusión y identidad para espacios topológicos son las mapas $i : X \to Y$ (donde X es subespacio de Y), y $1_X : X \to X$ dado por $i : x \to x$ y $1_X : x \to x$ para todo $x \in X$. La definici'on del retracto entonces se puede ver en la siguiente diagrama, llamado una diagrama "commutativa":

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dr, dashed, "r"] & \\
X \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "1_X"'] & & X
\end{tikzcd}$$

Entonces, según esta diagrama, $r \circ i = 1_X$.

Dado una diagrama commutativa en el "universo" de espacios topologicos, entonces queremos que las mapas sean mapas continuas. En este ejemplo, existe una "meta función" llamado un "functor" $\mathcal{F}$ que lleva las espacios topologicos hacia grupos Abelianos, tal que las diagramas commutativas son preservada; es decir, $\mathcal{F}$ lleva mapas continuas hacia homomorfismos.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] & B \\
C \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 3: Una diagrama commutativa, donde A, B, C son conjuntos cualquieras, y f, g, y h son funciones cualquieras doned $f \circ g = h$.

Lema 2. *Sí $n \geq 0$, entonces S^n no es un retracto de D^{n+1}.*

demostración. Para $n = 0$, es facil ver. Si $r : D^1 \to S^0$ es un retracto, entonces la siguente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& D^1 \arrow[dr, dashed, "r"] & \\
S^0 \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "1_{S^0}"'] & & S^0
\end{tikzcd}$$

nos da $r \circ i = 1_{S^0}$ lo cual es imposible, ya que S^0 no es conéxo, y la imagen de D^1 como subsepacio de S^0 si lo es; es decir que $r(D^1) = \{1\}$, ó $r(D^1) = \{-1\}$. Entonces r no puede ser 1–1 y sobre lo cual contradice que $r \circ i = 1_{S^0}$ sea 1–1 y sobre.

Ahora, toma $n > 0$, entonces suponga que exista una retracción $r : D^{n+1} \to S^n$, con su diagrama de espacios topologicos y mapas continuas.

$$\begin{tikzcd} & D^{n+} \arrow[dr, "r"] & \\ S^n \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "1_{S^n}"'] & & S^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & H_n(D^{n+1}) \arrow[dr, "H_n(r)"] & \\ H_n(S^n) \arrow[ur, "H_n(i)"] \arrow[rr, "H_n(1_{S^n})"'] & & H_n(S^n) \end{tikzcd}$$

Entonces $r \circ i = 1_{s^n}$. Aplicando un functor particular llamado H_n, obtemeos una diagrama commutativa de grupos Abelianos y homomorfismos. Las dos diagramas se pueden ver arriba. Entonces tenemos que $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$, y $H_n(D^{n+1}) = \langle 0 \rangle$. Ahora tenemos que $H_n(r) \circ H_n(i) = H_n(1_{S^n}) = 1_{\mathbb{Z}}$. Esto es imposible ya que $1_{\mathbb{Z}}$ no se facotriza sobre $\langle 0 \rangle$; i.e. $H_n(r) \circ H_n(i) = 0 \neq 1_{\mathbb{Z}}$. Por lo tanto S^n no puede ser un retracto de D^{n+1}.

$$\begin{tikzcd} & \langle 0 \rangle \arrow[dr, "H_n(r)"] & \\ \mathbb{Z} \arrow[ur, "H_n(i)"] \arrow[rr, "1_{\mathbb{Z}}"'] & & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

■

Ahora reiteremos la teorema de Brouwer para la demostración para n general.

Teorema 3 (Teorema de Puntos Fijos de Brouwer)**.** *Sí $f : D^n \to D^n$ es una función continua, entonces existe un punto fijo en D^n para toda $n \geq 1$.*

demostración. Para $n > 1$, suponga que no hay puntos fijos. Entonces sea $f : D^n \to D^n$ y que $f(x) \neq x$ para todo $x \in D^n$. Defina entonces, la mapa $g : D^n \to S^{n-1}$ dado por la figura 4. Note que g es continua, y que $g(x) = x$ para todo $x \in S^{n-1}$. Puse, vemos que g es una retracción, lo cual es imposible por el lema 2. ■

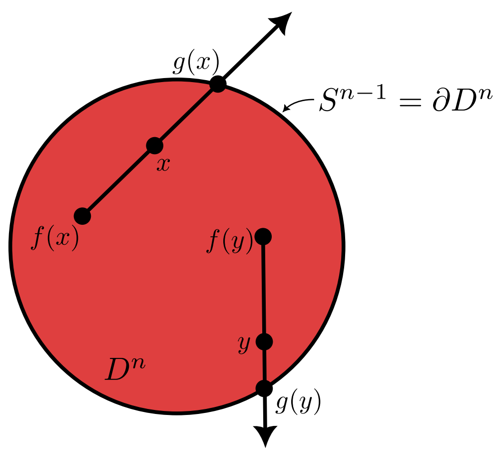

Figura 4