

MATE6551-0U1
Prof. Ivan Cardona Torres
13.00 - 14.20
CNL-A-225

Topología Algebraica

Alec Zabel-Mena

Universidad de Puerto Rico, Recinto de Rio Piedras

08.10.2022

Lectura 1: La Teorema de Puntos Fijos de Brouwer.

Empezamos con declara notación Vamos a denotar las siguientes conjuntos:

Definición. Denotamos la **n -esfera** como el conjunto $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ y la **n -bola** como el conjunto $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, donde $\|\cdot\|$ el la **norma** en \mathbb{R}^n que induca la topología usual de \mathbb{R}^n . Llamamos punto $N = (0, \dots, 0, 1)$ de S^n el **polo norte** de S^n y el punto $S = (0, \dots, -1)$ de S_n el **polo sur** de S^n . Definimos la **ecuador** de una $n+1$ -esfera S^{n+1} de ser la n -esfera S^n .

Ejemplo 1. (1) S^1 es el circulo unitario en el plano \mathbb{R}^2 , y S^2 es el esfera unitario en el espacio \mathbb{R}^3 .

(2) Nota que $S^0 = \{-1, 1\}$ es la unica esfera no conexo en \mathbb{R} .

(3) Toda n -esfera tiene un polo norte y un polo sur. De hecho, el polo norte de S^0 es 1 y el polo sur es -1 .

(4) Nota que el borde de una n -bola es una n -esfera. Es decir $\partial D^n = S^{n-1}$.

Definición. Denotamos una **n -simplejo estándar** de \mathbb{R}^n de ser el conjunto $\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0 \text{ y } \sum x_i = 1\}$.

Ejemplo 2. (1) $\Delta^0 = \{1\} \subseteq \mathbb{R}$.

(2) Δ^1 es una recta entre los puntos $(0, 1)$ y $(1, 0)$ en \mathbb{R}^2 restringido a la primera caudrante.

(3) Δ^2 es una tetrahedro en la primer octánate de \mathbb{R} con vertices en $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, y $(1, 0, 0)$. Se representa en la figura 1 también.

(4) Note que $\Delta^0 \subseteq \Delta^1 \subseteq \Delta^2$.

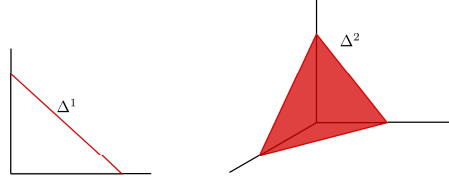


Figura 1: El 1-simplejo y 2-simplejo estándares.

- (5) Como espacios topológicos, se puede demostrar que los n -simplejos estándares son homeomorfo a los n -bolas. Es decir $\Delta^n \simeq D^n$.

Definición. Sea $f : A \rightarrow A$ una función. Llamamos a un punto $x \in A$ un **punto fijo** si $f(x) = x$.

Teorema 1 (Teorema de Puntos Fijos de Brouwer). *Si $f : D^n \rightarrow D^n$ es una función continua, entonces existe un punto fijo en D^n para toda $n \geq 1$.*

demostración. Demostramos la teorema para $n = 1$. Es decir, que toda función $f : B^1 \rightarrow B^1$ tiene un punto fijo. Sean $a = f(-1)$ y $b = f(1)$. Si $a = -1$ o $b = 1$, tenemos puntos fijos y terminamos.

Ahora, considere la gráfica de f , $G_f = \{(x, f(x)) : x \in B^1\}$, la diagonal de B^1 , $\Delta(B^1) = \{(x, x) : x \in B^1\}$, y los medio planos $H_\Delta^+ = \{(x, y) : y > x\}$ y $H_\Delta^- = \{(x, y) : y < x\}$. Nota que $\Delta(B^1)$ es la gráfica de la recta $y = x$ restringido a $B^1 \times B^1$. Ahora, defina conjuntos

$$A = \{(x, f(x)) : f(x) > x\}$$

$$B = \{(x, f(x)) : f(x) < x\}$$

$$C = \{(x, f(x)) : f(x) = x\}$$

Entonces C es el conjunto de puntos fijos de f . Nota que $A \subseteq H_\Delta^+$, $B \subseteq H_\Delta^-$, y $C \subseteq \Delta(B^1)$. También nota que los medio planos son abiertos en \mathbb{R}^2 . Ahora, como B^1 es compacto, y Hausdorff, se puede demostrar que G_f y $\Delta(B^1)$ son cerrados. Se puede ver la gráfica de f en el figura 2

Ahora, not que G_f es conexo ya que es la imagen de la función $i_{B^1} \times f$. Como f y i_{B^1} son continua, entonces $i_{B^1} \times f$ es continua. Entonces como B^1 es conexo, entonces $i_{B^1} \times f(B^1) = B^1 \times B^1$ es conexo. Ahora, nota que $G_f = A \cup B \cup C$. Suponga que $C = \emptyset$. Entonces $G_f = A \cup B$. Pero tenemos que $A \subseteq H_\Delta^+$, y $B \subseteq H_\Delta^-$, por lo tanto, A y B son conjuntos abiertos, y que A y B son disjuntos. Por lo tanto $A \cup B$ es una separación abierta de G_f , una contradicción. Por lo tanto $C \neq \emptyset$ y existe puntos fijos de f para $n = 1$. ■

Para $n > 1$ no se ha encontrado una demostración general del teorema de puntos fijos. De hecho, es muy difícil para demostrar en general. Pero, se puede usar la maquinaria de la topología algebraica para construir un bosquejo de una demostración.

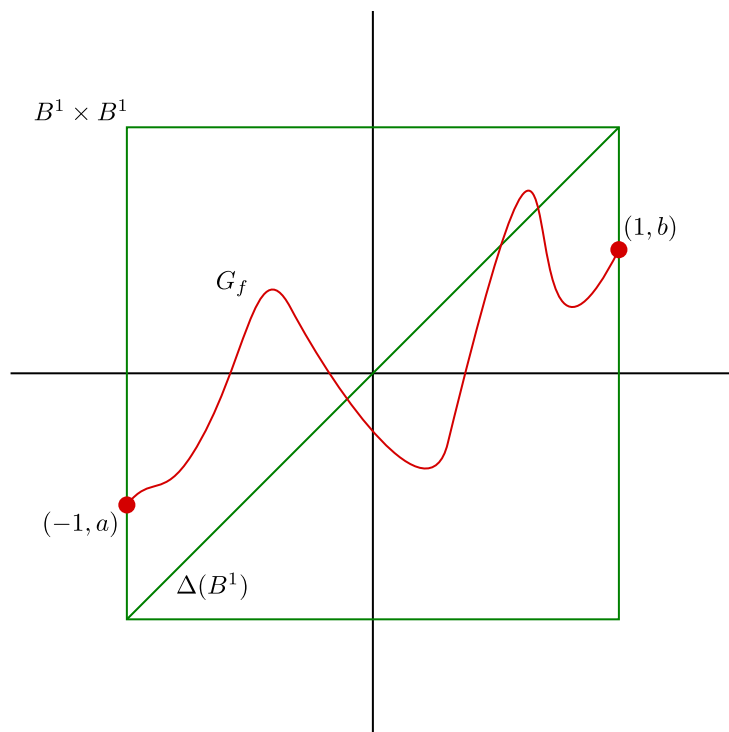


Figura 2: Demostración del teorema de puntos fijos de Brouwer.

Lectura 2: Demostración General del Teorema de Puntos Fijos de Brouwer

Definición. Sea X un subespacio de un espacio topológico Y . Decimos que X es un **retracto** de Y si existe una mapa continua $r : Y \rightarrow X$ donde $r(x) = x$ para todo $x \in X$. Llamamos a r una **retracción** de Y sobre X .

Es decir que la retracción de Y sobre X lleva sus puntos fijos en todo el X . Podemos ver que r es una mapa sobre, ya que $r(X) = X$ por definición.

Ahora recuerda que las mapas de inclusión y identidad para espacios topológicos son las mapas $i : X \rightarrow Y$ (donde X es subespacio de Y), y $1_X : X \rightarrow X$ dado por $i : x \rightarrow x$ y $1_X : x \rightarrow x$ para todo $x \in X$. La definición del retracto entonces se puede ver en la siguiente

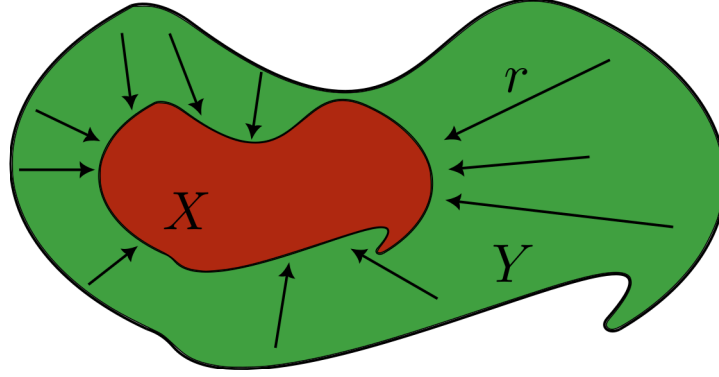
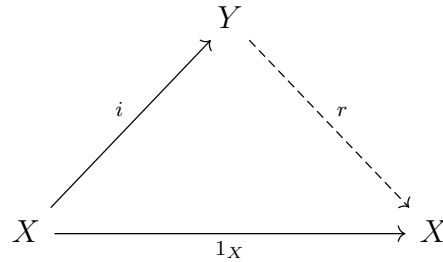


Figura 3: Un retracción $r : Y \rightarrow X$ de un espacio Y hacia un espacio X .

diagrama, llamado una diagrama “commutativa”:



Entonces, según esta diagrama, $r \circ i = 1_X$.

Dado una diagrama commutativa en el “universo” de espacios topológicos, entonces queremos que las mapas sean mapas continuos. En este ejemplo, existe una “meta función” llamado un “functor” \mathcal{F} que lleva los espacios topológicos hacia grupos Abelianos, tal que las diagramas commutativos son preservados; es decir, \mathcal{F} lleva mapas continuos hacia homomorfismos.

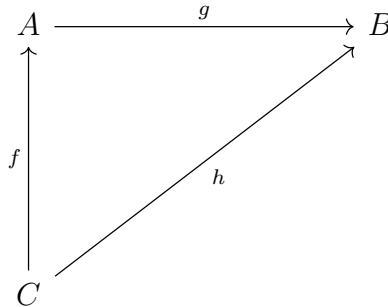
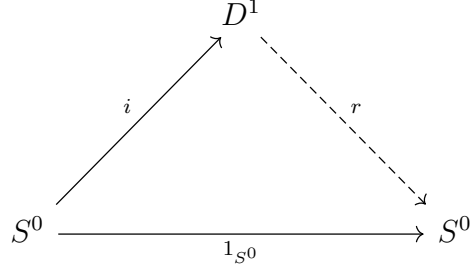


Figura 4: Una diagrama commutativa, donde A, B, C son conjuntos cualesquiera, y f, g , y h son funciones cualesquiera donde $f \circ g = h$.

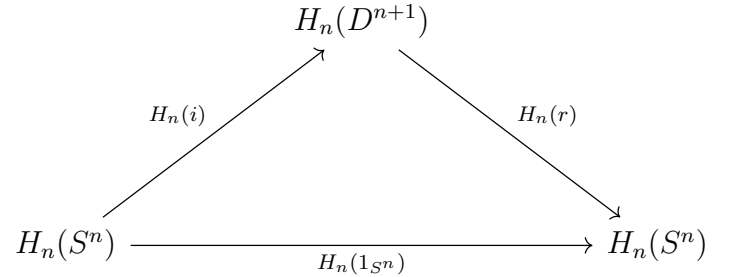
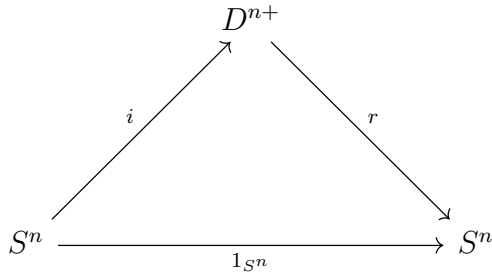
Lema 2. *Sí $n \geq 0$, entonces S^n no es un retracto de D^{n+1} .*

demostración. Para $n = 0$, es facil ver. Si $r : D^1 \rightarrow S^0$ es un retracto, entonces la siguiente diagrama

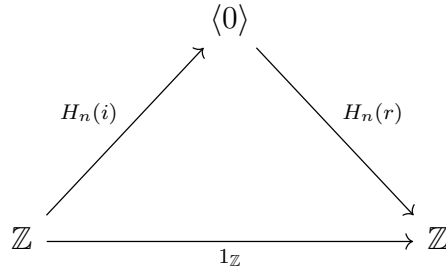


nos da $r \circ i = 1_{S^0}$ lo cual es imposible, ya que S^0 no es conéxo, y la imagen de D^1 como subespacio de S^0 si lo es; es decir que $r(D^1) = \{1\}$, ó $r(D^1) = \{-1\}$. Entonces r no puede ser 1-1 y sobre lo cual contradice que $r \circ i = 1_{S^0}$ sea 1-1 y sobre.

Ahora, toma $n > 0$, entonces suponga que exista una retracción $r : D^{n+1} \rightarrow S^n$, con su diagrama de espacios topologicos y mapas continuas.



Entonces $r \circ i = 1_{S^n}$. Aplicando un functor particular llamado H_n , obteneos una diagrama commutativa de grupos Abelianos y homomorfismos. Las dos diagramas se pueden ver arriba. Entonces tenemos que $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$, y $H_n(D^{n+1}) = \langle 0 \rangle$. Ahora tenemos que $H_n(r) \circ H_n(i) = H_n(1_{S^n}) = 1_{\mathbb{Z}}$. Esto es imposible ya que $1_{\mathbb{Z}}$ no se facotriza sobre $\langle 0 \rangle$; i.e. $H_n(r) \circ H_n(i) = 0 \neq 1_{\mathbb{Z}}$. Por lo tanto S^n no puede ser un retracto de D^{n+1} .



■

Ahora reiteremos la teorema de Brouwer para la demostración para n general.

Teorema 3 (Teorema de Puntos Fijos de Brouwer). *Si $f : D^n \rightarrow D^n$ es una función continua, entonces existe un punto fijo en D^n para toda $n \geq 1$.*

demostración. Para $n > 1$, suponga que no hay puntos fijos. Entonces sea $f : D^n \rightarrow D^n$ y que $f(x) \neq x$ para todo $x \in D^n$. Defina entonces, la mapa $g : D^n \rightarrow S^{n-1}$ dado por la figura 5. Note que g es continua, y que $g(x) = x$ para todo $x \in S^{n-1}$. Puse, vemos que g es una

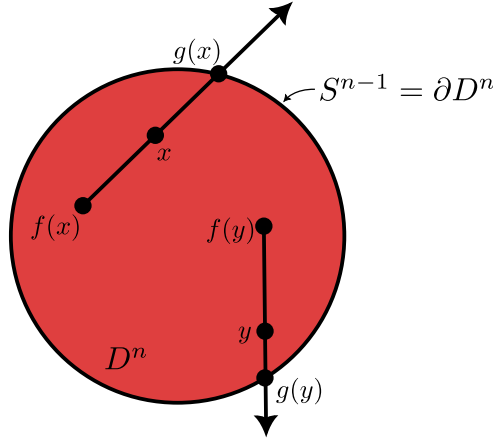


Figura 5

retracción, lo cual es imposible por el lema 2. Por lo tanto, no existen puntos fijos. ■

Lectura 3: Categorías y Funtores.

Definición. Definimos una **clase** de ser una colección de objetos tal que si T y A son clases, entonces $A \notin T$.

Definición. Una **categoría** \mathcal{C} es un clase de objetos denotados por $\text{obj } \mathcal{C}$ junto a una colección de conjuntos $\text{Hom}(X, Y)$, para cualesquiera $X, Y \in \text{obj } \mathcal{C}$, de **morfismos** de X hacia Y , cuyas elementos estan denotados $f : X \rightarrow Y$ ó $X \xrightarrow{f} Y$, y una operación binaria $\circ : \text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$ llamado **composición** tal que si $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ son morfismos, entonces $g \circ f : X \rightarrow Z$ es un morfismo y:

- (1) $\text{Hom}(X, Y)$ y $\text{Hom}(A, B)$ son disjuntas.
- (2) La composición \circ es asociativa si esta definido. Es decir, sy $g \circ (f \circ h)$ ó $(g \circ g) \circ h$ existen en $\text{Hom}(X, Y)$, entonces $g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ g$.
- (3) $\text{Hom}(X, X)$ no es vacío y existe al menos un morfismo $1_X : X \rightarrow X$, llamado la **identidad** de X , tal que $1_X \circ f = f$ y $g \circ 1_X = g$ para morfismos $f : X \rightarrow Y$ y $g : Z \rightarrow X$, para cualesquiera objetos $X, Y, Z \in \text{obj } \mathcal{C}$

Definición. Sea \mathcal{C} una categoría. Se llama el conjunto $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ los **morfismos de la categoría** donde $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ es la union de todos los conjuntos $\text{Hom}(X, Y)$ para todos $X, Y \in \text{obj } \mathcal{C}$.

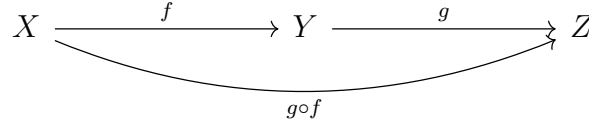


Figura 6: Un ejemplo de composición de morfismos de una categoría

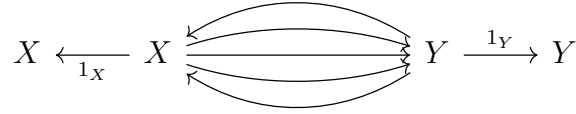


Figura 7: Morfismos entre dos objetos X y Y de una categoría incluyendo las identidades de X y Y

Ejemplo 3. (1) Considere la categoría $\mathcal{C} = \text{Conj}$, donde \mathcal{C} es la clase de todo los conjuntos. Los morfismos de \mathcal{C} son funciones $f : X \rightarrow Y$ de un conjunto X hacía un conjunto Y .

(2) Sea $\mathcal{C} = \text{Top}$ la categoría de espacios topológicos, donde $\text{obj } \mathcal{C}$ es la colección de todas las espacios topológicos. Los morfismos de Top son funciones continuas entre espacios topologicos. Es decir, $\text{Hom}(X, Y) = \{f : f : X \rightarrow Y \text{ es continua}\}$. La composición de morfismos es la composicion de funciones usual.

(3) Sea $\mathcal{C} = \text{Grp}$ la categoría de grupos, cuyas objetos son todo los grupos. Entonces los morfismos de Grp estan definido por los conjuntos $\text{Hom}(G, H) = \{\phi : \phi : G \rightarrow H \text{ es un homomrfismo}\}$. La composición de morfismos es la composicion de funciones usual.

Definición. Sean \mathcal{C} y \mathcal{A} categorías con $\text{obj } \mathcal{C} \subseteq \text{obj } \mathcal{A}$. Decimos que \mathcal{C} es una **subcategoría** de \mathcal{A} sí $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ para todo $X, Y \in \text{obj } \mathcal{C}$ ty la composición de \mathcal{C} es la misma de \mathcal{A} .

Ejemplo 4. (1) Tenemos que Top y Grp son subcategorías de Conj .

(2) La categoría Top^2 de pares topologicos tiene como objetos son todas pares (X, A) , donde X es un espacio topológico y $A \subseteq X$ es subespacio de X . Los morfismos de

Top^2 , para pares topológicos (X, Y) y (Y, B) , son las funciones continuas $f : X \rightarrow Y$ donde $f(A) \subseteq B$ es subespacio de B .

- (3) La categoría Top^* de pares topológicos (X, a) , donde a es un punto en X es una subcategoría de Top^2 .

Definición. Sea \mathcal{C} una categoría. Una **diagrama** de objetos y morfismos en \mathcal{C} es un grafo dirigido cuyo conjunto de vértices es subconjunto de $\text{obj } \mathcal{C}$ y cuyas aristas son morfismos entre esos vértices. Decimos que una diagrama es **commutativo** si para cualesquiera vértices A, B, C, D en la diagrama, y cualquier morfismos $f : A \rightarrow B$, $i : C \rightarrow D$, $h : A \rightarrow C$, y $g : B \rightarrow D$, tenemos que $g \circ f = i \circ h$.

Ejemplo 5. Las figuras 6 y 7 son ejemplos de diagramas de objetos y morfismos en una categoría.

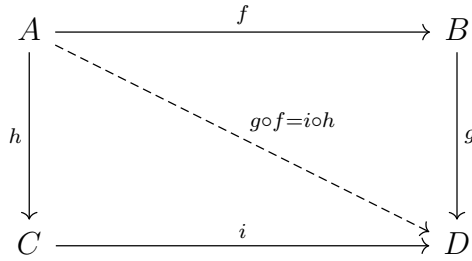


Figura 8: Un diagrama conmutativo entre objetos y morfismos de una categoría.

Lectura 4: Congruencias y Funtores.

Definición. Una **congruencia** es una categoría \mathcal{C} junto con una relación de equivalencia \sim sobre morfismos de \mathcal{C} definido tal que si $f \in \text{Hom}(A, B)$, y $f \sim g$, entonces $g \in \text{Hom}(A, B)$, y si $f \sim f'$ y $g \sim g'$, entonces $g \circ f \sim g' \circ f'$.

Definición. Sea \mathcal{C} una congruencia con relación de equivalencia \sim . Definimos la **categoría cociente**, \mathcal{C}/\sim como la categoría cuya objetos son los objetos de \mathcal{C} y morfismos son las clases de equivalencias de \sim . Si $[f] : A \rightarrow B$ es un morfismo de \mathcal{C}/\sim , entonces denotamos su conjunto como $[f] \in [A, B]$.

Teorema 4. Sea \mathcal{C} una categoría y \sim una relación de equivalencia entre morfismos de \mathcal{C} . Entonces el coategoría cociente \mathcal{C}/\sim es una categoría.

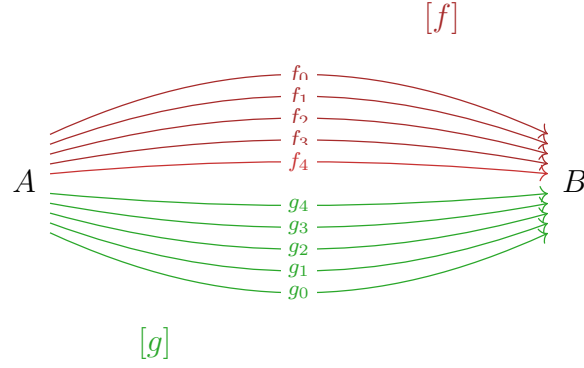


Figura 9: Una relación de equivalencia entre morfismos.

demostración. Nota que por definición que $\text{obj } \mathcal{C}/\sim = \text{obj } \mathcal{C}$, así que por hipótesis, $\text{obj } \mathcal{C}/\sim$ es una clase. De igual manera, defina para todo $A, B \in \text{obj } \mathcal{C}$, $[A, B] = \{[f] : f \in \text{Hom}(A, B)\}$. Como $\text{Hom}(A, B)$ es un conjunto para todo A y B , y \sim particiona el conjunto de todos los $\text{Hom}(A, B)$, entonces resulta que $[A, B]$ tiene que ser un conjunto también.

Ahora sean f y g morfismos de \mathcal{C} . Nota que por definición de una congruencia, que como $f \sim f'$ y $g \sim g'$ implica que $g \circ f \sim g' \circ f'$, entonces la composición $[g] \circ [f] = [g \circ f]$ está bien definido, si existe. Ahora sea h un morfismo. Entonces nota que $([g] \circ [f]) \circ [h] = [g \circ f] \circ [h] = [(g \circ f) \circ h] = [g \circ f \circ h]$ y $[g] \circ ([f] \circ [h]) = [g] \circ [f \circ h] = [g \circ (f \circ h)] = [g \circ f \circ h]$. Entonces tenemos que \circ es asociativa si $([g] \circ [f]) \circ [h]$ ó $[g] \circ ([f] \circ [h])$ está definida.

Por último, considere la identidad 1_A sobre el objeto A . Entonces nota que $[g] \circ [1_A] = [g \circ 1_A] = [g]$ y $[1_A] \circ [f] = [1_A \circ f] = [f]$; así que $[1_A]$ es la identidad de A en \mathcal{C}/\sim . Así que \mathcal{C}/\sim es una categoría. ■

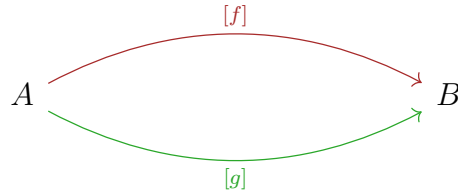


Figura 10: La categoría cociente \mathcal{C}/\sim , donde \mathcal{C} es la categoría de la figura 9.

Definición. Sea \mathcal{A} y \mathcal{C} dos categorías. Un **functor covariante** $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ es una map definido tal que si $A \in \text{obj } \mathcal{A}$, entonces $T(A) \in \text{obj } \mathcal{C}$ y si $f : A \rightarrow B$ es un morfismo en

\mathcal{A} , entonces $T(f) : T(A) \rightarrow T(B)$ es un morfismo en \mathcal{C} , y que $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$ y $T(1_A) = 1_{T(A)}$.

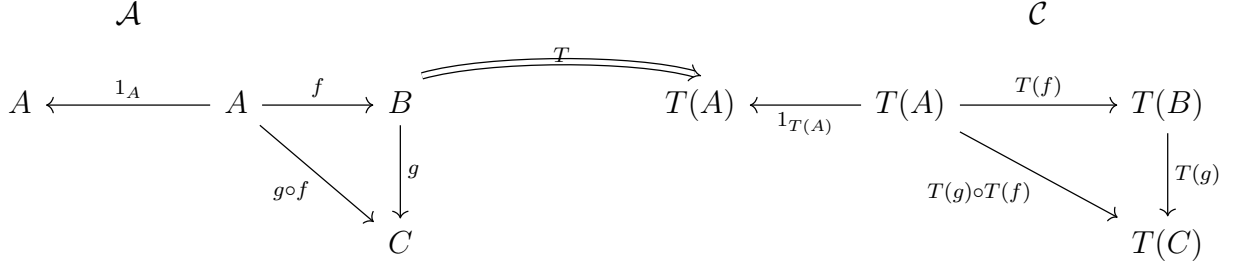


Figura 11: Un funtor T covariante entre dos diagramas commutativos bajo las categorías \mathcal{A} y \mathcal{C} .

Definición. Sea \mathcal{A} y \mathcal{C} dos categorías. Un **funtor contravariante** $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ es una map definido tal que si $A \in \text{obj } \mathcal{A}$, entonces $S(A) \in \text{obj } \mathcal{C}$ y si $f : A \rightarrow B$ es un morfismo en \mathcal{A} , entonces $S(f) : T(B) \rightarrow T(A)$ es un morfismo en \mathcal{C} , y que $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$ y $T(1_A) = 1_{T(A)}$.

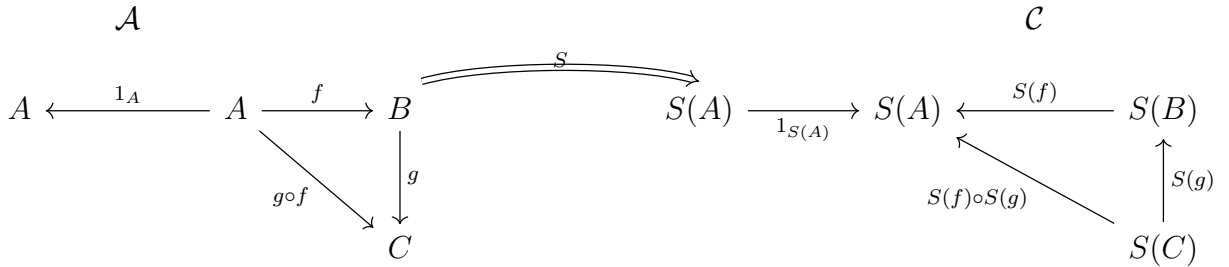


Figura 12: Un funtor S contravariante entre dos diagramas commutativos bajo las categorías \mathcal{A} y \mathcal{C} .

Ejemplo 6. (1) Considere el funtor $F : \text{Top} \rightarrow \text{Conj}$ tal que sí X es un espacio topológico, entonces $T(X) = X$ como conjunto general y sí $f : X \rightarrow Y$ es una mapa continua, entonces $T(f) : X \rightarrow Y$ es una mapa general. Es decir este funtor lleva los espacios topologicos los funciones continuas a si mismos, pero quitando las nociones de topología. Este funtor es covariante, y se llama el **funtor olvidadizo**.

(2) El **funtor identidad** $J : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ es el funtor que lleva objetos de \mathcal{C} a si mismos, y morfismos de \mathcal{C} a si mismos. Es decir, no cambia la categoría.

- (3) Sea M un espacio topológico. Defina $T_m : \text{Top} \rightarrow \text{Top}$ definida por $T_m : X \rightarrow X \times M$ en el topología producto, y $T_m : f \rightarrow f \times 1_M$, para cualquier mapa continua $f : X \rightarrow Y$. Entonces T_m es un funtor covariante.

Definición. Definimos una **equivalencia** de una categoría \mathcal{C} de ser un morfismo $f : A \rightarrow B$ para lo cual existe un morfismo $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$.

Ejemplo 7. Los equivalencias de la categoría Top son los homeomorfismos, y las equivalencias de Grp son los isomorfismos.

Teorema 5. Sean \mathcal{A} y \mathcal{C} categorías y $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ una functor. Entonces si f es una equivalencia en \mathcal{A} , entonces $T(f)$ es una equivalencia en \mathcal{C} .

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightleftharpoons[h]{f} & B \\
 & \searrow T & \nearrow T \\
 & T(A) & \xrightleftharpoons[T(h)]{T(f)} T(B)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightleftharpoons[h]{f} & B \\
 & \searrow S & \nearrow S \\
 & S(A) & \xrightleftharpoons[S(h)]{S(f)} S(B)
 \end{array}$$

demostración. Suponga primero que T es covariante. Es decir que para cualquier morfismo $f : A \rightarrow B$, $T(f) : T(A) \rightarrow T(B)$ lleva a $T(A)$ a $T(B)$, y $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$. Ahora suponga que $f : A \rightarrow B$ es una equivalencia en \mathcal{A} . Entonces existe un morfismo $h : B \rightarrow A$ tal que $h \circ f = 1_B$ y $f \circ h = 1_A$. Entonces $T(h \circ f) = T(h) \circ T(f) = 1_{T(B)}$ y $T(f \circ h) = T(f) \circ T(h) = 1_{T(A)}$. Entonces por definición, podemos ver que $T(f)$ es una equivalencia en \mathcal{C} .

De igual forma de T se contravariante, la demostración procede el mismo manera, con la diferencia que notamos que $T(f) : T(B) \rightarrow T(A)$ lleva a $T(B)$ a $T(A)$ para todo $f : A \rightarrow B$ y que $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$. ■

Lectura 5: Homotopía.

Definición. Sean X y Y espacios topológicos, y sean $f_0 : X \rightarrow Y$ y $f_1 : X \rightarrow Y$ mapas continuas. Decimos que f_0 es **homotópico** a f_1 si existe una mapa continua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ y $F(x, 1) = f_1(x)$ para todo $x \in X$. Decimos que f_0 y f_1 son **homotópicos** y escribimos $f_0 \simeq f_1$.

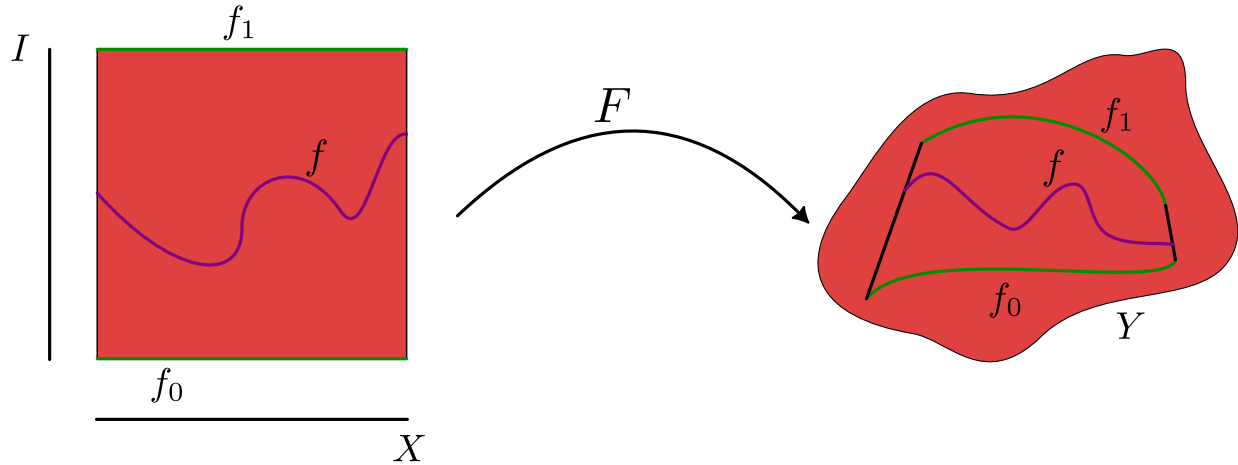


Figura 13: Dos mapas continuas f_0 y f_1 homotópicos.

Teorema 6 (Primer Teorema de Empaste). *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una mapa. Entonces:*

- (1) *Sí $\{U_\alpha\}$ es una colección de conjuntos abiertos de X con $X = \bigcup U_\alpha$, tal que $f|_{U_\alpha}$ es continua, entonces f es continua.*
- (2) *Sí $\{U_\alpha\}$ es una colección de conjuntos cerrados de X con $X = \bigcup U_\alpha$, tal que $f|_{U_\alpha}$ es continua, entonces f es continua.*

Lema 7 (Segundo Teorema de Empaste). *Sea X un espacio topológico que es una unión finita de conjuntos cerrados en X , $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$. Sí Y es un espacio y $\{f_i\}_{i=1}^n$ una colección de mapas $f_i : X_i \rightarrow Y$ continuas que coincidan en la intersección, entonces existe una mapa continua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f|_{X_i} = f_i$.*

demostración. Considere la mapa $f(x) = f_i(x)$ para todo $x \in X_i$. Entonces f coincide en la intersección con todo f_i , así que es bien definida, y es claro que $f|_{X_i} = f_i$.

Ahora sea C un conjunto cerrado en Y . Entonces $f^{-1}(C) = X \cap f^{-1}(C) = \bigcup_{i=1}^n X_i \cap f^{-1}(C) = \bigcup_{i=1}^n (X_i \cap f^{-1}(C)) = \bigcup (X_i \cap f_i^{-1}(C))$. Ahora, X_i y f_i^{-1} están cerrados así que $X_i \cap f_i^{-1}(C)$ es cerrado. Entonces la unión finita de ellos para todo i es cerrado, así que $f^{-1}(C)$ es cerrado en X , lo cual hace f continua. ■

Lema 8 (Tercer Teorema de Empaste). *Sea X un espacio topológico que es una unión arbitraria de conjuntos abiertos en X , $X = \bigcup X_\alpha$. Sí Y es un espacio y $\{f_\alpha\}$ una colección de mapas $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y$ continuas que coincidan en la intersección, entonces existe una mapa continua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f|_{X_\alpha} = f_\alpha$.*

Lema 9. *La homotopía es una relación de equivalencia sobre mapas continuas.*

demostración. Sea X y Y espacios topológicos. Sea $f : X \rightarrow Y$ una mapa continua y define $F : X \times I \rightarrow Y$ con $F(x, t) = f(x)$ para todo $(x, t) \in X \times I$. Nota que para algún mapa continua $h : X \times I \rightarrow X \times I$, que $F = \pi_1 \circ h$ donde π_1 es la proyección de la primer parte. F es continua porque es la composición de mapas continuas. Entonces vemos que $(x, t) \xrightarrow{h} (f(x), t) \xrightarrow{\pi_1} f(x)$. Entonces podemos ver que $F(x, 0) = F(x, 1) = f(x)$, así que $f \simeq f$.

Ahora considere $f : X \rightarrow Y$, y $g : Y \rightarrow Z$ continuas tal que $f \simeq g$. Sea $F : X \times I \rightarrow Y$ la homotopía de esos dos mapas. Entonces $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$. Defina la mapa $G : X \times I \rightarrow Y$ dado por $G(x, t) = F(x, 1 - t)$. Como G solo transforma coordenadas, G es continua. Entonces vemos que $G(x, 0) = F(x, 1) = g(x)$ y $G(x, 1) = F(x, 0) = f(x)$; así que $g \simeq f$.

Por ultimo, sea $f : X \rightarrow Y$, $g : X \rightarrow Y$ y $h : X \rightarrow Y$ mapas continuas tales que $f \simeq g$ y $g \simeq h$. Entonces existe homotopias $F : X \times I \rightarrow Y$ y $G : X \times I \rightarrow Y$ con $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$ y $G(x, 0) = g(x)$, $G(x, 1) = h(x)$. Considere la mapa $H : X \times I \rightarrow Y$ dado por:

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Vemos que los dominios de F y H coinciden, y que son continuas. Así que por la teorema del empaste, H es continua. Entonces vemos que $H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$ y que $H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$ lo que hace $f \simeq h$. ■

Definición. Sea X y Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una mapa continua. La **clase de homotopía** de f es el conjunto de todo mapa continua homotopico a f ; es decir $[f] = \{g : X \rightarrow Y : g \text{ es continua y } g \simeq f\}$.

Teorema 10. Sean X y Y espacios topológicos y sea $f_i : X \rightarrow Y$ y $g_i : X \rightarrow Y$ mapas continuas para todo $i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si $f_0 \simeq f_1$ y $g_0 \simeq g_1$, entonces tenemos que $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.

demostración. Sean $F : X \times I \rightarrow Y$ y $G : X \times I \rightarrow Y$ homotopias entre f_0, f_1 y g_0, g_1 , respectivamente. Afirmamos que $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_0$. Sea $H : X \times I \rightarrow Y$ la mapa definida como $H = G \circ f_0$. Es decir que $H(x, t) = G(f_0(x), t)$. Nota que como G y f_0 son continuas, entonces H es continua, y que $H(x, 0) = G(f_0(x), 0) = g_0 \circ f_0(x)$ y $H(x, 1) = G(f_0(x), 1) = g_1 \circ f_0(x)$. Así que $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_0$.

Ahora afirmamos que $g_1 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$. Considere $K : X \times I \rightarrow Y$ dado por $K = g_1 \circ F$. Como g_1 y F son continuas, tenemos K continua. Entonces $K(x, 0) = g_1 \circ f_0(x)$ y $K(x, 1) = g_1 \circ f_1(x)$. Entonces $g_1 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$. Por lo tanto, como homotopia es transitiva, obtenemos que $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$. ■

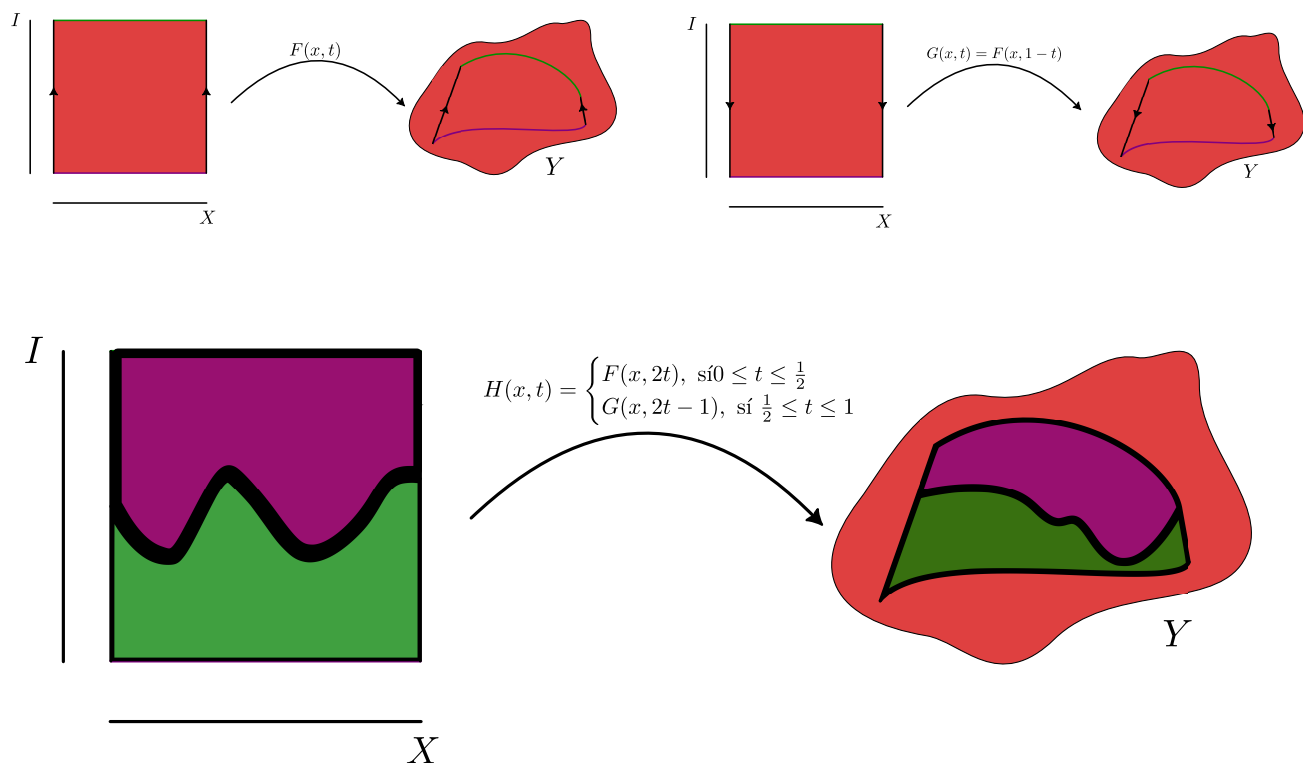


Figura 14: La equivalencia de Homotopía.

Corolario. *Homotopía define una congruencia en la categoría Top.*

Definición. Definimos el **categoría homotópico** de ser la categoría cociente de Top bajo homotopía, y lo denotamos hTop.

Definición. Una mapa continua $f : X \rightarrow Y$ es una **equivalencia de homotopía** si existe un $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$. Decimos entonces que X es de la misma **tipo de homotopía** que Y .

Ejemplo 8. Un círculo y un disco perforado no son homeomorfos, pero sí son del mismo tipo de homotopía.

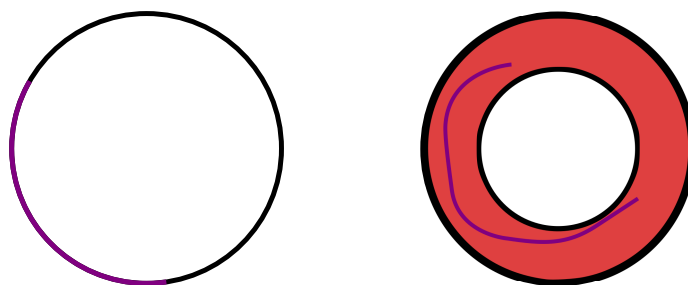


Figura 15

Definición. Sean X y Y espacios topológicos. Decimos que un mapa $f : X \rightarrow Y$ es **homotópicamente nula** si es homotópico a una mapa constante en Y .

Lectura 6: La Teorema Fundamental del Algebra.

Teorema 11 (La Teorema Fundamental del Algebra). *Todo polinomio con coeficientes complejos tiene al menos una raíz complejo.*

demostración. Sea $\Sigma_\rho \subseteq \mathbb{C}$ el círculo de radio ρ en \mathbb{C} . Considere la mapa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $f(z) = z^n$, y denota $f_\rho^n = f|_{\Sigma_\rho}$. Nota que los f_ρ^n son homotópicamente nulas.

Ahora, considere el polinomio $g(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$ donde $a_i \in \mathbb{C}$ para todo $0 \leq i \leq n$ y $\deg g = n \geq 1$. Escoga $\rho > \max\{1, \sum |a_i|\}$, y defina la mapa $F : \Sigma_\rho \times I \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$F(z, t) = z^n + \sum_{i=0}^{n-1} (1-t)a_i z^i$$

Por la continuidad de polinomios en \mathbb{C} , tenemos que F es continua. Mas aún tenemos que $F(z, 0) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0 = g(z)$ y $F(z, 1) = z^n = f_\rho^n$. Así que $f_\rho^n \simeq g$ son homotópicos a través de la homotopia F .

Afirmamos que $F(z, t) \neq 0$. Por lo contrario, asuma que existe un $(z, t) \in \Sigma_\rho \times I$ tal que $F(z, t) = 0$. Entonces tenemos que

$$z^n = - \sum_{i=0}^{n-1} (1-t)a_i z^i$$

Por la desigualdad de triángulo, tenemos

$$|z^n| = \rho^n \leq \sum (1-t)|a_i|\rho^i \leq \rho^{n-1} \sum (1-t)|a_i|$$

como $\rho > 1$ y $t \in I$ implica que $\sum (1-t)|a_i| \leq \sum |a_i|$, tenemos que

$$\rho \leq \sum_{i=0}^{n-1} (1-t)|a_i|$$

lo cual contradice nuestro escogido de ρ . Así que $F(z, t) \neq 0$ para todos $(z, t) \in \Sigma_\rho \times I$.

Finalmente, tenemos que $F : \Sigma_\rho \times I \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces suponga que $g(z)$ no tiene raíces complejas. Defina $G : \Sigma_\rho \times I \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dado por $G(z, t) = g((1-t)z)$. Tenemos que $(1-t)z$ es una mapa continua, y que g es continua; por lo tanto por composición, G también es continua (de hecho, es continua en z y en t). Mas aún, tenemos $G(z, 0) = g(z)$ y

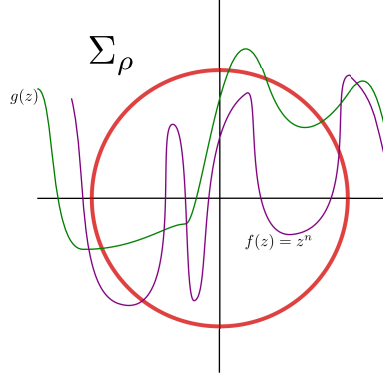


Figura 16: La teorema Fundamental del Algebra. Nota que f_ρ^n consiste de cuyas puntos de $f(z) = z^n$ cuyas puntos intersecan con Σ_ρ .

$G(z, 1) = g(0) = a_0$. Así que g es homotopica a la mapa constante $k : z \rightarrow a_0$, por lo tanto es homotopicamente nula. Por transitividad de homotopia, f_ρ^n tambien es homotopicamente nula, lo cual es imposible. Por lo tanto, g tiene que tener al menos una raiz en \mathbb{C} . ■

Lectura 7

Definición. Sea Y y Z espacios topologicos y $X \subseteq Z$ subespacio de Y . Sí $f : X \rightarrow Z$ es una mapa continua, entonces llamamos a la mapa $g : Y \rightarrow Z$ una **extensión** de X sí $g \circ i = f$ donde $i : X \rightarrow Y$ es la inclusión.

Teorema 12. Sea $f : S^{n-1} \rightarrow Y$ unan mapa continua. Entonces los siguientes son equivalentes:

- (1) f es homotopicamente nula.
- (2) f puede ser extendido a una mapa $g : D^n \rightarrow Y$.
- (3) Sí $x_0 \in S^{n-1}$, y $k : S^{n-1} \rightarrow Y$ es una constante dado por $k : x \rightarrow f(x_0)$, entonces existe una homotopía F entre $f : S^{n-1} \times I \rightarrow Y$ y k con $F(x, t) = f(x_0)$ para todo x y t .

demostración. Ciertamente la condición (3) implica el (1). Suponga ahora que f es homotopicamente nula. Sea $F : f \simeq c_{y_0}$ la homotopía correspondiente, con $y_0 \in Y$. Defina $g : D^n \rightarrow Y$ como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} y_0, & \text{sí } 0 \leq \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ F\left(\frac{x}{\|x\|}, 2 - 2\|x\|\right), & \text{sí } \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1 \end{cases}$$

Nota que sí $\|x\| = \frac{1}{2}$, entonces $g(x) = F(2x, 1) = y_0$, así por la teorema del empaste, g es continua. Mas aún, si $\|x\| = 1$, $g(x) = F(x, 0) = f(x)$, así que g es una extensión de f .

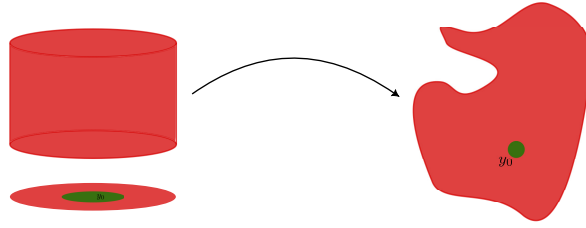


Figura 17: La definición de $g(x)$ que lleva a un cilindro a un disco perforado y rellena el hueco con y_0

Suponga ahora que existe un extensión $g : D^{n+1} \rightarrow Y$ de f . Como S^n es subespacio de D^{n+1} , tenemos que $g \circ i = g|_{S^n} = f$. Sea $x_0 \in S^n$, y $k : x \rightarrow f(x_0)$ una mapa constante. Defina $F : S^n \times I \rightarrow Y$ dado por $F(x, t) = g((1-t)x + x_0t)$. Entonces F es continua por composicion de mapas continuas, ademas $F(x, 0) = g(x) = f(x)$, como $x \in S^n$, y $F(x, 1) = g(x_0) = f(x_0) = k(x)$, como $x_0 \in S^n$. Por lo tanto, F defina una homotopia entre f y k . ■

Ejemplo 9. Considere S^{n-1} y D^n y considere la siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{1_{S^{n-1}}} & S^{n-1} \\ \downarrow i & \nearrow g & \\ D^n & & \end{array}$$

Sí g es una extensión de $1_{S^{n-1}}$, entonces tenemos que la diagrama es commutativa y que $g \circ i = 1_{S^{n-1}}$; es decir que g es una retracción de S^{n-1} , lo cual es imposible. Así que por la teorema anterior, $1_{S^{n-1}}$ no puede ser nulhomotopico.

Lectura 8: Espacios Contractibles y Convexidad.

Definición. Un subconjunto X de \mathbb{R}^n se llama **convexo** sí para todo puntos $x, y \in X$, la recta trazada entre x y y esta contenido en X . Es decir, que para todo $t \in [0, 1]$, $(1-t)x + ty \in X$.

Definición. Llamamos a un espacio topologico X **contractible** sí la identidad en 1_X es homotopicamente nula.

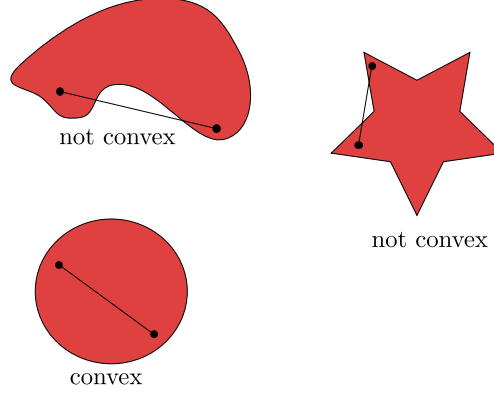


Figura 18: Espacios convexos y no convexos en \mathbb{R}^n . Nota que las estrellas no son convexos, pero el disco si es convexo.

Lema 13. *Espacios convexos son contractibles.*

Ejemplo 10. (1) El disco D^n es contractible como es convexo, pero la esfera S^{n-1} no es contractible como $1_{S^{n-1}}$ no puede ser homotopicamente nula.

(2) EL hemisferio norte de S^{n-1} , $H^+ = \{x \in S^{n-1} : x_{n-1} = 0\}$ es contractible, pero no convexo. Sí una considere los geodesicos sobre H^+ como las rectas, entonces resulta que sí H^+ es convexo.

Definición. Sea X un espacio topologico y X' una partición de X en conjuntos disjuntos X_α . Definimos la **aplicación canonica** de X sobre X' de ser la mapa $q : X \rightarrow X'$ tal que $q : x \rightarrow X_\alpha$ sí $x \in X_\alpha$.

Definición. Sea X un espacio topologico, X' una partición de X , y $q : X \rightarrow X'$ la aplicación canonica de X sobre X' . Definimos el **topologia cociente** de X' de ser la colección

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X' : q^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$$

Llamamos a X' bajo este topologia el **espacio cociente** de X .

Lema 14. *Sí X es un espacio topologico, y X' es su espacio cociente, entonces la aplicación canonica de X sobre X' es continua. Es decir que $q \in \text{Hom}(X, X')$ en la categoria Top.*

Definición. Sea X un espacio topologico y $A \subseteq A$. Defina $X/A = \{A\} \cup \{y \in X : y \notin A\}$. Se llama a X/A bajo el topología cociente el **espacio cociente de X colapsada** por A . Decimos que A **colapsa** a un punto bajo la topologia cociente.

Ejemplo 11. (1) Sí $X = [0, 1]$ y $A = \{0, 1\}$, entonces el espacio cociente $X/A \simeq S^1$ es homeomorfo al circulo. Se mostra de como se puede llegar de $[0, 1]$ hasta S^1 en el figura 19.

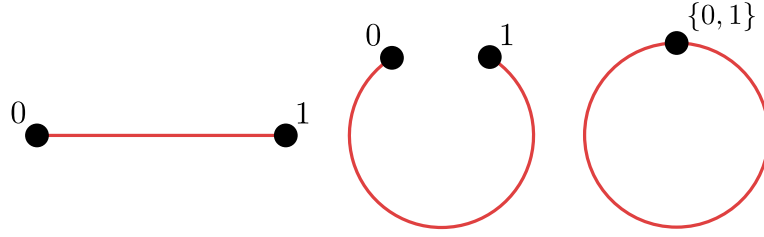


Figura 19: Se puede pensar en la aplicación canonica de $[0, 1]/\{0, 1\}$ de coger el intervalo $[0, 1]$ y deformandolo hasta que pegas el punto 0 con el punto 1. El espacio resultante es S^1 .

(2) $D^n/\partial D^n = S^{n-1}$, que no es contractible.

(3) Sean $h : X \rightarrow Y$ una mapa. Defina la relacion $\ker h$ dado por $x \ker h x'$ sí y solo sí $h(x) = h(x')$. Entonces $X/\ker h = \{\phi([x]), x \in X\}$, donde $\phi([x]) = h(x)$ forma una topologia bajo la cociente.

Ahora sea $\phi : X/\ker h \rightarrow Y$ 1-1. Se hace la siguiente diagrama commutativa:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{h} & Y \\
 \downarrow q & \searrow \phi & \\
 X/\ker h & &
 \end{array}$$

note que h es continua sí y solo sí ϕ es continua, mas aún, sí h lleva a X sobre Y , entonces ϕ es un homeomorfismo.

Definición. Sean X y Y espacios topologicos. Una mapa continua de $f : X \rightarrow Y$ de X sobre Y se llama una **identificación** si para todo U abierto en Y , $f^{-1}(U)$ esta abierto en X .

Ejemplo 12. (1) Sí $f : X \rightarrow Y$ es continua de X sobre Y , y abieerto o cerrado (Es decir U abierto o cerrado en X implica $f(U)$ abierto o cerrado en Y), entonces f es una identificación. Nota, que sí U esta abierto en Y , entonces por continuidad $f^{-1}(U)$ es abierto en X ; además, por ser sobre, $U = f(f^{-1}(U))$ que esta abierto en Y . De igaul manera se produce lo mismo para cerrados, pero usnado complementos.

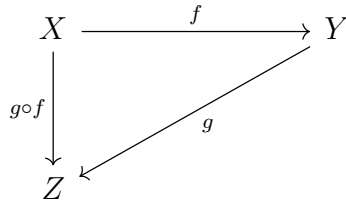
(2) Unas identificaciones son la relación $\ker h$ y la aplicación canonica.

Definición. Sean X , y Y espacios topologicos, y $f : X \rightarrow Y$ una identificación. Una mapa $s : X \rightarrow Y$ se llama una **sección** sí $f \circ s = 1_Y$.

Definición. Sea $f : X \rightarrow Y$ una mapa de un espacio topológico X hacia un espacio topológico Y . Si $y \in Y$, llamamos $f^{-1}(y)$ la **fibra** de f sobre y .

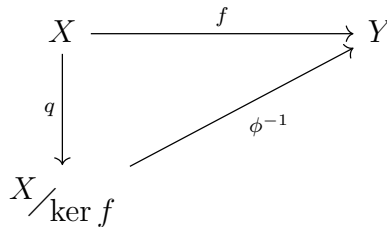
Ejemplo 13. Las fibras de la aplicación canónica q son las clases de equivalencias $[x] \in X/\ker h$, para una mapa $h : X \rightarrow Y$.

Teorema 15. Sea $f : X \rightarrow Y$ continua de espacios topológicos X sobre Y . Entonces, f es una identificación si y solo si para todo espacio topológico Z , y un mapa $g : Y \rightarrow Z$, tenemos que g es continua si y solo si $g \circ f$ es continua.



demostración. Suponga que f es una identificación. Sea Z un espacio topológico y $g : Y \rightarrow Z$. Si g es continua, entonces $g \circ f$ es continua por composiciones. Ahora, por otro lado, si $g \circ f$ es continua, entonces dado V abierto en Z , tenemos que $f^{-1}(g^{-1}(V))$ es abierto en X . Como f es sobre, esto hace que $g^{-1}(V)$ sea abierto en Y .

Ahora considere el espacio Z , junto al mapa $g : Y \rightarrow Z$ tal que g es continua si y solo si $g \circ f$ es continua. Sea f continua de X sobre Y , y sea $Z = X/\ker f$. Considere la aplicación canónica y la mapa $\phi([x]) = f(x)$, donde ϕ es 1-1.



La diagrama arriba es conmutativa, así que $f = \phi^{-1} \circ q$. Así que $\phi \circ f = q$, haciendo q una identificación. Entonces, sea $g = \phi^{-1}$. Tenemos que $g \circ f$ es continua, como $g \circ f = q$, así que por hipótesis, $g = \phi^{-1}$ tiene que ser continua. Como q también es una identificación, esto hace que ϕ sea continua, así que ϕ es un homeomorfismo. Mas aún, $f = \phi^{-1} \circ q$, así que $f^{-1}(U) = (\phi^{-1} \circ q)^{-1}(U) = q^{-1}\phi(U)$. Como q es una identificación, $\phi(U)$ es abierto, esto hace que $f^{-1}(U)$ sea abierto. Es decir, f es una identificación. ■

Corolario. Si f es una identificación, y $h : X \rightarrow Y$ continua, y constante en cada fibra de f , entonces $h \circ f^{-1} : Y \rightarrow Z$ es continua.

Corolario. Si $h : X \rightarrow Z$ es una identificación, entonces la aplicación $\phi : X/\ker h \rightarrow Z$ definida por $\phi([x]) = h(x)$ es un homeomorfismo.

Definición. Sea X un espacio topológico. Defina una relación de equivalencia sobre $X \times I$ dado por $(x, t) \sim (x', t')$ sí y solo sí $t = t' = 1$. Denota la clase de equivalencia de (x, t) $[x, t]$. Entonces llamamos el espacio cociente $X \times I/\sim$ el **cono** sobre X , denotado por CX .

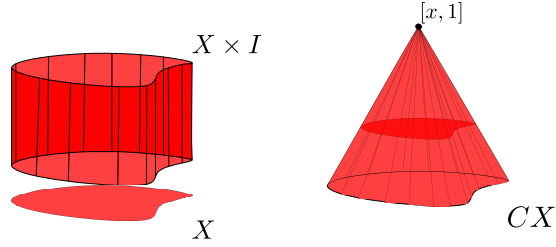


Figura 20: El cono CX sobre X , con vértice $[x, 1]$.

Teorema 16. Para todo espacio topológico X , el cono, CX es contractible.

demostración. Defina la mapa $F : CX \times I \rightarrow CX$ por $[x, 1]$. ■

Teorema 17. El espacio topológico X tiene el mismo tipo de homotopía que un punto sí y solo sí X es contractible.

demostración. Sea $\{a\}$ y suponga que $X \simeq \{a\}$. Entonces existen una mapas $f : X \rightarrow \{a\}$ y $g : \{a\} \rightarrow X$ con $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_{\{a\}}$. Pero vemos que $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(a) = x_0$ para algún $x_0 \in X$, así que $1_X \simeq c_{x_0}$.

Por otro lado, sí $1_X \simeq c_{x_0}$ para algún $x_0 \in X$, defina las mapas $f : X \rightarrow \{x_0\}$ y $g : \{x_0\} \rightarrow X$ dados por $x \xrightarrow{f} x_0$ y $x_0 \xrightarrow{g} x$. Entonces, $f \circ g = 1_{\{x_0\}}$ y $g \circ f = 1_X$. ■

Corolario. Si Y es un espacio contractible, entonces cualesquiera dos mapas de $X \rightarrow Y$ son homotópicamente nulos.

demostración. Sea $1_Y \simeq c_{y_0}$ para $y_0 \in Y$. Defina $g : X \rightarrow Y$ por $x \xrightarrow{g} y_0$ para todo $x \in X$. Entonces, $g \simeq c_{y_0}$. Ahora, sea $f : X \rightarrow Y$ una mapa cualquiera, entonces $1_Y \circ f \simeq c_{y_0} \circ f$. Nota que $1_Y \circ f = f$ y $c_{y_0} \circ f = g$, así que $f \simeq g$. ■

Lectura 9: Caminos y Conexidad por Caminos.

Definición. Un **camino** en un espacio topológico X es una mapa continua $f[0, 1] \rightarrow X$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$ para algunos $a, b \in X$. Decimos que a es el **punto inicial**, y b el **punto final**. Decimos que f empieza **desde a hacia b** .

Definición. Un espacio topológico X es **conexo por caminos** si para toda $a, b \in X$, existe un camino $f : [0, 1] \rightarrow X$ desde a hacia b .

Teorema 18. *Si un espacio topológico X es conexo por caminos, entonces es conexo.*

demostración. Sea X no conexo. Entonces existe una separación de X en conjuntos abiertos U y V disjuntos; osea, $X = U \cup V$. Sea $a \in U$ y $b \in V$. Si $f : [0, 1] \rightarrow X$ es un camino desde a hacia b , entonces existe una separación de la imagen $f([0, 1])$. Pero $[0, 1]$ es un conjunto conexo, por lo tanto, $f([0, 1])$ también tiene que ser conexo. Esto es una contradicción. ■

Ejemplo 14. No todos los conjuntos conexos son conexos por camino.

(1) Considera la curva seno del topólogo.

(2) Considera el **remolín del topólogo** definido de ser la siguiente curva: $S^1 \cup \{r \in \mathbb{R}^2 : r = \frac{\theta}{1+\theta}, \text{ donde } 0 \leq \theta\}$. El remolino es conexo, pero no es conexo por camino; la demostración de esto es similar al del curva seno del topólogo.

Teorema 19. *Si X es un espacio topológico, entonces la relación \sim dado por $a \sim b$ si y solo si existe un camino desde a hacia b . Entonces \sim es una relación de equivalencia.*

demostración. El camino constante $[0, 1] \rightarrow X$ dado por $x \rightarrow a$ hace que $a \sim a$. Entonces, considere $a \sim b$. Entonces existe un camino $f : [0, 1] \rightarrow X$ dado por $f : 0 \rightarrow a$ y $f : 1 \rightarrow b$. Defina entonces $g = f(1 - t)$. g es continua por composición, y $g : 0 \rightarrow b$ y $g : 1 \rightarrow a$. Así que $b \sim a$.

Finalmente, sea $a \sim b$ y $b \sim c$. Entonces existen caminos $f : [0, 1] \rightarrow X$ y $g : [0, 1] \rightarrow X$ dados por $f : 0 \rightarrow a, 1 \rightarrow b$ y $g : 0 \rightarrow b, 1 \rightarrow c$. Defina la mapa $h : [0, 1] \rightarrow X$ dado por

$$h(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Por el teorema del empaste, h es continua. Mas aún, $h : 0 \rightarrow f(0) = a, 1 \rightarrow g(1) = c$. Así que $a \sim c$. ■

Definición. Se llama las clases de equivalencia del espacio topológico X bajo conexidad de caminos los **componentes de caminos** de X . Escribimos $\pi_0(X) = X/\sim$ el conjunto de los componentes de camino. Dado $f : X \rightarrow Y$, definimos $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ la mapa que envía un conjunto de caminos, C de X a los únicos componentes de caminos de Y , que contienen a $f(C)$.

Teorema 20. $\pi_0 : \text{Top} \rightarrow \text{Conj}$ es un funtor.

demostración. Sea $1_X : X \rightarrow X$, y sea $\pi_0(x) = \{X_\alpha\}$ donde X_α es un componente de camino. Entonces $\pi_0(1_X) : X_\alpha \rightarrow X_\beta$, así que $X_\alpha \subseteq X_\beta$. Como X_α y X_β son clases de equivalencia, entonces $X_\alpha = X_\beta$, es decir, $\alpha = \beta$. Por lo tanto $\pi_0(1_X) = 1_{\pi_0(X)}$.

Ahora sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ continuas. Sean $\pi_0(X) = \{X_\alpha\}$, $\pi_0(Y) = \{Y_\beta\}$, y $\pi_0(Z) = \{Z_\gamma\}$ los conjuntos de componentes de caminos de, X , Y , y Z respectivamente. Considere X_α y Z_γ tales que $\pi_0(g \circ f)(X_\alpha) = Z_\gamma$. Entonces Z_γ contiene a $g \circ f(X_\alpha) = g(f(X_\alpha))$. Sea Y_β el componente que contiene a $f(X_\alpha)$, es decir, $\pi_0(f)(X_\alpha) = Y_\beta$. Entonces Y_γ es el unico tal componente, así que vemos que $g(f(X_\alpha)) \subseteq g(Y_\beta) \subseteq Z_\gamma$, y Z_γ es el unico componente que contiene a Y_β , y a X_α . Por lo tanto, tenemos que $\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$. Esto hace a π_0 un funtor en Top . ■

Corolario. *Sí $f \simeq g$, son del mismo tipo de homotopia, entonces $\pi_0(f) = \pi_0(g)$.*

demostración. Suponga que $f \simeq g$ a través de una homotopía F . Sea C un componente por caminos de X , entonces, $C \times I$ es conexo por caminos. Entonces, tenemos que $F(C \times I)$ es continua, por lo tanto, $F(C \times I)$ es conexo por caminos. Ahora, tenemos que $f(C) = F(C \times 0) \subseteq F(C \times I)$; de igual forma, $g(C) \subseteq F(C \times 1) \subseteq F(C \times I)$. Así que el componente por caminos unico conteniendo a $F(C \times I)$ contiene a $F(C)$ y a $g(C)$. Por lo tanto, $\pi_0(f) = \pi_0(g)$. ■

Corolario. *Sí dos espacios tienen el mismo tipo de homotopia, entonces tienen el mismo número de componentes por caminos.*

demostración. Suponga, que $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ son continuas, y satisfacen $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$. Aplicando π_0 , vemos que $\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f) = 1_{\pi_0(X)}$ y $\pi_0(f \circ g) = \pi_0(f) \circ \pi_0(g) = 1_{\pi_0(Y)}$. Esto implica que $\pi_0(g)$ es sobre, y que $\pi_0(f)$ es 1-1 en la categoría Conj . De igual manera, vemos que $\pi_0(f)$ es sobre, y que $\pi_0(g)$ es 1-1, así que $\pi_0(f)$ y $\pi_0(g)$ son ambos 1-1 y sobre. Así que $\pi_0(X)$ y $\pi_0(Y)$ son equienumerables, así que tienen el mismo número de componentes por caminos. ■

Definición. Un componente de camino de un espacio topológico X se llama **maximal** si no hay ningún otro componente de camino que lo contiene. Es decir si C y B son componentes de camino, con C maximal y $C \subseteq B$, entonces $C = B$.

Definición. Decimos que un espacio topológico es **localmente conexo por caminos** si para todo $x \in X$ y toda vecindad U de x , existe un abierto en X , V , con $x \in V \subseteq U$ tal que para todo $v_1, v_2 \in V$, existe un camino f en U con $f(0) = v_1$ y $f(1) = v_2$.

Teorema 21. *Un espacio topológico es localmente conexo por caminos sí, y solo sí los componentes de caminos de abiertos son abiertos.*

demostración. Sea X un espacio localmente conexo por caminos y sea U abierto en X , y C un componente de camino de U . Sea $c \in C$, por hipotesis, tenemos que existe un abierto V con $c \in V \subseteq U$ tal que para todo $x, y \in V$ existe un camino f en U desde x hacia y . Entonces V esta en un componente de camino de X . Como $c \in V$, tenemos que $c \in V \subseteq C$, lo cual hace C abierto.

Por otro lado, sean los componentes de caminos de conjuntos abiertos de X abiertos, y sea U un abierto de X . Sea C un componente de camino de X con $x \in C$, donde $x \in U$. Entonces $x \in C \subseteq U$, y por definicion, X es localmente conexo por caminos. ■

Corolario. *Sí X es un espacio localmente conexo por caminos, entonces todos los componentes de caminos de X son abiertas.*

Corolario. *X es un espacio localmente por caminos sí y solo sí para todo $x \in X$ y U una vecindad de x , existe un componente por camino V con $x \in V \subseteq U$.*

Corolario. *Sí X es localmente conexo por caminos, los componentes de caminos de X coincidan con los componentes convexos de X .*

demostración. Sea X localmente conexo por caminos, u U abierto en X , y C un componente conexo de X . Sea $\{A_\alpha\}$ una coleccion de componentes de caminos de C , entonces $C = \bigcup A_\alpha$ es una union disjunta de los A_α . Mas aun, A_α esta abierto en C (como subespacio de X). Entonces nota que $C \setminus A_\alpha = \bigcup_{\beta \neq \alpha} A_\beta$ lo que hace A_α cerrado en C . Ahora, si hay mas de una indice α , entonces tenemos una separación de C , lo cual es imposible. Es decir, $C = A_\alpha$. ■

Corolario. *Sí X es un espacio conexo, y localmente conexo por caminos, entonces X es conexo por caminos.*

Definición. Sea A un subespacio de un espacio topologico X . Llamamos a A un **retracto de deformación** sí existe una mapa $f : X \rightarrow A$ tal que $r \circ i = 1_A$ y $i \circ r \simeq 1_X$, donde $i : A \rightarrow X$ es la inclusion.

Teorema 22. *Sí A es una retracto de deformacion de un espacio topologico X , entonces A y X tienen el mismo tipo de homotopia.*

Ejemplo 15. S^1 es un retracto de deformacion de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, y igualmente de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Lectura 10: Simplejas.

Definición. Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es **afín** sí para todo $x, y \in A$, la recta l que pasa por x y y esta contenido en A .

Lema 23. *Sí $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es afín, entonces es convexo.*

Ejemplo 16. Los conjuntos \emptyset y $\{x\}$, con $x \in \mathbb{R}^n$ son afín.

Teorema 24. *Sí $\{X_\alpha\}$ es una colección de conjuntos afines en \mathbb{R}^n , entonces la intersección de todos es afín.*

demostración. Sea $X = \bigcap X_\alpha$ con $X_\alpha \in \mathbb{R}^n$ afín. Sean $x, y \in X$ y $l(x, y)$ la recta que pasa por x y y . Entonces $l(x, y) \in X_\alpha$ para todo α lo cual hace $l(x, y) \in X$. Por lo tanto X es afín. ■

Corolario. *Sí $\{X_\alpha\}$ es una colección de conjuntos convexos en \mathbb{R}^n , entonces la intersección de todos es convexos.*

Definición. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Llamamos a la intersección de todos los conjuntos afines conteniendo a X el **casco afín** abarcado por X . De igual forma, la intersección de todos los conjuntos convexos conteniendo a X se llama el **casco convexo** abarcado por X . En ambos casos, denotamos el casco afín o convexo como $[X]$. Sí $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, escribimos $[\{x_0, \dots, x_m\}] = [x_0, \dots, x_m]$.

Definición. Una **combinación afín** de puntos $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ es un punto x tal que:

$$x = t_0 x_0 + \dots + t_m x_m$$

donde $\sum t_i = 1$. Una **combinación convexo** es una combinación afín donde $t_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq m$.

Teorema 25. *Sí $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, entonces $[x_0, \dots, x_m]$ el casco convexo abarcado por estos puntos es el conjunto de todas las combinaciones convexas de x_0, \dots, x_m .*

demostración. Sea S el conjunto de todas las combinaciones convexas de x_0, \dots, x_m . Entonces $[x_0, \dots, x_m] \subseteq S$; pues, sea $t_j = 1$ y $t_i = 0$ para todo $i \neq j$, entonces $x_j \in S$, así que $\{x_0, \dots, x_m\} \subseteq S$. Ahora, sea $\alpha = \sum a_i x_i$ y $\beta = \sum b_i x_i$ donde $a_i, b_i \geq 0$ y $\sum a_i = \sum b_i = 1$. Nota que

$$t\alpha + (1-t)\beta = \sum (ta_i + (1-t)b_i)x_i$$

mas aun, $\sum ta_i + (1-t)b_i = 1$ y que $ta_i + (1-t)b_i \geq 0$ para todo $0 \leq i \leq m$. Así que S es convexo.

Ahora, sea X convexo con $\{x_0, \dots, x_m\} \subseteq X$ por inducción en m , sí $m = 0$, $S = \{x_0\}$ lo que hace $S \subseteq X$. Ahora, considere para $m \geq 0$. Sea $t_i \geq 0$ y $\sum t_i = 1$ tal que $x = \sum t_i x_i$. Si $t_0 = 1$, entonces $p = \sum t_i x_i = x_0 \in X$. Ahora, si $t_0 \neq 1$, considere la combinación

$$q = \left(\frac{t_1}{1-t_0}\right)x_1 + \dots + \left(\frac{t_m}{1-t_0}\right)x_m$$

Entonces, vemos q es una combinacion convexa, y por hipotesis, $q \in X$. Entonces la combinacion $x = t_0x_0 + (1 - t_0)q \in X$, lo que hace X convexo. Ahora, nota que $[x_0, \dots, x_m]$ es convexo y contiene $\{x_0, \dots, x_m\}$, por lo tanto $S \subseteq [x_0, \dots, x_m]$. ■

Definición. Una colección de puntos $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ son **afín independiente** si la colección $x_1 - x_0, \dots, x_m - x_0$ es linealmente independiente en \mathbb{R}^n como espacio vectorial.

Ejemplo 17. \emptyset y $\{x_0\}$ son afín independientes en \mathbb{R}^n .

Teorema 26. Las siguientes enunciados son equivalentes para todo $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$:

- (1) x_0, \dots, x_m son afín independiente.
- (2) Si $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ tales que $\sum a_i x_i = 0$ y $\sum a_i = 0$, entonces $a_0 = \dots = a_m = 0$.
- (3) Si A es abarcado afínmente por x_0, \dots, x_m , entonces cada $x \in A$ tiene una representacion unica como combinacion afín de x_0, \dots, x_m .

demostración. Suponga, primero, que x_0, \dots, x_m son afín independiente. Ahora, sea $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ tales que $\sum a_i = 0$, y que $\sum a_i x_i = 0$. Entonces vemos que

$$\sum a_i x_i = \sum a_{xi} - 0 \cdot x_0 = \sum (a_i x_i - x_0 \sum a_i) = \sum a_i (x_i - x_0) = 0$$

Como x_0, \dots, x_m son afín independientes, entonces $x_1 - x_0, \dots, x_m - x_0$ son linealmente independiente, lo cual implica que $a_0 = \dots = a_m = 0$.

Ahora, suponga que el segundo enunciado sea cierto. Sea A abarcado por x_0, \dots, x_m , y suponga que $x \in A$ tal que $x = \sum a_i x_i$ y $\sum a_i = 1$. Sea tambien $x = \sum b_i x_i$ donde $\sum b_i = 1$. Entonces tenemos que $\sum a_i x_i = \sum b_i x_i$ por lo tanto $\sum (a_i - b_i) x_i = 0$, mas aun $\sum a_i - b_i = \sum a_i - \sum b_i = 0$. Entonces, vemos que $a_i - b_i = 0$ lo que hace $a_i = b_i$.

Por ultimo, suponga que A es abaracado por x_0, x_m y que todo $x \in A$ se puede escribir unicamente como una combinacion afín de x_0, \dots, x_m . Es decir, $x = \sum a_i x_i$. Sí $m = 1$, tenemos el resultado. Ahora, suponga quie $m \geq 1$. Suponga que $x_1 - x_0, \dots, x_m - x_0$ son linealmente dependientes. Entonces existen $r_i \in \mathbb{R}$, no todos 0 con $\sum r_i (x_i - x_0) = 0$. Entonces para una $r_j \neq 0$.

$$\sum \frac{r_i}{r_j} (x_i - x_0) = 0$$

Suponga, sin perder la generalidad, que hay un $r_j = 1$. Entonces $x_j \in \{x_0, \dots, x_m\}$ y tiene

las representaciones:

$$x_j = x_j = 1 \cdot x_j$$

$$x_j = - \sum_{i \neq j} r_i x_i + (1 + \sum_{i \neq j} r_j) x_0$$

Esto contradice que cada $x \in X$ tiene representación única, por lo tanto $x_1 - x_0, \dots, x_m - x_0$ tienen que ser linealmente independientes, por lo tanto x_0, \dots, x_m es afín independiente. ■

Corolario. Una combinación afín es independiente del orden en lo que esta dado.

Corolario. Sí A es afín en \mathbb{R}^n , y esta abarcado por p_0, \dots, p_m , afín independientes, entonces A es una traslación de un subespacio vectorial m -dimensional de \mathbb{R}^n . A saber, $A = V + x_0$.

demostración. Sean $x_0 = p_0$ y V el subespacio vectorial de \mathbb{R}^n con base $\{p_1 - p_0, \dots, p_m - p_0\}$, Por un lado, sí $z \in A$, entonces $z = \sum t_i p_i$ donde $\sum t_i = 1$. Entonces $z = \sum t_i p_i + t_0 p_0 = \sum t_i p_i - \sum t_i p_0 + (t_0 + \sum t_i) p_0 = \sum t_i (p_i - p_0) + p_0 \in V + x_0$. Por otro lado, sí $z \in V + x_0$, entonces $z = \sum t_i (p_i - p_0) + x_0 = \sum t_i (p_i - p_0) + p_0 = \sum t_i p_i$ y vemos que $\sum t_i = 1$, así que $z \in Z$. ■

Definición. Sea $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ afín independientes. Sí $t_0, \dots, t_m \in \mathbb{R}$ tales que $x = \sum t_i x_i$, llamamos a los $t_i a_i$ las **coordenadas baricentricas** de $x \in \mathbb{R}^n$ y lo representamos como $(t_0 x_0, \dots, y_m, x_m)$.

Definición. Sea $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ afín independiente. Llamamos al casco convexo, $[x_0, \dots, x_m]$ abarcado por los puntos un **m -simplejo** con **vértices** x_0, \dots, x_m . Llamamos el m -simplejo $[e_0, \dots, e_m]$ el m -simplejo **estandar**, donde $\{e_0, \dots, e_m\}$ es el base estandar de \mathbb{R}^{m+1} , y lo denotamos Δ^m .

Lema 27. Sea $[e_0, \dots, e_m]$ el m -simplejo estandar. Entonces las coordenadas baricentricas de un punto $x \in [e_0, \dots, e_m]$ coinciden con las coordenadas cartesianas de x .

Definición. Sea $[x_0, \dots, x_m]$ un m -simplejo. La **cara opuesta** a x_i , para $0 \leq i \leq m$ es el $m - 1$ -simplejo, denotado $[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_m] = \{\sum a_j x_j : a_j \geq 0, \sum a_j = 1, a_i = 0\}$. Para $0 \leq k \leq m - 1$, una **k -cara** es un k -simplejo formado por $k + 1$ elementos de un m -simplejo.

Definición. Definimos el **borde** de un m -simplejo $[x_0, \dots, x_m]$ de ser la union de todas las caras opuestas a x_i , para $0 \leq i \leq m$. Lo denotamos como $\partial[x_0, \dots, x_m]$.

Ejemplo 18. Las 1-caras del 3-simplejo $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ son $[x_0, x_1], [x_0, x_3], [x_1, x_2], [x_1, x_3], [x_2, x_3]$, y $[x_0, x_3]$. Nota que hay $\binom{4}{2} = 6$ 1-caras. Nota que los 1-caras son los aristas del tetrahedo.