

**MATE6201-0U1**  
**Prof. Luis A. Medina**  
**10.00 - 11.20**  
**CNL-A-207**

**Algebra Moderna**

Alec Zabel-Mena

Universidad de Puerto Rico, Recinto de Rio Piedras

17.08.2022

**Lectura 1: Grupos y Subgrupos**

**Definición.** Sea  $G$  un conjunto no vacío junto a una operación binaria  $\cdot$ . Decimos que el par  $(G, \cdot)$  es un **grupo** si:

- (1)  $a \cdot b \in G$  para  $a, b \in G$ .
- (2)  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ , para  $a, b, c \in G$
- (3) Existe un  $e \in G$  tal que  $a \cdot e = e \cdot a = a$  para toda  $a \in G$ .
- (4) Para toda  $a \in G$ , existe una  $a^{-1} \in G$  tal que  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ .

Si  $a \cdot b = b \cdot a$  para toda  $a, b \in G$ , entonces decimos que  $G$  es un grupo **Abeliano**.

**Ejemplo 1.** (1) Los naturales  $\mathbb{N}$  junto a la multiplicación se satisface los primeros tres axiomas, pero no es un grupo. De hecho,  $\mathbb{N}$  forma un estructura llamado un “monoide”.

- (2) El grupo mas pequeño es el conjunto  $\{e\}$ , que denotamos como  $\langle e \rangle$ .  $\langle e \rangle$  es, trivialmente, un grupo Abeliano.
- (3) Los enteros  $\mathbb{Z}$  junto con adición  $+$  forma un grupo Abeliano por la commutatividad de adición de los enteros.
- (4) El conjunto  $GL(n, \mathbb{R})$  de matrices  $n \times n$  con entradas reales, nosingular forman un grupo con respecto a multiplicación de matrices.  $GL(n, \mathbb{R})$  no es un grupo Abeliano.
- (5) Sea  $S$  cualquier conjunto y  $A(S)$  el conjunto de todas las funciones 1–1 y sobre llevando elementos de  $S$  a elementos de  $S$ . Entonces  $A(S)$  es un grupo no Abeliano con respecto a composición de funciones,  $\circ$ . Si  $S$  tiene  $n$  elementos, entonces exscribimos  $A(S) = S_n$ .  $A(S)$  también no se Abeliano ya que para funciones cualesquiera  $f, g$ ,  $f \circ g \neq g \circ f$ .

**Definición.** Sea  $G$  un grupo. El **orden** de un grupo es su cardinalidad, y escribimos  $\text{ord } G = |G|$ . Decimos que  $G$  es **finito** si  $\text{ord } G$  es finito; de lo contrario,  $G$  es **infinito**.

**Definición.** Sea  $G$  un grupo, y  $a \in G$ . El **orden** de  $a$ , denotado  $\text{ord } a$ , es el menor entero positivo  $n$  tal que  $a^n = e$  y escribimos  $\text{ord } a = n$ . Si tal  $n$  no existe, entonces decimos que  $a$  es de orden **infinita**, y decimos que  $a$  es un elemento **torsión**.

**Ejemplo 2.** (1) Considera  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , entonces  $\mathbb{C}^*$  tiene orden infinita, note que si  $\alpha = \exp(\frac{2i\pi}{5}) \in \mathbb{C}^*$ , entonces  $\alpha \neq 1$ , para  $j \neq 1, 2, 3, 4$ , pero  $\alpha^5 = 1$ . Entonces  $\text{ord } \alpha = 5$ .

(2) Considere  $A \in GL(6, \mathbb{R})$  con la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces,  $A^3 = I$ .

(3) En  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{R}^*$  es infinito, y  $\text{ord } 2$  es infinito.

**Definición.** Sea  $G$  un grupo y  $H \subseteq G$  no vacío. Entonces decimos que  $H$  es un **subgrupo** de  $G$  si  $H$  es un grupo bajo la misma operación de  $G$ . Escribimos  $H \leq G$ .

**Ejemplo 3.** (1) Considere  $GL(n, \mathbb{R})$  y sea  $SL(n, \mathbb{R})$  los elementos  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  tales que  $\det A = 1$ . Entonces  $SL(n, \mathbb{R}) \leq GL(n, \mathbb{R})$ .

(2) Sea  $C(\mathbb{R})$  el conjunto de todas las funciones continuas sobre  $\mathbb{R}$ . Entonces  $C(\mathbb{R})$  es un grupo bajo la suma de funciones  $+$ . Sea  $C^1(\mathbb{R})$  el conjunto de funciones primer diferenciables continuas sobre  $\mathbb{R}$ . Es decir, que  $f'$  existe y es continua. Observe lo siguiente:

- (a)  $(f + g)' = f' + g'$
- (b)  $f' + (g + h)' = (f + g)' + h'$ .
- (c)  $c' = 0$ , entonces  $0 \in C^1(\mathbb{R})$
- (d)  $f' - f' = -f' + f' = 0$ .

Suponiendo que  $f', g', h' \in C^1(\mathbb{R})$ , son continuas, entonces vemos que las funciones de arriba también son continuas. Entonces  $C'(\mathbb{R}) \leq C(\mathbb{R})$ .

**Lema 1.** Sea  $G$  un grupo y  $H \subseteq G$  no vacío. Si tenemos que  $ab \in H$ , implicat que  $ab^{-1} \in H$ , entonces  $H \leq G$ .

*Proof.* Como  $H \neq \emptyset$ , sea  $a \in H$ . Entonces  $aa^{-1} = e \in H$ . Luego, también tenemos que  $ea^{-1} = a^{-1} \in H$ . Finalmente, tenemos que si  $b \in H$ , entonces  $ab^{-1} \in H$ , por lo tanto  $b^{-1} \in H$ , entonces  $a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$ . ■

**Ejemplo 4.** (1) Considere a los enteros pares  $2\mathbb{Z}$ . Sean  $2n, 2m \in 2\mathbb{Z}$ . Noten que  $2n - 2m = 2(n - m) \in 2\mathbb{Z}$ . Entonces  $2\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ .

- (2) Si  $G$  es un grupo, entonces  $\langle e \rangle$  y  $G$  son subgrupos de  $G$ . Llamamos a  $\langle e \rangle$  el grupo **trivial**.
- (3) Si  $G$  es un grupo, y  $a \in G$ , entonces el conjunto  $\langle a \rangle = \{a^j : j \in \mathbb{Z}\}$  es un subgrupo de  $G$ , llamado el **subgrupo generado por  $a$** .
- (4) Si  $G$  es un grupo, y  $a \in G$ , entonces  $C(a) = \{g \in G : ag = ga\}$  y  $Z(G) = \{g \in G : ag = ga \text{ para toda } a \in G\}$  son subgrupos. Nota que  $Z(G) = \bigcap C(a)$ . Llamamos a  $C(a)$  el **cnetrizador** de  $a$  y  $Z(G)$  el **centro** de  $G$ .
- (5) Sea  $G$  un grupo y  $H \leq G$ , y sea  $a \in G$ , entonces  $a^{-1}Ha \leq G$ . Llamamos a  $a^{-1}Ha$  el **conjugado de  $H$  con respecto a  $a$** .

**Definición.** Suponga que  $G$  y  $H$  son grupos. Un mapa  $\phi : G \rightarrow H$  se llama un **homomorfismo** si para toda  $a, b \in G$ ,  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ . Si  $\phi$  es 1-1 y sobre, entonces lo llamamos un **isomorfismo**. Si  $\phi$  es un isomorfismo, y  $G = H$ , entonces llamamos a  $\phi$  un **automorfismo**.