MATE6551-0U1
Prof. Ivan Cardona Torres
13.00 - 14.20
CNL-A-225

Linear Algebra

Alec Zabel-Mena

Universidad de Puerto Rico, Recinto de Rio Piedras

20.08.2022

Lectura 1: La Teorema de Puntos Fijos de Brouwer.

Empezamos con declara notación Vamos a denotar las siguentes conjuntos:

Definición. Denotamos la n**-esfera** como el conjuno $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ y la n**-bola** como el conjunto $B^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq 1\}$, donde $\| \cdot \|$ el la **norma** en $\mathbb{R}^n$ que induca la topología usual de $\mathbb{R}^n$. Llamamos punto $N = (0, \dots, 0, 1)$ de S^n el **polo norte** de s^n y el punto $S = (0, \dots, -1)$ de S_n el **polo sur** de S^n. Definimos la **ecuador** de una $n+1$-esfera S^{n+1} de ser la n-esfera S^n. Denotamos la 1-bola $B_1 = [-1, 1]$ como $I = [-1, 1]$.

Ejemplo 1. (1) S^1 es el circulo unitario en el plano $\mathbb{R}^2$, y S^2 es el esfera unitario en el espacio $\mathbb{R}^3$.

(2) Nota que $S^0 = \{-1, 1\}$ es la unica esfera no conexo en $\mathbb{R}$.

(3) Toda n-esfera tiene un polo norte y un polo sur. De hecho, el polo norte de S^0 es 1 y el polo sur es -1.

(4) Nota que el borde de una n-bola es una n-esfera. Es decie $\partial B^n = S^n$.

Definición. Denotamos una n**-simplejo estáandar** de $\mathbb{R}^n$ de ser el conjunto $\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0 \text{ y } \sum x_i = 1\}$.

Ejemplo 2. (1) $\Delta^0 = \{1\}\mathbb{R}$.

(2) Δ_1 es una recta entre los puntos $(0, 1)$ y $(1, 0)$ en $\mathbb{R}^2$ restrinjido a la primera caudrante.

(3) Δ^2 es una tetrahedro en la primer octánte de $\mathbb{R}$ con vertices en $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, y $(1, 0, 0)$.

(4) Note que $\Delta^0 \subseteq \Delta^1 \leq \Delta^2$.

(5) Como espacions topologicos, se puede demostrar que los n-simplejos estándares son homeomorfo a los n-bolas. Es decir $\Delta^n \simeq B^n$.

Definición. Sea $f : A \to A$ una función. Llamamos u punto $x \in A$ un **punto fijo** si $f(x) = x$.

Teorema 1 (Teorema de Puntos Fijos de Brouwer)**.** *Sí $f : B^n \to B^n$ es una función continua, entonces existe un punto fijo en B^n para toda $n \geq 1$.*

demostración. Demostramos la teorema para $n = 1$. Es decir, que toda función $f : I \to I$ tiene un punto fijo. Sean $a = f(-1)$ y $b = f(1)$. Sí $a = -1$ o $b = 1$, tenemos puntos fijos y terminamos.

Ahora, considere la gráfica de f, $G_f = \{(x, f(x)) : x \in I\}$, la diagonal de I, $\Delta(I) = \{(x,x) : x \in I\}$, y los medio planos $H_\Delta^+ = \{(x,y) : y > x\}$ y $H_\Delta^- = \{(x,y) : y < x\}$. Nota que $\Delta(I)$ es la grafica de la recta $y = x$ restringido a $I \times I$. Ahora, defina conjuntos

$$A = \{(x, f(x)) : f(x) > x\}$$
$$B = \{(x, f(x)) : f(x) < x\}$$
$$C = \{(x, f(x)) : f(x) = x\}$$

Entonces C es el conjunto de puntos fijos de f. Nota que $A \subseteq H_\Delta^+$, $B \subseteq H_\Delta^-$, y $C \subseteq \Delta(I)$. Tambien nota que los medio planos son abiertos en $\mathbb{R}^2$. Ahora, como I es compacto, y Hausdorff, se puede demostrar que G_f y $\Delta(I)$ son cerrados. Se puede ver la grafica de f en el figura 1

Ahora, not que G_f es conexo ya que es la imagen de la función $i_I \times f$. Como f y i_I son continua, entonces $i_I \times f$ es continua. Entonces como I es conexo, entonces $i_D \times f(I) = I \times I$ es conexo. Ahora, nota que $G_f = A \cup B \cup C$. Suponga que $C = \emptyset$. Entonces $G_f = A \cup B$. Pero tenemos que $A \subseteq H_\Delta^+$, y $B \subseteq H_\Delta^-$, por lo tanto, A y B son conjuntos abiertos, y que A y B son disjuntos. Por lo tanto $A \cup B$ es una separación abierta de G_f, una contradicción. Por lo tanto $C \neq \emptyset$ y existe puntos fijos de f para $n = 1$. ■

Para $n > 1$ no se ha encontrado una demostración general del teorema de puntos fijos. De hecho, es muy dificil para demostrar en general. Pero, se puede usar la maquinaria de la topologiía algebraica para construir un bosquejo de una demostración.

Lectura 2

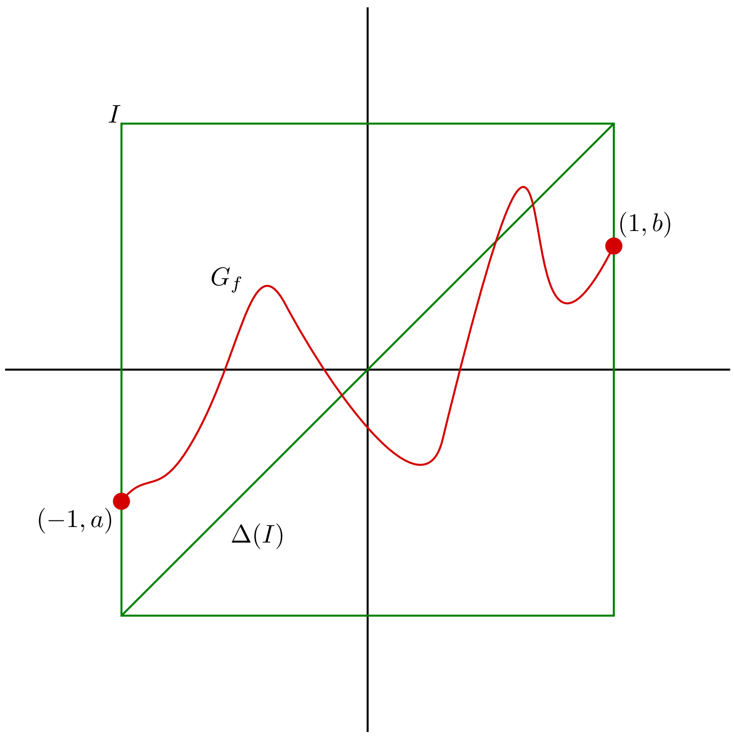

Figura 1: Demostración del teorema de puntos fijos de Brouwer.