Ὁμάδα ἀσκήσεων No. 1 γιὰ τὰ μαθήματα «Ἀναδρομικές Συναρτήσεις», «Θεωρία Αναδρομῆς» και «Ὑπολογισιμότητα» γιὰ τὸ Α.Ε. 2016–2017

Ἔκδοση: 31/10/2016

Λύστε ὅσες μπορεῖτε ἀπὸ τὶς παρακάτω ἀσκήσεις. Οἱ ἀσκήσεις θὰ παρουσιαστοῦν τὴν Παρασκευὴ 11/11/2016 ἀπὸ τὶς ὁμάδες ποὺ τὶς ἔχουν λύσει, μὲ τυχαία ἐπιλογὴ ἐκ τῶν μελῶν τους. Μπορεῖτε (καὶ ἐνθαρρύνεστε) νὰ σχηματίσετε ὁμάδες συνεργασίας τὸ πολὺ 3 ἀτόμων γιὰ τους προπτυχιακοὺς και τὸ πολὺ 2 ἀτόμων γιὰ τοὺς μεταπτυχιακούς γιὰ τὴν ἐπίλυση καὶ παρουσίαση τῶν ἀσκήσεων. Οἱ λύσεις πρέπει νὰ παραδοθοῦν ἀποκλειστικὰ μέσῳ τῆς ἡ-τάξης σὲ μορφὴ .pdf καὶ γραμμένες σὲ ΛαΤὲΧ (κατὰ προτίμηση) ἢ στὸ χέρι πρὶν τὶς 23:55 τῆς Τρίτης 08/11/2016 (σὲ περίπτωση ποὺ κανένα ἀπὸ τὰ μέλη τῆς ὁμάδας σας δὲν ἔχει πρόσβαση στὴν ἡ-τάξη, ἐπικοινωνήστε μὲ τὸν διδάσκοντα). Ὁ συνολικός (ἐπιπλέον) βαθμὸς ποὺ θὰ μπορέσει νὰ πάρει κάποιος φοιτητὴς καὶ ἀπό τὰ 3 πακέτα ἀσκήσεων θὰ εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς μεταξὺ 0 και 1,5 για τους προπτυχιακούς και μεταξύ 0 και 1 για τους μεταπτυχιακούς. Η συμβολή σε αυτό το βαθμό θὰ εξαρτάται κάθε φορά ἀπὸ τῆν ποιότητα τῆς παρουσίασης ποὺ θὰ κάνει ὁ (τυχαία ἐπιλεγμένος) ἀντιπρόσωπὸς τῆς ὁμάδας στὴν ὁποῖα θὰ ανήκει ὁ φοιτητής. Ἂν κάποιο μέλος μιᾶς ὁμάδας ἀπουσιάζει κατὰ τὴν παρουσίαση, ἀποκλείεται ἀπὸ τὴν διεκδίκηση τοῦ βαθμοῦ.

1. Ἡ εἰκασία τοῦ Γκόλντμπαχ εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ σημαντικότερα ἄλυτα προβλήματα τῆς θεωρίας ἀριθμῶν καὶ γενικότερα τῶν μαθηματικῶν. Ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς:

   Κάθε ἄρτιος θετικὸς ἀκέραιος μεγαλύτερος τοῦ 2 μπορεῖ νὰ γραφεῖ ὡς ἄθροισμα δύο πρώτων ἀριθμών, δηλ. γιὰ κάθε $n \geq 2,\ 2n = p + q$, ὅπου p, q πρώτοι αριθμοί.

   - Ἔστω τὸ παρακάτω πρόβλημα:

Διαψευση Γκολντμπαχ
Εἴσοδος: Φυσικὸς ἀριθμὸς $n \geq 2$.
Ἐρώτηση: Ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμὸς $k \geq n$ ποὺ νὰ διαψεύδει τὴν εἰκασία τοῦ Γκόλντμπαχ;

     Δεῖξτε ὅτι τὸ πρόβλημα Διαψευση Γκολντμπαχ εἶναι ἀναγνωρίσιμο.

   - Ἔστω ἐπίσης τὸ παρακάτω πρόβλημα:

Επαληθευση Γκολντμπαχ
Εἴσοδος: Φυσικὸς ἀριθμὸς $n \geq 2$.
Ἐρώτηση: Ἰσχύει ἡ εἰκασία τοῦ Γκόλντμπαχ γιὰ κάθε φυσικὸ άριθμὸ $k \geq n$;

     Δεῖξτε ὅτι ἂν τὸ πρόβλημα Επαληθευση Γκολντμπαχ εἶναι ἀναγνωρίσιμο, τότε θὰ εἶναι καὶ διαγνώσιμο.

2. Δεῖξτε ὅτι τὸ παρακάτω πρόβλημα εἶναι ἀποφάνσιμο:

Πεπερασμενη Μνημη
Εἴσοδος: Μηχανὴ Turing M μὲ αλφάβητο εἰσόδου τὸ Σ, συμβολοσειρὰ $w \in \Sigma^*$, καὶ μὴ ἀρνητικος ἀκέραιος n.
Ἐρώτηση: Ἐπισκέπτεται ἡ κεφαλὴ τῆς M τὴν n-οστὴ θέση τῆς ταινίας της κατὰ τὴν διάρκεια τῆς λειτουργίας της μὲ είσοδο w;

3. Ἔστω γλῶσσα L. Ὁρίζουμε:

   - $L^0 = \{\epsilon\}$
   - $L^1 = L$
   - $L^n = \{w_1 w_2 \cdots w_n \mid w_i \in L \text{ για } i = 1, \ldots, n\}$
   - $L^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$

   Δεῖξτε ὅτι ἂν $L \in \mathsf{RE}$, τότε $L^* \in \mathsf{RE}$.

4. Λέμε ὅτι μιὰ γλῶσσα C *διαχωρίζει* τὶς γλῶσσες A καὶ B ἂν $A \subseteq C$ καὶ $B \subseteq \overline{C}$.

   Ἔστω A, B δύο γλῶσσες ὅπου $A \cap B = \emptyset$ καὶ τέτοιες ὥστε τὰ συμπληρώματά τους νὰ εἶναι ἀναγνωρίσιμα. Δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει μιὰ ἀναδρομικὴ γλῶσσα ποὺ νὰ διαχωρίζει τὶς A καὶ B.

5. Κάθε ἄπειρη ἀναδρομικά ἀπαριθμήσιμη γλῶσσα εἶναι ἡ ἕνωση δύο άπειρων καὶ ἀναδρομικὰ ἀπαριθμήσιμων γλωσσῶν χωρίς κοινά στοιχεία.

6. Ἔστω σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$. Ὁρίζουμε τὴν συνάρτηση $\mathrm{rank}_A(x) = |\{y \mid y < x \ \wedge \ y \in A\}|$. Δεῖξτε ὅτι ἡ rank_A εἶναι ὑπολογίσιμη ἄν καὶ μόνο ἄν $L_A \in \mathsf{REC}$, ὅπου $L_A \subseteq \{0,1\}^*$ ἡ γλῶσσα ποὺ περιέχει τοὺς ἀριθμοὺς τοῦ A ἐκφρασμένους στὸ δυαδικό σύστημα.

7. Ἔστω μερικὴ συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Ὁρίζουμε $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \downarrow\}$ (προφανῶς ἡ f εἶναι πλήρης συνάρτηση ἄνν $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{N}$). Χρησιμοποιούμε τὸν ὅρο ϕ_x γιὰ τὴν συνάρτηση ποὺ ὑπολογίζει ἡ Μηχανή Turing M_x μὲ ἀριθμὸ Gödel x.

   Ἔστω $K = \{x \mid M_x(x) \downarrow\}$ καὶ $R = \{x \mid \mathrm{Dom}(\phi_x) \in \mathsf{REC}\}$. Ἐξετάστε τὴν ὀρθότητα τῶν παρακάτω προτάσεων:

   - $R \subseteq K$.
   - $R \cap K = \emptyset$.
   - $R \cup K \in \mathsf{RE}$.
   - Δεν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $\sigma : K \to \overline{K}$.

8. Δεῖξτε ὅτι ἡ συνάρτηση

$$\phi(i) = \begin{cases} i & \text{ἄν } |L(M_i)| \geq i \\ \uparrow & \text{διαφορετικὰ.} \end{cases}$$

   εἶναι ὑπολογίσιμη.
   (Ὑπενθυμίζεται ὅτι ἡ M_i είναι ἡ i-στὴ, κατὰ λεξικογραφικῆ σειρὰ κωδικοποίησης, μηχανὴ Turing.)

9. Ἔστω $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοια ὥστε γιὰ κάθε $x \in \mathbb{N}$, $\phi_{f(x)}(y) = \begin{cases} y & \text{αν } y \leq x \wedge \phi_y(y) \downarrow \\ \uparrow & \text{διαφορετικά} \end{cases}$. Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε $x \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(\phi_{f(x)}) \in \mathsf{REC}$.

10. Ἔστω συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοια ὥστε $f(n) = \begin{cases} \sum_{i=1,\ldots,n} \phi_i(n) & \text{αν } \phi_1(n) \downarrow \wedge \cdots \wedge \phi_n(n) \downarrow \\ \uparrow & \text{διαφορετικά} \end{cases}$. Δεῖξτε ὅτι ἡ f εἶναι ἀναδρομική.

11. Δεῖξτε ὅτι μιὰ μὴ κενὴ γλῶσσα L εἶναι ἀναδρομικά ἀπαριθμήσιμη ἄν καὶ μόνο ἄν ὑπάρχει μιὰ συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to L$ ποὺ νὰ εἶναι επί, πλήρης και υπολογίσιμη.

12. Ἔστω $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ὑπολογίσιμη συνάρτηση ἡ ὁποῖα εἶναι ὑπολογίσιμη καὶ φθίνουσα στὸ $\mathrm{Dom}(f)$. Δεῖξτε ὅτι $\mathrm{Im}(f) \in \mathsf{REC}$. Ἐπιπλέον δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε γλῶσσα $L \subseteq \Sigma^*$, $f(L) \in \mathsf{REC}$.