

فهرست مطالب

۲.....	مقدمه ای درباره سیستم کوادروتور:
۳.....	بررسی حرکت کوادروتور در فضا:
۵.....	مدل سازی ریاضی کوادروتور:
۱۶.....	خطی سازی مدل غیر خطی:
۱۸.....	تحلیل سیستم خطی:
۲۰.....	طراحی کنترل کننده:
۲۱.....	مشاهده گر حالت:
۲۴.....	طراحی کنترل کننده فیدبک حالت کامل به روش جایابی قطب:
۲۶.....	طراحی کنترل کننده فیدبک حالت کامل به روش رگولاتور خطی بهینه:
۲۸.....	مقایسه دو روش کنترلی:
۳۰.....	مراجع:

مقدمه ای درباره سیستم کوادروتور^۱:

کوادروتورها دسته ای از پرنده های بدون سرنشین می باشند که مبنای حرکتی آنها نیروی تولیدی تعدادی موتور و ملخ می باشد. از نظر تعداد روتور معروف ترین پیکربندی، پیکربندی چهار روتوره می باشد که به نام کوادروتور یا کوادکوپتر^۲ نیز معروف است. به دلیل اندازه کوچک و همچنین مانورپذیری بالا این دسته از پرنده ها و همچنین کاربرد های فراوان در عرصه های مختلف در سال های اخیر مورد توجه بسیاری از پژوهشگران و شرکت های صنعتی قرار گرفته اند. از نظر دینامیکی کوادروتورها بسیار غیر خطی و همچنین زیرعملگر^۳ (چهار ورودی کنترلی دور موتور در ازای شش درجه آزادی حرکتی در فضا) می باشند. نیروی تراست و ممان های مورد نیاز برای حرکت آزادانه کوادروتور در فضا توسط چرخش مجموعه چهار روتور و ملخ و تعیین دقیق میزان دور هر یک تامین می شود. نیروی تراست تولیدی موتور ها در کوادروتور همواره موازی با محور عمودی بدنه می باشد، پس در نتیجه برای حرکت در فضا می باشد با تغییر دور موتورها زاویه بردار تراست را تغییر دهیم و باعث تولید ممان های مختلف حول سایر محور های بدنه بشویم.

با توجه به نکته فوق دینامیک انتقالی کوادروتور کاملاً کوپل با دینامیک زاویه ای آن می باشد و این امر باعث پیچیدگی دینامیکی و همچنین کنترل آن می شود.

همان گونه که اشاره شد کوادروتورها کاربرد های فراوانی در عرضه های مختلف دارند، تعدادی از این کاربرد ها عبارت است از:

- شناسایی: با توجه به اندازه کوچک میزان نویز تولیدی بسیار پایینی دارند که منجر به عدم تشخیص راحت آنها در یک محیط مشخص می شود.
- نظارت هوایی: توانایی حمل انواع دوربین ها این دسته از پرنده ها را گزینه مناسبی برای نظارت هوایی می کند.
- تصویر برداری هوایی: در عرصه هنری، فیلم برداری از پروژه های سینمایی، اخیراً فراوان از کوادروتورها استفاده می شود.
- جستجو و نجات: برای شناسایی افراد در مکان های سبب العبور به راحتی می توان از کوادروتورها استفاده کرد.
- تحویل اجناس: برای تحویل سفارش های خانگی مردم می توان استفاده کرد.
- مدل سازی محیط: برای تعیین هندسه سه بعدی و همچنین تولید نقشه های سه بعدی شهر ها و روستا به راحتی می توان از توانایی های کوادروتورها استفاده کرد.

¹ Quadrotor

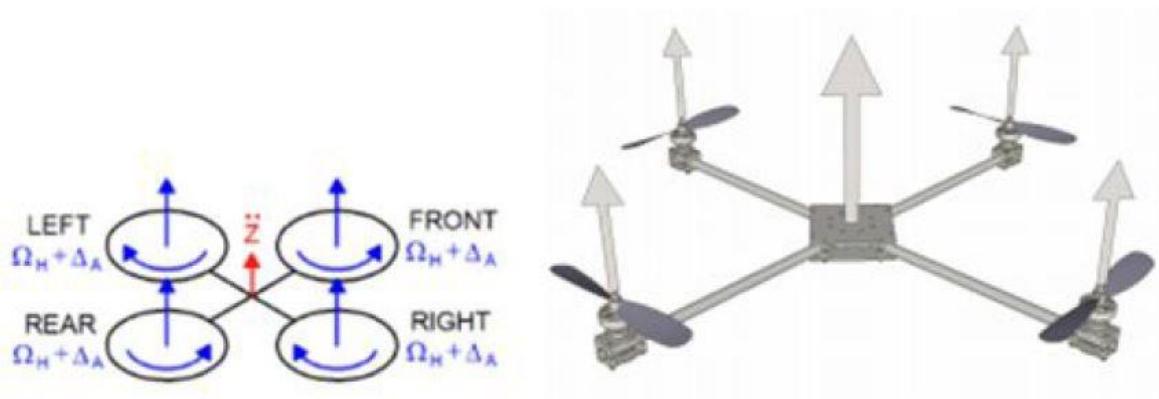
² Quadcopter

³ under-actuated

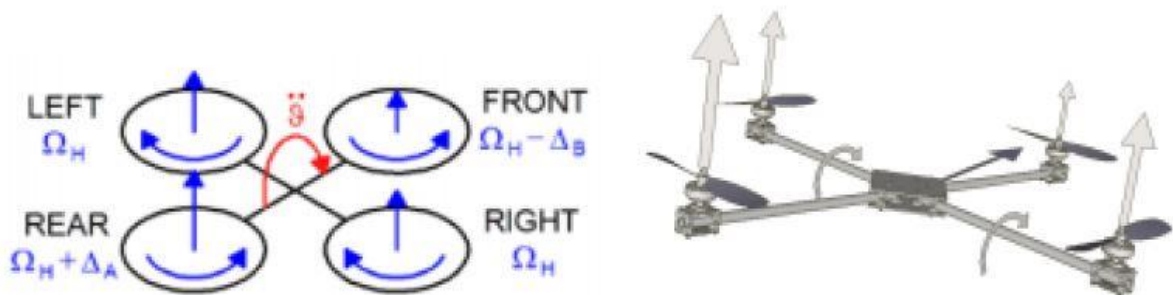
بررسی حرکت کوادروتور در فضا:

همان گونه که اشاره شد، حرکت کوادروتور در فضا به واسطه چرخش مجموعه موتور و ملخ می باشد، که با تغییر دور موتورهای می توان در جهت های مختلفی پرواز کرد.

با تعریف چهار مانور اصلی تغییر ارتفاع، پیچ^۴، رول^۵ و یاو^۶ می توان هر نوع مانور دلخواهی رو پیاده سازی کرد، کافی است فقط متناسب با مانور نهایی، دو الی چهار مانور اصلی فوق را با یکدیگر ترکیب کرد.



شکل ۱- مانور تغییر ارتفاع

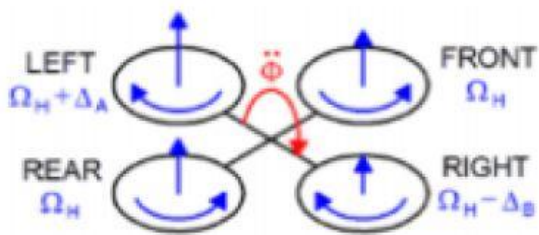


شکل ۲- مانور پیچ

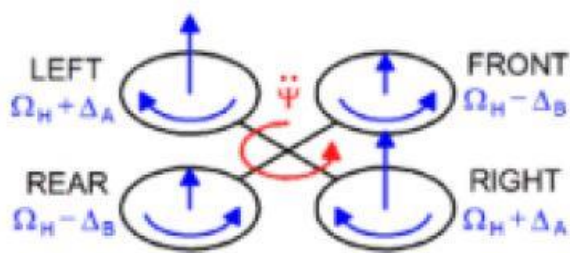
⁴ Pitch

⁵ Roll

⁶ Yaw



شکل ۳- مانور رول

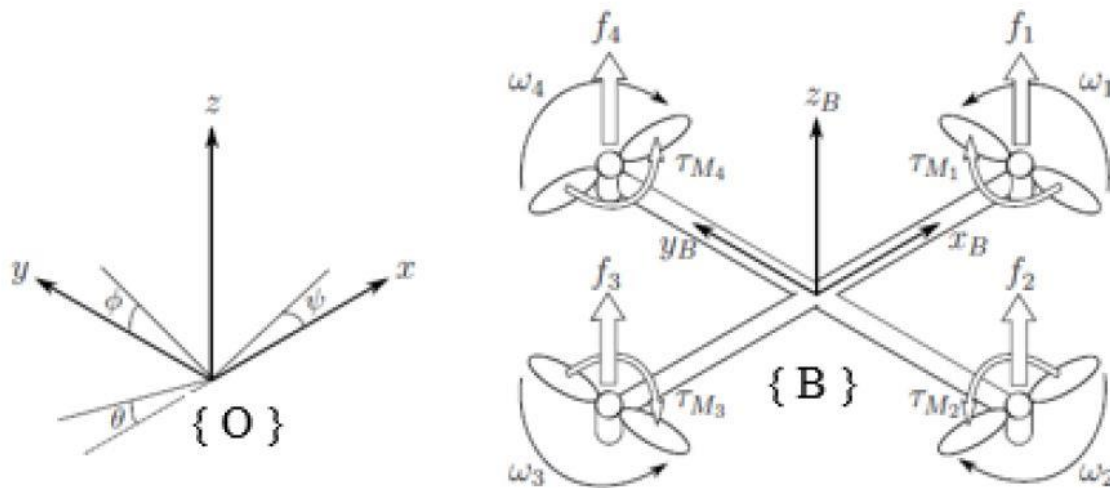


شکل ۴- مانور یاو

در مانور تغییر ارتفاع هر چهار موتور با سرعت زاویه ای یکسان و برابر دوران می کنند، در مانور های پیچ و رول فقط دو موتور روبه روی یکدیگر که در جهت ساعت دوران می کنند سرعت زاویه ای را تغییر می دهند و در نهایت در مانور یاو دو موتور با جهت دوران مخالف یکدیگر می بایست سرعت زاویه را تغییر دهند تا مانور یاو حاصل شود. در شکل های ۱ الی ۴ هر چهار مانور نمایش داده شده است.

مدل سازی ریاضی کوادروتور:

سینماتیک و دینامیک کوادروتور را می توان با تعیین دو قاب مرجع بیان نمود. اولین قاب مرجع، قاب اینرسی زمین که در یک نقطه از زمین ثابت می باشد، و دومین قاب مرجع، قاب ثابت بدنه که به بدنه کوادروتور متصل است و با حرکت و همچنین دوران کوادروتور متناسب با آن حرکت و دوران می کند. مشخصه اصلی قاب مرجع اینرسی شتاب جاذبه زمین است، شتاب جاذبه دقیقاً موازی و خلاف جهت سوم این قاب می باشد، محور های اول و دوم دستگاه مختصات متناسب با قاب بدنه موازی با دو بازوی کوادروتور و محور سوم آن حاصل ضرب خارجی محور های اول و دوم می باشد، که این محور سوم عمود بر بدنه کوادروتور است. چهار موتور الکتریکی DC در انتهای چهار بازوی کوادروتور نصب شده اند، تا با دوران هر یک نیروی تراست مورد نیاز پرواز تامین شود. در شکل زیر موتور های شماره یک و سه در خلاف جهت ساعت با سرعت های زاویه ای ω_1 و ω_3 ، همچنین موتور های دو و چهار در جهت ساعت و با سرعت های زاویه ای ω_2 و ω_4 دوران می کنند.



شکل ۵- دستگاه مختصات اینرسی و بدنه کوادروتور

موقعیت مطلق مرکز جرم کوادروتور را نسبت به قاب اینرسی با P ، وضعیت یا همان موقعیت زاویه ای را نیز نسبت به قاب اینرسی با η نمایش می دهیم که همان زوایای اوایلر می باشند.

$$Inertial\ Frame \rightarrow \begin{cases} P = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \\ \eta = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \end{cases}$$

همچنین سرعت های خطی بدنه را با V_B و سرعت های زاویه ای را با Ω در قاب بدنه بیان می کنیم.

$$Body Frame \rightarrow \begin{cases} V_B = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \\ \Omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \end{cases}$$

ارتباط مابین دستگاه مختصات اینرسی و بدنه را با ماتریس تبدیل دستگاه مختصات می توان بیان کرد که به صورت زیر است:

$$[T]^{BI} = [T(\phi)]^{BY} [T(\theta)]^{YX} [T(\psi)]^{XI} \quad \leftrightarrow \quad \begin{matrix} 1^Y & 2^X & 3^I \\]^B \leftarrow]^Y \leftarrow]^X \leftarrow]^I \\ \phi & \theta & \psi \end{matrix}$$

$$[T]^{BI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}^{BY} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}^{YX} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{XI}$$

$$[T]^{BI} = \begin{bmatrix} C\psi C\theta & S\psi C\theta & -S\theta \\ C\psi S\theta S\phi - S\psi C\phi & S\psi S\theta S\phi + C\psi C\phi & C\theta S\phi \\ C\psi S\theta C\phi + S\psi S\phi & S\psi S\theta C\phi - C\psi S\phi & C\theta C\phi \end{bmatrix}^{BI}$$

$$[T]^{IB} = \overline{[T]^{BI}} = \begin{bmatrix} C\psi C\theta & C\psi S\theta S\phi - S\psi C\phi & C\psi S\theta C\phi + S\psi S\phi \\ S\psi C\theta & S\psi S\theta S\phi + C\psi C\phi & S\psi S\theta C\phi - C\psi S\phi \\ -S\theta & C\theta S\phi & C\theta C\phi \end{bmatrix}^{IB}$$

که در آن S نماد \sin و C نماد \cos است.

با فرض کوچک بودن زوایای اوایلر می توان سرعت های زاویه ای بدنه را با نرخ زوایای اوایلر یکسان در نظر گرفت:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S\theta \\ 0 & C\phi & S\phi C\theta \\ 0 & -S\phi & C\phi C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

همچنین سرعت های خطی در دستگاه مختصات بدنه را با سرعت های خطی در دستگاه مختصات اینرسی برابر فرض می کنیم:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}^B = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}^I$$

نیروهای وارد بر کوادروتور:

هر چهار موتور در کوادروتور را یکسان فرض می کنیم و معادله را برای یک موتور بیان می کنیم، نیروی تراست تولیدی مجموعه موتور و ملخ که به کوادروتور وارد می شود بر اساس تئوری ممنتوم برابر است با:

$$T_i = \rho A r^2 C_T \omega_i^2$$

که در آن C_T ضریب تراست، ρ چگالی هوا، A سطح مقطع عرضی ملخ، r شعاع روتور و ω_i سرعت زاویه ای موتور مورد نظر است. جهت ساده سازی رابطه فوق، معادله تراست را خطی نسبت به ω_i^2 در نظر می گیریم و رابطه فوق برابر می شود با:

$$T_i = \rho A r^2 C_T \omega_i^2 \rightarrow T_i = K \omega_i^2$$

با ترکیب هر چهار موتور میزان کل تراست تولیدی که در راستا محور سوم بدنه نیز می باشد برابر است با:

$$T = K \sum \omega_i^2$$

که این نیرو در دستگاه مختصات بدنه برابر است با:

$$F_T^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix}^B$$

علاوه بر نیروی تراست، نیروی درگ نیز به کوادروتور وارد می شود که یک نیروی مقاوم است. و مولفه های آن در راستا محور های دستگاه مختصات اینرسی قرار دارد و متناسب با سرعت های خطی در این دستگاه می باشد:

$$F_D^I = \begin{bmatrix} A_x & 0 & 0 \\ 0 & A_y & 0 \\ 0 & 0 & A_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}^I$$

که در آن A_x ، A_y و A_z ضریب درگ در سه راستا x ، y و z است.

مادامی که سرعت زاویه ای هر چهار موتور برابر باشد کوادروتور یک نیروی تراست در راستا سوم دستگاه بدنه تجربه می کند که متناسب با مقدار این نیرو کوادروتور می تواند در یک ارتفاع ثابت بماند، ارتفاع آن افزایش و یا کاهش یابد.

نیروی جاذبه زمین نیز موازی و در خلاف جهت محور سوم دستگاه مختصات اینرسی است:

$$F_G^I = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}^I = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -W \end{bmatrix}^I$$

که در آن m جرم کوادروتور، g شتاب جاذبه زمین برابر مقدار ثابت ۹.۸۱ متر بر مجذور ثانیه و W نیروی وزن می باشد.

ممان های وارد بر کوادروتور:

ممان های وارد بر کوادر روتور همان گونه که قبلا نیز اشاره شد، پیچ، رول و یاو می باشد. ممان پیچ زمانی ایجاد می شود که سرعت زاویه ای دو موتور یک و سه متفاوت باشند:

$$M_\theta = L(T_3 - T_1) = LK(\omega_3^2 - \omega_1^2)$$

که در آن L فاصله مرکز ملخ تا مرکز بدنه کوادروتور می باشد.

همچنین ممان رول زمانی ایجاد می شود که سرعت زاویه ای دو موتور دو و چهار متفاوت باشند:

$$M_\phi = L(T_4 - T_1) = LK(\omega_4^2 - \omega_2^2)$$

ممان یاو حاصل نیرو درگ تولیدی دوران موتور ها می باشد که در خلاف جهت دوران هر موتور یک گشتاور درگ تولید می شود، مانده رابطه ای که برای نیروی تراست استخراج گردید برای گشتاور موتور ها نیز می توان رابطه زیر را استفاده نمود:

$$\tau_{M_i} = B\omega_i^2 + I_R\dot{\omega}_i$$

که در آن τ_{M_i} گشتاور درگ تولیدی موتور، B ضریب گشتاور و I_R ممان اینرسی روتور می باشد، مقدار $\dot{\omega}$ بسیار کوچک و ناچیز می باشد و می توان از آن صرف نظر کرد، در نتیجه داریم:

$$\tau_{M_i} = B\omega_i^2$$

در نتیجه ممان یاو برابر است با:

$$M_\psi = B(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2)$$

در نهایت کلیه ممان ها در دستگاه مختصات بدنه برابر است با:

$$M_{cg}^B = \begin{bmatrix} M_\phi \\ M_\theta \\ M_\psi \end{bmatrix}^B = \begin{bmatrix} LK(\omega_4^2 - \omega_2^2) \\ LK(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ B(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) \end{bmatrix}^B$$

میزان گشتاور درگ که بر بدنه وارد می شود، متناسب با سرعت های زاویه حول سه محور بدنه است:

$$M_R^B = \begin{bmatrix} A_r & 0 & 0 \\ 0 & A_r & 0 \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}^B$$

که در آن A_r ضریب درگ زاویه ای می باشد.

ممان دیگر اثرات ژيروسکوپی تولید شده در اثر چرخش ملخ ها می باشد، به آن دلیل که دو ملخ در جهت عقربه های ساعت و دوتای دیگر در خلاف جهت عقربه های ساعت دوران می کنند زمانی که جمع جبری سرعت ملخ ها صفر نباشد، یک عدم تعادل سراسری بوجود می آید. اگر علاوه بر آن نرخ رول یا پیچ نیز مخالف صفر باشند، کوادروتور یک گشتاور ژيروسکوپی مطابق با معادله زیر را تجربه می کند.

$$M_{Gyro} = I_R \Omega \times \omega \rightarrow M_{Gyro} = I_R(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مدلی از کوادروتور که در اینجا بیان می شود تا حدودی ساده شده است و این ساده سازی ها در نظر نگرفتن تاثیرات پیچیده ای مانند خمشی ملخ، تاثیر باد و ... می باشد.

معادلات دینامیکی کوادروتور را با روش نیوتن-اولر استخراج می کنیم که برای این کار به ماتریس ممان های اینرسی نیاز داریم. این ماتریس را قطری فرض می کنیم که به صورت زیر است:

$$I_B^B = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}^B$$

حال با توجه به مشخص شدن کلیه نیروها و ممان های وارد بر کوادروتور، می توان با استفاده از معادلات نیوتن-اولر دینامیک انتقالی و زاویه ای را تعیین نمود. فرم استاندارد معادلات نیوتن-اولر در دستگاه مختصات اینرسی نوشته شده اند، که در مورد کوادروتور معادلات دینامیک انتقالی را در دستگاه اینرسی، و با توجه به این موضوع که سرعت های زاویه ای و ممان های اینرسی نسبت به دستگاه مختصات بدنه تعیین شده اند، دینامیک زاویه ای را در دستگاه بدنه می نویسیم:

$$\begin{aligned} \text{Inertial Frame} &\rightarrow \begin{cases} \text{Newton} \rightarrow m\ddot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_{Total} \\ \text{Euler} \rightarrow I\ddot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\tau}_{Total} \end{cases} \\ \text{Mixed Frame} &\rightarrow \begin{cases} \text{Newton in Inertial Frame} \rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix}^I = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}^I + [T]^{IB} \frac{\mathbf{F}_T^B}{m} - \frac{\mathbf{F}_D^I}{m} \\ \text{Euler in Body Frame} \rightarrow I\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times I\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{M}_{Gyro} = \mathbf{M}_{cg}^B - \mathbf{M}_R^B \end{cases} \end{aligned}$$

بازنویسی معادلات دینامیک انتقالی (نیوتن):

$$\dot{u} = (S\phi S\psi + C\phi S\theta C\psi) \frac{T}{m} - \frac{A_x}{m} u$$

$$\dot{v} = (-S\phi C\psi + C\phi S\theta S\psi) \frac{T}{m} - \frac{A_y}{m} v$$

$$\dot{w} = -g + (C\phi C\theta) \frac{T}{m} - \frac{A_z}{m} w$$

مانده معادلات دینامیک انتقالی برای دینامیک زاویه ای (اولر) نیز داریم:

$$\dot{p} = \left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \right) qp - \frac{I_R}{I_{xx}} q\omega_T + \frac{M_\phi}{I_{xx}} - \frac{A_r}{I_{xx}} p$$

$$\dot{q} = \left(\frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \right) pr - \frac{I_R}{I_{yy}} p\omega_T + \frac{M_\theta}{I_{yy}} - \frac{A_r}{I_{yy}} q$$

$$\dot{r} = \left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \right) pq + \frac{M_\psi}{I_{zz}} - \frac{A_r}{I_{zz}} r$$

که در آن ω_T برابر است با:

$$\omega_T = -\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4$$

در معادلات فوق ورودی های کنترلی سرعت زاویه هر موتور می باشد، ارتباط میان سرعت های زاویه ای، نیروها و ممان های وارد بر کوادروتور عبارت است از:

$$T = K(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)$$

$$M_\phi = L(T_4 - T_1) = LK(\omega_4^2 - \omega_1^2)$$

$$M_\theta = L(T_3 - T_1) = LK(\omega_3^2 - \omega_1^2)$$

$$M_\psi = B(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2)$$

$$\begin{bmatrix} T \\ M_\phi \\ M_\theta \\ M_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & K & K & K \\ 0 & -KL & 0 & KL \\ KL & 0 & -KL & 0 \\ -B & B & -B & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix}$$

با معکوس کردن ماتریس فوق می توان ارتباط سرعت های زاویه ای را محاسبه نمود:

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4K} & \frac{0}{1} & -\frac{1}{2KL} & -\frac{1}{4B} \\ \frac{1}{4K} & \frac{1}{-2KL} & \frac{0}{1} & \frac{1}{4B} \\ \frac{1}{4K} & \frac{0}{1} & \frac{1}{2KL} & -\frac{1}{4B} \\ \frac{1}{4K} & \frac{1}{2KL} & \frac{0}{1} & \frac{1}{4B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_\phi \\ M_\theta \\ M_\psi \end{bmatrix}$$

$$\omega_1^2 = \frac{T}{4K} - \frac{M_\theta}{2KL} - \frac{M_\psi}{4B}$$

$$\omega_2^2 = \frac{T}{4K} - \frac{M_\phi}{2KL} + \frac{M_\psi}{4B}$$

$$\omega_3^2 = \frac{T}{4K} + \frac{M_\theta}{2KL} - \frac{M_\psi}{4B}$$

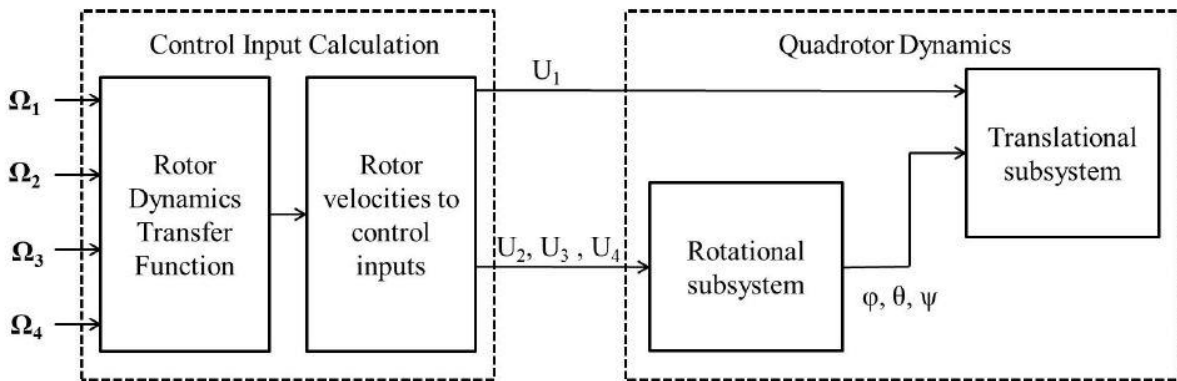
$$\omega_4^2 = \frac{T}{4K} + \frac{M_\phi}{2KL} + \frac{M_\psi}{4B}$$

خلاصه کلیه موارد گفته شده جهت مدل سازی سیستم کوادروتور:

$$\text{Control Inputs} \rightarrow U = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \rightarrow \text{or} \rightarrow U = \begin{bmatrix} T \\ M_\phi \\ M_\theta \\ M_\psi \end{bmatrix}$$

$$\text{Translational Dynamics} \rightarrow \begin{cases} P = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} \\ V_B = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\text{Rotational Dynamics} \rightarrow \begin{cases} \eta = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \\ \Omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \end{cases}$$



شکل ۶ - بلوک دیاگرام شبیه سازی حلقه باز سیستم کوادروتور

جهت شبیه سازی کوادروتور به اطلاعاتی هندسی، اینرسی و ضرایب موجود در معادلات نیاز داریم که در جدول زیر این اطلاعات آورده شده است.

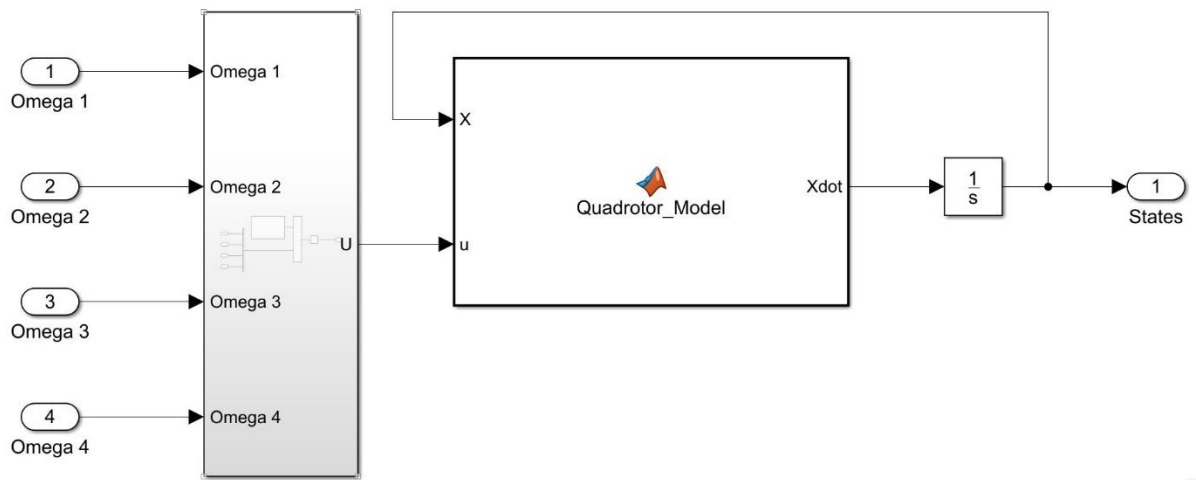
<i>Parameters</i>	<i>Value</i>	<i>Unit</i>
g	9.81	m/s^2
L	0.225	m
m	0.468	kg
K	2.98×10^{-6}	—
B	0.114×10^{-6}	—
I_{xx}	4.856×10^{-3}	$kg\ m^2$
I_{yy}	4.856×10^{-3}	$kg\ m^2$
I_{zz}	8.801×10^{-3}	$kg\ m^2$
I_R	3.357×10^{-3}	$kg\ m^2$
A_x	0.3	—
A_y	0.3	—
A_z	0.25	—
A_r	0.2	—

همچنین به شرایط اولیه متغیرهای حالت و ورودی های کنترلی جهت شبیه سازی حلقه باز نیاز داریم که برای صحت سنجی اولیه شبیه ساز، معادلات را در دو شرایط مختلف مطابق جدول زیر شبیه سازی می کنیم.

<i>Parameters</i>	<i>Sim #1</i>	<i>Sim #2</i>
$X(0)$	0	0
$Y(0)$	0	0
$Z(0)$	500	500
$p(0)$	0	0
$q(0)$	0	0
$r(0)$	0	0
$u(0)$	0	0
$v(0)$	0	0
$w(0)$	0	0
$\phi(0)$	0	10 deg
$\theta(0)$	0	12 deg
$\psi(0)$	0	10 deg
T	mg	mg
M_ϕ	0	0
M_θ	0	0
M_ψ	0	0

حال می توان معادلات فوق را در محیط نرم افزار متلب و سیمولینک^۷ شبیه سازی نمود.

^۷ MATLAB and Simulink



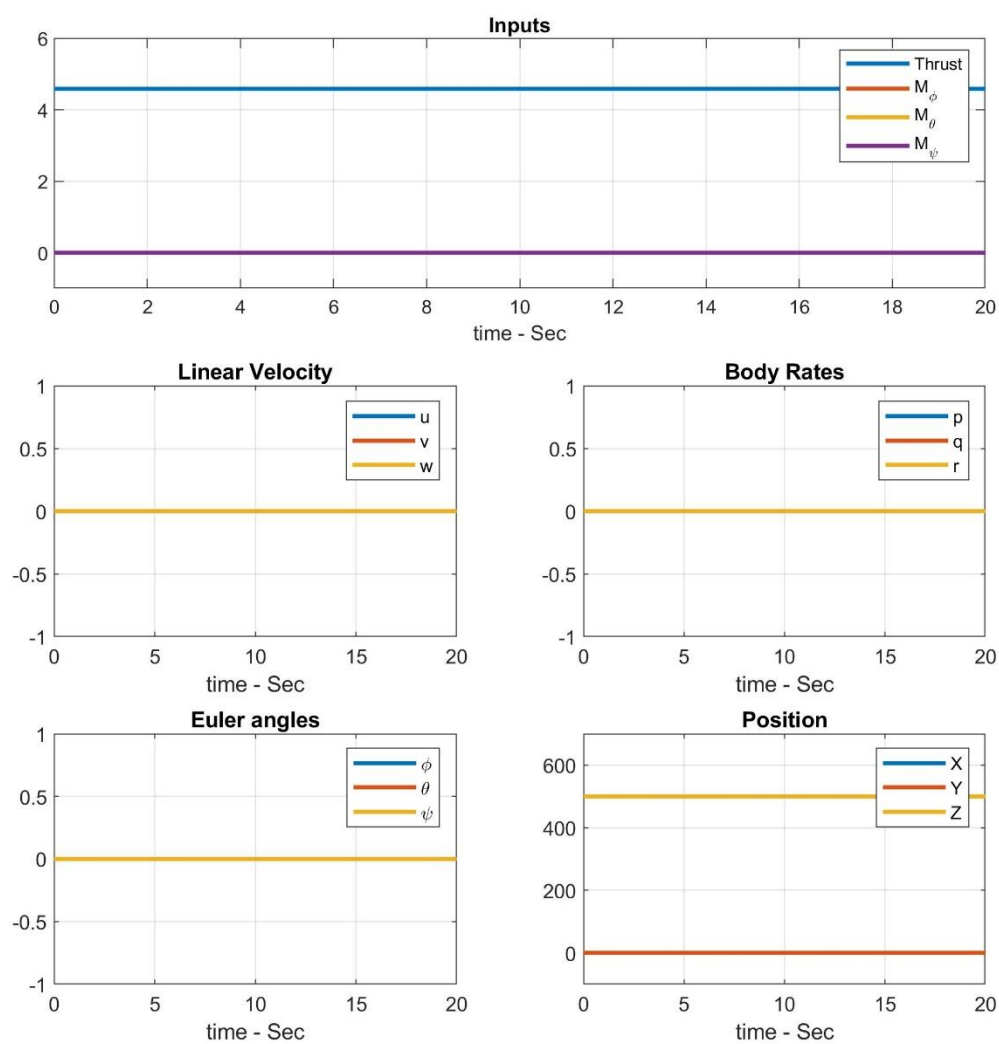
شکل ۷- بلوک دیاگرام شبیه سازی کوادروتور در نرم افزار متلب و سیمولینک

که در آن:

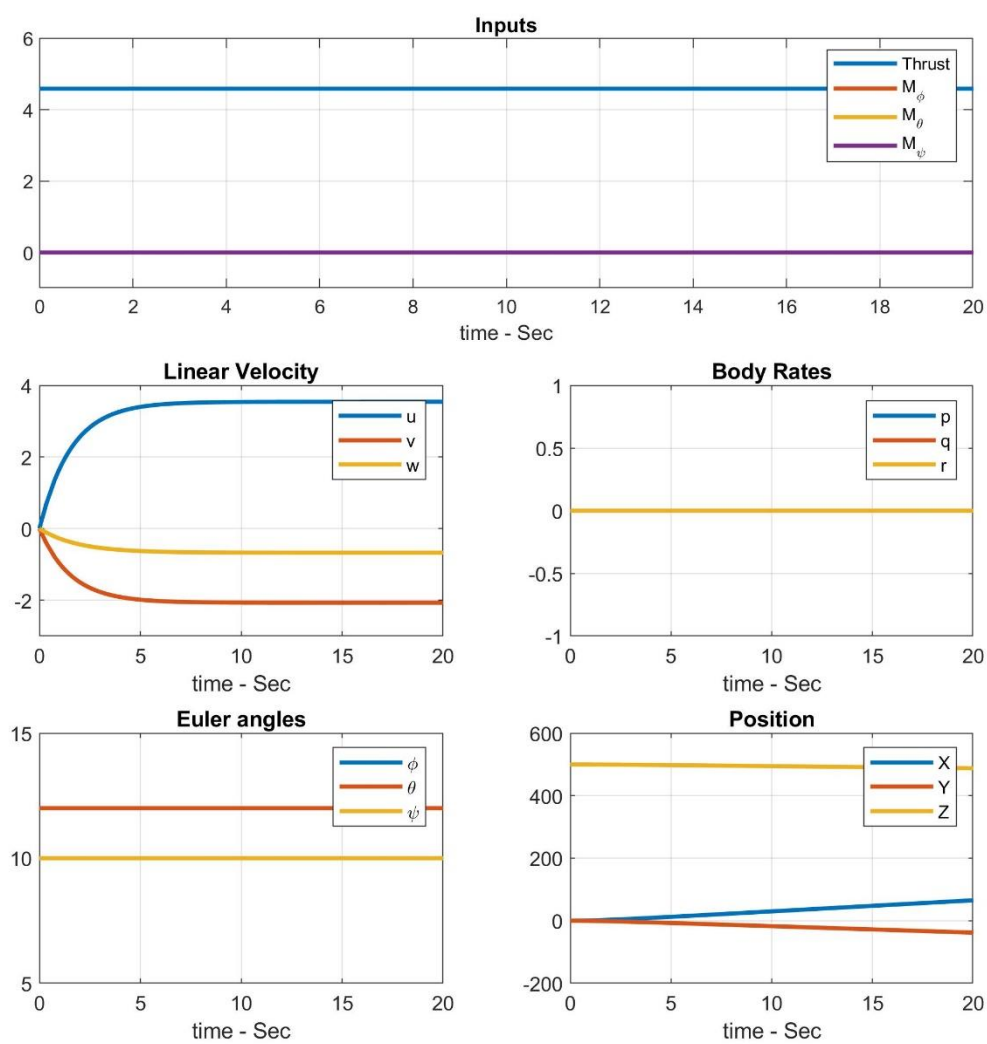
$$x = [p \quad q \quad r \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad u \quad v \quad w \quad X \quad Y \quad Z]^T$$

$$U = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4]^T$$

$$\dot{x} = f(x, U)$$



شکل ۸ - نمودار متغیرها در شبیه سازی اول



شکل ۹- نمودار متغیرها در شبیه سازی دوم

خطی سازی مدل غیر خطی:

خطی سازی همواره حول یک نقطه کاری صورت می پذیرد، که در مهندسی هوافضا به آن نقطه تریم نیز می گویند، نقطه تریم حالتی است که اگر در آن شرایط شبیه سازی را انجام دهیم متغیرهای حالت در گذشت زمان هیچگونه تغییری نمی کنند یعنی به زمان وابسته نمی باشند.

$$\dot{x} = f(x, U) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = x_{trim} \\ U = U_{trim} \end{cases}$$

یکی از نقاط تریم کوادروتور شرایط هاور⁸ (شرایطی که هر چهار موتور دارای یک سرعت زاویه مشخص و ثابتی باشند و مجموع تراست تولیدی موتور ها معادل نیروی وزن باشد) می باشد. در اینجا ما نیز حول این نقطه خطی سازی را انجام می دهیم.

ابتدا بردار کنترل را بر اساس نیروی تراست و ممان های پیچ، رول و یاو تعریف می کنیم و سپس با استفاده از سیمولینک نقطه تریم کوادروتور را استخراج می کنیم که عبارت است از:

$$U = [T \quad M_\phi \quad M_\theta \quad M_\psi]^T$$

$$U_{trim} = [mg \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$x = [p \quad q \quad r \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad u \quad v \quad w \quad X \quad Y \quad Z]^T$$

$$x_{trim} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 500]^T$$

حال می توان حول نقطه فوق سیستم را خطی نمود و معادلات فضای حالت را استخراج کرد:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$\begin{cases} A = \frac{\partial}{\partial x} f(x, U) \Big|_{\substack{x=x_{trim} \\ U=U_{trim}}} \rightarrow A \in \mathbb{R}^{12 \times 12} \\ B = \frac{\partial}{\partial U} f(x, U) \Big|_{\substack{x=x_{trim} \\ U=U_{trim}}} \rightarrow B \in \mathbb{R}^{12 \times 4} \\ C = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow C \in \mathbb{R}^{12 \times 12} \\ D = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \rightarrow D \in \mathbb{R}^{12 \times 4} \end{cases}$$

⁸ Hover

با استفاده از دستور `linmod` در محیط متلب، مدل کوادروتور غیر خطی شش درجه آزادی توسعه داده شده در محیط سیمولینک را می توان خطی نمود که ماتریس های حاصل عبارت است از:

$$A = \begin{bmatrix} -41.18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -41.18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22.72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9.8 & 0 & -0.64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9.8 & 0 & 0 & 0 & -0.64 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.53 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 205.93 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -205.93 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 113.62 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow C \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \rightarrow D \in \mathbb{R}^{12 \times 4}$$

تحلیل سیستم خطی:

در این بخش به بررسی ریشه های معادله مشخصه (مقادیر ویژه ماتریس A)، مشاهده پذیری و کنترل پذیری سیستم می پردازیم.

جهت تعیین مقادیر ویژه ماتریس A از دستور eig در متلب استفاده می کنیم که مقادیر برابر است با:

$$eig(A) \rightarrow |\lambda I - A| = 0$$

$$eig(A) = \begin{cases} -41.18 \rightarrow n = 2 \\ -22.72 \rightarrow n = 1 \\ -0.641 \rightarrow n = 2 \\ -0.534 \rightarrow n = 1 \\ 0.0 \rightarrow n = 6 \end{cases}$$

که در آن n تعداد تکرار هر یک از ریشه ها می باشد.

برای تعیین کنترل پذیری می بایست ابتدا ماتریس کنترل پذیری را تشکیل داد و سپس رنک آن را بررسی نمود، در صورتی که رنک کامل داشته باشد (برابر تعداد متغیر های حالت سیستم) آنگاه سیستم کنترل پذیر است.

$$\varphi_{ctrb} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{11}B] \in \mathbb{R}^{12 \times 48}$$

در متلب با استفاده از دستور ctrb ماتریس کنترل پذیری ایجاد می شود همچنین با دستور rank می توان رنک ماتریس فوق را محاسبه نمود:

$$Rank_{\varphi_{ctrb}} = 3$$

رنک ماتریس کنترل پذیری سه محاسبه شده است که نشان دهنده کنترل ناپذیر بودن آن است و در بخش ابتدایی گزارش نیز اشاره شد که دینامیک انتقالی وابسته به دینامیک دوارنی می باشد و برای کنترل موقعیت می بایست وضعیت را کنترل نمود.

همچنین برای مشاهده پذیری نیز داریم:

$$\varphi_{obsv} = [C \quad CA \quad CA^2 \quad \dots \quad CA^{11}]^T \in \mathbb{R}^{144 \times 12}$$

در متلب با استفاده از دستور obsv ماتریس کنترل پذیری ایجاد می شود همچنین با دستور rank می توان رنک ماتریس فوق را محاسبه نمود:

$$Rank_{\varphi_{obsv}} = 3$$

با توجه به دینامیک دورانی، سیستم خطی را بازنویسی می کنی که عبارت است از:

$$\tilde{x} = [p \quad q \quad r \quad \phi \quad \theta \quad \psi]^T$$

$$\tilde{U} = [M_\phi \quad M_\theta \quad M_\psi]^T$$

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{U}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -41.18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -41.18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22.72 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 205.93 & 0 & 0 \\ 0 & -205.93 & 0 \\ 0 & 0 & 113.62 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_\phi \\ M_\theta \\ M_\psi \end{bmatrix}$$

$$\tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x}$$

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}$$

مجددا ماتریس های کنترل پذیری و مشاهده پذیری را تشکیل می دهیم و رنک آن را بررسی می کنیم:

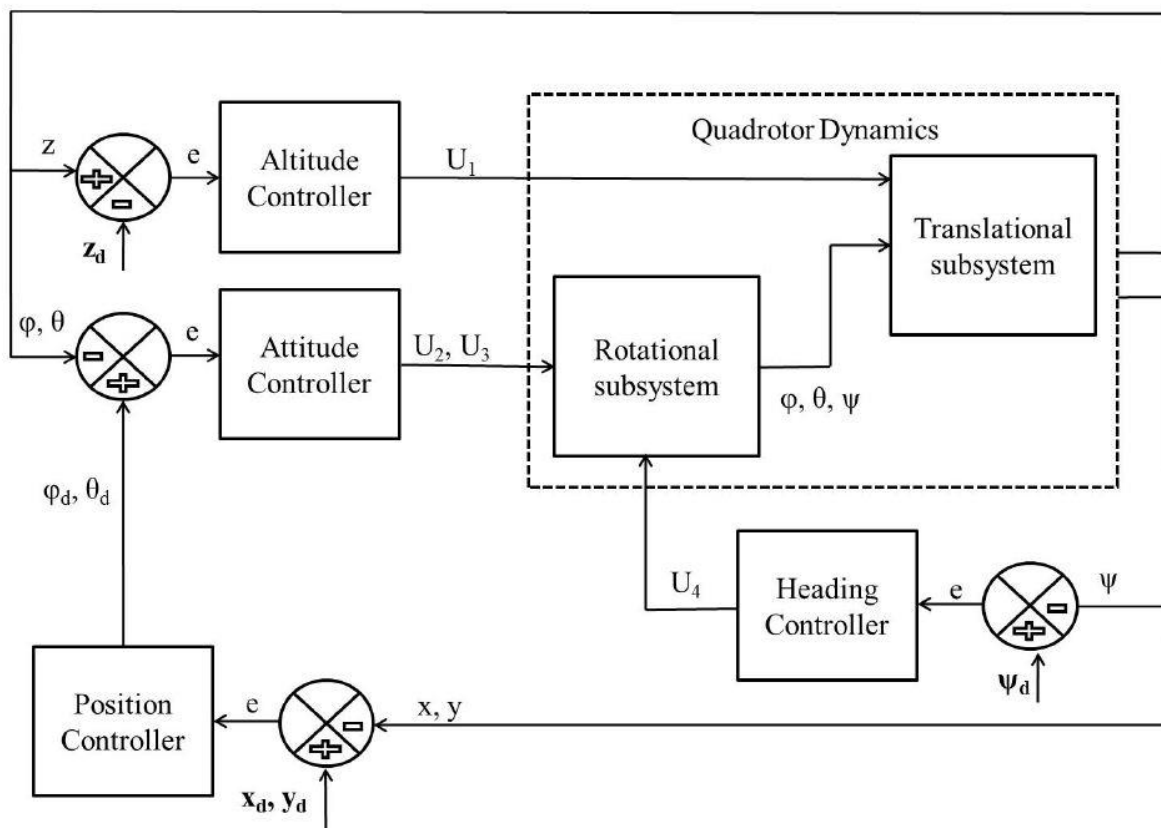
$$ctrlb \rightarrow \begin{cases} \varphi_{ctrlb} = [\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \tilde{A}^2\tilde{B} \quad \dots \quad \tilde{A}^5\tilde{B}] \in \mathbb{R}^{6 \times 18} \\ Rank_{\varphi_{ctrlb}} = 6 \end{cases}$$

$$obsv \rightarrow \begin{cases} \varphi_{obsv} = [\tilde{C} \quad \tilde{C}\tilde{A} \quad \tilde{C}\tilde{A}^2 \quad \dots \quad \tilde{C}\tilde{A}^5]^T \in \mathbb{R}^{36 \times 6} \\ Rank_{\varphi_{obsv}} = 6 \end{cases}$$

همان گونه که مشخص است سیستم هم کنترل پذیر و هم مشاهده پذیر است.

طراحی کنترل کننده:

همان گونه که قبلا نیز اشاره شد در کوادروتور دینامیک انتقالی وابسته به دینامیک دورانی می باشد، در نتیجه کنترل کننده موقعیت وابسته به کنترل کننده وضعیت می باشد، و به صورت کلی چهار کنترل کننده ارتفاع^۹، وضعیت^{۱۰}، زاویه هدینگ^{۱۱} و موقعیت^{۱۲} مورد نیاز است، که متناسب با نوع کنترل کننده انتخابی می توان تعدادی از کنترل کننده های اشاره شده را تلفیق نمود. به عنوان نمونه اگر از کنترل کننده PID خواهیم استفاده کنیم می بایست از ۶ کنترل کننده جدا از یکدیگر استفاده کرد که در نتیجه نیاز به تعیین حداقل ۶ و حداکثر ۱۸ ضریب^{۱۳} کنترلی می باشد. در شکل زیر بلوک دیاگرام مجموعه کوادروتور و سیستم کنترل آن مشخص می باشد.



شکل ۱۰ - بلوک دیاگرام حلقه بسته کنترل کوادروتور

^۹ Altitude

^{۱۰} Attitude

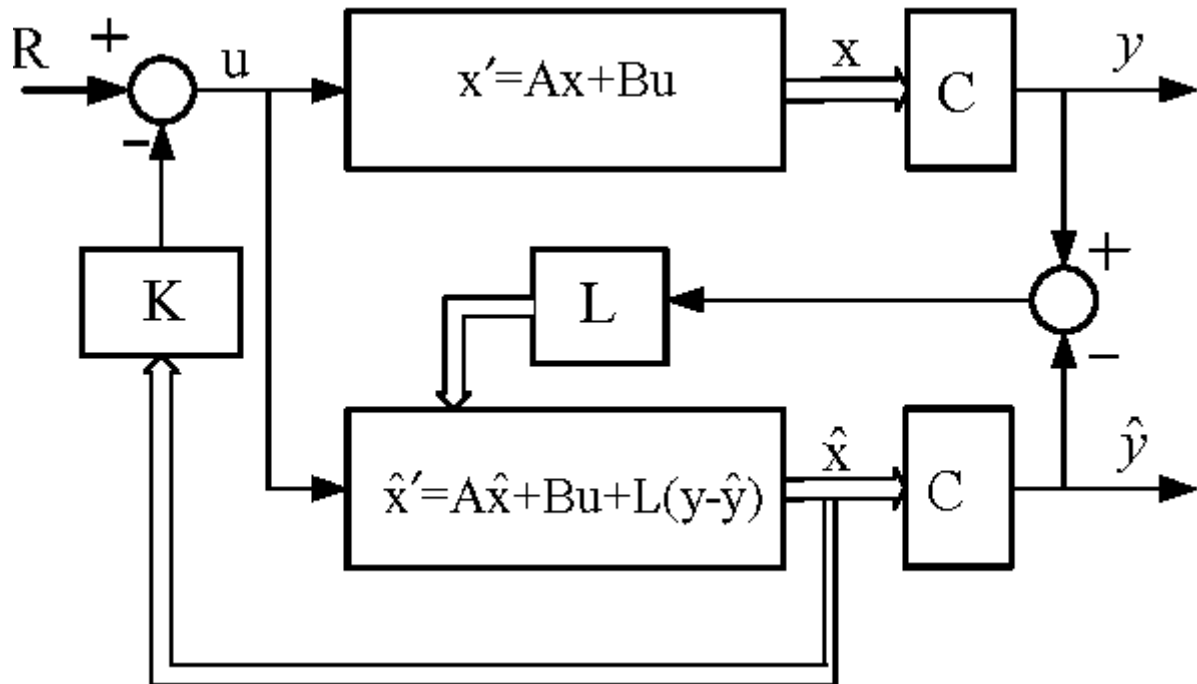
^{۱۱} Heading

^{۱۲} Position

^{۱۳} Gain

مشاهده گر حالت:

در روش های کنترلی مانده فیدبک حالت کامل^{۱۴} همواره به تمام حالت های سیستم نیاز داریم تا به واسطه آن بتوانیم در هر لحظه ورودی کنترلی مدنظر را به سیستم وارد نماییم. در صورتی که به صورت مستقیم به حالت های سیستم دسترسی نداشته باشیم، می بایست یک مشاهده گر حالت یا تخمین گر حالت را استفاده نمود تا بر اساس حالت های قابل اندازه گیری سایر حالت ها تخمین زده بشوند. در شکل زیر بلوک دیگرام یک نمونه سیستم همراه با مشاهده گر حالت مشخص شده است.



شکل ۱۱ - بلوک دیگرام یک سیستم همراه با مشاهده گر حالت

برای سیستم کوادروتور این پروژه با توجه به این موضوع که دینامیک زاویه ای مستقل از دینامیک انتقالی می باشد، برای دینامیک زاویه ای آن یک مشاهده گر حالت را طراحی می کنیم و به ازای یک شرایط اولیه مشخص سیستم را در محیط سیمولینک شبیه سازی می کنیم.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BU + L(y - A\hat{x}) = (A - LC)\hat{x} + BU + Ly$$

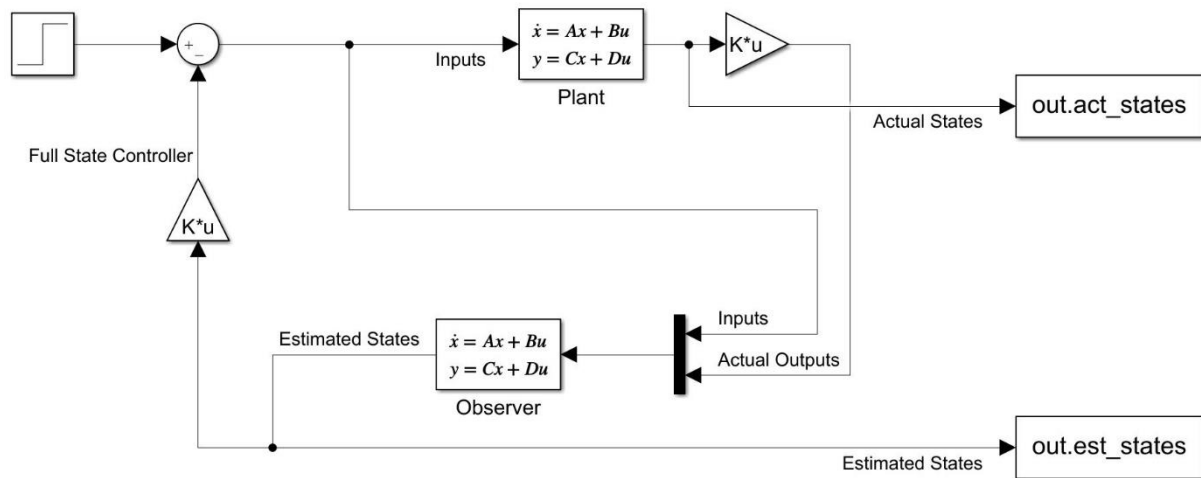
$$\dot{\hat{x}} = [A\hat{x} + BU]\hat{x} + [B \quad L] \begin{bmatrix} U \\ y \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{x}} = \tilde{A}\hat{x} + \tilde{B}\tilde{U}$$

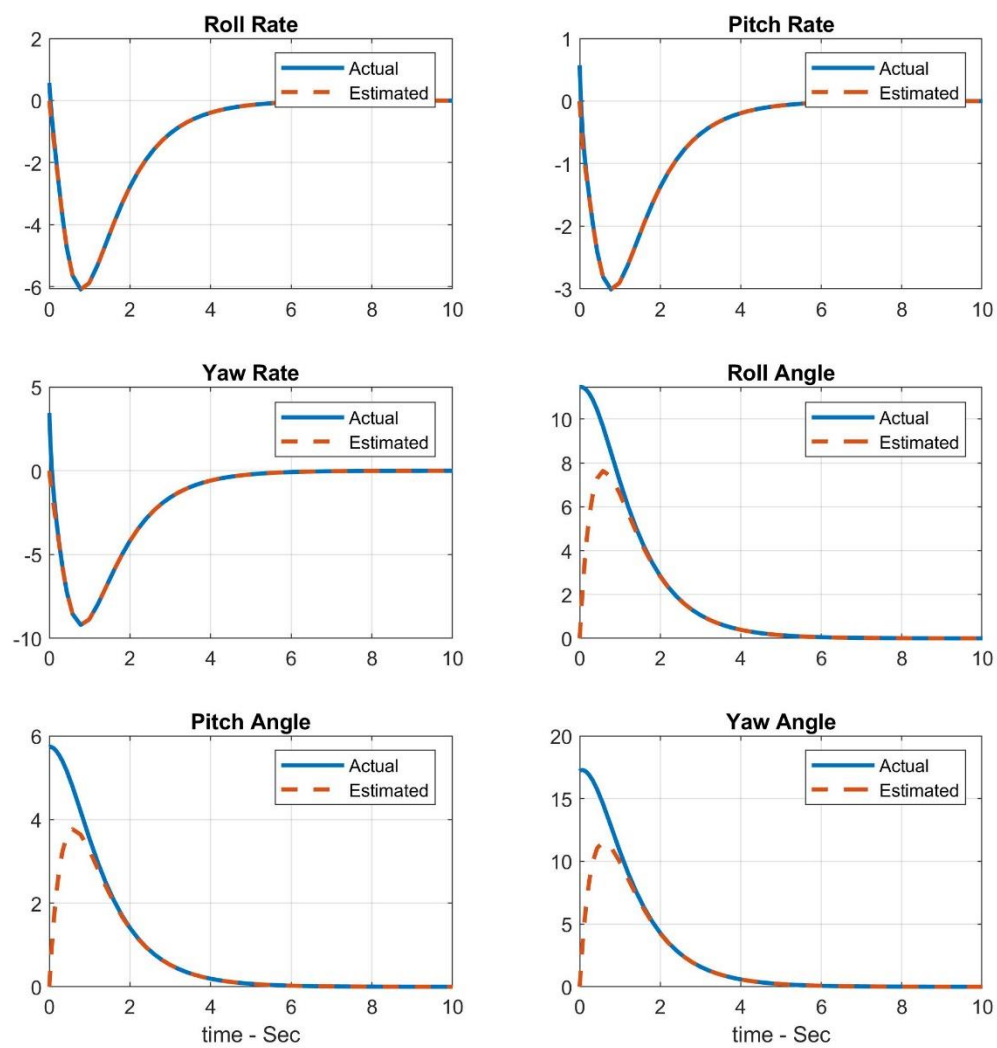
¹⁴ Full State Feedback

در محیط متلب با استفاده از دستور place می توان ضریب K و L را که در شبیه سازی به آنها نیاز داریم محاسبه کنیم. در اصل این دستور با گرفتن ماتریس های سیستم و قطب های حلقه بسته مورد نیاز ما ضریب کنترلی و مشاهده گر را محاسبه می کند. در شکل زیر بلوک دیاگرام شبیه سازی سیستم همراه با مشاهده گر در محیط سیمولینک قابل مشاهده است.

با در نظر گرفتن $x_{initial} = [0.01 \ 0.01 \ 0.06 \ 0.2 \ 0.1 \ 0.3]^T$ به عنوان شرایط اولیه سیستم، شبیه سازی را انجام می دهیم. در شکل زیر نمودار متغیرهای حالت سیستم در دو حالت واقعی و تخمین زده شده آورده شده است.



شکل ۱۲ - بلوک دیاگرام شبیه سازی سیستم همراه با مشاهده گر



شکل ۱۳ - نمودار متغیرهای حالت در دو حالت واقعی و تخمین زده شده

طراحی کنترل کننده فیدبک حالت کامل به روش جایابی قطب^{۱۵}:

به طور خلاصه می‌توان گفت که در جایابی قطب در فضای حالت، می‌خواهیم بهره فیدبک K را به گونه‌ای محاسبه کنیم که قطب‌های سیستم حلقه بسته در مکان‌های مطلوب قرار گیرند. محل قرارگیری قطب‌ها و همچنین مقدار آن کاملاً در اختیار طراح می‌باشد. اما در صورتی که محل قرارگیری به مقدار زیادی از قطب‌های حلقه باز فاصله داشته باشند می‌تواند سیستم را با چالش‌هایی مانده اشباع شدن تلاش کنترلی و ... روبه‌رو کند.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \rightarrow u = -Kx \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax - BKx \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x \\ y = Cx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = A_{FSF}x \\ y = Cx \end{cases}$$

که در آن مقادیر ویژه ماتریس A_{FSF} همان قطب‌های حلقه بسته موردنظر ما می‌باشند.

جهت محاسبه ماتریس K از دستور place در متلب استفاده می‌کنیم، به این ترتیب که با قرار دادن ماتریس‌های A و B و همچنین قطب‌های حلقه بسته مد نظر به عنوان ورودی دستور، مقدار ماتریس K محاسبه می‌شود.

ابتدا مقادیر ویژه ماتریس A را محاسبه می‌کنیم (قطب‌های حلقه باز).

$$eig(A) = \begin{cases} -41.18 \rightarrow n = 2 \\ -22.72 \rightarrow n = 1 \\ 0 \rightarrow n = 3 \end{cases}$$

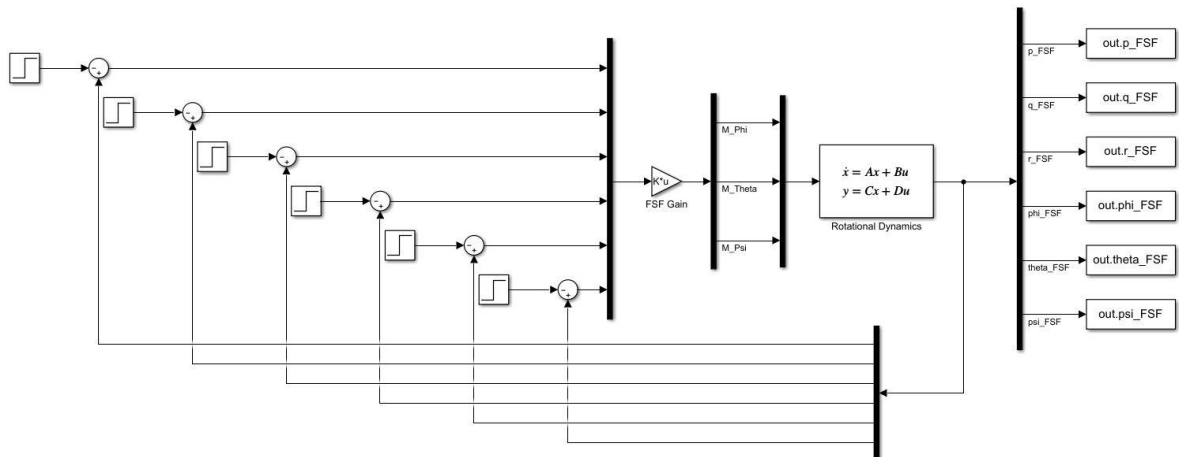
با روش سعی و خطا می‌توان قطب‌های حلقه بسته را متناظر با قطب‌های حلقه باز انتخاب نمود که برای این سیستم، قطب‌های زیر انتخاب شده‌اند:

$$Desired\ Poles = \begin{cases} -211 \\ -311 \pm 50i \\ -6 \\ -2 \\ -4 \end{cases}$$

که ماتریس K متناظر آن برابر است با:

$$K_{FSF} = \begin{bmatrix} 1.05 & 0.2 & 0.3 & 5.44 & 0.3 & 2.58 \\ 0.12 & -1.2 & 0.17 & 0.88 & -5.9 & 2.77 \\ 0.53 & 0.51 & 2.41 & 5.74 & -1.54 & 9.9 \end{bmatrix}$$

جهت شبیه سازی سیستم حلقه بسته فوق از محیط سیمولینک استفاده می کنیم.



شکل ۱۴- بلوک دیاگرام شبیه سازی کنترل کننده فیدبک حالت کامل به روش جایابی قطب

طراحی کنترل کننده فیدبک حالت کامل به روش رگولاتور خطی بهینه^{۱۶}:

موضوع کنترل بهینه مسئله یافتن یک قانون کنترلی برای سیستم داده شده به نحوی است که معیار بهینگی معینی حاصل شود. یک مسئله کنترلی دارای تابع هزینه^{۱۷} است که تابعی از متغیرهای حالت و کنترلی است. یک کنترل بهینه یک مجموعه معادله دیفرانسیل است که مسیرهای متغیرهای کنترلی را توصیف می کند که تابع هدف را بهینه کنند.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

$$J = \int_0^{\infty} [u^T R u + x^T Q x] dt$$

که در آن J تابع هزینه، Q ماتریس وزنی متغیرهای حالت و R ماتریس وزنی متغیرهای کنترلی می باشند، این دو ماتریس وزنی معمولاً به صورت قطری انتخاب می شوند و ارزش هر یک از متغیرها را نسبت به سایر متغیرها از دید طراح بیان می کند. برای بهینه کردن این تابع هزینه می بایست معادله ریکاتی را حل نمود و ماتریس بهینه K را استخراج کرد.

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & r_{mm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$P = A^T (P - PB(R + B^T PB)^{-1} B^T P) A + Q$$

$$K = (R + B^T PB)^{-1} B^T P A$$

در محیط متلب با استفاده از دستور `lqr` می توان ماتریسی بهینه K را متناسب با ماتریس های R ، B ، A و Q محاسبه نمود که در اصل حاصل حل معادله ریکاتی فوق می باشد.

در سیستم کوادروتور ماتریس های R و Q را به صورت زیر انتخاب می کنیم:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¹⁶ Linear Quadratic Regulator (LQR)

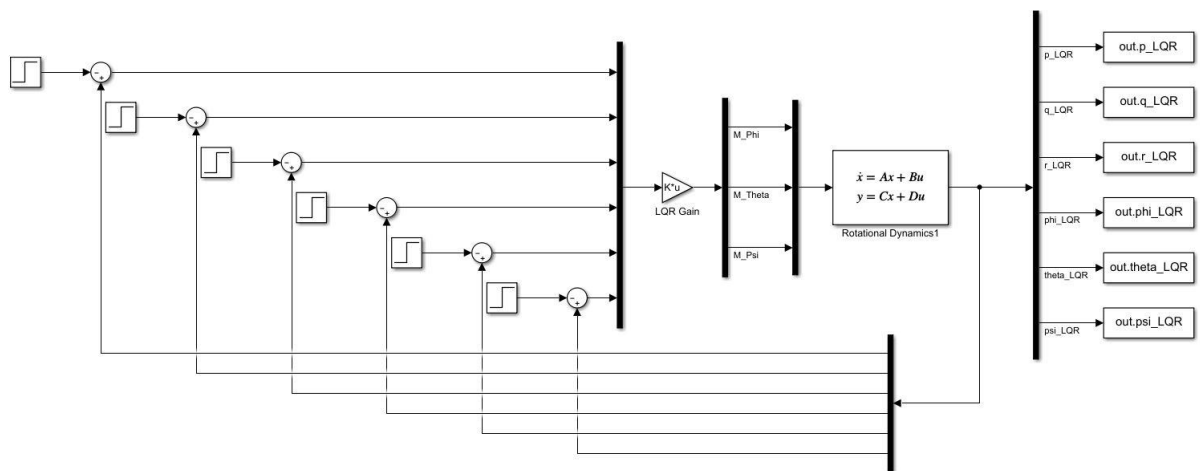
¹⁷ Cost Function

$$Q = \begin{bmatrix} 3.2 \times 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.2 \times 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.2 \times 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.2 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.2 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.2 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

که ماتریس K متناظر آن برابر است با:

$$K_{LQR} = \begin{bmatrix} 57.1 & 0 & 0 & 57.29 & 0 & 0 \\ 0 & -57.1 & 0 & 0 & -57.29 & 0 \\ 0 & 0 & 57.1 & 0 & 0 & 57.29 \end{bmatrix}$$

مانند حالت قبل جهت شبیه سازی سیستم حلقه بسته فوق از محیط سیمولینک استفاده می کنیم.



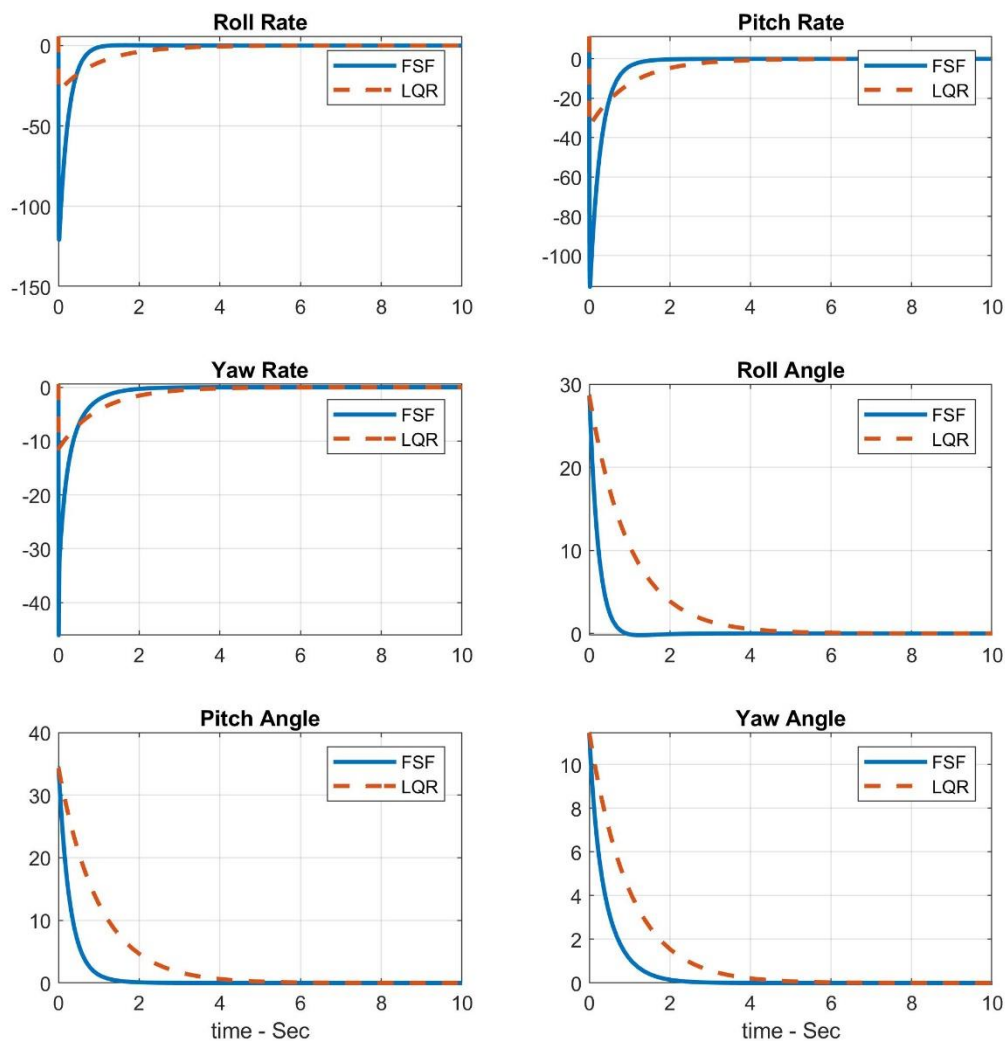
شکل ۱۵ - بلوک دیاگرام شبیه سازی کنترل کننده فیدبک حالت کامل به روش رگولاتور خطی بهینه

مقایسه دو روش کنترلی فوق:

جهت مقایسه عملکرد دو روش کنترلی فوق به ازای یک شرایط اولیه مشخص هر دو سیستم را همزمان شبیه سازی می کنیم و نمودار متغیرهای حالت را رسم می نماییم.

شرایط اولیه زیر را در نظر می گیریم:

$$x_{initial} = [0.1 \quad 0.2 \quad 0.1 \quad 0.5 \quad 0.6 \quad 0.3]^T$$



شکل ۱۶- نمودار متغیرهای حالت در شبیه سازی دو روش کنترلی

همان گونه که از نمودار فوق مشخص است، کنترل کننده FSF سریع تر سیستم را پایدار کرده است اما میزان نرخ تغییرات متغیرها بیشتر است و در مقابل کنترل کننده LQR کمی کند تر سیستم را پایدار کرده است اما میزان نرخ تغییرات کمتر است.

در کنترل کننده FSF با تغییر مکان و مقدار قطب های حلقه بسته و در کنترل کننده LQR با تغییر در ماتریس های Q و R می توان رفتار سیستم را تغییر داد.

مراجع:

- [1] ElKholy M. N., 2014, Dynamic Modeling and Control of a Quadrotor Using Linear and Nonlinear Approaches (Doctoral dissertation, Master Thesis, School of Sciences and Engineering, American University in Cairo, Egypt).
- [2] Sabatino F. Quadrotor control: modeling, nonlinear control design, and simulation.
- [3] Sulficar A. Modeling, Simulation and Complete Control of a Quadcopter (Doctoral Dissertation, National Institute Of Technology Karnataka Surathkal).