بسم ا... الرحمن الرحیم

عنوان

شناسایی سیستم و
تخمین پارامترهای پرواز

فرایندهای تصادفی

Stochastic Processes

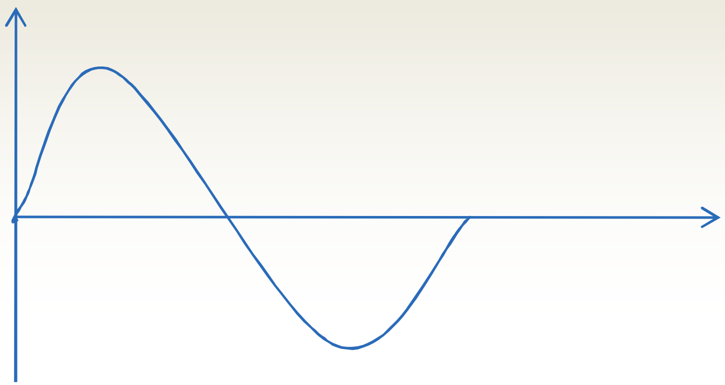
مدرس:
عبدالمجید خوشنود

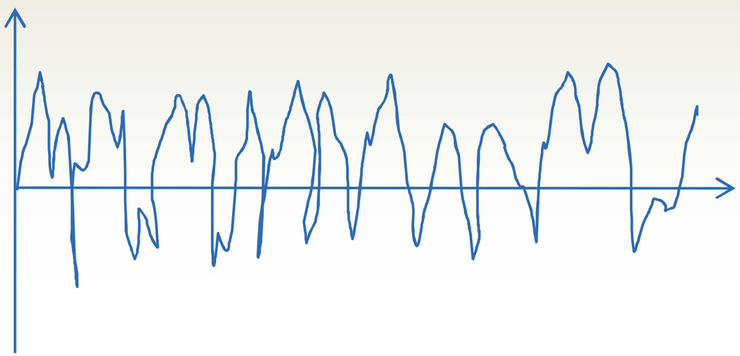
مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

- **مقدمه**

- سیگنال ها و داده ها را می توان به دو دسته کلی تقسیم نمود:
  - معین

اگر مقدار تابع در زمان های آینده مشخص باشد تابع را معین می نامیم. پاسخ سیستم های دینامیکی معین به ورودی با توابع معین خود تابعی معین می باشد.
در مقابل پدیده هایی که رفتارشان را در یک زمان آینده را نمی توان بیان نمود، پدیده های غیر معین یا Nondeterministic و یا اتفاقی می نامند.





مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

- رفتار یک سیستم به ورودی اتفاقی یک خروجی اتفاقی خواهد بود.

- به دلیل پیچیدگی تحلیل سیستم های نامعین، بیان این پدیده ها با یک تابع زمانی مشخص مفهوم و معنای خاصی ندارد و شیوه دیگری باید در نظر گرفته شود.

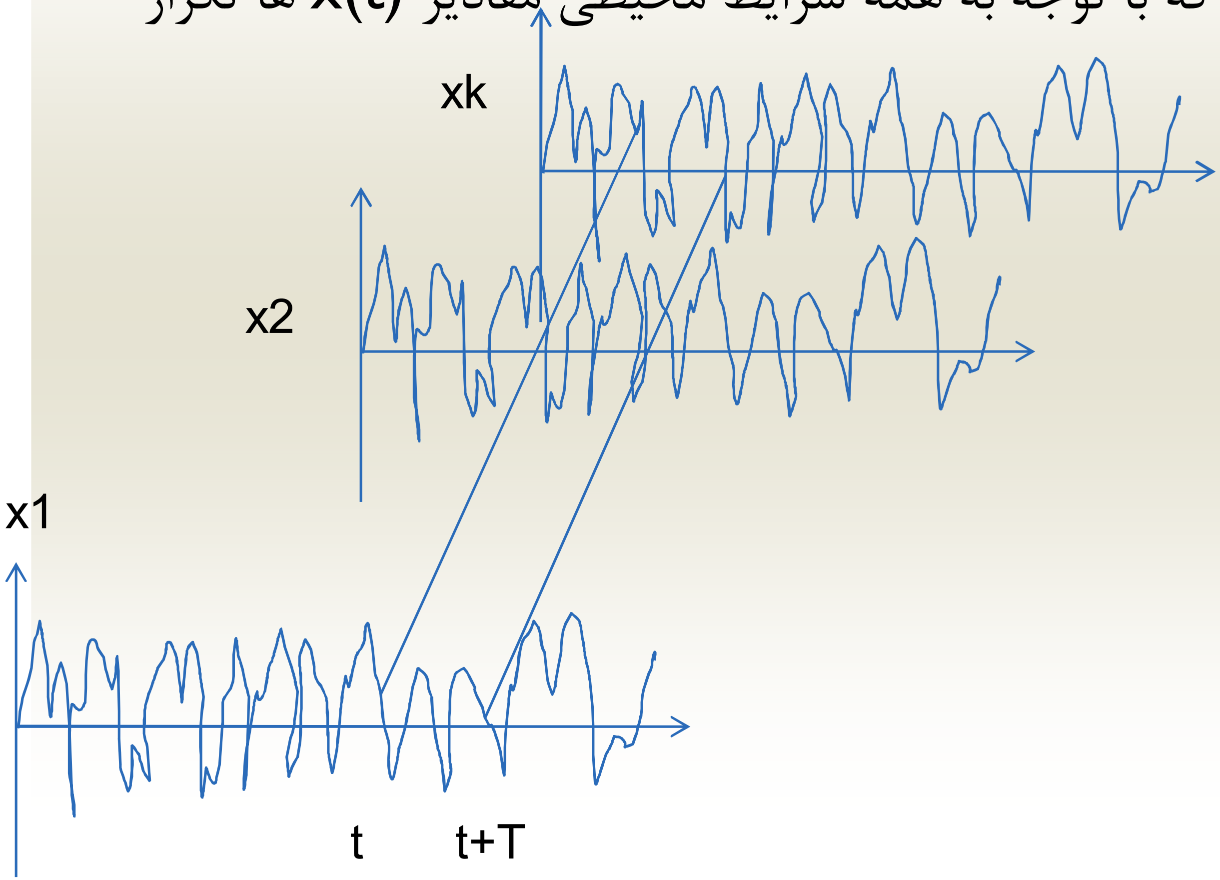
- بسیاری از پدیده های اتفاقی از یک الگوی رفتاری خاص که به میانگین مقادیر تابع بستگی دارد، تبعیت می کنند. این مشخصات پدیده های اتفاقی را قواعد آماری می نامند. (Statistical regularity)

- بر اساس ورودی ای که از قواعد آماری تبعیت می کند در یک سیستم پاسخ نیز از قواعد آماری تبعین خواهد کرد.

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

• بررسی یک مثال کاربردی، حرکت یک هواپیما روی باند فرود

در این مثال جابجایی دامنه چرخ را با $x(t)$ نمایش می دهیم. فرایند حرکت را چند بار تکرار می کنیم. روشن است که با توجه به همه شرایط محیطی مقادیر $x(t)$ ها تکرار نمی شوند.



مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

- عوامل تاثیرگذار در اتفاقی شدن مساله

- هر مورد از رفتارهای فوق (Xk ها) به عنوان یک پدیده اتفاقی و کل تابع تشکیل دهنده Xk ها را تابع نمونه یا .sample fun می نامند.

- همچنین متغیر Xk را متغیر اتفاقی می نامند. مجموعه توابع زمانی Xk(t) ها در همه زمانهای ممکنه را فرایند اتفاقی Random process یا Stochastic process می نامند و با {Xk} نمایش می دهند.

- تعداد نمونه های مورد بررسی بعضا زیادند، لذا بررسی یک یک آنها کار معقولی نیست و باید به سمت راهکار میانگین ها و مقادیر آماری برویم.

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

میانگین گیری از نمونه های اتفاقی

الف) نمونه ها

در موضوع میانگین گیری از داده های اتفاقی تنوع روش ها وجود دارد. همه این روش ها به سمت یک مسیر مشخص هدایت می شوند.

اگر n داده x1 الی xn داشته باشیم و میانگین نمونه ها در زمان ثابت t مورد نظر باشد این نوع را میانگین نمونه ها یا Ensample Average می نامیم. (شکل)

مقدار متوسط یک متغیر اتفاقی در t=t1 (Mean value)

$$\mu_x(t_1) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k(t_1)$$

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

میانگین همبستگی (Auto correlation)

نوع دیگری از میانگین گیری بر اساس نمونه ها از حاصل ضرب مقادیر نمونه در دو زمان t1 و t1+T و جمع آنها بدست می آید که آن را تابع خود همبستگی می نامند. در مورد فواید این تابع در آیند بیشتر توضیح داده خواهد شد:

$$R_x(t_1,t_1+\tau)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k(t_1)x_k(t_1+\tau)$$

فرایند های ساکن و غیر ساکن (Stationary , Non-stationary)

اگر میانگین های اشاره شده وابسته به t1 باشند فرایند اتفاقی را غیر ساکن و در غیر این صورت فرانید را ساکن می نامند:

$$R_x(t_1,t_1+\tau)=R_x(\tau)$$

$$\mu_x(t_1)=\mu_x=cons.$$

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

ب) میانگین زمانی

فرایند های پایستا (Ergodic)

مشکل میانگین های نمونه مبنا مانند مقدار متوسط و همبستگی نمونه ها این است که احتیاج به مقادیر زیادی نمونه داریم. در شرایط خاصی می توان فرضیاتی لحاظ کرد که تنها با یک نمونه واحد بتوان مقادیر میانگین را روی زمان محاسبه نمود.

لذا می توان به طور کلی دو نوع میانگین گیری را معرفی نمود:

-میانگین زمانی Time average

- میانگین نمونه ای Ensample average

برای تابع نمونه Xk(t) میانگین زمانی یا Temporal average را به صورت زیر داریم:

$$\underset{k\,th\ sample}{\mu_x(k)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{T/2}^{T/2} x_k(t)\,dt$$

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

محاسبه تابع همبستگی زمانی

$$\underset{k\,th\ sample}{R_x(k,\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_k(t)x_k(t+\tau)dt$$

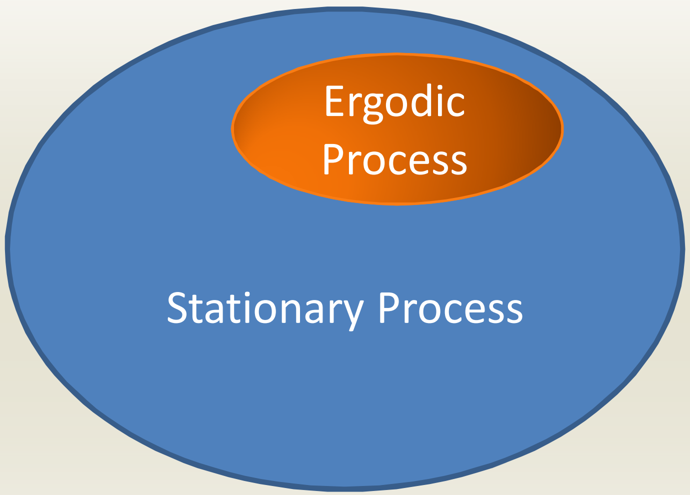
نکته: اگر فرایند اتفاقی {Xk} ساکن باشد . مقادیر محاسبه شده برای نمونه k ام مستقل از نمونه باشد یعنی برای هر نمونه مقدار میانگین یکسانی پیدا گردد، در این صورت فرایند را پایستا Ergodic می نامند.

به عبارت دیگر:

$$Time\ average \equiv Ensample\ average \Rightarrow Ergodic$$

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

نکته: هر فرایند پایستا الزاما یک فرایند ساکن است ولی هر فرایند ساکن الزاما یک فرایند پایستا نیست. (چرا؟)



فرض مهم: در این مباحث درسی فرض پایستا بودن فرایند را در نظر گرفته و در سایر موضوعات با میانگین های زمانی کار می کنیم.

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

مقدار مربعات میانگین (Mean square value)

مقدار مربعات میانگین یک مغیر اتفاقی مقیاسی برای اندازه گیری انرژی است:

$$\phi_x^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt$$

ریشه مثبت این مقدار را Root mean square یا rms می نامند که کاربرد زیادی در بیان استاندارد مقادیر خطا و ارتعاشات سیستم ها دارد.

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

واریانس (Variance)

در یک فرایند پایستا مقدار میانگین ثابت است. در این حالت μ_x را جزء استاتیکی **x(t)** و $x(t)-\mu_x$ را جزء دینامیکی **x(t)** می نامند. اگر **Mean square value** را با جزء دینامیکی محاسبه نماییم این مقدار را واریانس می نامند:

$$\sigma_x^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[x(t)-\mu_x]^2\,dt$$

ریشه مثبت واریانس را انحراف معیار **(Standard deviation)** می نامند. لذا:

$\phi_x^2 \to mean\ square$

$\phi_x \to rms$

$\sigma_x^2 \to vriance$

$\sigma \to s\tan dard\ deviation$

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

نکته: از بازیابی رابطه واریانس داریم:

$$\sigma_x^2 = \phi_x^2 - \mu_x^2$$

- اثبات رابطه

- نکته: از مقایسه روابط اخیر نتیجه می گیریم که اگر در رابطه مربوط به همبستگی انتقال زمان را صفر بگیریم داریم:

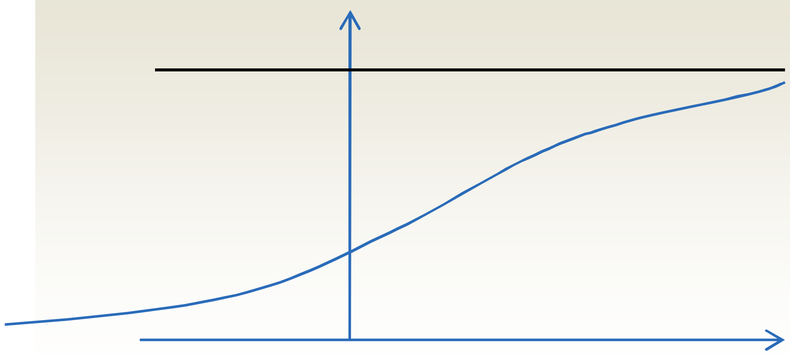
$$R_x(0) = \phi_x^2$$

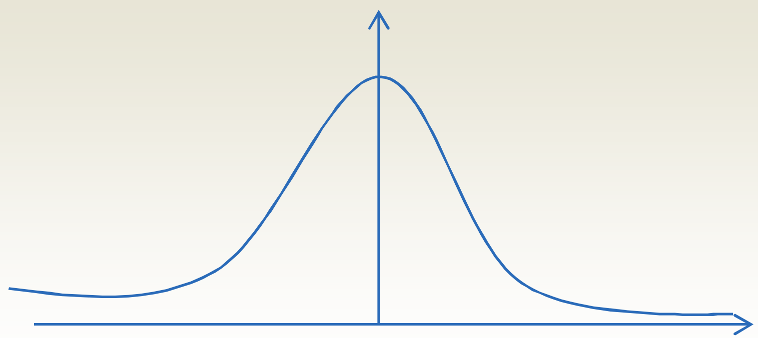
- مثال: محاسبه مقادیر آماری در صورت مثال قبل.

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

تابع توزیع احتمال (Probability Distribution Function)
Cumulative Distribution Function (CDF)
تابع چگالی احتمال (Probability Density Function) یا PDF

اطلاعات مربوط به یک تابع اتفاقی را با دوتابع اشاره شده نشان می دهند. چرا که برای توابع اتفاقی امکان بیان تابع معین وجود ندارد. به عبارت دیگر، می توان گفت شناسنامه تابع اتفاقی تقریبا با توابع توزیع و چگالی قابل بیان است.

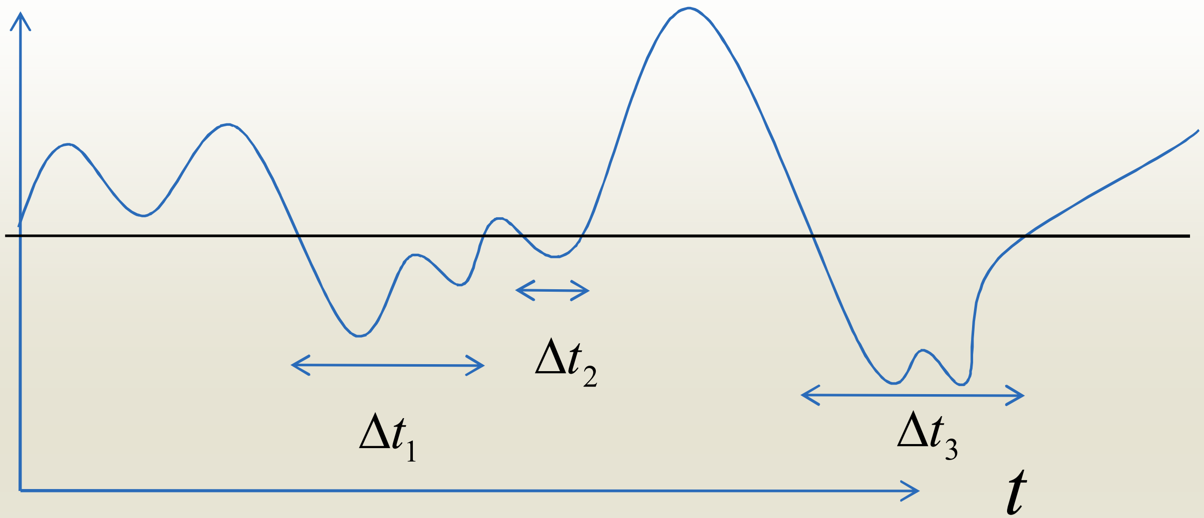




مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

تابع توزیع احتمال

توضیح و نحوه رسم



پس از در اختیار داشتن داده های یک فرایند اتفاقی این سوال مهم مطرح می شود که احتمال اینکه مقدار x متغیر اتفاقی از یک مقدار معین x1 کمتر باشد چقدر است؟ (توجه به شکل)

$$F(x_1) = \Pr ob.[x(t) < x_1]$$

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

برای این کار یک خط افقی از x1 رسم می نماییم تا منحنی x را در نقاط مختلف قطع نماید. اگر بازه های زمانی باشند که در آن x<x1 باشد احتمال وقوع عبارت فوق به صورت زیر است:

$$F(x_1) = \Pr ob.[x(t) < x_1] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_t \Delta t_i$$

روشن است که اگر برای x1 یک مقدار منفی بزرگ انتخاب نماییم و یا یک مقدار مثبت بزرگ داریم:

$$F(x_1 \to -\infty) = 0$$

$$F(x_1 \to +\infty) = 1$$

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

خواص تابع F(x) دارای خاصیت های زیر است:

$$F(-\infty)=0$$

$$F(+\infty)=1$$

-تابع F(x) غیر نزولی است.

- تابع F(x) پیوسته است.

$$0 \le F(x) \le 1$$

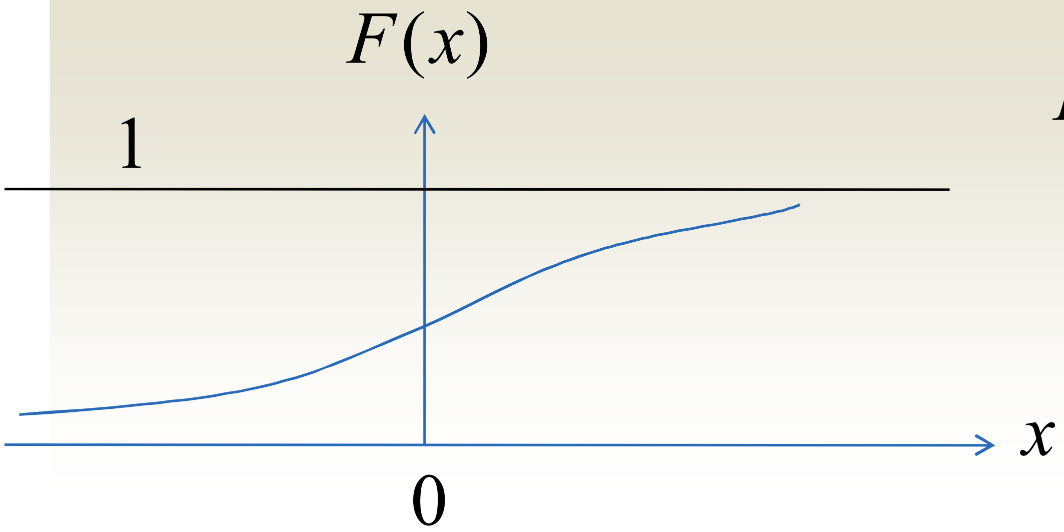
- به طور کلی

$$F(x)=\Pr ob.[x(t)<x]$$

را تابع

Probability Distribution Function

نامند.



مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

تابع چگالی احتمال

اگر احتمال اینکه متغیر اتفاقی کوچکتر از x+dx باشد را با F(x+dx) نشان دهیم، احتمال اینکه x(t) بین x و x+dx بیفتد برابر است با:

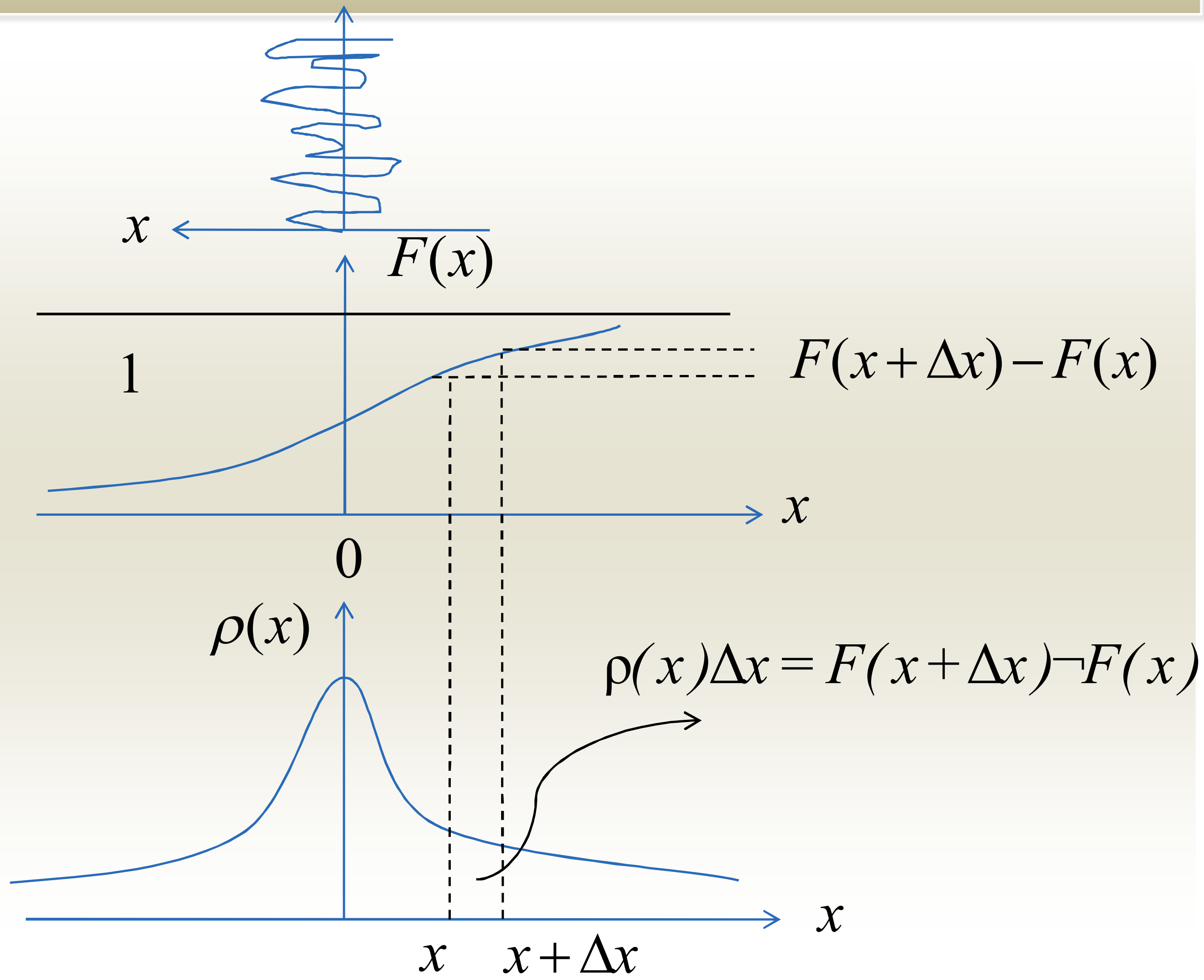
F(x+dx)-F(x)

از این موضوع برای تعریف چگالی احتمال استفاده می نماییم. لذا:

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} F(x)$$

به عبارت دیگر، مشتق تابع توزیع، تابع چگالی خواهد بود. (شکل)

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی



مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

لذا تابع چگالی احتمال عبارتست از شیب تابع F(x) و سطح زیر منحنی فوق برابر است با تغییرات F(x) بنابراین:

$$\Pr ob.(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$$

خواص تابع چگالی احتمال

$$\rho(x) \geq 0 \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(\varsigma)d\varsigma$$

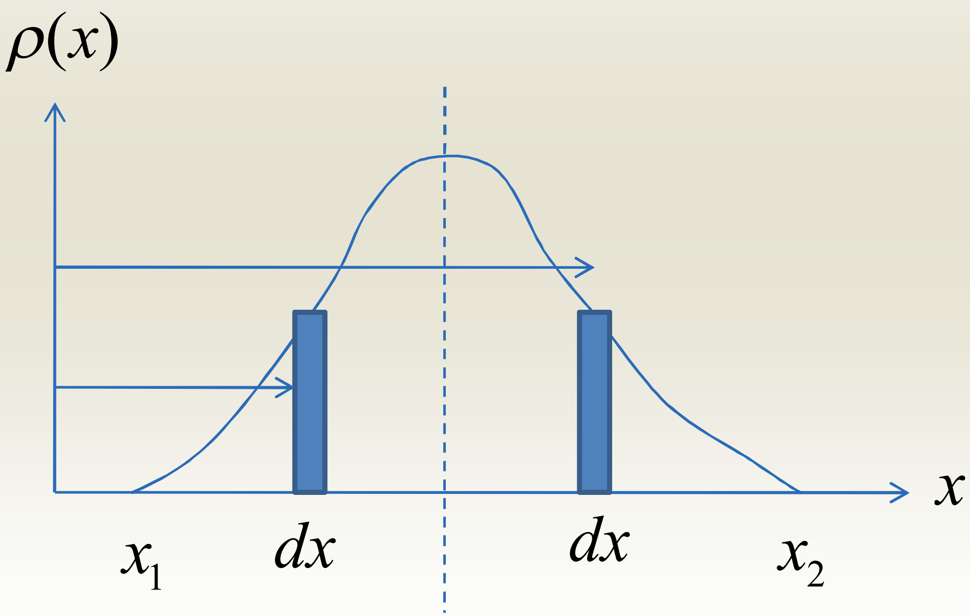
$$\rho(-\infty) = 0$$

$$\rho(+\infty) = 0 \qquad F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = 1$$

مثال

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

بررسی مقدار میانگین در توابع توزیع و چگالی احتمال
فرض کنید در یک نمودار چگالی احتمال به صورت مقابل داشته باشیم:



برای بدست آوردن میانگین $\bar{x}$
می بایست سطح منحنی نصف شود.
می توان گفت باید گشتاور سطح در دو طرف باید برابر باشد. این موضوع با توجه به تعریف مرکز سطح مشخص می گردد.

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

$$\int_{x_1}^{\bar{x}} (Left\ \ Area)(\bar{x}-x) = \int_{\bar{x}}^{x_2} (Right\ \ Area)(x-\bar{x})$$

$$\int_{x_1}^{\bar{x}} \rho(x)(\bar{x}-x)dx = \int_{\bar{x}}^{x_2} \rho(x)(x-\bar{x})dx$$

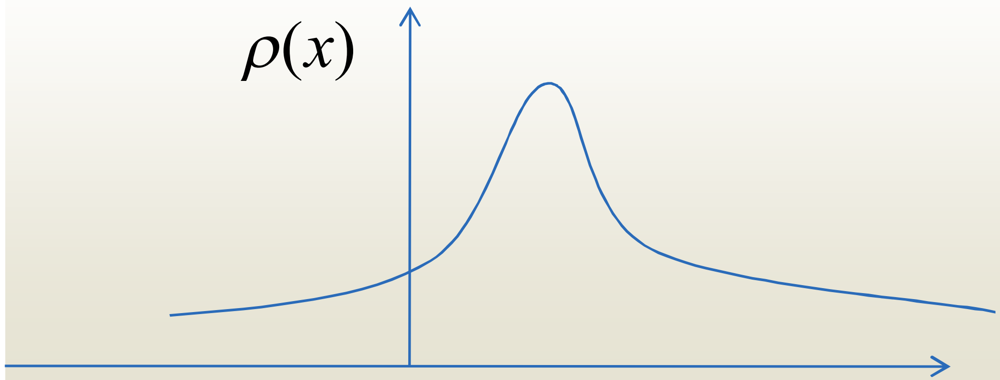
$$\int_{x_1}^{\bar{x}} \rho(x)\bar{x}dx + \int_{\bar{x}}^{x_2} \rho(x)\bar{x}dx = \int_{x_1}^{\bar{x}} \rho(x)xdx + \int_{\bar{x}}^{x_2} \rho(x)xdx$$

$$\bar{x}\underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx}_{=1} = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)xdx \Rightarrow \quad \bar{x} = \int_{x_1}^{x_1} \rho(x)xdx = E(x) = \mu_x$$

مرکز هندسی یا گشتاور اول سطح

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

به طور کلی هرگاه توزیع احتمال وجود داشته باشد می توان مقدار میانگین را به صورت گفته شده تعیین کرد.



$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) x dx = E(x) = \mu_x$$

نکته: از نمودار چگالی احتمال می توان موارد مختلفی را از مقادیر میانگین ارزیابی نمود.

تمرین

توزیع گوسی یا نرمال Gaussian Distribution or Normal Distribution

توزیع گوسی یکی از پرکاربرد ترین توزیع های احتمال در مهندسی و کاربردهای صنعتی می باشد.

اگر تابع توزیع احتمال یک تابع به فرم زیر باشد آن را گوسی می نامیم:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\varsigma^2}{2}} d\varsigma$$

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

توزیع گوسی یا نرمال Gaussian Distribution or Normal Distribution

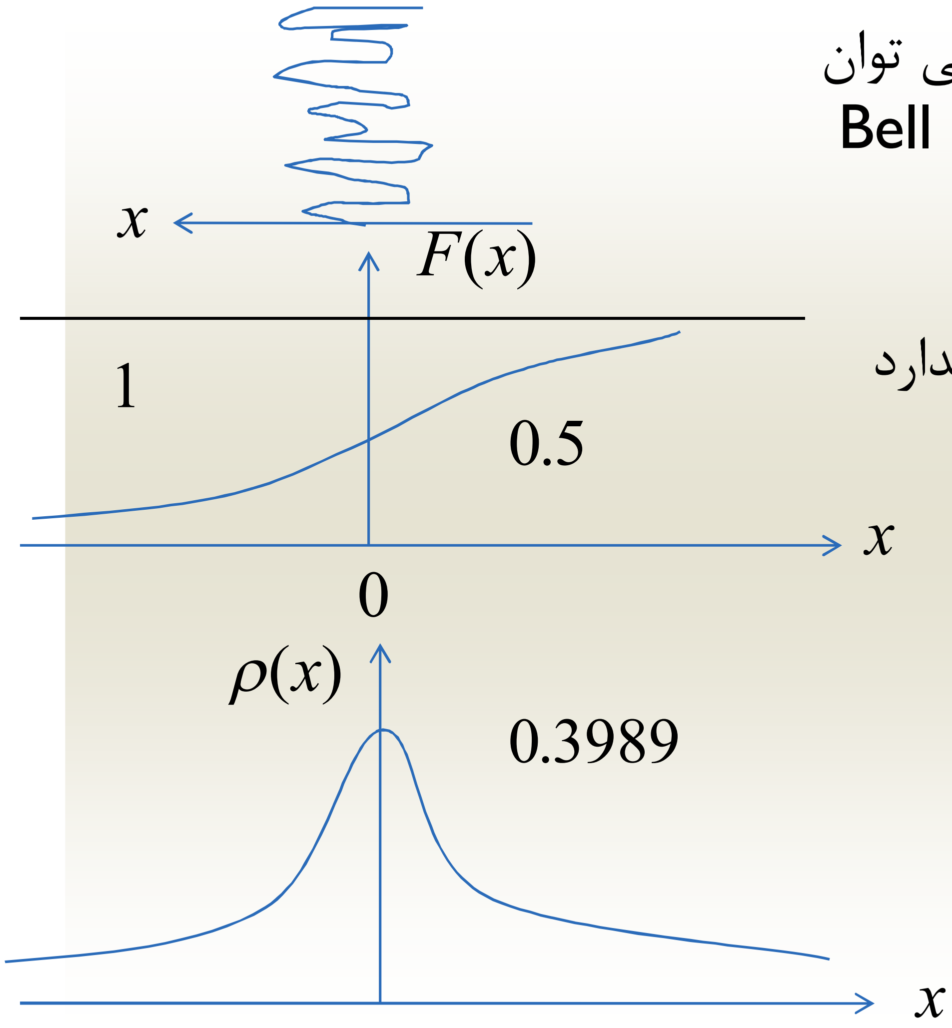
توزیع گوسی یکی از پرکاربرد ترین توزیع های احتمال در مهندسی و کاربردهای صنعتی می باشد.

اگر تابع توزیع احتمال یک تابع به فرم زیر باشد آن را گوسی می نامیم:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\varsigma^2}{2}} d\varsigma$$

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی



مطابق شکل بسیاری از رفتارهای رندوم را می توان از دیدگاه تابع چگالی به فرم مشهور **Bell shape** دانست.

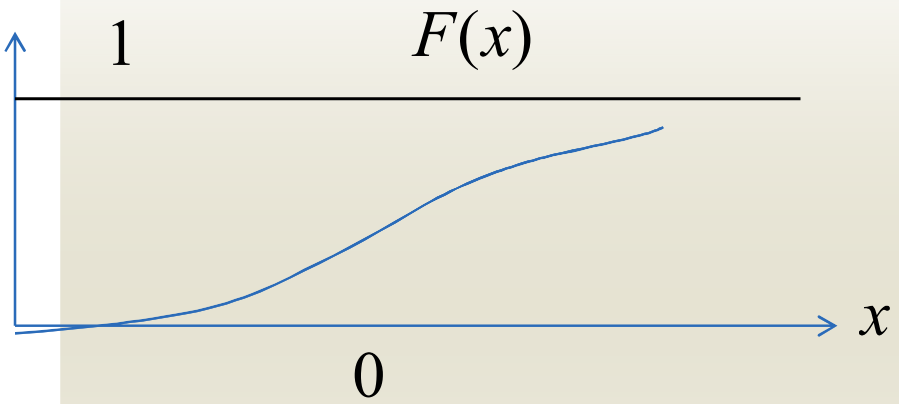
نکته: در حالتی که سیگما برابر ۱ و میانگین صفر باشد این توزیع را گوسی نرمال یا استاندارد می نامند. لذا فرم عمومی توزیع گوسی به صورت زیر خواهد بود:

$$\rho(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\mu}}\exp\left[-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

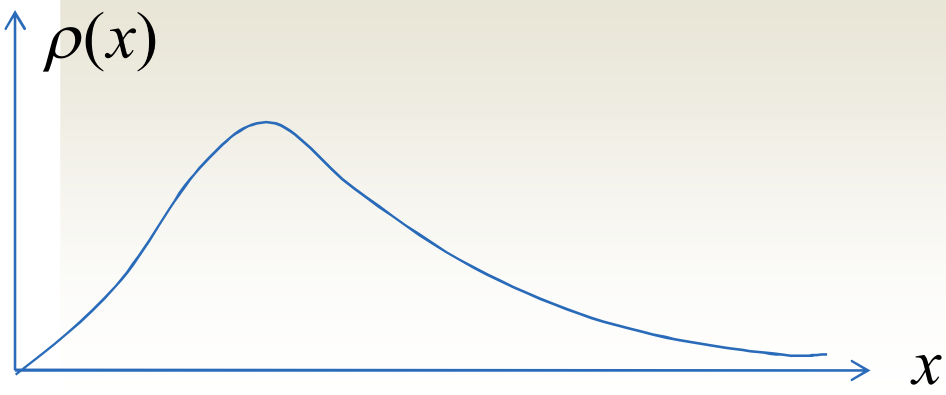
مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

توزیع ریلی Rayleigh Distribution

نوع دیگری از توزیع احتمال به وسیله توابع زیر معرفی می شوند:



$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



$$\rho(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{x^2}{2}} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

دستورات MATLAB

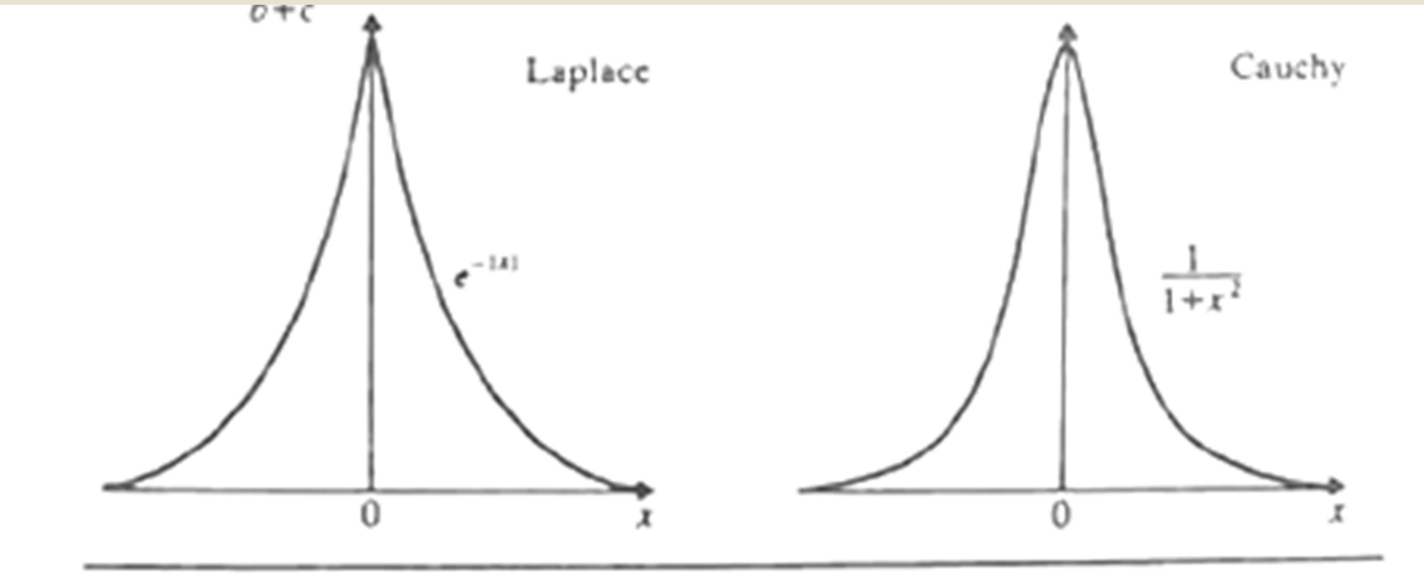
مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

توزیع لگاریتمی Lognormal Distribution

نوع دیگری از توزیع احتمال به وسیله توابع زیر معرفی می شوند:

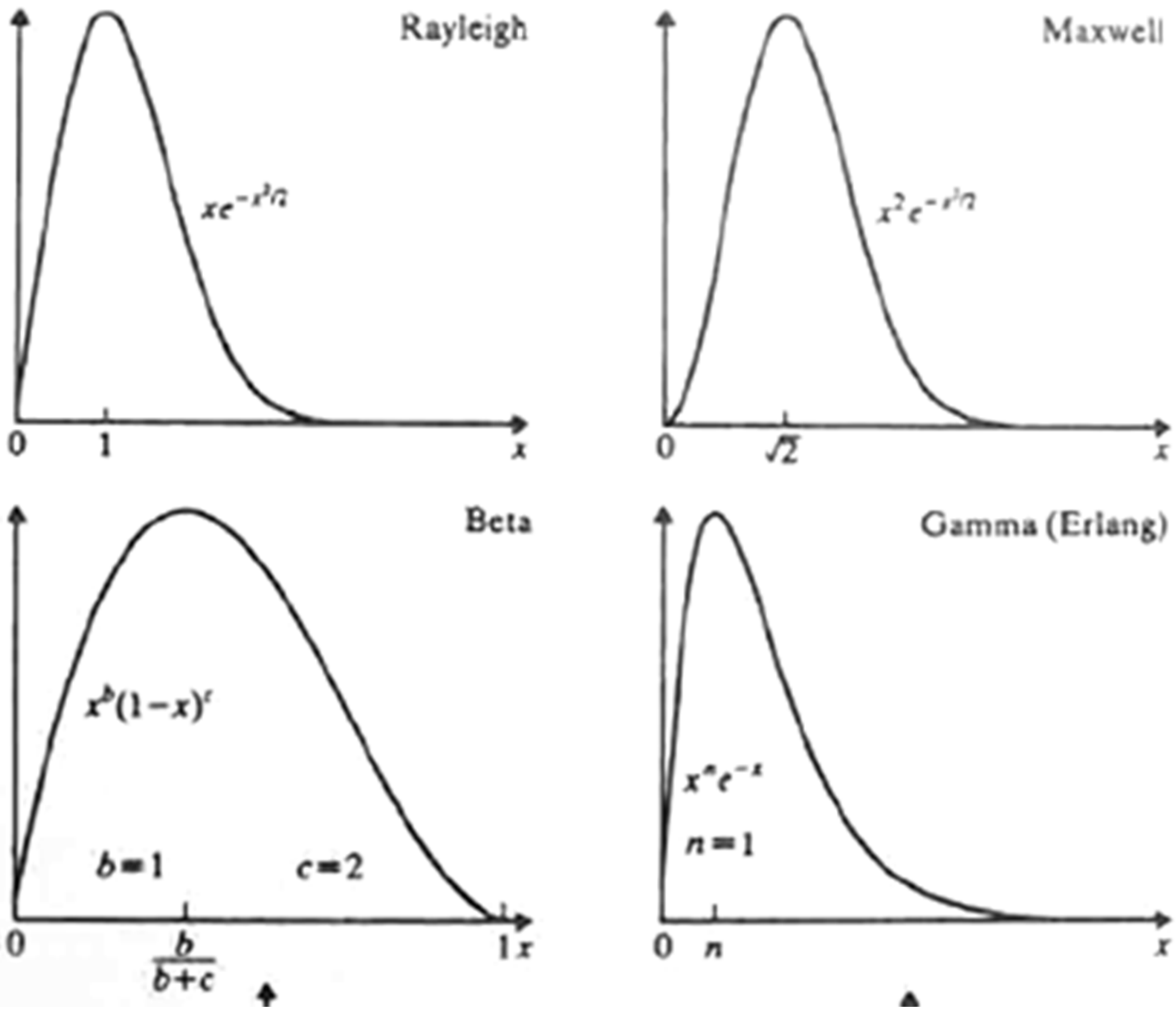
$$\rho(x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{(Ln(x))^2}{2}}$$

دو توزیع دیگر



مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

سایر توزیع ها



مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

امید ریاضی Expected value

به طور کلی اگر g(x) یک تابع پیوسته از متغیر اتفاقی x(t) باشد، امید ریاضی آن تابع با عنوان کلی Mathematical expectation یا همان Expected value به صورت زیر بیان می شود:

$$E[g(x)] = \overline{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\rho(x)dx$$

که در آن $\rho(x)$ تابع چگالی احتمال متغیر x می باشد.

این اپرتور کاربرد زیادی در بررسی فرایندهای اتفاقی، حل معادلات رندوم و ارتعاشات اتفاقی دارد.

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

اگر g(x)=x باشد در این صورت اپراتور E[x] همان Mean value خواهد بود.

$$E[x]=\bar{x}=\int_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x)dx$$

نکته: به انتگرال گیری روی x دقت نمایید.
اگر g(x)=x^2 باشد داریم:

$$E[x^2]=\overline{x^2}=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\rho(x)dx \quad mean\,value \quad \phi_x^2$$

که ریشه آن rms می باشد.

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

لذا واریانس به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_x^2 = E[(x-\bar{x})^2] = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\bar{x})^2 \rho(x)dx = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

$$E[(x-\bar{x})^2] = E[x^2] - (E(x))^2$$

کاربرد در حل معادلات دیفرانسیل اتفاقی

مثال: با فرض عدم همبستگی s , v

$$x(n) = s(n) + v(n)$$

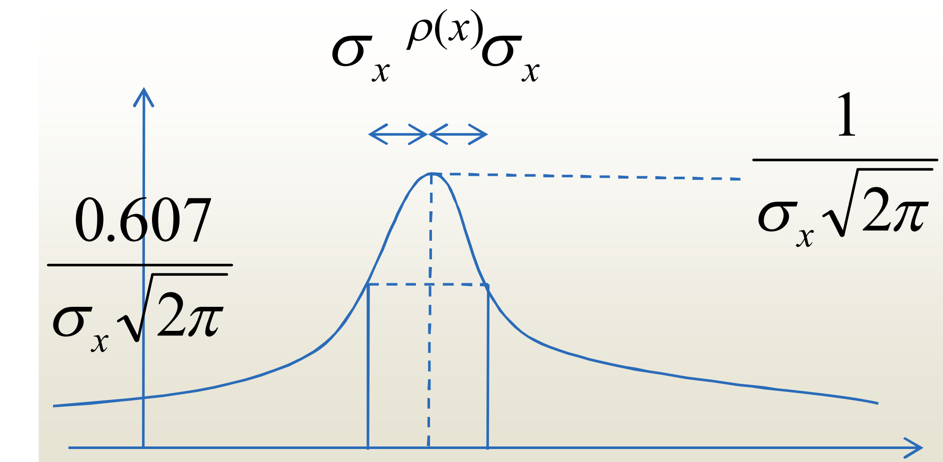
$$E\{x(n)^2\} = E\{(s(n)+v(n))^2\}$$

$$E\{x(n)^2\} = E\{(s(n))^2\} + E\{(v(n))^2\}$$

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

برخی نکات در خصوص توزیع گوسی

به توزیع گوسی زیر توجه نمایید:



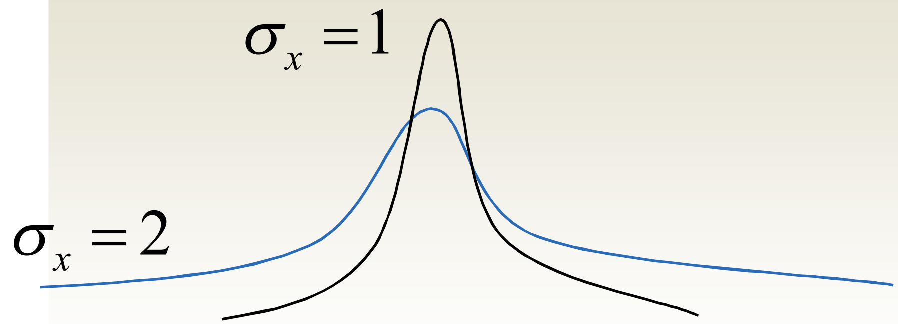
$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\mu}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

بررسی رفتار نمودار نسبت به انحراف معیار

به ازاء انحراف معیارهای کوچک منحنی

در میانگین تیز تر می شودو با افزایش

انحراف معیار پهنای منحنی بیشتر می شود



مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

بررسی احتمالات وقوع یک دو سه و ... سیگما

در توزیع گوسی می خواهیم احتمالات مربوط به سیگماهای مختلف تا اصطلاحا **z** سیگما را بدست آوریم لذا:

$$\Pr ob.(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$$

با تعریف مجدد

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(x)dx = \frac{1}{2}[1 + erf(\frac{x}{\sqrt{2}})]$$

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\mu}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

لذا به دنبال این مقدار هستیم: $\Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

به عنوان نمونه احتمالات اعداد بالاتر از ۶ سیگما به صورت زیر است:

$$-9\sigma < x < +9\sigma \Longrightarrow 2.26\times 10^{-19}$$

$$-10\sigma < x < +10\sigma \Longrightarrow 1.52\times 10^{-23}$$

قاعده ۶۸-۹۵-۹۹.۷

احتمال وقوع در توزیع گوسی که به شکل زیر ارائه گردد را در مقدار یک سیگما، قاعده ۶۸ درصد، در مقدار دو سیگما ۹۵ درصد و در مقدار سه سیگما ۹۹.۷ درصد می نامیم:

$$\Pr ob.(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) \cong 0.6827$$

$$\Pr ob.(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) \cong 0.9545$$

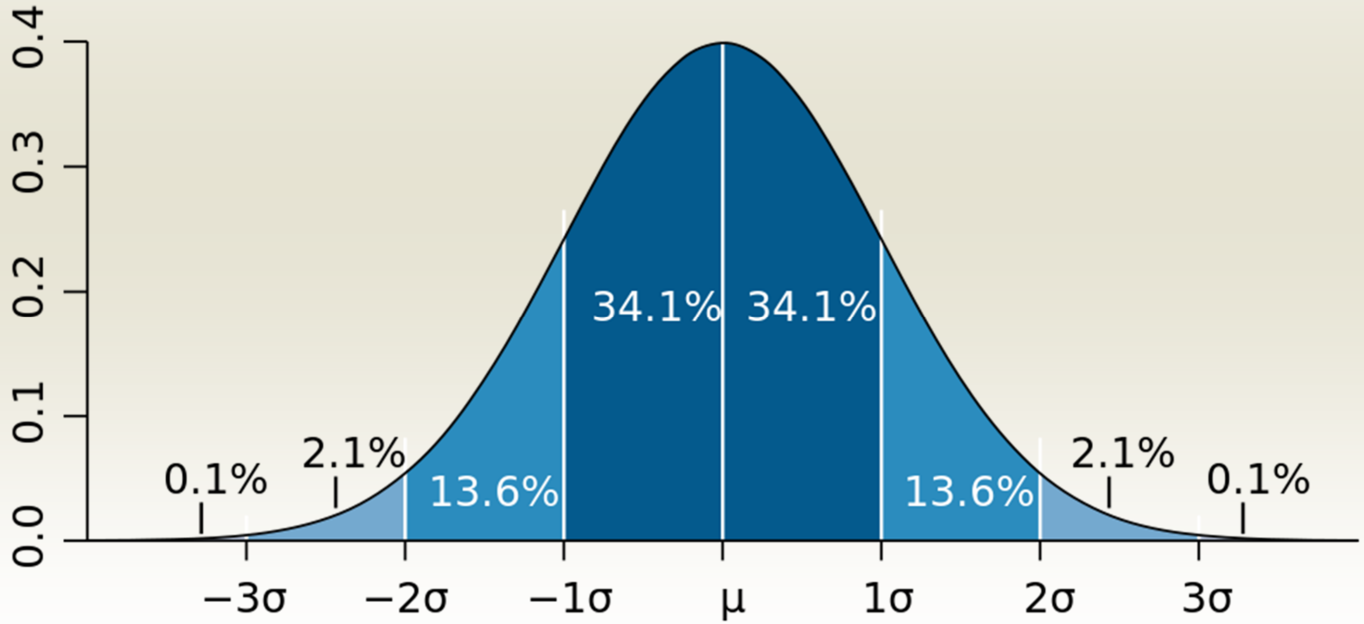
$$\Pr ob.(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) \cong 0.9973$$

$$\Pr ob.(-\sigma < x < +\sigma) = \Phi(+\sigma) - \Phi(-\sigma)$$

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

توضیحات مربوط به طراحی براساس z سیگما

گاهی اوقات گفته می شود که Design for z sigma که به مفهوم طراحی در شرایطی است که متغیرهای رندوم به صورت z سیگما با توزیع گوسی در نظر گرفته شده اند. به عبارتی یعنی در طراحی n درصد از حالات لحاظ شده است.



مثال/ص ۵۵

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

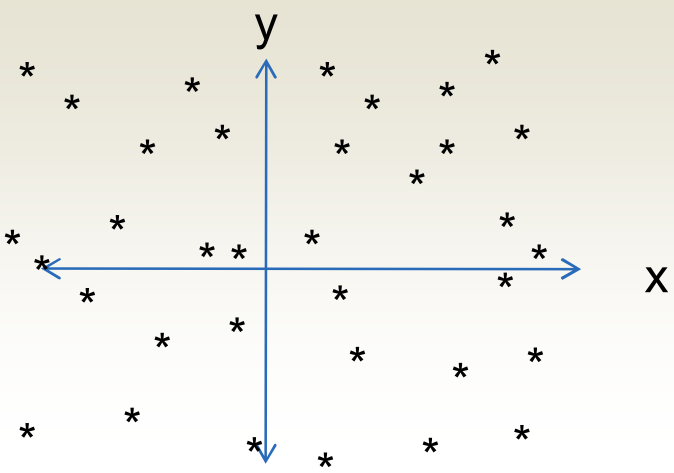
مرور احتمالات خود همبستگی از دیدگاهی دیگر Auto-correlation

- عنوان Auto زمانی بکار می رود که در یک سیگنال واحد x(t) بررسی همبستگی مورد نظر است.

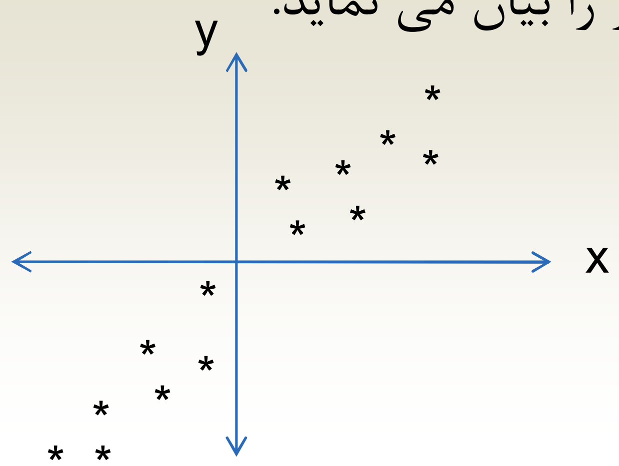
- عنوان Correlation به تنهایی برای بررسی متغیرهایی بیش از یک مثلا x , y بکار می رود.

- تعریف:

تابع خود همبستگی میزان وابستگی و ارتباط یک متغیر اتفاقی در یک زمان به مقدار آن در زمان دیگر را بیان می نماید.



Uncorrelated



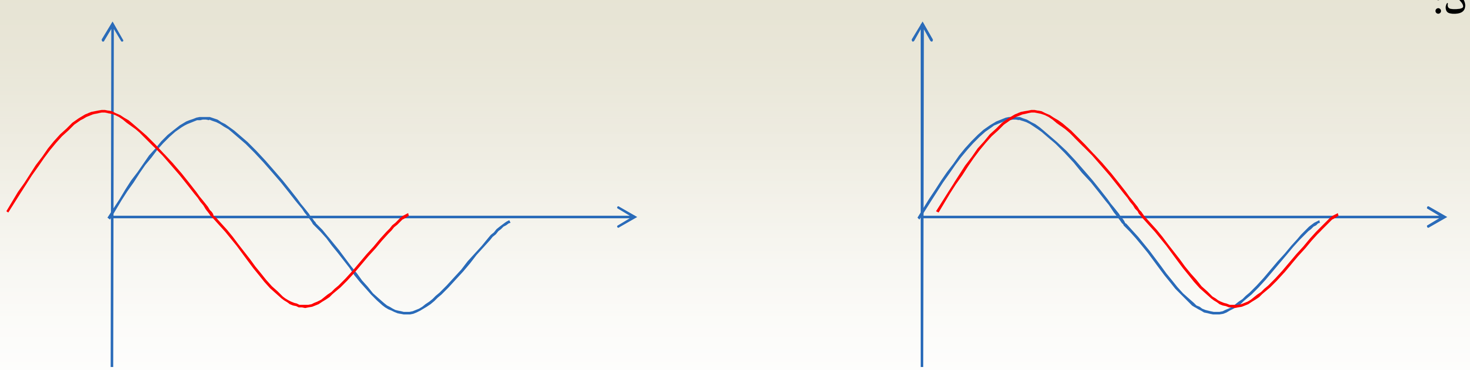
Correlated (y=x)

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

ضابطه تابع

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt$$

شاید بتوان گفت یک مفهوم از ضرب داخلی دو تابع باشد که با مفهوم ضرب می توان نشان داد:



X(t)X(t+T)   X(t)X(t)

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

بررسی دو خاصیت تابع همبستگی

الف) زوج بودن تابع

بررسی و اثبات

ب) همواره تابع در صفر ماکزیمم است. (این موضوع با تعریف همبستگی تطابق دارد.)

بررسی و اثبات

ج) در ادامه به توصیف همبستگی در حوزه فرکانس می پردازیم که مفهوم کاملی از انرژی و توان سیگنال را ارائه می دهد.

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

یادآوری سری فوریه

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t) \quad ,\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos n\omega_0 t dt, n=0,1,2,...$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin n\omega_0 t dt, n=0,1,2,...$$

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

یادآوری تبدیل فوریه

اگر در سری فوریه پریود به بی نهایت میل نمایدبرد تابع غیرپریودیک می شودو سری را به تبدیل بدل می نماید:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

تبدیل فوریه / تبدیل لاپلاس LT relation sheep FT

لاپلاس یک طرفه/ لاپلاس دو طرفه

پاسخ سیستم

$$f(t) \xrightarrow{F} F(w) \longrightarrow \boxed{G(W)} \longrightarrow X(w) \xrightarrow{F-1} X(t)$$

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

تابع چگالی توان طیفی Power spectral density function

اگر تابع همبستگی میزان وابستگی مقادیر یک تابع را در زمانهای مختلف بیان می کند که یک تابع حوزه زمان است و بخواهیم این موضوع را در حوزه فرکانس بیان نماییم می توانیم از تابع همبستگی تبدیل فوریه بگیریم.

بیان این تابع در حوزه فرکانس نیر تعبیری از توان و انرژی خواهد داشت. لذا داریم:

$$S_f(\omega) = F[R_f(\tau)]$$

$$S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

یکی از دلایل نامگذاری این تابع به تابع چگالی طیف توان این است که در T=0 برابر توان متوسط مصرفی است.

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

خواص تابع چگالی طیف توان

اگر تاو برابر صفر باشد داریم:

$$R_f(0)=\underbrace{\lim}_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_f(\omega)d\omega$$

فرض کنید **f(t)** یک ولتاژ الکتریکی است که از مقاومت یک اهمی عبور می کند. لذا حاصلضرب جریان ولتاژ برابر توان مصرفی لحظه ای مقاومت یک اهمی خواهد بود. لذا انتگرال عبارت فوق نشان دهنده انرژی مصرفی است. و بنابراین:

$$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)dt$$

برابر توان متوسط مصرفی است. این همان دلیل نامگذاری تابع فوق است. لذا با انتگرال گیری از تابع توان طیفی روی فرکانس به توان متوسط می رسیم.

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

نکته (۱): این تابع را **Mean square spectral density** نیز می نامند.

نکته (۲): اگر برای یک فر ایند تابع چگالی طیفی معلوم باشد می توان **Mean square** آن را بدست آورد:

$$R_f(0) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\omega)d\omega$$

نکته (۳): با توجه به تفسیر توان از این تابع همواره مقداری مثبت دارد.

$$S_f(\omega) \geq 0$$

نکته (۴): از زوج بودن تابع همبستگی می توان به زوج بودن تابع چگالی طیف توان نیز دست یافت.

بررسی و اثبات

نکته (۵): ساده سازی تابع

$$S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R_f(\tau)(\cos\omega\tau - j\sin\omega\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow even\ and\ odd \quad functions$$

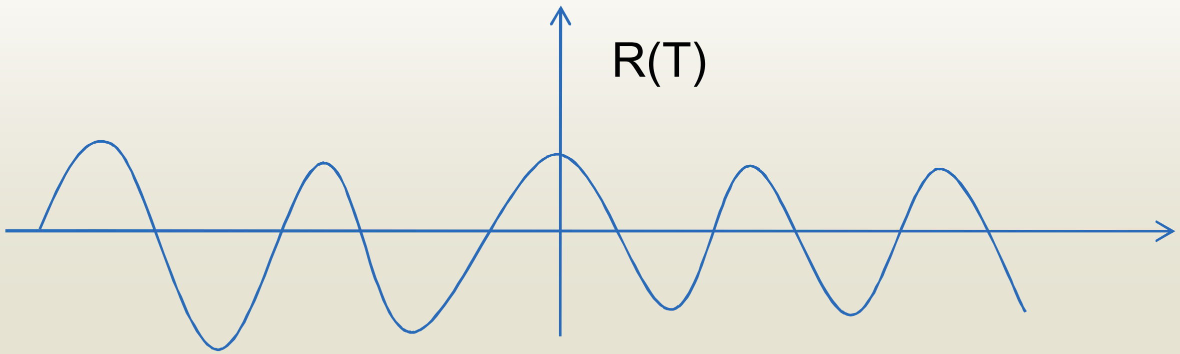
$$\Rightarrow S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_f(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau = 2\int_{0}^{+\infty} R_f(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau$$

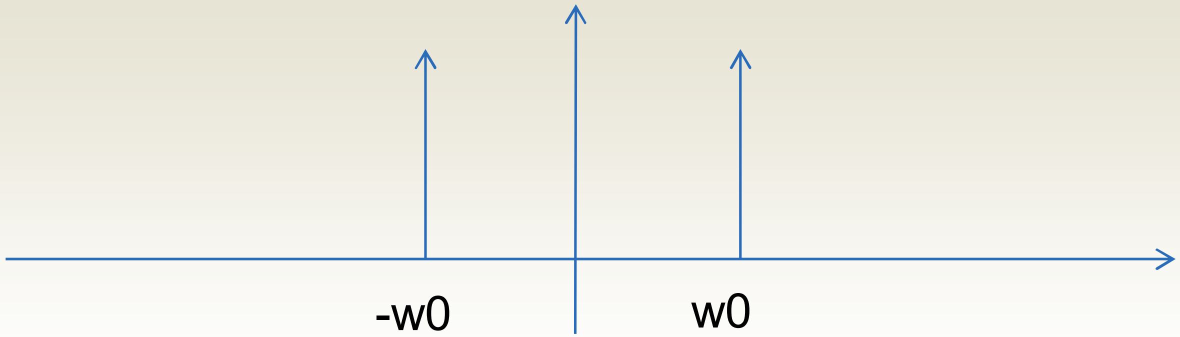
توابع همبستگی و طیف توان هردو حقیقی هستند.

مزیت نسبت به تبدیل فوریه

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

مثال: برای تابع $f(t)=A\sin(w0t+d)$ تابع همبستگی و چگالی توان طیفی را بدست آورید.



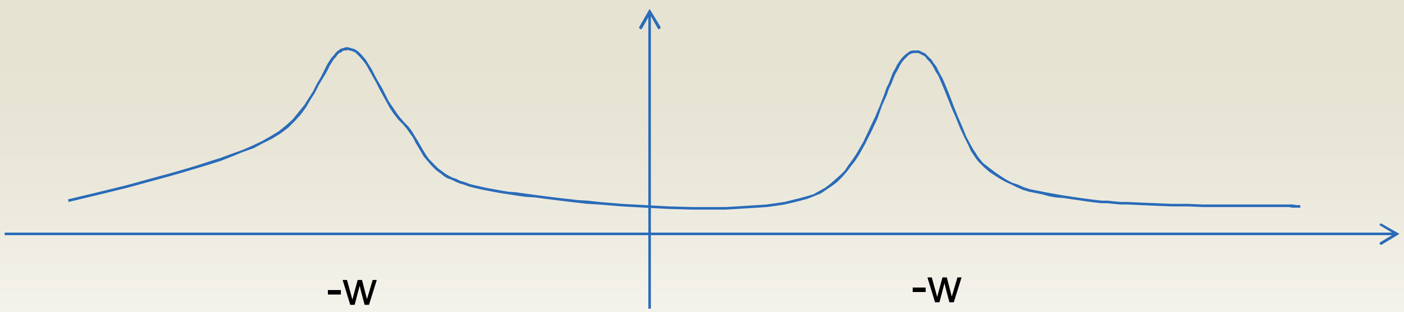


نکات حل این مثال

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

بررسی تابع Sf(w) در دسته بندی فرایندهای اتفاقی از دیدگاه فرکانس
برحسب شکل کلی تابع چگالی طیف توان دو دسته فرایند تقسیم بندی می شوند:

الف) فرایندهای باند باریک Narrow band random process نوارباریک
ب) فرایندهای باند پهن Wide band random process محدوده وسیع

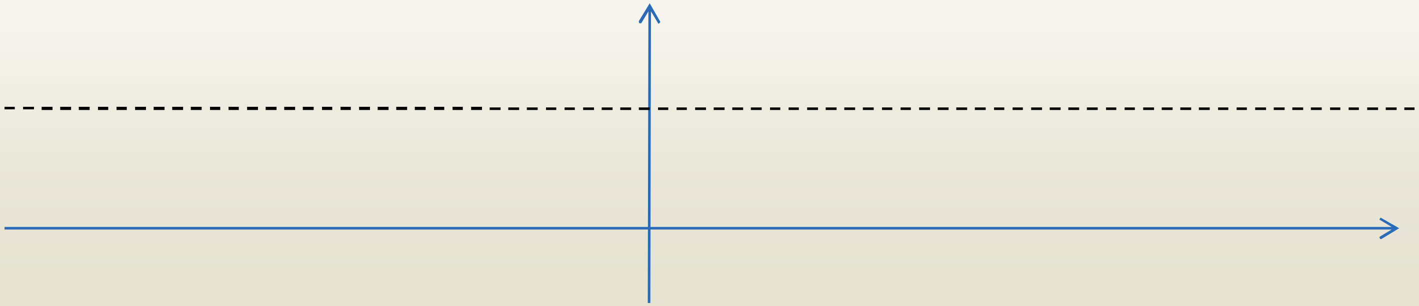


نکته: در فرایندهای باند باریک شاید ماهیت رندوم بودن سیگنال دچار بحث شود.

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

نکته: توابع باند پهن را به طور کلی نویز سفید **(White noise)** می نامند. (چرا)

نکته: نویز سفید را در حالتی ایده آل گویند که باند فرکانسی بی نهایت داشته باشد.



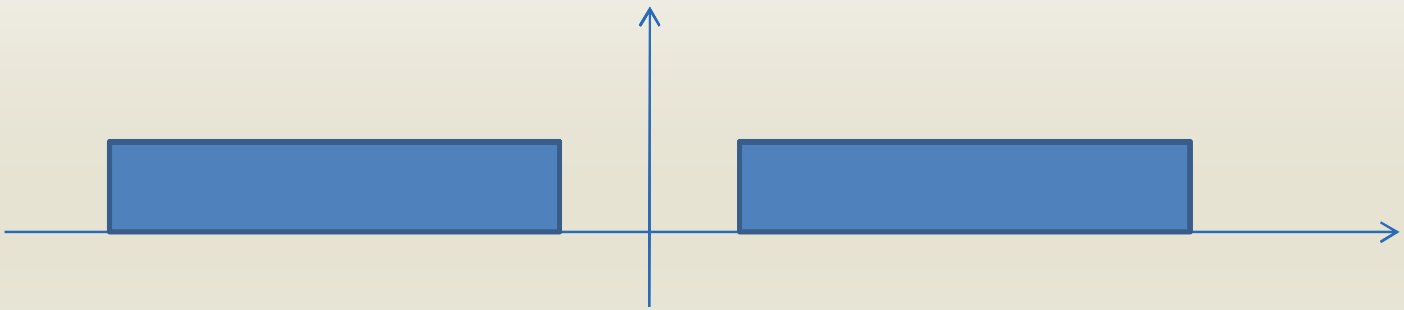
نکته: در نویر سفید ایده آل چون تابع چگالی توان طیفی مطابق شکل یک مقدار ثابت است داریم:

$$R_f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_f(\omega)d\omega=\infty$$

به عبارت دیگر نویز سفید ایده آل باید دارای انرژی بی نهایت باشد.

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

نکته: نوعی از سیگنال های سفید که واقعی تر باشند را نویز سفید باند محدود Band limited white noise می نامند.



نکته: هر نویز که سفید نباشد را رنگی می نامند. (چگونگی تولید نویز سفید)

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

- Joint probability distribution of two random signals
- تابع توزیع احتمال مرتبه دوم
- احتمالات مربوط به دو سیگنال اتفاقی
- فرایندهای ارگادیک در زوج متغیرهای اتفاقی
- مقادیر میانگین در دو سیگنال اتفاقی
- توابع توزیع و چگالی در زوج متغیرهای اتفاقی

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

می خواهیم حالتی را بررسی کنیم که در آن هم $x(t)<x$ بوده و هم $y(t)<y$ باشد لذا:

$$F(x,y)=\text{Prob}\,[x(t)<x\ ,\ y(t)<y]$$

که در آن $x(t)$ و $y(t)$ از دو فرایند اتفاقی هستند.

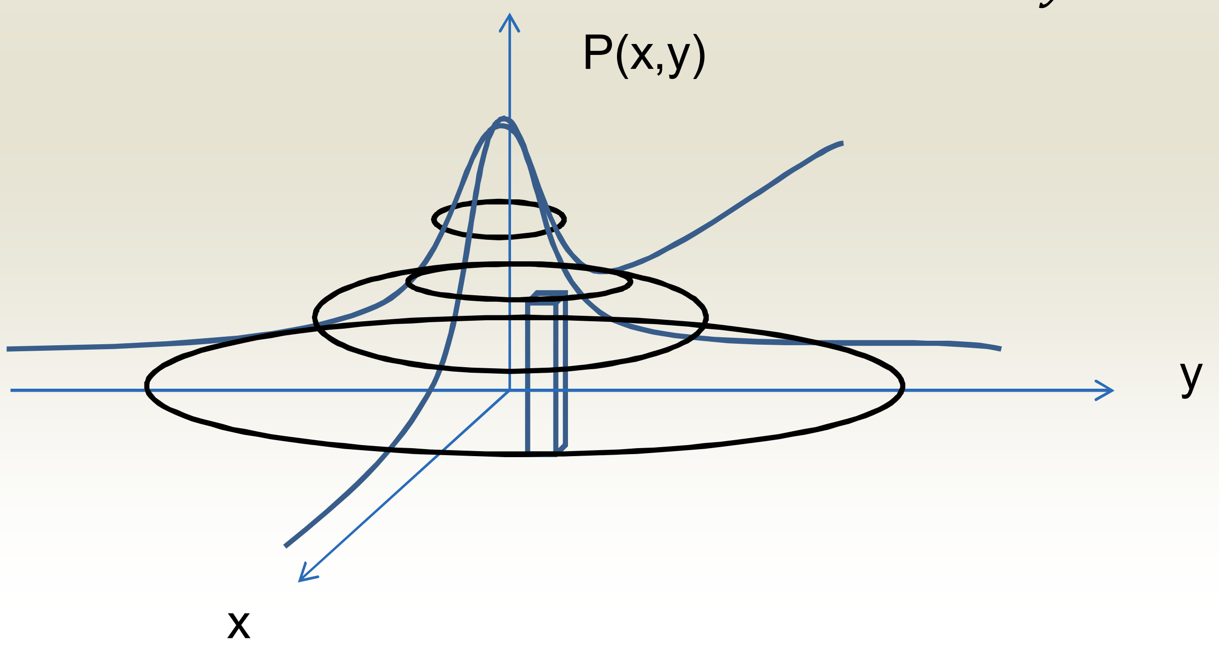
اگر بخواهیم CDF مربوط به این دو فرایند را نشان دهیم داریم:

$$\mathrm{F}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\rho(\zeta,\eta)\,d\zeta\,d\eta$$

مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

حال احتمال اینکه x1<x<x2 و y1<y<y2 باشد به صورت زیر قابل بیان و نمایش است:

$$Prob[x1 < x(t) < x2, y1 < y(t) < y2] = \int_{x1}^{x2}\int_{y1}^{y2}\rho(\zeta,\eta)d\zeta d\eta$$



مقدمه ای بر فرایندهای اتفاقی و تصادفی

خواص تابع چگالی در جفت متغیرهای اتفاقی

$$\rho(\zeta,\eta) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(\zeta,\eta)d\zeta d\eta = 1$$

$$\mathrm{P}rob[x1 \leq x(t) \leq x2, y1 \leq y(t) \leq y2] = \int_{x1}^{x2}\int_{y1}^{y2}\rho(\zeta,\eta)d\zeta d\eta$$

Definition 6. *A random variable* X*, defined on a probability space* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, is said to be* **continuous** *if there exists a nonnegative measurable function* $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *such that*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

The function f *is called a* **(probability) density function** *(or* **PDF***, for short) for* X*,*

Definition 5. Discrete random variables and PMFs)

(a) *A random variable X, defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, is said to be* **discrete** *if its range $X(\Omega)$ is countable.*

(b) *If X is a discrete random variable, the function $p_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ defined by $p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$, for every x, is called the* **(probability) mass function** *of X, or* **PMF** *for short.*

http://wp.kntu.ac.ir/khoshnood