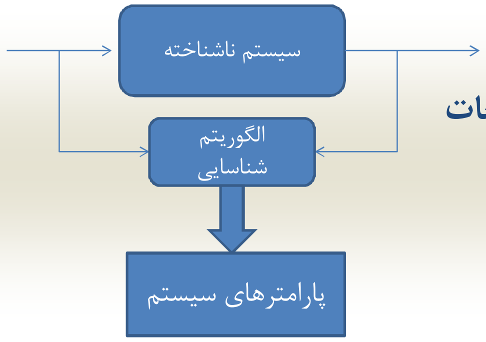
بسم الله الرحمن الرحیم

عنوان

شناسایی سیستم و تخمین پارامترهای پرواز



ملاحظات روش کمترین مربعات
(روش های بازگشتی)

مدرس:
عبدالمجید خوشنود

روش کمترین مربعات

- شناسایی بازگشتی Recursive Least Square (RLS)
    - هدف چیست؟ تبدیل رویکرد خارج خط به رویکرد روی خط برای شناسایی پارامترهای سیستم های دینامیکی در حین کار
- چگونه؟ مفهوم دینامیک بودن سیستم و سیستم دارای حافظه، استفاده از داده های گذشته، به عبارتی از داده های t به تنهایی استفاده نمی کنیم بلکه از داده های t-1 نیز بهره می گیریم.
    - از تعبیر آماری داریم:

$$Cov\hat{\theta} = \sigma^2[\Phi^T\Phi]^{-1} \Rightarrow P(t) \overset{\Delta}{\equiv} [\Phi^T\Phi]^{-1}$$

- این ماتریس را به عنوان ماتریس کواریانس تعریف می کنیم.

روش کمترین مربعات

$$p(t)^{-1} = \Phi^T(t)\Phi(t) = p(t-1)^{-1} + \phi(t)\phi^T(t)$$

$$\hat{\theta}(t) = p(t)[\sum_{i=1}^{t}\phi(i)y(i)] = p(t)[\sum_{i=1}^{t-1}\phi(i)y(i) + \phi(t)y(t)]$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{t-1}\phi(i)y(i) = p(t)^{-1}\hat{\theta}(t) - \phi(t)y(t) = p(t-1)^{-1}\hat{\theta}(t-1)$$

$$= p(t)^{-1}\hat{\theta}(t-1) - \phi(t)\phi^T(t)\hat{\theta}(t-1)$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) - P(t)\phi(t)\phi^T(t)\hat{\theta}(t-1) + P(t)\phi(t)y(t)$$

$$= \hat{\theta}(t-1) + P(t)\phi(t)[y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1)]$$

$$= \hat{\theta}(t-1) + K(t)e(t)$$

خطای تخمین و بهره کالمن

روش کمترین مربعات

- اصلاح شناسایی بازگشتی (روند بازگشتی ماتریس خطا)
- لم وارون سازی ماتریس

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$$

$$P(t) = [P^{-1}(t-1) + \phi(t)\phi^T(t)]^{-1}$$

$$= P(t-1) - P(t-1)\phi(t)[I + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)]^{-1}\phi^T(t)P(t-1)$$

$$K(t) = P(t)\phi(t) = P(t-1)\phi(t)[I + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)]^{-1}$$

روش کمترین مربعات

$$\hat{\theta}(t)=\hat{\theta}(t-1)+\breve{K}(t)[y(t)-\phi^T(t)\hat{\theta}(t-1)]$$

$$K(t)=P(t-1)\phi(t)[I+\phi^T(t)P(t-1)\phi(t)]^{-1}$$

$$P(t)=[I-K(t)\phi^T(t)]P(t-1)$$

- استفاده از عبارت تاخیر دار در معرفی رگرسور با هدف بیان رگرسور بر اساس اطلاعات قبلی

$$y(t)=\varphi^{T}(t-۱)\theta$$

- نکات مربوط به انتخاب p(0) (خطای بزرگ و مثبت معین، ماتریس همانی)

روش کمترین مربعات

سیستم های متغیر با زمان

- تغییر ناگهانی پارامترهای سیستم

-بازنشانی کوواریانس Covariance Resetting (P(t))

-بازنشانی پریودیک

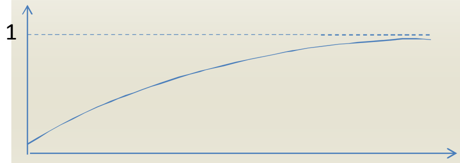
- تغییر هموار پارامترهای سیستم

-فاکتور فراموشی Forgetting Factor

روش کمترین مربعات

فاکتور فراموشی Forgetting Factor

$$J=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\lambda^{t-i}[y(t)-\phi^{T}\theta]^{2}$$



- بین صفر و یک
- وزن بیشتر داده های اخیر زمانی
- رفتار نمایی فاکتور فراموشی

$$\lambda(t)=1-\beta e^{-\alpha t}$$

$$K(t)=P(t-1)\phi(t)[\lambda I+\phi^{T}(t)P(t-1)\phi(t)]^{-1}$$

$$P(t)=[I-K(t)\phi^{T}(t)]P(t-1)/\lambda$$

روش کمترین مربعات

روش های ساده شده

الگوریتم هایی که از بروز رسانی ماتریس کواریانس اجتناب می کنند.

الگوریتم تصویرگر کازمارز

$$V=\frac{1}{2}\left(\hat{\theta}(t)-\hat{\theta}(t-1)\right)^{T}\left(\hat{\theta}(t)-\hat{\theta}(t-1)\right)+\bar{\alpha}\left(y(t)-\varphi^{T}(t)\hat{\theta}(t)\right)$$

مطابق روش لاگرانژ مقید ضریب آلفا ضریب لاگرانژ است.

نکته مهم خطای دو گام زمانی در مساله دنباله کوشی و فضای باناخ

مشتق گیری نسبت به Teta و Alphab

$$\hat{\theta}(t)-\hat{\theta}(t-1)-\bar{\alpha}\varphi(t)=0$$

$$y(t)-\varphi^{T}(t)\hat{\theta}(t)=0$$

روش کمترین مربعات

از حل معادله فوق به صورت دو معادله دو مجهول Teta , Alphab داریم:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-۱) + \frac{\gamma \varphi(t)}{\varphi^T(t)\varphi(t)}\left(y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-۱)\right)$$

استفاده از یک ضریب برای اصلاح روش:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-۱) + \frac{\gamma \varphi(t)}{\varphi^T(t)\varphi(t)}\left(y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-۱)\right)$$

روش کمترین مربعات

الگوریتم تصویرگر Projection یا نرمالیزه

برای جلوگیری از صفر شدن مخرج

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-۱) + \frac{\gamma \varphi(t)}{\alpha + \varphi^T(t)\varphi(t)}\left(y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-۱)\right)$$

برای پایداری

$$۰ < \gamma < ۲ \text{ و } \alpha \geqslant ۰$$

اثبات:

$$\tilde{\theta}(t) = A(t)\tilde{\theta}(t-۱)$$

$$A(t) = I - \frac{\gamma \varphi(t)\varphi^T(t)}{\alpha + \varphi^T(t)\varphi(t)}$$

یک مقدار ویژه ماتریس A به صورت زیر است:

$$\lambda = \frac{\alpha + (۱-\gamma)\varphi^T\varphi}{\alpha + \varphi^T\varphi}$$

اگر گاما کمتر ۲ و بزرگ تر از ۰ باشد مقدار ویژه ماتریس کمتر از یک خواهد بود و سیستم پایدار خواهد بود. (قدر مطلق عبارت)

روش کمترین مربعات

الگوریتم تقریب اتفاقی Stochastic Approximation

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-۱) + P(t)\varphi(t)\left(y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-۱)\right)$$

$$P(t) = \left(\sum_{i=۱}^{t} \varphi^T(i)\varphi(i)\right)^{-۱}$$

در اینجا P یک اسکالر است.

الگوریتم کمترین مربعات میانگین LMS

در اینجا y یک اسکالر است.

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-۱) + \gamma\varphi(t)\left(y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-۱)\right)$$

روش کمترین مربعات

مدل عمومی تابع تبدیل

$$A(q)y(t) = B(q)u(t)$$

مدل با خطای خروجی نویز سفید (Equation error)

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t+n)$$

مدل با خطای خروجی (Output error)

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)}u(t) + e(t)$$

مدل با فرض نویز غیر سفید (همبستگی خطا)

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t)$$

تخمین بایاس دار

روش کمترین مربعات

در مدل فوق e نویز سفید بوده و ضرایب c بیانگر همبستگی آنهاست که در مجموع خطا را به نویز رنگی تبدیل کرده است.

- برای چنین سیستمی می توان مدل رگرسور را ارتقاء داد:

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t-1)\hat{\theta}(t-1)$$

$$\theta = \left[a_1 \dots a_n \; b_1 \dots b_n \; c_1 \dots c_n\right]$$

$$\varphi^T(t-1) = \left[-y(t-1) \dots -y(t-n) \;\; u(t-1) \dots u(t-n) \;\; \varepsilon(t-1) \dots \varepsilon(t-n)\right]$$

$$y(t) = \varphi^T(t-1)\theta + e(t)$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + P(t)\varphi(t-1)\varepsilon(t)$$

$$P^{-1}(t) = P^{-1}(t-1) + \varphi(t-1)\varphi^T(t-1)$$

- اگر چه این روش با مدل کلی کمترین مربعات تفاوت ندارد اما آن را روش توسعه یافته می نامند.
Extended Least Square (ELS)

روش کمترین مربعات

در برخی منابع همین روش را روش حداکثر شانس بازگشتی می نامند یا آن را روش حداکثر شانس بازگشتی (۱) نامگذاری می کنند.

- شناسایی با روش حداکثر شانس بازگشتی Recursive Maximum Likelihood (RML)

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t)$$

$$y(t) = \varphi^T(t-1)\theta + e(t)$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + P(t)\varphi(t-1)\varepsilon(t)$$

$$\hat{C}(q)\varepsilon(t) = \hat{A}(q)y(t) - \hat{B}(q)u(t)$$

$$\hat{C}(q)\varphi_f(t) = \varphi(t)$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi_f^T(t-1)\hat{\theta}(t-1)$$

روش کمترین مربعات

برخی نکات

- روش RLS نیز مشابه روش OLS در حضور نویز رنگی بایاس دارد.
- سرعت محاسبات در روش RLS از همه بالاتر است.
- امتیاز روش RELS نسبت به RLS تخمین بدون بایاس است.
- روش RELS از همه روش ها کندتر است.
- اثبات همگرایی روش RLS

با توجه به اینکه ماتریس کوواریانس خطا همواره روندی کاهشی دارد، همگرایی روش بازگشتی اثبات می شود.

$$K(t) = P(t-1)\phi(t)[I + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)]^{-1}$$

$$P(t) = [I - K(t)\phi^T(t)]P(t-1)$$

روش کمترین مربعات

روش متغیرهای کمکی (Instrumental Variable)

برای بدون بایاس بودن تخمین طبق مباحث قبل باید y و e ناهمبسته باشند. اگر به خروجی بدون نویز دسترسی داشته باشیم این مساله حل می شود. اما به دلیل عدم دسترسی به این خروجی از متغیر کمکی استفاده می کنیم.

در واقع هر متغیر که جایگزین y شود را متغیر کمکی می نامیم. به عنوان نمونه:

$$\hat{y}_t = u_t^T\hat{\theta}$$

حال متغیر کمکی z را که از تخمین بدون نویز y تشکیل شده به جای y جایگزین می کنیم و از روابط عمومی کمترین مربعات استفاده می نماییم:

$$z_t^T = [-\hat{y}_{t-1}\ -\hat{y}_{t-2} \cdots -\hat{y}_{t-n}\ x_t\ x_{t-1} \cdots x_{t-m}]$$

$$u_t^T = [-y_{t-1}\ -y_{t-2} \cdots -y_{t-n}\ x_t\ x_{t-1} \cdots x_{t-m}]$$

$$\hat{\theta}_{IV} = Ay = (Z^TU)^{-1}Z^Ty$$

روش کمترین مربعات

یک جمع بندی کلی

کلیه روش های ارایه شده دارای یک لگوریتم یکپارچه هستند:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + P(t)\varphi(t-1)\varepsilon(t)$$
$$P(t) = \frac{1}{\lambda}\left(P(t-1) - \frac{P(t-1)\varphi(t-1)\varphi^T(t-1)P(t-1)}{\lambda + \varphi^T(t-1)P(t-1)\varphi(t-1)}\right)$$

در این الگوریتم مقادیر ε وϕو θ تغییر می کنند.

روش کمترین مربعات

غنای سیگنال، تحریک پایا Persistency Excitation

- مساله اصلی انتخاب سیگنال ورودی برای شناسایی
  - توضیح موضوع از جنبه فیزیک سیستم ها ومودهای رفتاری
  - توضیح موضوع از دیدگاه LS (حالت خاص)

ماتریس اصلی در سیستم های پاسخ محدود

$$\Phi^T\Phi = \begin{bmatrix} \sum_{n+1}^{t} u^2(k-1) & \sum_{n+1}^{t} u(k-1)u(k-2) & \dots & \sum_{n+1}^{t} u(k-1)u(k-n) \\ \sum_{n+1}^{t} u(k-1)u(k-2) & \sum_{n+1}^{t} u^2(k-2) & \dots & \sum_{n+1}^{t} u(k-2)u(k-n) \\ \vdots & & & \\ \sum_{n+1}^{t} u(k-1)u(k-n) & & & \sum_{n+1}^{t} u^2(k-n) \end{bmatrix}$$

- رتبه کامل بودن
- می‌نی‌مم ی‌کتا

روش کمترین مربعات

- ورودی پالس

برای هیچ مقداری از مرتبه n تحریک پایا نیست.

- ورودی پله

تحریک کننده پایا از مرتبه یک می باشد.

- ورودی سینوسی

تحریک کننده پایا از مرتبه دو می باشد.

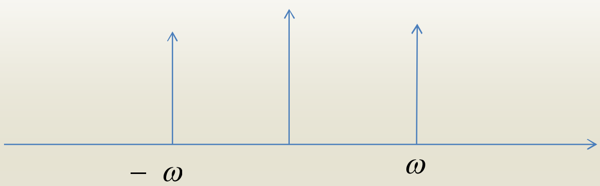
- ورودی اتفاقی (نویز سفید)

می تواند تحریک کننده پایا از هر مرتبه ای باشد.

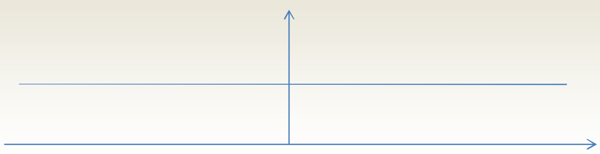
روش کمترین مربعات

- تفسیر غنای سیگنال از دیدگاه فرکانسی (مرتبه غنای سیگنال)

سیگنال سینوسی ساده، طیف فرکانسی، پایا از مرتبه ۲

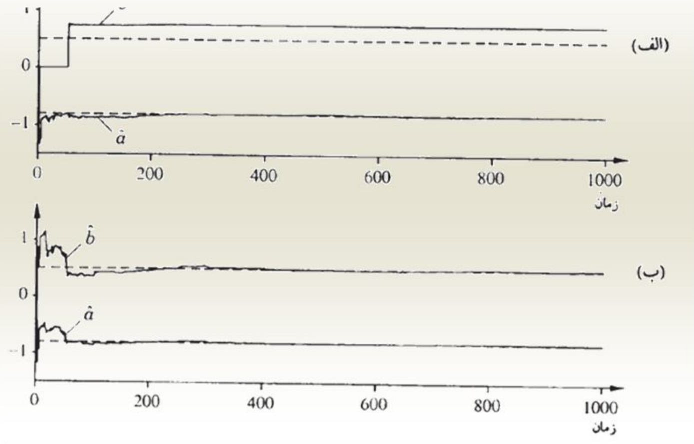


سیگنال نویز سفید، پایا از همه مرتبه ها



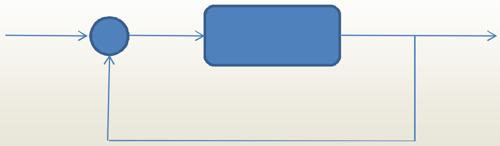
روش کمترین مربعات

مثال: ورودی پالس و ورودی موج مربعی با دوره تناوب ۱۰۰ نمونه



روش کمترین مربعات

تخمین در حلقه کنترل

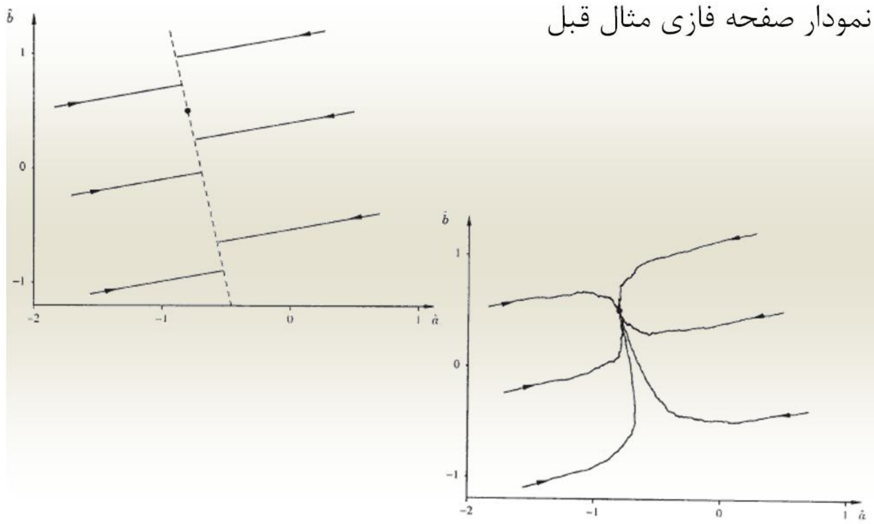


$$\Phi = \begin{bmatrix} -y(n) \ldots\ldots -y(1) & u(n) \ldots\ldots u(1) \\ -y(n+1) \ldots\ldots -y(2) & u(n+1) \ldots\ldots u(2) \\ -y(t-1) \ldots\ldots -y(t-n) & u(t-1) \ldots\ldots u(t-n) \end{bmatrix}$$

- سادگی و ارتباط خطی پسخور می تواند موجب ویژه شدن ماتریس اصلی گردد.
- مثال: y(t)=-ku(t) یا y(t)=-ku(t-1)

روش کمترین مربعات

نمودار صفحه فازی مثال قبل



روش کمترین مربعات

مقایسه روش ها

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + P(t)\varphi(t)\left(y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)\right)$$

LMS

$$P(t) = \gamma$$

PA

$$P(t) = \frac{\gamma}{\alpha + \varphi^T(t)\varphi(t)}$$

SA

$$P(t) = \frac{\gamma}{\sum_{i=1}^{t} \varphi^T(i)\varphi(i)}$$

پروژه اول درس

روش کمترین مربعات

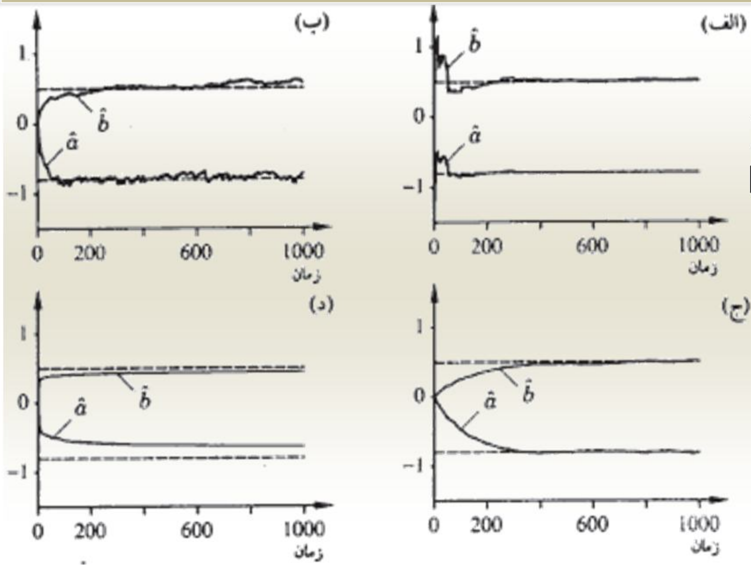
مقایسه روشهای

RLS (a

LMS (b

PA (c

SA (d

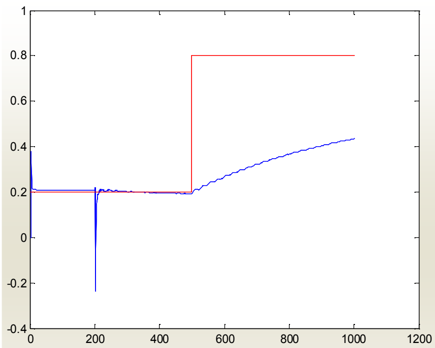


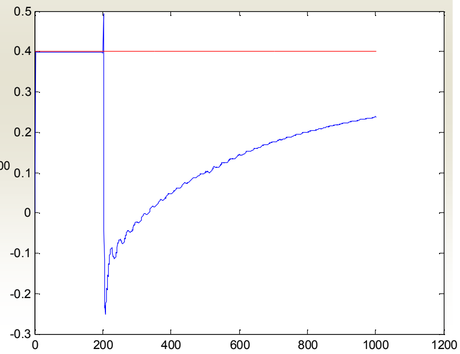
روش کمترین مربعات

مثال: سیستم یک موشک زمین به زمین

پارامترهای تابع تبدیل کانال پیچ

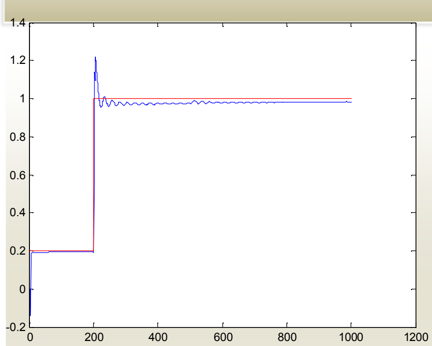
روش ساده بازگشتی

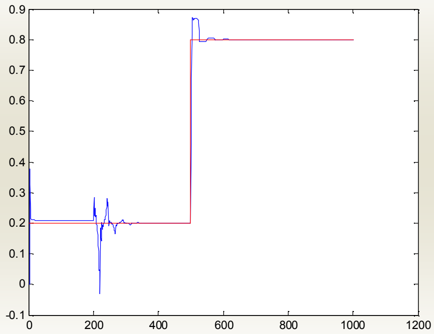




روش کمترین مربعات

روش بازنشانی کواریانس





- ✓ مساله پایا بودن در شناسایی روی خط سیستم اصلی در حال پرواز!

روش کمترین مربعات

پیاده سازی روش کمترین مربعات بازگشتی در تخمین ضرایب آیرودینامیکی

الف) روش ابتکاری

معادلات حرکت یک حامل فضایی

$$a_{xngb} = \frac{S_{ref}.q_{\infty}}{m}C_X + \frac{F_{xTb}}{m}$$

$$a_{yngb} = \frac{S_{ref}.q_{\infty}}{m}C_Y + \frac{F_{yTb}}{m} - \frac{J_1.r}{m}$$

$$a_{zngb} = \frac{S_{ref}.q_{\infty}}{m}C_Z + \frac{F_{zTb}}{m} + \frac{J_1.q}{m}$$

$$\dot{p} = \frac{S_{ref}.q_{\infty}.D}{I_X}C_L + \frac{L_{Tb}}{I_X} + \frac{q.r.(I_Y - I_Z)}{I_X}$$

$$\dot{q} = \frac{S_{ref}.q_{\infty}.D}{I_Y - m.X_{bc}^2}C_M + \frac{M_{Tb}}{I_Y - m.X_{bc}^2} + \frac{p.r.(I_Z - I_X - m.X_{bc}^2) - J_2.q + X_{bc}.F_{zngb}}{I_Y - m.X_{bc}^2}$$

$$\dot{r} = \frac{S_{ref}.q_{\infty}.D}{I_Z - m.X_{bc}^2}C_N + \frac{N_{Tb}}{I_Z - m.X_{bc}^2} + \frac{q.p.(I_X - I_Y + m.X_{bc}^2) - J_2.r - X_{bc}.F_{yngb}}{I_Z - m.X_{bc}^2}$$

روش کمترین مربعات

$$a_{xS} = a_{xngb} = F1.C_X + G1$$
$$a_{yS} = a_{yngb} = F2.C_Y + G2$$
$$a_{zS} = a_{zngb} = F3.C_Z + G3$$
$$\dot{p}_S = \dot{p} = F4.C_L + G4$$
$$\dot{q}_S = \dot{q} = F5.C_M + G5$$
$$\dot{r}_S = \dot{r} = F6.C_N + G6$$

$$a_{xT} = a_{xS} + e_{a_x}$$
$$a_{yT} = a_{yS} + e_{a_y}$$
$$a_{zT} = a_{zS} + e_{az}$$
$$\dot{p}_T = \dot{p}_S + e_{\dot{p}}$$
$$\dot{q}_T = \dot{q}_S + e_{\dot{q}}$$
$$\dot{r}_T = \dot{r}_S + e_{\dot{r}}$$

$$a_{xT} = F1.C_X + G1 + e_{a_x}$$
$$a_{yT} = F2.C_Y + G2 + e_{a_y}$$
$$a_{zT} = F3.C_Z + G3 + e_{a_z}$$
$$\dot{p}_T = F4.C_L + G4 + e_{\dot{p}}$$
$$\dot{q}_T = F5.C_M + G5 + e_{\dot{q}}$$
$$\dot{r}_T = F6.C_N + G6 + e_{\dot{r}}$$

روش کمترین مربعات

$$e_{a_x} = a_{xT} - (F1.C_X + G1)$$
$$e_{a_y} = a_{yT} - (F2.C_Y + G2)$$
$$e_{a_z} = a_{zT} - (F3.C_Z + G3)$$
$$e_{\dot{p}} = \dot{p}_T - (F4.C_L + G4)$$
$$e_{\dot{q}} = \dot{q}_T - (F5.C_M + G5)$$
$$e_{\dot{r}} = \dot{r}_T - (F6.C_N + G6)$$

$$S_{e_{a_x}} = \sum_{i=1}^{n} (e_{a_x.i})^2$$
$$S_{e_{a_y}} = \sum_{i=1}^{n} (e_{a_y.i})^2$$
$$S_{e_{a_z}} = \sum_{i=1}^{n} (e_{a_z.i})^2$$
$$S_{e_{\dot{p}}} = \sum_{i=1}^{n} (e_{\dot{p}.i})^2$$
$$S_{e_{\dot{q}}} = \sum_{i=1}^{n} (e_{\dot{q}.i})^2$$
$$S_{e_{\dot{r}}} = \sum_{i=1}^{n} (e_{\dot{r}.i})^2$$

روش کمترین مربعات

$$C_X = \frac{\sum_{i=1}^{n}\{(a_{xT}.\frac{q_\infty.S_{ref}}{m}) - (\frac{q_\infty.S_{ref}.F_{xT}}{m^2})\}_i}{\sum_{i=1}^{n}\{(\frac{q_\infty.S_{ref}}{m})^2\}_i}$$

$$C_Y = \frac{\sum_{i=1}^{n}\{(a_{yT}.\frac{q_\infty.S_{ref}}{m}) - (\frac{q_\infty.S_{ref}.(F_{yT} - J_1.r)}{m^2})\}_i}{\sum_{i=1}^{n}\{(\frac{q_\infty.S_{ref}}{m})^2\}_i}$$

$$C_Z = \frac{\sum_{i=1}^{n}\{(a_{zT}.\frac{q_\infty.S_{ref}}{m}) - (\frac{q_\infty.S_{ref}.(F_{yT} + J_1.q)}{m^2})\}_i}{\sum_{i=1}^{n}\{(\frac{q_\infty.S_{ref}}{m})^2\}_i}$$

$$C_L = \frac{\sum_{i=1}^{n}\{(\dot{p}_T.\frac{q_\infty.S_{ref}.D}{I_X}) - (\frac{q_\infty.S_{ref}.D.(L_{Tb} + q.r.(I_Y - I_Z))}{{I_X}^2})\}_i}{\sum_{i=1}^{n}\{(\frac{q_\infty.S_{ref}.D}{I_X})^2\}_i}$$

روش کمترین مربعات

$$C_M = \frac{\sum_{i=1}^{n}\{(\dot{q}_T.\frac{q_\infty.S_{ref}.D}{I_Y - m.{X_{bc}}^2}) - (\frac{q_\infty.S_{ref}.D.(M_{Tb} + p.r.(I_Z - I_X - m.{X_{bc}}^2) - J_2.q + X_{bc}.F_{zngb})}{(I_Y - m.{X_{bc}}^2)^2})\}_i}{\sum_{i=1}^{n}\{(\frac{q_\infty.S_{ref}.D}{I_Y - m.{X_{bc}}^2})^2\}_i}$$

$$C_N = \frac{\sum_{i=1}^{n}\{(\dot{r}_T.\frac{q_\infty.S_{ref}.D}{I_Z - m.{X_{bc}}^2}) - (\frac{q_\infty.S_{ref}.D.(N_{Tb} + q.p.(I_X - I_Y + m.{X_{bc}}^2) - J_2.r - X_{bc}.F_{yngb})}{(I_Z - m.{X_{bc}}^2)^2})\}_i}{\sum_{i=1}^{n}\{(\frac{q_\infty.S_{ref}.D}{I_Z - m.{X_{bc}}^2})^2\}_i}$$

روش کمترین مربعات

ب) روش معمولی کمترین مربعات

$$a_{xngb} = \frac{S_{ref}.q_\infty}{m}C_X + \frac{fb_x}{m}Cldel + \frac{\bar{T}_{xb}}{m}$$

$$a_{yngb} = \frac{S_{ref}.q_\infty}{m}C_Y + \frac{fb_y}{m}Cldel + \frac{\bar{T}_{yb}}{m} - \frac{J_1.r}{m}$$

$$a_{zngb} = \frac{S_{ref}.q_\infty}{m}C_Z + \frac{fb_z}{m}Cldel + \frac{\bar{T}_{zb}}{m} + \frac{J_1 q}{m}$$

$$\dot{p} = \frac{S_{ref}.q_\infty.D}{I_X}C_L + \frac{lb}{I_X}Cldel + \frac{\bar{L}_{Tb}}{I_X} + \frac{q.r.(I_Y - I_Z)}{I_X}$$

$$\dot{q} = \frac{S_{ref}.q_\infty.D}{I_Y - m.X_{bc}^2}C_M + \frac{mb}{I_Y - m.X_{bc}^2}Cldel + \frac{\bar{M}_{Tb}}{I_Y - m.X_{bc}^2} + \frac{p.r.(I_Z - I_X - m.X_{bc}^2) - J_2.q + X_{bc}.F_{zngb}}{I_Y - m.X_{bc}^2}$$

$$\dot{r} = \frac{S_{ref}.q_\infty.D}{I_Z - m.X_{bc}^2}C_N + \frac{nb}{I_Z - m.X_{bc}^2}Cldel + \frac{\bar{N}_{Tb}}{I_Z - m.X_{bc}^2} + \frac{q.p.(I_X - I_Y + m.X_{bc}^2) - J_2.r - X_{bc}.F_{yngb}}{I_Z - m.X_{bc}^2}$$

روش کمترین مربعات

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \left.a_{xngb}\right)_1 - \left.\frac{\bar{T}_{xb}}{m}\right)_0 \\ . \\ . \\ \left.a_{xngb}\right)_N - \left.\frac{\bar{T}_{xb}}{m}\right)_{N-1} \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \left.\frac{S_{ref}.q_\infty}{m}\right)_0 & \left.\frac{fb_x}{m}\right)_0 \\ . & . \\ . & . \\ \left.\frac{S_{ref}.q_\infty}{m}\right)_{N-1} & \left.\frac{fb_x}{m}\right)_{N-1} \end{bmatrix}}_{C} . \underbrace{\begin{bmatrix} C_X \\ Cldel \end{bmatrix}}_{X} + \varepsilon$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \left.a_{yngb}\right)_1 - \left.\frac{\bar{T}_{yb}}{m} + \frac{J_1.r}{m}\right)_0 \\ . \\ . \\ \left.a_{yngb}\right)_N - \left.\frac{\bar{T}_{yb}}{m} + \frac{J_1.r}{m}\right)_{N-1} \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \left.\frac{S_{ref}.q_\infty}{m}\right)_0 & \left.\frac{fb_y}{m}\right)_0 \\ . & . \\ . & . \\ \left.\frac{S_{ref}.q_\infty}{m}\right)_{N-1} & \left.\frac{fb_y}{m}\right)_{N-1} \end{bmatrix}}_{C} . \underbrace{\begin{bmatrix} C_Y \\ Cldel \end{bmatrix}}_{X} + \varepsilon$$

روش کمترین مربعات

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{zngb}\big)_1 - \frac{\bar{T}_{xb}}{m} - \frac{J_1 q}{m}\Big)_0 \\ . \\ . \\ a_{zngb}\big)_N - \frac{\bar{T}_{xb}}{m} - \frac{J_1 q}{m}\Big)_{N-1} \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{S_{ref}\, q_\infty}{m}\Big)_0 & \frac{fb_z}{m}\Big)_0 \\ . & . \\ . & . \\ \frac{S_{ref}\, q_\infty}{m}\Big)_{N-1} & \frac{fb_z}{m}\Big)_{N-1} \end{bmatrix}}_{C} . \underbrace{\begin{bmatrix} C_Z \\ Cldel \end{bmatrix}}_{X} + \varepsilon$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{p}\big)_1 - \frac{\bar{L}_{Tb}}{I_X} - \frac{q.r.(I_Y - I_Z)}{I_X}\Big)_0 \\ . \\ . \\ \dot{p}\big)_N - \frac{\bar{L}_{Tb}}{I_X} - \frac{q.r.(I_Y - I_Z)}{I_X}\Big)_{N-1} \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{S_{ref}\, q_\infty . D}{I_X}\Big)_0 & \frac{lb}{I_X}\Big)_0 \\ . & . \\ . & . \\ \frac{S_{ref}\, q_\infty . D}{I_X}\Big)_{N-1} & \frac{lb}{I_X}\Big)_{N-1} \end{bmatrix}}_{C} . \underbrace{\begin{bmatrix} C_L \\ Cldel \end{bmatrix}}_{X} + \varepsilon$$

روش کمترین مربعات

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}\big)_1 - \frac{\bar{M}_{Tb}}{I_Y - m X_{bc}^2} - \dots\Big)_0 \\ . \\ . \\ \dot{q}\big)_N - \frac{\bar{M}_{Tb}}{I_Y - m X_{bc}^2} - \dots\Big)_{N-1} \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{S_{ref}\, q_\infty . D}{I_Y - m X_{bc}^2}\Big)_0 & \frac{mb}{I_Y - m X_{bc}^2}\Big)_0 \\ . & . \\ . & . \\ \frac{S_{ref}\, q_\infty . D}{I_Y - m X_{bc}^2}\Big)_{N-1} & \frac{mb}{I_Y - m X_{bc}^2}\Big)_{N-1} \end{bmatrix}}_{C} . \underbrace{\begin{bmatrix} C_M \\ Cldel \end{bmatrix}}_{X} + \varepsilon$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{r}\big)_1 - \frac{\bar{N}_{Tb}}{I_Z - m X_{bc}^2} - \dots\Big)_0 \\ . \\ . \\ \dot{r}\big)_N - \frac{\bar{N}_{Tb}}{I_Z - m X_{bc}^2} - \dots\Big)_{N-1} \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{S_{ref}\, q_\infty . D}{I_Z - m X_{bc}^2}\Big)_0 & \frac{nb}{I_Z - m X_{bc}^2}\Big)_0 \\ . & . \\ . & . \\ \frac{S_{ref}\, q_\infty . D}{I_Z - m X_{bc}^2}\Big)_{N-1} & \frac{nb}{I_Z - m X_{bc}^2}\Big)_{N-1} \end{bmatrix}}_{C} . \underbrace{\begin{bmatrix} C_N \\ Cldel \end{bmatrix}}_{X} + \varepsilon$$

روش کمترین مربعات

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_X \\ Cldel \end{bmatrix}}_{X} = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \left.\frac{S_{ref}.q_\infty}{m}\right)_0 & \left.\frac{fb_x}{m}\right)_0 \\ . & . \\ . & . \\ \left.\frac{S_{ref}.q_\infty}{m}\right)_{N-1} & \left.\frac{fb_x}{m}\right)_{N-1} \end{bmatrix}^T}_{C^T} . \underbrace{\begin{bmatrix} \left.\frac{S_{ref}.q_\infty}{m}\right)_0 & \left.\frac{fb_x}{m}\right)_0 \\ . & . \\ . & . \\ \left.\frac{S_{ref}.q_\infty}{m}\right)_{N-1} & \left.\frac{fb_x}{m}\right)_{N-1} \end{bmatrix}}_{C} \right\}^{-1}$$

$$. \underbrace{\begin{bmatrix} \left.\frac{S_{ref}.q_\infty}{m}\right)_0 & \left.\frac{fb_x}{m}\right)_0 \\ . & . \\ . & . \\ \left.\frac{S_{ref}.q_\infty}{m}\right)_{N-1} & \left.\frac{fb_x}{m}\right)_{N-1} \end{bmatrix}^T}_{C^T} . \underbrace{\begin{bmatrix} \left. a_{xngb}\right)_1 - \left.\frac{\bar{T}_{xb}}{m}\right)_0 \\ . \\ . \\ \left. a_{xngb}\right)_N - \left.\frac{\bar{T}_{xb}}{m}\right)_{N-1} \end{bmatrix}}_{Y}$$

$$\hat{\theta} = (U^T U)^{-1} U^T Y$$

http://wp.kntu.ac.ir/khoshnood