به نام خدا
پاسخ تمرین‌های شناسایی سیستم و تخمین پارامترهای پروازی
۲۰ اسفند ۱۳۹۹
دانشجو: مهسا آزادمنش

تمرین شماره ۱

الف)

$$x(t) = e^{-at}$$

$$x(kT) = e^{-akT}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{x(t)\} = \mathcal{Z}\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, z^{-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{e^{-akT}\} = 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} +$$

$$e^{-3aT} z^{-3} + \cdots = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

ب)

$$x(t) = \cos(\omega t)$$

$$x(kT) = \cos(\omega kT)$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{x(t)\} = \mathcal{Z}\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, z^{-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \cos(\omega kT)\, z^{-k}$$

$$\boxed{\text{We know: } \cos(\omega kT) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega kT} - e^{-j\omega kT}\right)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{\cos(\omega kT)\} = \frac{1}{2}\, \mathcal{Z}\{e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}\}$$

تبدیل z تابع نمائی را به دست می‌آوریم و جایگذاری می‌کنیم :

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{\cos(\omega kT)\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2 - (e^{-j\omega T} + e^{j\omega T}) z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) z^{-1} + z^{-2}}\right] = \frac{1 - z^{-1}\cos\omega T}{1 - 2z^{-1}\cos\omega T + z^{-2}} =$$

$$\frac{z^2 - z\cos\omega T}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$$

ج)

ج) $x(t) = e^{-at}\sin(\omega t)$

$$x(kT) = e^{-aTk}\sin(\omega kT)$$

$$\mathcal{Z}\{x(t)\} = \mathcal{Z}\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kaT}\sin(\omega kT)\, z^{-k}$$

$$\sin\omega Tk = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}\right) \Longrightarrow e^{-akT}\sin\omega T = \frac{1}{2j}\left(e^{-akT}e^{j\omega T} - e^{-akT}e^{-j\omega T}\right) \longleftarrow$$ می‌دانیم

$$\Longrightarrow \mathcal{Z}\{x(kT)\} = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-e^{-(a-j\omega)T}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-(a+j\omega)T}z^{-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{\left(e^{j\omega T}-e^{-j\omega T}\right)e^{-aT}z^{-1}}{1-\left(e^{j\omega T}+e^{-j\omega T}\right)e^{-aT}z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}\right]$$

$$= \frac{e^{-aT}z^{-1}\sin\omega T}{1-2e^{-2aT}z^{-1}\cos\omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$$

$$= \frac{e^{-aT}z\sin\omega T}{z^2-2e^{-aT}z\cos\omega T + e^{-2aT}}$$

در متلب، چون تابع ztrans محدودیت دارد؛ فقط به ازای w=1 می‌توان تبدیل z سیگنال‌ها را به صورت زیر به‌دست آورد:

```
Z1 =

z/(z - exp(-a))


Z2 =

(z*(z - cos(t)))/(z^2 - 2*cos(t)*z + 1)


Z3 =

(z*exp(-a*t)*sin(t))/(z^2 - 2*cos(t)*z + 1)
```

تمرین شماره ۲

سوال 2)

$$G(s) = \frac{e^{-0.3s}(s-10)}{s^3 + 2s^2 + 5} \qquad T = 0.1$$

الف) تابع تبدیل زمان گسسته:

$$G(z) = \frac{0.003096\,z^2 - 0.006342\,z - 0.005817}{z^3(z^3 - 2.816\,z^2 + 2.64\,z - 0.8187)}$$

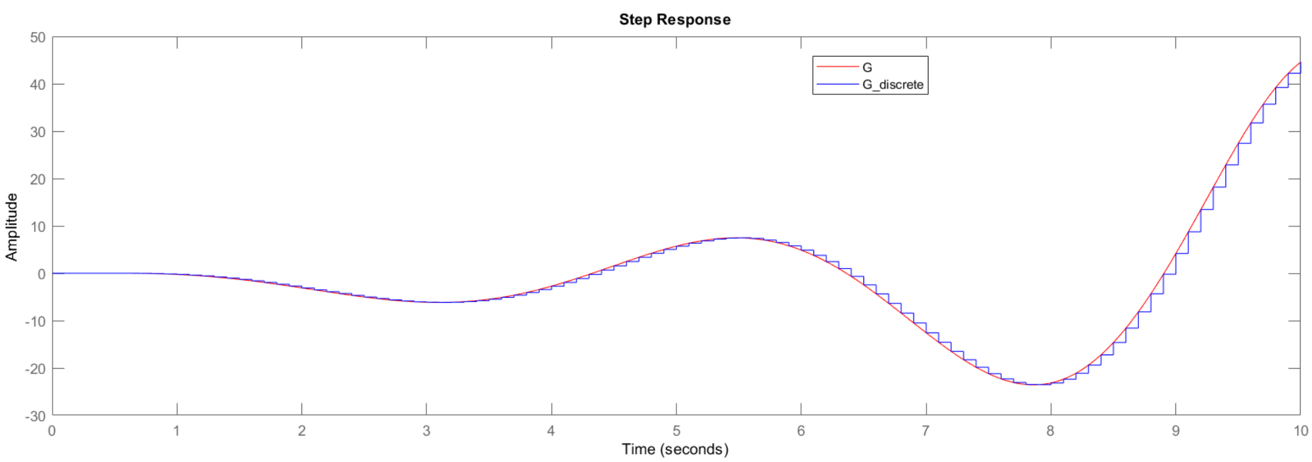
تصویر:

```
G =

                      s - 10
  exp(-0.3*s) * ---------------
                s^3 + 2 s^2 + 5

Continuous-time transfer function.


G_discrete =

            0.003096 z^2 - 0.006342 z - 0.005817
  z^(-3) * ------------------------------------
             z^3 - 2.816 z^2 + 2.64 z - 0.8187

Sample time: 0.1 seconds
Discrete-time transfer function.
```

ب) پاسخ پله هر دو سیستم زمان پیوسته و زمان گسسته در زیر رسم شده است.

مشاهده می‌شود که هر دو تابع یک چیز را نشان می‌دهند و سیستم ناپایدار است و سیگنال‌ها به سمت بی‌نهایت می‌روند. پاسخ پله سیستم زمان گسسته همان پاسخ پله سیستم زمان پیوسته است که از آن با زمان نمونه برداری $T=0.1$ نمونه برداری شده است.

تصویر:



تمرین شماره ۳

ماتریس های گسسته شده به صورت زیر به دست می آیند:

Q3.

$$A = \begin{bmatrix} 1.02 & 0 & 0 \\ 0 & 1.02 & 0 \\ 0 & 0.03045 & 1.01 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0.0101 \\ 0.0101 & 0 \\ 0.0001515 & 0.01005 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تصویر:

```
sys =

  A =
       x1  x2  x3
   x1   2   0   0
   x2   0   2   0
   x3   0   3   1

  B =
       u1  u2
   x1   0   1
   x2   1   0
   x3   0   1

  C =
       x1  x2  x3
   y1   1   0   0
   y2   0   1   0

  D =
       u1  u2
   y1   0   0
   y2   0   0

Continuous-time state-space model.
```

```
Discrete_sys =

  A =
            x1       x2       x3
   x1     1.02        0        0
   x2        0     1.02        0
   x3        0  0.03045     1.01

  B =
               u1         u2
   x1           0     0.0101
   x2      0.0101          0
   x3   0.0001515    0.01005

  C =
        x1  x2  x3
   y1    1   0   0
   y2    0   1   0

  D =
        u1  u2
   y1    0   0
   y2    0   0

Sample time: 0.01 seconds
Discrete-time state-space model.
```

قسمت تشریحی (با اینکه سوال نخواسته است.)

چون زمان نمونه برداری خیلی کوچک است می‌توان به جای مشتق رابطه تفاضلی را به صورت زیر نوشت،

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x((k+1)T - x(kT))}{T} = \frac{x(k+1) - x(k)}{T}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BU(t) \Longrightarrow \frac{x(k+1) - x(k)}{T} = Ax(k) + BU(k)$$

$$Y(t) = CX(t) \Longrightarrow Y(k) = CX(k)$$

$$x(k+1) = ATx(k) + x(k) + BTU(k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(k+1) = (AT + I)x(k) + BTU(k) \\ Y(k) = CX(k) \end{cases}$$

$$A_{discrete} = (AT + I)$$

$$B_{discrete} = BT$$

$$C_{discrete} = C$$

$$A_{discrete} = \begin{bmatrix} 1.02 & 0 & 0 \\ 0 & 1.02 & 0 \\ 0 & 0.03 & 1.01 \end{bmatrix}$$

$$B_{discrete} = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 \\ 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

$$C_{discrete} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

توجه شود که ما برای راه حل تشریحی مشتق را با تفاضل تقریب زدیم و دلیل اینکه بعضی ضرایب راه حل تشریحی با راه حل قبلی تفاوت بسیار ناچیزی دارد نیز همین موضوع است.

با سپاس و احترام

مهسا آزادمنش

Scanned with CamScanner

با تشکر

مهسا آزادمنش