سوال ۱)

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

$$= \int_{۰}^{\infty} g(x) \times \frac{۱}{۲} e^{-\frac{x}{۲}}dx = \int_{۰}^{۱۰} ۲ \times \frac{x}{۲} e^{-\frac{x}{۲}}dx + \int_{۱۰}^{\infty} ۱ \times \frac{۱}{۲} e^{-\frac{x}{۲}}dx$$

$$\to E\big(g(x)\big) = \int_{۰}^{۱۰} e^{-\frac{x}{۲}}dx + \int_{۱۰}^{\infty} \frac{۱}{۲} e^{-\frac{x}{۲}}dx = \left[-۲e^{-\frac{x}{۲}}\right] + \left[-e^{-\frac{x}{۲}}\right]$$

$$\to E(g(x) = (۲ - ۲e^{-۵}) + (e^{-۵} - e^{-\infty}) = ۲ - ۲e^{-۵} + e^{-۵} + ۰ = ۲ + e^{-۵}$$

$$= ۱/۹۹۳۳$$

سوال ۲)

A=[٦٤ ٦٦ ٦٨ ٦٩ ٧٣]

B=[٢٩ ٣٣ ٣٧ ٤٦ ٥٥]

$$\text{میانگین A}: \mu_A = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} A_i = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} A_i = \frac{1}{5}(64+66+68+69+73) = \frac{340}{5} = 68$$

$$\text{میانگین B}: \mu_B = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} B_i = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} B_i = \frac{1}{5}(29+33+37+46+55) = \frac{200}{5} = 40$$

$$cov(A,A) = Var(A) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}|A_i-\mu_A|^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}|A_i-68|^2$$

$$\to cov(A,A) = \frac{1}{4}(|64-68|^2+|66-68|^2+|68-68|^2+|69-68|^2 + |73-68|^2)$$

$$\to cov(A,A) = \frac{1}{4}(16+4+0+1+25) = \frac{46}{4} = 11/5$$

$$cov(B,B) = Var(B) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}|B_i-\mu_B|^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}|B_i-40|^2$$

$$\to cov(B,B) = \frac{1}{4}(|29-40|^2+|33-40|^2+|37-40|^2+|46-40|^2 + |55-40|^2)$$

$$\to cov(B,B) = \frac{1}{4}(121+49+9+36+225) = \frac{440}{4} = 110$$

$$cov(A,B) = cov(B,A) = \frac{۱}{N-۱}\sum_{i=۱}^{N}(A_i-\mu_A)(B_i-\mu_B)$$

$$= \frac{۱}{۴}\sum_{i=۱}^{۵}(A_i-۶۸)(B_i-۴۰)$$

$$\rightarrow cov(A,B) = cov(B,A)$$
$$= \frac{۱}{۴}[(۶۴-۶۸)(۲۹-۴۰)] + (۶۶-۶۸)(۳۳-۴۰)$$
$$+ (۶۸-۶۸)(۳۷-۴۰) + (۶۹-۶۸)(۴۶-۴۰) + (۷۳-۶۸)(۵۵-۴۰)]$$

$$\rightarrow\ cov(A,B) = cov(B,A)$$
$$= \frac{۱}{۴}((-۴)(-۱۱) + (-۲)(-۷) + (۰)(-۳) + (۱)(۶) + (۵)(۱۵)$$

$$\rightarrow cov(A,B) = cov(B,A) = \frac{۱}{۴}(۴۴+۱۴+۶+۷۵)\frac{۱۳۹}{۴} = ۳۴/۷۵$$

ماتریس کوواریانس بین Aو B : $C = \begin{bmatrix} cov(A,A) & cov(A,B) \\ cov(B,A) & cov(B,B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۱/۵ & ۳۴/۷۵ \\ ۳۴/۷۵ & ۱۱۰ \end{bmatrix}$

```
COV(A,A)=VAR(A) is 11.5
COV(B,B)=VAR(B) is 110

cov_AB =

   11.5000   34.7500
   34.7500  110.0000
```

سوال۳)

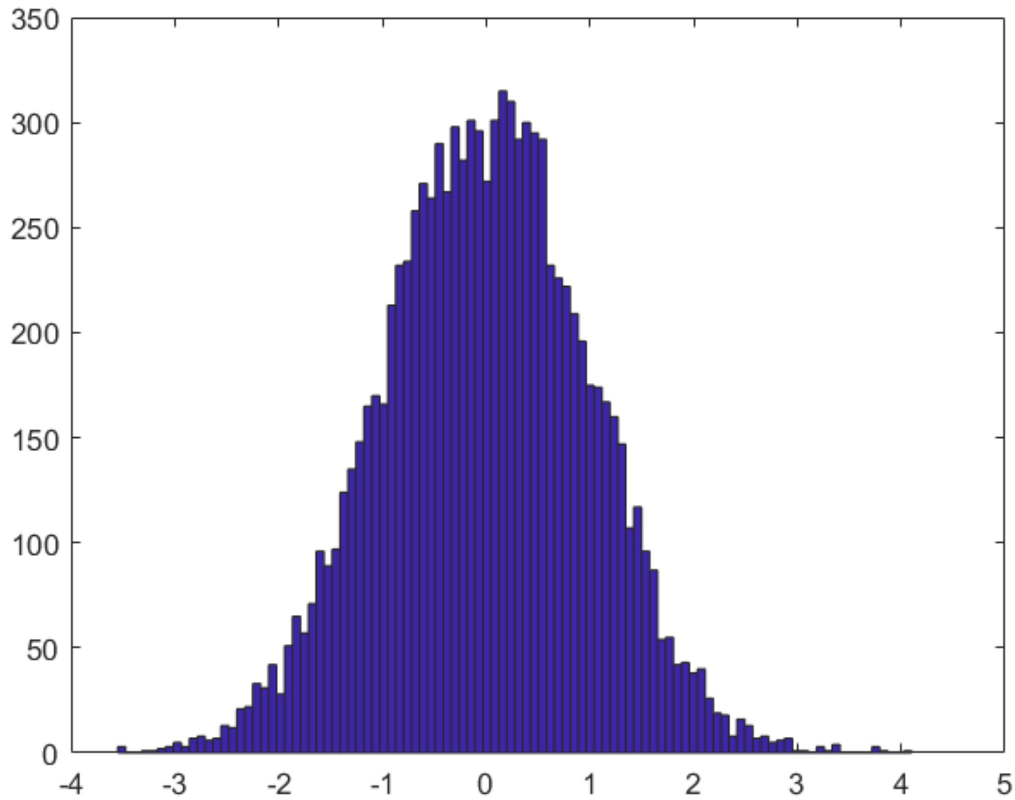
بردارAرا که شامل ۱۰۰۰۰ عدد تصادفی k توزیع نرمال استاندار یعنی با میانگین صفر و انحراف معیار یک بود را تولید کردیم.

تصویر زیر میانگین و انحراف از معیار بردار Aرا نشان می دهد.

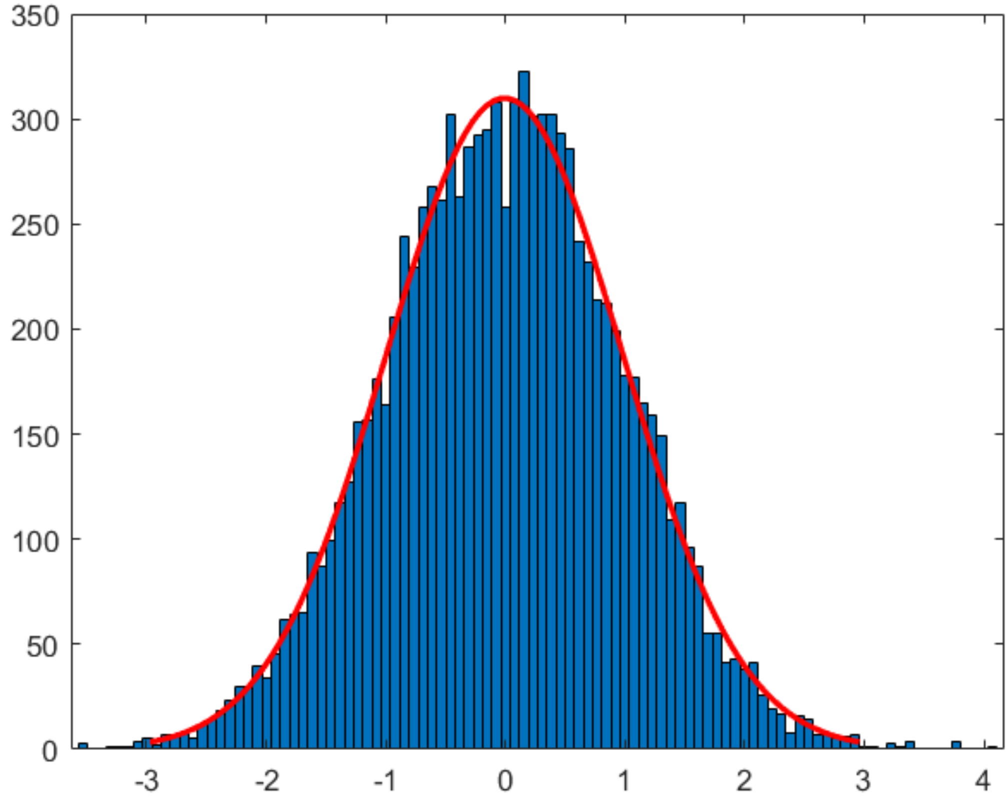
```
Mean Of A is -0.0098258
Standard Deviation Of A is 0.99418
```

همانطور که مشخص است میانگین برابر با M=-۰/۰۰۹۸ به دست آمد که بسیار نزدیک به صفر است و انحراف از معیار نیز برابر با std=۰/۹۹٤۲ به دست آمد که بسیار نزدیک به ۱ است. بنابراین بردار A دارای توزیع نرمال استاندار است.

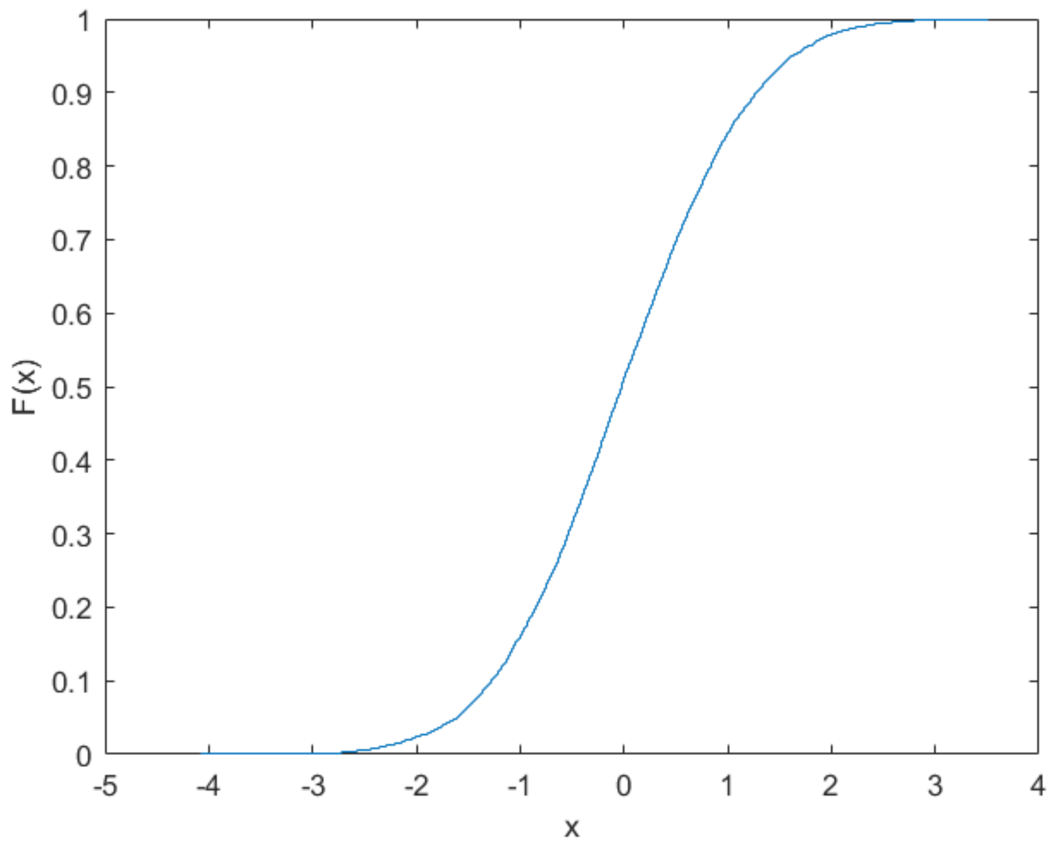
برای نشان دادن نمودار چگالی احتمال از هیستوگرام استفاده کرده‌ایم و بازه ابتدا تا انتها را به ۱۰۰ قسمت تقسیم بندی کرده ایم که شکل زیر پراکندگی داده ها را در هر عدد نشان می دهد.



حالا می خواهیم یک توزیع به نمودار هیستوگرام برازش کنیم. با برازش کردن به نمودار پراکندگی داده‌ها، توزیع به دست آمده یک توزیع گوسی نرمال می باشد.(با میانگین صفر و انحراف از معیار ۱)



نمودار تابع توزیع تجمعی نیز به صورت شکل زیر حاصل می شود.


F(x)
x
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

سوال ۴)

$$\sigma^{۲} = E(x^{۲}) - E^{۲}(x) = ۲$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{۰}^{c} \frac{۲x^{۲}}{c^{۲}} dx = \left[\frac{۲}{c^{۲}} x^{۳}\right] = \frac{۲c^{۳}}{۳c^{۲}} = \frac{۲}{۳}C$$

$$E(x^{۲}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{۲}f(x)dx = \int_{۰}^{c} \frac{۲x^{۳}}{c^{۲}} dx = \left[\frac{x^{۴}}{۲c^{۲}}\right] = \frac{c^{۴}}{۲c^{۲}} = \frac{c^{۲}}{۲}$$

$$\sigma^{۲} = E(x^{۲}) - E^{۲}(x) = \frac{c^{۲}}{۲} - \frac{۴}{۹}c^{۲} = ۲$$

$$\rightarrow ۹c^{۲} - ۸c^{۲} = ۳۶ \rightarrow c^{۲} = ۳۶ \rightarrow \begin{cases} c = ۶ \\ c = -۶ \end{cases}$$

$c = ۶$ قابل قبول است .

سوال۵)

الف)

به دست آوردن فرمول تابع PDFشکل اول:

$$\text{خط اول}: y - y_. = m(x - x_.)$$

$$\rightarrow \mathrm{y} - ۰ = \frac{۰/۲ - ۰}{۱ - ۰}(x - ۰) \rightarrow y = ۰/۲x$$

$$\rightarrow f_۱(x) = \begin{cases} ۰/۲x & ۰ < x < ۱ \\ -\frac{۰/۲}{۹}x + \frac{۲}{۹} & ۱ < x < ۱۰ \\ ۰ & o.w. \end{cases}$$

$$\text{خط دوم}: y - y_. = m(x - x_.)$$

$$\rightarrow y - ۰ = \frac{۰ - ۰/۲}{۱۰ - ۱}(x - ۱۰) \rightarrow y = -\frac{۰/۲}{۹}x + \frac{۲}{۹}$$

به دست آوردن فرمول تابع PDFشکل دوم:

$$\text{خط اول}: y - y_. = m(x - x_.)$$

$$\rightarrow \mathrm{y} - ۰ = \frac{\frac{۰}{۲} - ۰}{٤ - ۰}(x - ۰) = ۰/۰۵x \rightarrow y = ۰/۰۵x$$

$$\rightarrow f_۱(x) = \begin{cases} ۰/۰۵x & ۰ < x < ۴ \\ -\frac{۰/۱}{۳}x + \frac{۱}{۳} & ۴ < x < ۱۰ \\ ۰ & o.w. \end{cases}$$

$$\text{خط دوم}: y - y_. = m(x - x_.)$$

$$\rightarrow y - ۰ = \frac{۰ - ۰/۲}{۱۰ - ۴}(x - ۱۰) \rightarrow y = -\frac{۰/۱}{۳}x + \frac{۱}{۳}$$

ب)مقدار احتمال مشخص شده در شکل اول:

$$p(4 \leq x \leq 6)$$

$$= \int_{۴}^{۶} -\frac{۰/۲}{۹}x + \frac{۲}{۹} = \left[\frac{-۰/۱}{۹}x^{۲} + \frac{۲}{۹}x\right] = \left[\frac{-۳/۶}{۹} + \frac{۱۲}{۹} + \frac{۱/۶}{۹} - \frac{۸}{۹}\right]$$

$$\rightarrow p(۴ \leq x \leq ۶) = \frac{۲}{۹}$$

با توجه به این که مساحت کل شکل زیر نمودار برابر ۱ است می توان مساحت ناحیه خاکستری رنگ که یک ذوزنقه است را به دست آورد و احتمال برابر با این مساحت خواهد بود.

مقدار احتمال مشخص شده در شکل دوم:

$$p(۳ \leq x \leq ۷) = \int_{۳}^{۴} ۰/۰۵x dx + \int_{۴}^{۷} \left(-\frac{۰/۱}{۳}x + \frac{۱}{۳}\right) dx$$

$$p(۳ \leq x \leq ۷) = [۰/۰۲۵x^{۲}] + \left[\frac{-۰/۱}{۶}x^{۲} + \frac{۱}{۳}x\right]$$

$$= [۰/۴ - ۰/۲۲۵] + \left[-\frac{۴/۹}{۶} + \frac{۷}{۳} + \frac{۱/۶}{۶} - \frac{۴}{۳}\right]$$

$$\rightarrow p(۳ \leq x \leq ۷) = \frac{۶ - ۳/۳}{۶} + ۰/۱۷۵ = ۰/۶۲۵ \rightarrow p(۳ \leq x \leq ۷) = ۰/۶۲۵$$

سوال۶)

$$f(t) = Asin(\Omega t + Q) \qquad \text{دوره تناوب } T = \frac{۲\pi}{\Omega}$$

الف)

$$R_X(\tau) = \frac{۱}{\frac{۲\pi}{\Omega}} \int_{-\frac{\pi}{\Omega}}^{\frac{\pi}{\Omega}} Asin(\Omega t + Q) \times Asin(\Omega(t+\tau) + Q)dt$$

$$\rightarrow R_X(\tau) = \frac{A^۲\Omega}{۲\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Omega}}^{\frac{\pi}{\Omega}} sin(\Omega t + Q)sin(\Omega t + Q + \Omega\tau)dt$$

میدانیم : $\sin(A+B) = sinAcosB + cosAsinB$

$$\rightarrow R_X(\tau) = \frac{A^۲\Omega}{۲\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Omega}}^{\frac{\pi}{\Omega}} [\sin(\Omega + Q)\cos(\Omega\pi) + \sin(\Omega\pi)\cos(\Omega t + Q)] \sin(\Omega t + Q)\, dt$$

Sin تابعی فرد است و cosتابعی زوج است.پس حاصلضرب آن ها تابعی فرد می شود و انتگرال از آن در یک بازه متقارن صفر می شود

$$\rightarrow R_X(\tau) = \frac{A^۲\Omega}{۲\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Omega}}^{\frac{\pi}{\Omega}} sin^۲(\Omega t + Q)\cos(\Omega\tau)\, dt$$

می دانیم: $sin^۲A = \frac{۱-cos2A}{۲}$

$$\rightarrow R_X(\tau) = \frac{A^۲\Omega\cos(\Omega\tau)}{۲\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Omega}}^{\frac{\pi}{\Omega}} \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\cos(۲\Omega t + ۲Q)\right) dt$$

$$\rightarrow R_X(\tau) = \frac{A^۲ \Omega \cos{(\Omega\tau)}}{۲\pi}[\frac{۱}{۲}t - \frac{۱}{۴\Omega}\sin(۲\Omega t + ۲Q)]$$

$$R_X(\tau) = \frac{A^۲ \Omega \cos{(\Omega\tau)}}{۲\pi}[\frac{۱}{۲}\left(\frac{\pi}{\Omega}\right) - \frac{۱}{۴\pi}\sin(۲\pi + ۲Q) - \frac{۱}{۲}\left(\frac{-\pi}{\Omega}\right) + \frac{۱}{۴\Omega}\sin{(-۲\pi} + ۲Q)$$

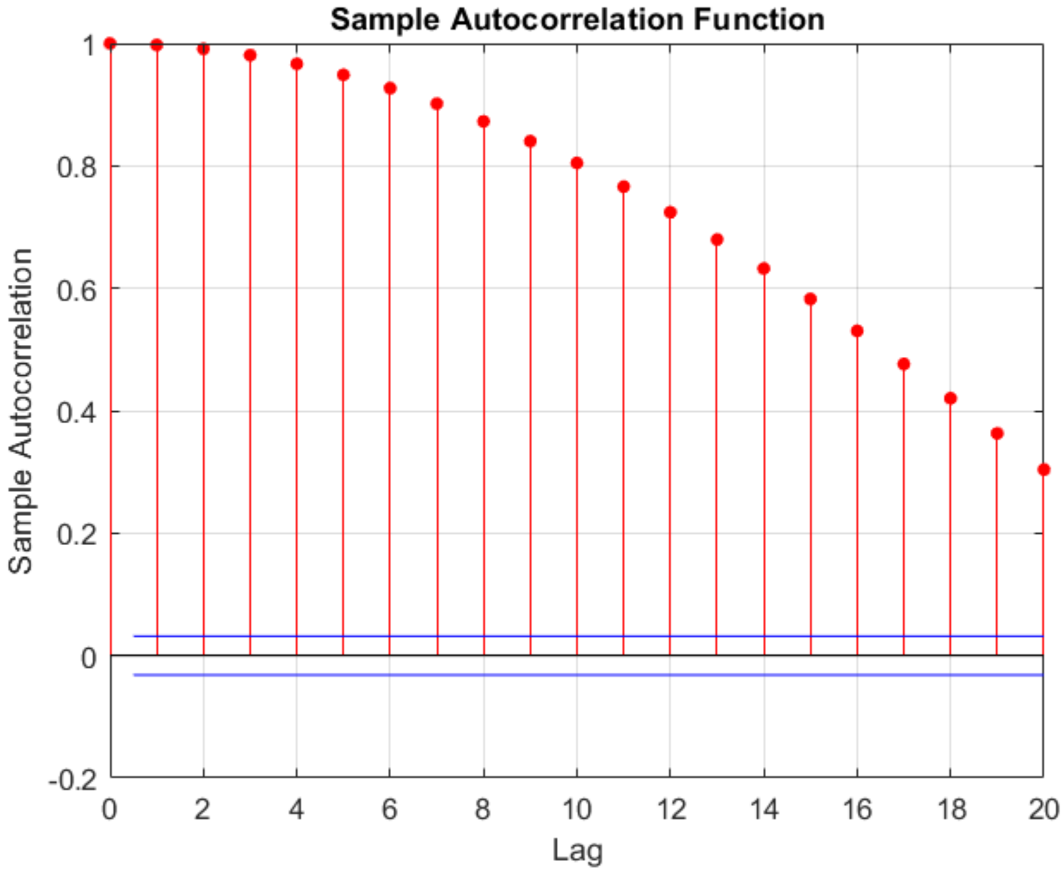
$$u = [-\frac{۱}{۴\Omega}\sin(۲\pi + ۲Q) + \frac{۱}{۴\Omega}(-۲\pi + ۲Q)$$

$$u = -\frac{۱}{۴\Omega}[\sin(۲\pi)\cos(۲Q) + \cos(۲\pi)\sin(۲Q)] + \frac{۱}{۴\Omega}[\sin(-۲\pi)\cos(۲Q) + \sin(۲Q)\cos(-۲\pi)]$$

$$\rightarrow u = -\frac{۱}{۴\Omega}\sin(۲Q) + \frac{۱}{۴\Omega}\sin(۲Q) = ۰ \rightarrow u = ۰$$

$$R_X(\tau) = \frac{A^۲ \Omega\cos(\Omega\tau)}{۲\pi}\left(\frac{\pi}{۲\Omega} + \frac{\pi}{۲\Omega}\right) = \frac{A^۲}{۲}\cos(\Omega\tau) \rightarrow R_X(\tau) = \frac{A^۲}{۲}\cos(\Omega\tau)$$

ب)تابع خود همبستگی تابع $f(t) = losin(۲\pi t + ۸)$ در شکل زیر آورده شده است.



همانطور که مشخص است سیگنال حاصل شده یک سیگنال زمان گسسته است یعنی به ازای τ های گوناگون آورده شده است و نمونه برداری شده است هنچنین شکل کلی نیز یک تابع کسینوس است.

سوال۷) توزیع‌های احتمالی دو مقاومت R۱ و R۲ را توزیع نرمال درنظر گرفته‌ایم.

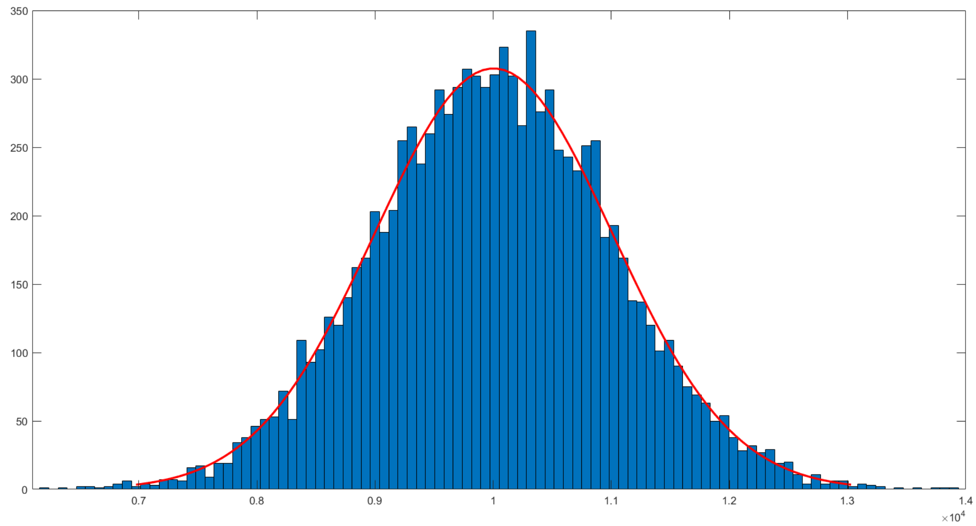
برای ایجاد توزیع نرمال برای مقاومت R۱، ۱۰۰۰۰ عدد تصادفی با توزیع نرمال با میانگین ۱۰۰۰۰ و انحراف از معیار ۱۰۰۰ که نشان‌دهنده‌ی تغییرات ۵$\pm$ درصد حول مقدار میانگین است ایجاد کرده‌ایم. یعنی مقدار مقاومت از ۹۵۰۰ تا ۱۰۵۰۰ متغیر است.

برای ایجاد توزیع نرمال برای مقاومت R۲ نیز ۱۰۰۰۰ عدد تصادفی با توزیع نرمال با میانگین ۵۰۰۰ و انحراف از معیار ۵۰۰ که نشان‌دهنده‌ی تغییرات ۵$\pm$ درصد حول مقدار میانگین است ایجاد کرده‌ایم. یعنی مقدار مقاومت از ۴۷۵۰ تا ۵۲۵۰ متغیر است.

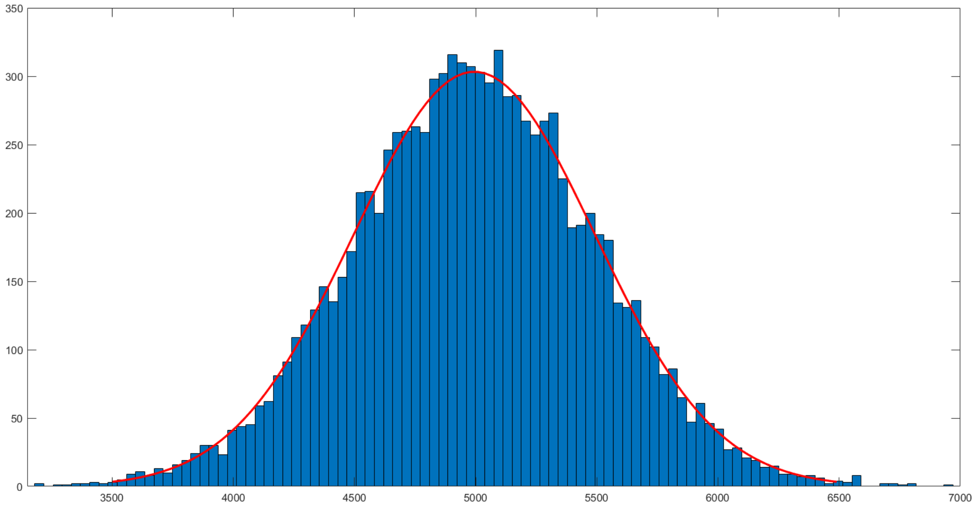
میانگین و انحراف از معیار دو مقاومت به صورت زیر حاصل می‌شود که کاملا قابل انتظار است.

```
Mean_R1 =

    9.9946e+03


Stan_Dev_R1 =

  994.5408


Mean_R2 =

    4.9932e+03


Stan_Dev_R2 =

  496.3349
```

نمودار هیستوگرام مقاومت R۱ به صورت زیر حاصل می‌شود که یک توزیع نرمال به آن برازش شده است.



نمودار هیستوگرام مقاومت R۲ به صورت زیر حاصل می‌شود که یک توزیع نرمال به آن برازش شده است.



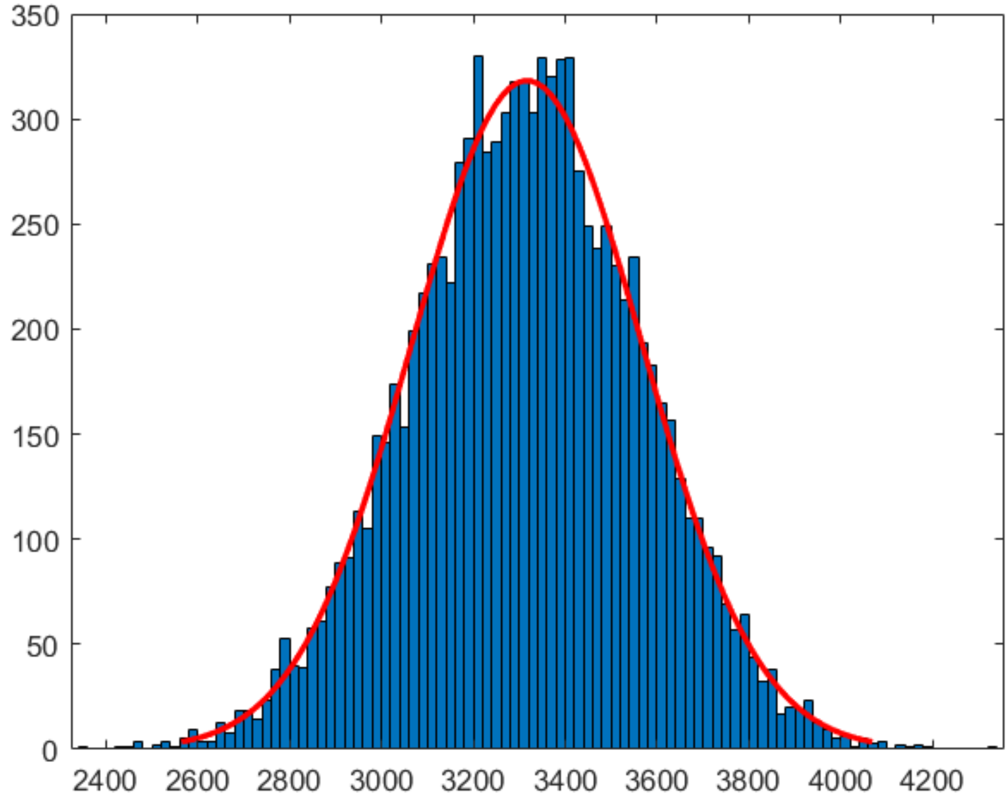
با توجه به رابطه‌ی مقابل انتظار می‌رود که مقاومت معادل دو مقاومت موازی ۱۰ $k\Omega$ و ۵ $k\Omega$ دارای یک توزیع نرمال با میانگین ۳ $k\Omega$ باشد.

$$R(eq) = \frac{R_۱ R_۲}{R_۱ + R_۲} = \frac{۱۰۰۰۰ \times ۵۰۰۰}{۱۰۰۰۰ + ۵۰۰۰} = ۳/۳۳ \times ۱۰^{۳}\,\Omega = ۳/۳۳\,k\Omega$$

شکل زیر نشان‌دهنده‌ی میانگین و انحراف معیار مقاومت معادل است که همان نتیجه‌ی بالا را نشان می‌دهد.

```
Mean_Req =

   3.3151e+03


Stan_Dev_Req =

  249.6077
```

نمودار هیستوگرام و توزیع نرمال برازش شده به مقاومت معادل نیز در شکل زیر نمایش داده شده است که همان نتایج بالا را تایید می‌کند.


350
300
250
200
150
100
50
0
2400
2600
2800
3000
3200
3400
3600
3800
4000
4200