بسم ا... الرحمن الرحیم

شناسایی سیستم و تخمین پارامترهای پرواز

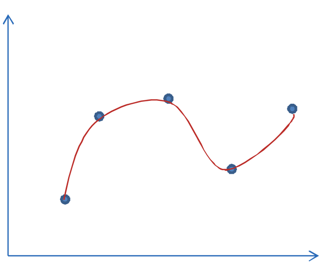
مقدمات روش های کمترین مربعات

مدرس:
دکتر عبدالمجید خوشنود

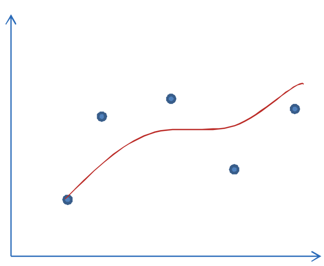
مقدمات روش های کمترین مربعات

- **مقدمه ای بر برازش و میان یابی**
- آشنایی با میانیابی Interpolation-Extrapolation
- آشنایی با برازش منحنی Curve Fitting

- تفاوت اساسی میان برازش و میانیابی



Interpolation



Curve Fitting

مقدمات روش های کمترین مربعات

- **مقدمه ای بر ریاضیات ماتریسی – برداری**

- فرض کنید دو بردار یا ماتریس به صورت زیر داشته باشیم:

$$V = [v_1, v_2, v_3]$$
$$U = [u_1, u_2, u_3]$$

- نوع نگاه نرم افزارهای محاسباتی به ماتریس و بردار (MATLAB) نگاشت از فضای برداری به ماتریسی و برعکس

توصیف برداری	توصیف ماتریسی
$U.V$	$U^T V$
$U \times V$	$\tilde{U}V$ or $\tilde{V}^T U$

مقدمات روش های کمترین مربعات

- **گرادیان روابط ماتریسی– برداری**

$$V(x) = x^T Ax \Rightarrow Grad_x^V = (A + A^T)x$$

$$V(x) = b^T x \Rightarrow Grad_x^V = b$$

$$V(x) = A^T xB \Rightarrow Grad_x^V = (BA)^T$$

$$V(x) = [(Ax + b)^T C(Dx + e)] \Rightarrow Grad_x^V = (Ax + b)^T CD + (Dx + e)^T C^T A$$

- توضیح چگونگی اثبات روابط فوق (بسط مولفه ها)

مقدمات روش های کمترین مربعات

- مقدمه ای بر فضاهای نرم دار خطی Normed Linear Spaces (NLS)
- تعریف نرم Norm
- اگر x یک فضای برداری باشد، تابع N

$$N : X \to R$$

را نرم می نامیم اگر:

$$\begin{aligned}
&\text{N1.}\ \ \forall x \ \ N(x) \geq 0.\\
&\text{N2.}\ \ N(x) = 0 \iff x = 0.\\
&\text{N3.}\ \ \forall x\, \forall \alpha \ \ N(\alpha x) = |\alpha|\, N(x).\\
&\text{N4.}\ \ \forall x, y \ \ N(x+y) \leq N(x) + N(y)
\end{aligned}$$

کاربردهای ارزشمند نرم ها در کمینه سازی $N(x) = \|x\| = \|x\|_X$

مقدمات روش های کمترین مربعات

- حال فرض کنید داشته باشیم: $X = \mathbb{R}^n \ (or\ \mathbb{C}^n),\ \ x = \{x_j\}_1^n$

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|, \ \ 1-\text{Norm}$$

$$\|x\|_2 = [\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2]^{1/2} \ \ \text{Euclidean Norm}$$

$$\|x\|_p = [\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p]^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty, \ \ p-\text{Norm}$$

$$\|x\|_\infty = \underset{j}{Max}\ |x_j| \ \ \text{Infinity Norm, or Max Norm}$$

- نکته مهم: از نرم های تعریف شده نرم دو از اهمیت ویژه ای برخوردار است و در مسایل کمینه سازی کاربرد زیادی دارد. این نرم تعبیر انرژی سیگنال و کاربرد مربعات را دارد. (توضیح مفهوم انرژی در سیگنال های الکتریکی و مشابه)

مقدمات روش های کمترین مربعات

• برازش منحنی Curve fitting

توضیحات اولیه

فرض کنید دسته ای از داده های در اختیار ماست $\{(x_k, y_k), k = 0 : M\}$

بر حسب تعداد معلومات و مجهولات می توان انواع مختلفی از ابزارهای ریاضی را بکار گرفت.

برای استفاده از این داده ها دستگاه زیر را تشکیل می دهیم:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1N}x_N &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2N}x_N &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots &= . \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \cdots + a_{MN}x_N &= b_M \end{aligned}$$

$$A_{M\times N}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

مقدمات روش های کمترین مربعات

$$A_{M\times N} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdot & \cdot & a_{MN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_M \end{bmatrix}$$

فرض کنید به دنبال برازش منحنی زیر هستیم

$$p_N(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N$$

(این عبارت را به صورت تکراری می نویسیم)

در این حالت تعداد ورودی ها یا تعداد معادلات برابر M و درجه منحنی یا همان مجهولات برابر N می باشد.

مقدمات روش های کمترین مربعات

در این وضعیت سه حالت مختلف برای تعداد معلومات و مجهولات بوجود می آید:

حالت اول: M=N در این حالت تعداد معادلات و مجهولات برابر است لذا مساله جواب دقیق دارد.

$$x = A^{-1}b$$

حالت دوم: M<N باشد یعنی تعداد معادلات کمتر از مجهولات است:

$$x_1 + x_2 = 1$$

در این حالت حل منحصر به فرد نیست و بی نهایت جواب داریم. برای حل این معادلات از روش Minimum norm solution استفاده می گردد.

مقدمات روش های کمترین مربعات

حالت سوم: M>N یعنی تعداد معادلات بیش از مجهولات است:
در این حالت جواب دقیق نداریم و از میان جواب ها یک جواب بهینه پیدا می کنیم.

$$\begin{cases} x_1 + 1 = 0 \\ x_1 + 2 = 0 \end{cases}$$

چنین وضعیتی صورت مساله اصلی برازش منحنی و کمترین مربعات می باشد.

- روش حل در چنین حالتی کمینه سازی خطا یا Least square error (LSE) می باشد.
- این موضوع مبنای اصلی شناسایی سیستم های دینامیکی (System identification) می باشد.

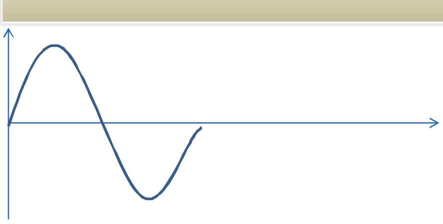
مقدمات روش های کمترین مربعات

- روش LSE
- در مسایل برازش و شناسایی سیستم عموما با داده های زیاد (نظیر معادلات M) و نیاز به استخراج یک تابع یا همان تابع تبدیل مواجه هستیم.
- تعریف خطای مساله برازش

$$e = Ax - b = Ax - y$$

نکته مهم: تعریف خطا به این صورت منجر به این موضوع می شود که در صورت مثبت و منفی شدن خطا، مقدار واقعی خطا درست نشان داده نمی شود و ممکن است با مقادیر مثبت و منفی با هم حذف شوند. لذا یک راه استفاده از قدر مطلق است.

مقدمات روش های کمترین مربعات



$$\int e(t)dt$$

$$e = |Ax - b|$$

- کاربرد قدر مطلق در روابط ریاضی با اشکال مواجه است لذا راهکار دیگری ارائه می شود. این راهکار در قالب توان دوم خطا قابل بیان است که در اصل همان مفهوم نرم دوم خطا و در عبارت کامل تر انرژی خطاست.

$$J = \frac{1}{2}||e||^2 = \frac{1}{2}||Ax - b||^2 = \frac{1}{2}[Ax - b]^T[Ax - b]$$

مقدمات روش های کمترین مربعات

- حال مشتق تابع هزینه را محاسبه می نماییم:

(دقت در ورودی خروجی ها و مجهول مساله)

برای این موضوع متغیرها را تغییر داده و به صورت زیر ارائه می دهیم:

فرض کنید دسته از داده های ورودی x و خروجی y را داریم و ترکیب زیر زا پیشنهاد می نماییم:

$$\theta_1 x_1 + \theta_0 = y_1$$

$$\theta_1 x_2 + \theta_0 = y_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\theta_1 x_M + \theta_0 = y_M$$

برازش منحنی و روش های کمترین مربعات

$$A\boldsymbol{\theta} = \mathbf{y} \qquad A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ x_M & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_M \end{bmatrix}$$

$$e = A\theta - y$$

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = \frac{1}{2}[(A\theta - y)^T A + (A\theta - y)^T A] = (A\theta - y)^T A = 0$$

$$\Rightarrow A^T(A\theta - y) = 0 \Rightarrow A^T A\theta \text{-} A^T y = 0$$

برازش منحنی و روش های کمترین مربعات

ماتریس A معکوس ندارد اما اصطلاحا گفته می شود که شبه معکوس یا معکوس تعمیم یافته دارد. در این حالت شبه معکوس چپ داریم:

$$[A^T A]^{-1}$$

لذا طرفین معادله را در معکوس فوق ضرب می نماییم:

رابطه اصلی LS

$$\boxed{\theta = [A^T A]^{-1} A^T y}$$

مقدمات روش های کمترین مربعات

برازش منحنی با LS

میخواهیم بر خطی به فرم زیر داده های ارائه شده را برازش نماییم:

$$\theta_1 x + \theta_0 = y$$

$$\theta_1 x_1 + \theta_0 = y_1$$

$$\theta_1 x_2 + \theta_0 = y_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\theta_1 x_M + \theta_0 = y_M$$

$$\boldsymbol{\theta}^{\circ} = \begin{bmatrix} \theta_1^{\circ} \\ \theta_0^{\circ} \end{bmatrix} = [A^T A]^{-1} A^T \mathbf{y}$$

مقادیر M>N

مقدمات روش های کمترین مربعات

برازش منحنی با LS وزنی WLS
گاهی اوقات می توان به مقادیر داده بر اساس نوع استخراج آن یا سایر موارد وزن دهی نماییم. در این حالت می توان تابع هزینه را به صورت زیر معرفی نمود:

$$J_W = [A\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}]^T W [A\boldsymbol{\theta} - \mathbf{y}]$$

و

$$\boldsymbol{\theta}_W^{\circ} = \begin{bmatrix} \theta_{W1}^{\circ} \\ \theta_{W0}^{\circ} \end{bmatrix} = [A^T W A]^{-1} A^T W \ \mathbf{y}$$

در این حالت معمولا وزن ها بر اساس معکوس واریانس داده ها اعمال می گردد. به این روش تخمین مارکوف نیز گفته می شود.

مقدمات روش های کمترین مربعات

برازش منحنی چند جمله ای درجات بالا

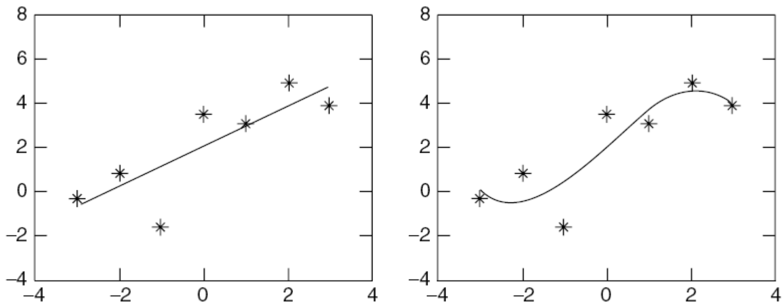
$$\begin{cases} \theta^N x1^N + \text{-----} - \theta_1 x_1 + \theta_0 = y_1 \\ \theta^N x2^N + \text{-----} - \theta_1 x_2 + \theta_0 = y_2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad \vdots \\ \theta^N xM^N + \text{-----} - \theta_M x_M + \theta_0 = y_M \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1^N & \cdot & x_1 & 1 \\ x_2^N & \cdot & x_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_M^N & \cdot & x_M & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_N \\ \cdot \\ \theta_1 \\ \theta_0 \end{bmatrix}$$

مقدمات روش های کمترین مربعات

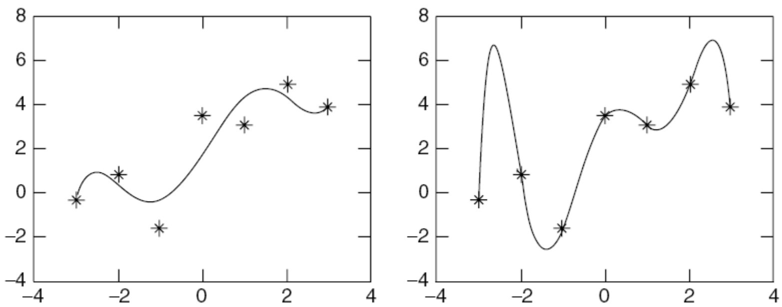
مثال:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-0.2774	0.8958	-1.5651	3.4565	3.0601	4.8568	3.8982



(a) Polynomial of degree 1 (b) Polynomial of degree 3

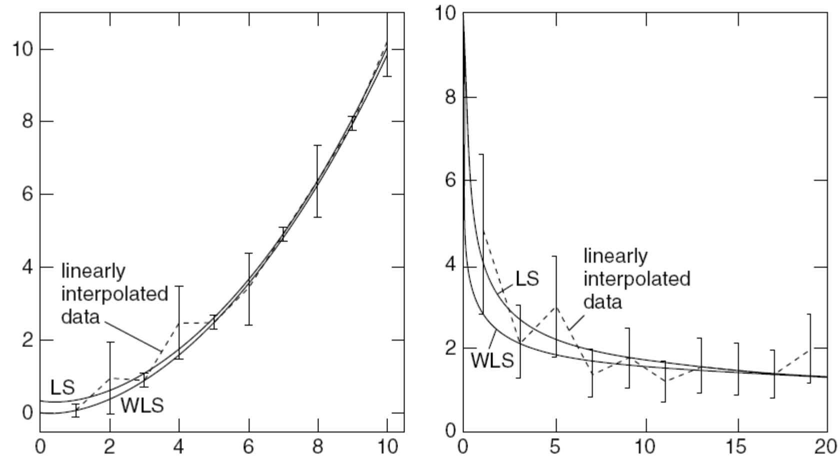
مقدمات روش های کمترین مربعات



(c) Polynomial of degree 5 (d) Polynomial of degree 7

نکته: درجه منحنی در عدد ۷ منجر به جواب بهتر می شود. M=7 و تعداد مجهول ها ۸ است.

مقدمات روش های کمترین مربعات



(a) Fitting to a polynomial $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$

(b) Fitting to $y = ax^b$

مقدمات روش های کمترین مربعات

برازش منحنی با سایر توابع

فرض کنید بخواهیم با توابع زیر برازش انجام دهیم:

$$c\ e^{ax} = y$$

این کار با تبدیل توابع فوق به توابع خطی امکان پذیر است

$$a\ x + \ln c = \ln y$$

لذا a و Lnc را می توان مانند ضرایب مجهول بدست آورد.

مقدمات روش های کمترین مربعات

سایر توابع

Function to Fit	Linearized Function	Variable Substitution/ Parameter Restoration
(1) $y = \frac{a}{x} + b$	$y = a\frac{1}{x} + b \rightarrow y = ax' + b$	$x' = \frac{1}{x}$
(2) $y = \frac{b}{x+a}$	$\frac{1}{y} = \frac{1}{b}x + \frac{a}{b} \rightarrow y' = a'x + b'$	$y' = \frac{1}{y}, a = \frac{b'}{a'}, b = \frac{1}{a'}$
(3) $y = a\ b^x$	$\ln y = (\ln b)x + \ln a$ $\rightarrow y' = a'x + b'$	$y' = \ln y, a = e^{b'}, b = e^{a'}$
(4) $y = b\ e^{ax}$	$\ln y = ax + \ln b \rightarrow y' = ax + b'$	$y' = \ln y,\ \ b = e^{b'}$
(5) $y = C - b\ e^{-ax}$	$\ln(C - y) = -ax + \ln b$ $\rightarrow y' = a'x + b'$	$y' = \ln(C - y)$ $a = -a', b = e^{b'}$

مقدمات روش های کمترین مربعات

سایر توابع

Function to Fit	Linearized Function	Variable Substitution/ Parameter Restoration
(6) $y = a\ x^b$	$\ln y = b(\ln x) + \ln a$ $\rightarrow y' = a'x' + b'$	$y' = \ln y, x' = \ln x$ $a = e^{b'}, b = a'$
(7) $y = ax\ e^{bx}$	$\ln y - \ln x = bx + \ln a$ $\rightarrow y' = a'x + b'$	$y' = \ln(y/x)$ $a = e^{b'}, b = a'$
(8) $y = \frac{C}{1 + b\ e^{ax}}$ $(a\langle 0, b\rangle 0, C = y(\infty))$	$\ln\left(\frac{C}{y} - 1\right) = ax + \ln b$ $\rightarrow y' = ax + b'$	$y' = \ln\left(\frac{C}{y} - 1\right), b = e^{b'}$
(9) $y = a \ln x + b$	$\rightarrow y = ax' + b$	$x' = \ln x$

http://wp.kntu.ac.ir/khoshnood