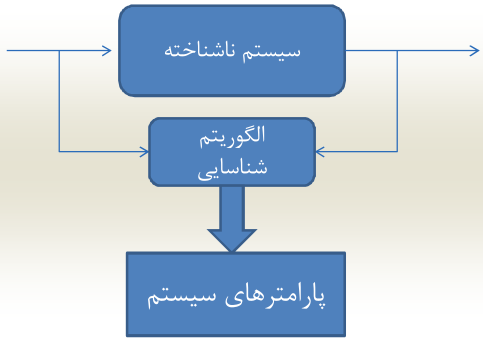
بسم الله الرحمن الرحیم

عنوان

شناسایی سیستم و تخمین پارامترهای پرواز

روش کمترین مربعات



مدرس:
عبدالمجید خوشنود

روش کمترین مربعات

مدل های ARX

فرض کنید دسته ای از داده ها را داریم به صورت $y(i), \varphi(i)$ ها و می خواهیم منحنی زیر را از آن عبور دهیم:

$$y(i) = \varphi_1(i)\theta_1^{\circ} + \varphi_2(i)\theta_2^{\circ} + \ldots + \varphi_n(i)\theta_n^{\circ} = \varphi^T(i)\theta^{\circ}$$

$$= [\phi_1(i) \ldots \phi_n(i)] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}$$

θ_i ها پارامترهای مجهولی هستند که باید بدست آیند.

به این نوع نوشتن مدل Regression model گفته می شود و $\phi^T(i)$ رگرسور نامیده می شود. پس $\overline{y}$ که خروجی واقعی سیستم است و $\phi^T(i)$ معلوم مساله هستند.

روش کمترین مربعات

- مدل رگرسیون از روی کانولوشن

$$y_t = x_t * h_t = \sum_{i=0}^{\infty} h_i . x_{t-i}$$
$$= h_0 . x_t + h_1 . x_{t-1} + \cdots + h_m . x_{t-m} + e_t$$
$$y_t = [x_t \ \ x_{t-1} \ \ \ldots \ \ x_{t-m}] . \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ \\ h_m \end{bmatrix} + e_t$$
$$y_t = u^T . \theta + e_t$$

روش کمترین مربعات

- مدل رگرسیون از روی پاسخ پله

فرم کلی پاسخ پله سیستم های LTI

$$S_t = k_0 + k_1 e^{-s_1 t} + k_2 e^{-s_2 t} + \cdots + k_n e^{-s_n t}$$

در این رابطه s ها قطب های سیستم و k ها مجهول هستند. مساله یک مساله کمترین مربعات غیرخطی است. اما فرض کنیم s را داریم:

$$y_t = S_t = [1 \ \ e^{-s_1 t} \ldots e^{-s_n t}] . \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ \\ k_m \end{bmatrix} + e_t$$
$$y_t = u^T . \theta + e_t$$

روش کمترین مربعات

• مدل رگرسیون برای یک سیگنال متغیر با زمان
اگر موقعیت یک هواپیما را با رادار و با فرض شتاب خطی به صورت زیر لحاظ نماییم، برای تخمین لحظات آینده می توان از بردار رگرسور بهره گرفت:

$$x_t = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + e_t$$

$$y_t = x_t = [1 \quad t \quad \frac{1}{2} t^2].\begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \\ a \end{bmatrix} + e_t$$

$$y_t = x_t = u_t^T.\theta + e_t; u_t^T = [1 \quad t \quad \frac{1}{2} t^2]; \theta = [x_0 \ v_0 \ a]$$

روش کمترین مربعات

• مدل رگرسیون برای تابع تبدیل

فرض کنید تابع تبدیلی به صورت مقابل داریم:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_0}$$

برای تشکیل مدل باید ابتدا گسسته سازی انجام گیرد

$$A(z) y(t) = B(z) u(t)$$

$$A(q) = q^n + a_1 q^{n-1} + \cdots + a_n$$

$$B(q) = b_1 q^{m-1} + b_2 q^{m-2} + \cdots + b_m$$

ضرایب پیوسته و گسسته لزوما برابر نیستند. (توضیح اندیس گسسته سازی و اپراتور معکوس گسسته)

روش کمترین مربعات

$$y(t)+a_1 y(t-1)+\cdots+a_n y(t-n)=b_1 u(t+m-n-1)+\cdots+b_m u(t-n)$$

$$y(t)=-a_1 y(t-1)-\cdots-a_n y(t-n)+b_1 u(t+m-n-1)+\cdots+b_m u(t-n)$$

$$y(t)=[-y(t-1)\cdots-y(t-n)\,u(t+m-n-1)\cdots u(t-m)]\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\hat{y}(t)=\phi^T\theta$$

$$e(t)=y(t)-\hat{y}(t)=y(t)-\phi^T\theta$$

$$J=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}[y(t)-\phi^T\theta]^2$$

روش کمترین مربعات

- قضیه کمترین مربعات

برای کمینه کردن تابع هزینه معرفی شده با استفاده از قوانین گرادیان ماتریسی داریم:

$$J=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}[y(t)-\phi^T\theta]^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}[y(t)-\phi^T\theta]^T[y(t)-\phi^T\theta]$$

$$for \quad grad_\theta(J)=0$$

$$\Rightarrow \quad \Phi^T\Phi\hat{\theta}=\Phi^T y \quad \Rightarrow$$

$$\hat{\theta}=(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T y$$

روش کمترین مربعات

- رابطه اصلی LS و مورد استفاده در برازش منحنی و شناسایی خارج خط
- در برازش منحنی از وزن دهی نیز استفاده می شود. (W)
- معکوس پذیری $\phi^T\phi$ مساله مهمی است و با عنوان شرط تحریک یا غنای سیگنال شناسایی از آن یاد می شود.
- نوع دیگر نمایش رابطه کمترین مربعات:

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{t=1}^{N} u_t . u_t^T \right)^{-1} . \left(\sum_{t=1}^{N} u_t . y_t \right)$$

روش کمترین مربعات

چند نکته جانبی

خواص ماتریس $U^T U$

- فرایند معادله کمترین مربعات مستقل از تعداد نمونه برداری N است:

ماتریس فوق یک ماتریس P×P می باشد:

$$U^T U \equiv [P \times N].[N \times P] \equiv [P \times P]$$
$$U^T y \equiv [P \times N].[N \times 1] \equiv [P \times 1]$$

در نتیجه:

$$\widehat{\Theta} = ((U^T U)^{-1}).U^T y \equiv [P \times P]^{-1}.[P \times 1] \equiv [P \times 1]$$

روش کمترین مربعات

چند نکته جانبی

بررسی اکسترمم شدن تابع خطا

$$\frac{\partial^2(e^T e)}{\partial\theta^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial(e^T e)}{\partial\theta}\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(-2U^T y + 2U^T U\theta) = 2U^T U$$

از آنجا که ماتریس $U^T U$ مثبت (نیمه) معین است لذا مشتق دوم مثبت شده و این مفهوم به معنی حداقل شدن خطا می باشد.

- مشتق دوم و مفهوم تحدب و تقعر

روش کمترین مربعات

قابلیت شناسایی حداقل مربعات

- مهمترین گره ریاضیاتی مساله کمترین مربعات معکوس پذیری ماتریس $U^T U$

نزدیک صفر شدن دترمینان ماتریس، ماتریس بدحال (Ill condition) و شناسایی با دقت پایین و خطای بالا

خطا خروجی مطلوب اما خطای پارامترها زیاد

منابع مربوط به قابلیت شناسایی عبارتند از:

- ✓ غنی نبودن ورودی Persistency Excitation (PE) که منجر به بدحال شدن ماتریس $U^T U$ خواهد شد.
- ✓ بیشتر بودن مرتبه مدل از مرتبه سیستم واقعی (که به ندرت اتفاق می افتد) منجر به صفر شدن ماتریس فوق خواهد شد.
- ✓ شناسایی سیستم در حالت حلقه بسته (توضیح بیشتر در آینده)

روش کمترین مربعات

تعبیر هندسی روش حداقل مربعات

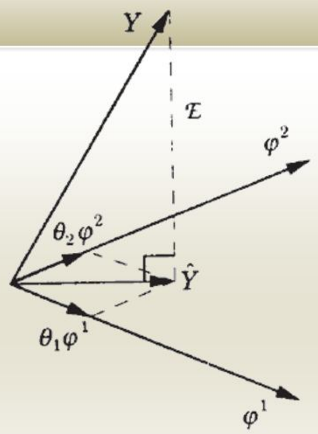
بردار خطا

$$E = Y - \hat{Y}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon(۱) \\ \varepsilon(۲) \\ \vdots \\ \varepsilon(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(۱) \\ y(۲) \\ \vdots \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi_۱(۱) \\ \varphi_۱(۲) \\ \vdots \\ \varphi_۱(t) \end{pmatrix} \theta_۱ - \dots - \begin{pmatrix} \varphi_n(۱) \\ \varphi_n(۲) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix} \theta_n$$

$$E = y - \varphi^۱ \theta_۱ - \varphi^۲ \theta_۲ - \dots - \varphi^n \theta_n$$

روش کمترین مربعات



تعبیر هندسی روش حداقل مربعات

Y بردار خروجی واقعی

$\hat{Y}$ بردار شکل یافته از رگرسورها و پارامترها

کمترین مقدار E وقتی است که بر رگرسورها عمود باشد یعنی:

$$(\varphi^i)^T (y - \theta_۱ \varphi^۱ - \theta_۲ \varphi^۲ - \dots - \theta_n \varphi^n) = ۰ \qquad i = ۱, ۲, \dots, n$$

که این عبارت همان معادله کمترین مربعات است.

روش کمترین مربعات

روش اصلاحی Singular Value Decomposition (SVD)

تعریف تجزیه SVD

تجزیه SVD در واقع هر ماتریس M را به سه ماتریس به شکل زیر تجزیه می کند:

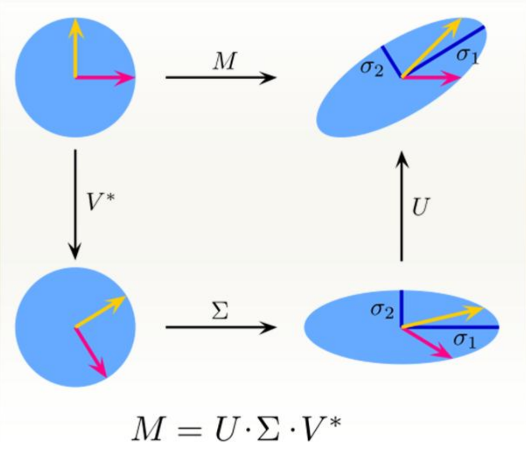
$$M = U\Sigma V^*$$

ماتریس های V, U ماتریس دوران و متعامد هستند و ماتریس Σ مقیاس است. به عبارت دیگر، هر ماتریس دارای دو دوران و یک اندازه واقعی است. این تجزیه کننده در کنترل مقاوم نیز بسیار کاربرد دارد.

U'U=I و V'V=I

روش کمترین مربعات

روش اصلاحی Singular Value Decomposition (SVD)



روش کمترین مربعات

مثال:

M=[1 2 1;3 4 5;4 6 1]

M =

1	2	1
3	4	5
4	6	1

[A,B,C]=svd(M)

A =			B =			C =		
-0.2449	0.0252	-0.9692	9.9209	0	0	-0.5096	0.1872	0.8398
-0.6724	-0.7246	0.1510	0	3.2372	0	-0.7429	0.3966	-0.5393
-0.6985	0.6887	0.1944	0	0	0.3114	-0.4340	-0.8987	-0.0631

روش کمترین مربعات

کاربرد در کمترین مربعات

در عبارت y=Ux+e ماتریس U را با روش SVDتجزیه می کنیم: U=PRQ

ضرب طرفین در P’:

$$P^T y = P^T PRQx + P^T e$$

$$P^T y = RQx + P^T e \Rightarrow y^* = Rx^* + e^*$$

$$y^* = P^T y, e^* = P^T e, x^* = Qx$$

معادله جدید رگرسور و حل x^*

- مزیت اصلی روش این است که بجای ماتیس U ماتریس R قرارگرفته که از روی درایه های نزدیک به صفر آن می توان درایه هایی که باعث بدحال شدن یا سینگولارتی می شود را حذف کرد.

روش کمترین مربعات

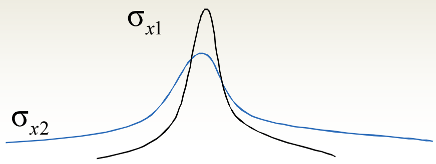
تعبیر آماری حداقل مربعات

دو معیار اصلی در بررسی آماری تخمین گرها عبارتند از:

- نداشتن بایاس تخمین Bias
- کمترین واریانس تخمین Variance (Cov)

$$b = E(\hat{\theta}) - \theta$$

$$Cov(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^T]$$



روش کمترین مربعات

شرایط بدون بایاس بودن تخمین

$$\hat{\theta} = Ay$$

$$A = (U^T U)^{-1} U^T$$

$$b = E(\hat{\theta}) - \theta$$

$$y = U\theta + e$$

$$\Rightarrow b = E(Ay) - \theta = E[A(U\theta + e)] - \theta$$

$$\Rightarrow b = E[(AU - I)\theta] + E(Ae)$$

بایاس صفر با تحقق سه شرط:

الف) AU=I

ب) E(Ae)=E(A)E(e)

ج) E(e)=0

بررسی ها نشان می دهد هر سه شرط فوق برای تخمین کمترین مربعات در صورت فرض نویز سفید بودن e برقرارند.

روش کمترین مربعات

کواریانس تخمین

فرض بدون بایاس بودن تخمین

$$b = E(\hat{\theta}) - \theta = 0$$

$$Cov(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T]$$

$$\hat{\theta} = Ay$$

$$y = U\theta + e$$

$$Cov(\hat{\theta}) = E((Ay - \theta)(Ay - \theta)^T)$$

$$Cov(\hat{\theta}) = E((A(U\theta + e) - \theta)(A(U\theta + e)) - \theta)^T)$$

$$= E((AU - I)\theta + Ae)((AU - I)\theta + Ae)^T)$$

$$Cov(\hat{\theta}) = E\left[Aee^T A^T\right] = E(A)Cov(e)E(A)^T$$

بافرض معین بودن A

$$Cov(\hat{\theta}) \cong \sigma^2 (AA^T)$$

روش کمترین مربعات

کواریانس در کمترین مربعات

$$Cov(\hat{\theta}) = \sigma^2 (AA^T) = \sigma^2 (U^T U)^{-1}$$

قضیه BLUE

Best of Linear Unbiased Estimator

روش حداقل مربعات بهترین تخمینگر بدون بایاس خطی است.

روش حداقل مربعات کمترین ماتریس کواریانس را نسبت به سایر تخمین گرهای خطی بدون بایاس دارد.

روش کمترین مربعات

- یک مثال: (موضوع فوق شناسایی و زیر شناسایی)

$$y(i) = b_۰ + b_۱\, u(i) + b_۲\, u^۲(i) + e(i)$$

$$\varphi^T(i) = [\,۱ \quad u(i) \quad u^۲(i)\,]$$

$$\theta^T = [\,b_۰ \quad b_۱ \quad b_۲\,]$$

روش کمترین مربعات

- حال می خواهیم با مدل های مختلف رگرسور خروجی را تخمین بزنیم:

مدل ۱: $y(i) = b_۰$

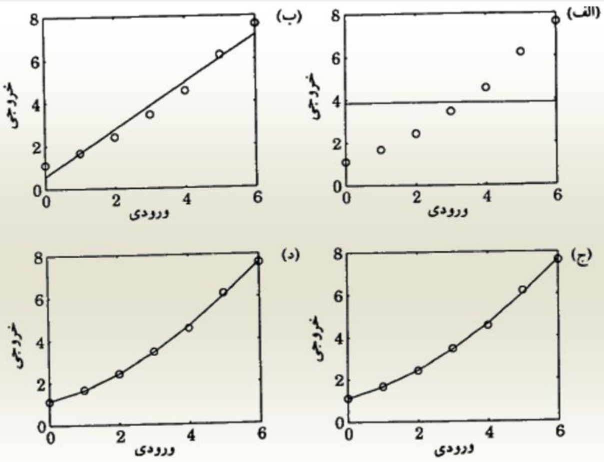
مدل ۲: $y(i) = b_۰ + b_۱\, u$

مدل ۳: $y(i) = b_۰ + b_۱\, u + b_۲\, u^۲$

مدل ۴: $y(i) = b_۰ + b_۱\, u + b_۲\, u^۲ + b_۳\, u^۳$

مدل	$\hat{b}_۰$	$\hat{b}_۱$	$\hat{b}_۲$	$\hat{b}_۳$	V
۱	۳/۸۵				۳۴/۴۶
۲	۰/۵۷	۱/۰۹			۱/۰۱
۳	۱/۱۱	۰/۴۵	۰/۱۱		۰/۰۳۱
۴	۱/۱۳	۰/۳۷	۰/۱۴	−۰/۰۰۳	۰/۰۲۷

روش کمترین مربعات



موضوع Over-parameterization و Under-parameterization

http://wp.kntu.ac.ir/khoshnood