بسم ا... الرحمن الرحیم

عنوان محاسبات عددی پیشرفته

فیلتر کالمن
Kalman Filter

مدرس:
دکتر عبدالمجید خوشنود

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

- یادآوری در مورد مشاهده گرهای حالت Observers

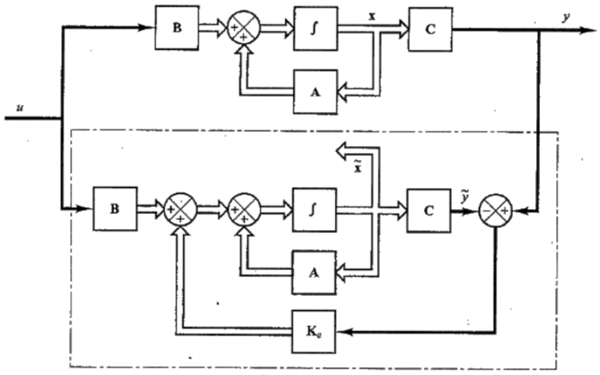
فرض کنید سیستم فضای حالت زیر را داشته باشیم:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

میخواهیم با بهره گیری از مقادیر y مقادیر x را تخمین بزنیم.
سایر کاربردهای مشاهده گرها و انواع آنها
مدل کمکی
سنسور نرم

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

مدل فضای حالت با تخمین همه حالت ها



Full-order state observer

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

روابط حاکم بر یک مشاهده گر حالت

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e(y - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}})$$
$$= (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e y$$

شرط مشاهده پذیری یک سیستم مرتبه n

$$\left[\mathbf{C}^* \;\vdots\; \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*\right]$$

ماتریس فوق باید از رنک n باشد. همچنین داریم:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$$
$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{e}$$

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{Q}\begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{W}\mathbf{N}^*)^{-1}\begin{bmatrix} \alpha_n - a_n \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \left[\mathbf{C}^* \;\vdots\; \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^*\right]$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

- مثال: برای سیستمی با A=[0 2;0 3] و B=[0;1] و C=[1 0] یک مشاهده گر حالت بدست آورید.

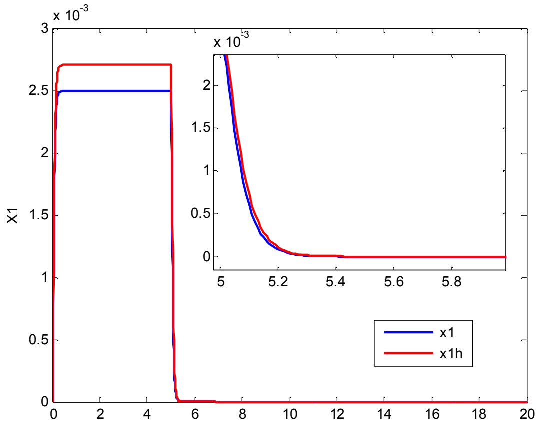
حل: با استفاده از روابط Ke یا L=[19;60.5]
لذا خواهیم داشت:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -19 & 2 \\ -60.5 & 3 \end{bmatrix}\hat{x} + \begin{bmatrix} 19 \\ 60.5 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

- تفاوت های مشاهد گر حالت با RLS
- از تخمین پارامترها تا تخمین وضعیت

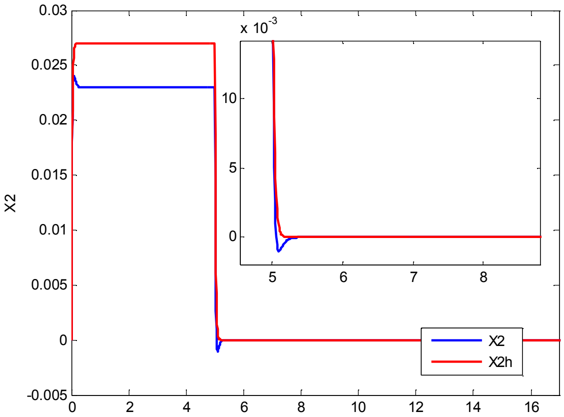
مقدمه ای بر فیلتر کالمن

- حل عددی مثال



مقدمه ای بر فیلتر کالمن

- حل عددی مثال



مقدمه ای بر فیلتر کالمن

- چرا فیلتر کالمن؟

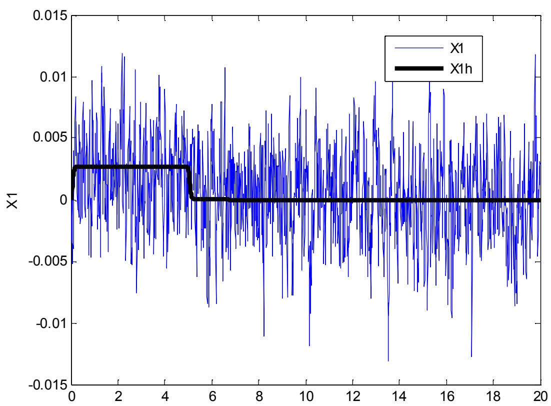
یکی از اهداف طراحی مشاهده گر حالت این است که دارای سرعت زیادی باشد چرا که برای طراحی همزمان کنترل کننده این موضوع مهم است. سرعت زیاد با بهره بزرگ K میسر خواهد شد و بهره بزرگ در حضور نویزها منجر به حساسیت بیشتر سیستم نسبت به نویزهای مختلف می شود.

رویکرد فیلتر کالمن در واقع همان مشاهده گر حالت است با این تفاوت که در یک فرایند بهینه مصالحه ای بین سرعت صفر شدن خطا و کاهش اثرات نویز انجام می دهد.

فیلتر کالمن ابتدا در حالت گسسته و توسط رادلف کالمن در سال ۱۹۶۰ ارائه شده است. Rudolf Kalman

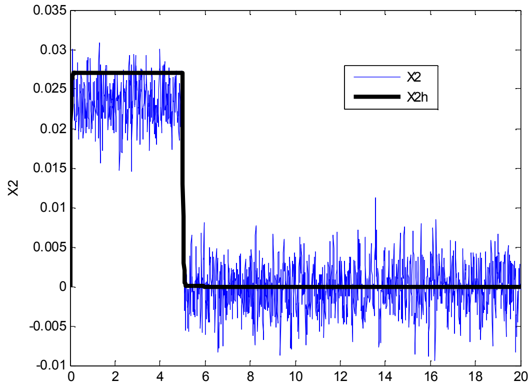
مقدمه ای بر فیلتر کالمن

- حل عددی مثال در حالت وجود نویز



مقدمه ای بر فیلتر کالمن

• حل عددی مثال در حالت وجود نویز



مقدمه ای بر فیلتر کالمن

• فیلتر کالمن یک تخمین حداقل واریانس ارائه می دهد.

• لازم است که اشاره شود که در حوزه کنترل نیز در ادامه نسل کنترل کننده های بهینه خطی LQR برای سیستم های در حضور نویز نیز رویکرد LQG ارائه شده است و همین رویکرد در ادامه سیر تاریخی منجر به ارائه کنترل کننده های مقاوم H بی نهایت شده است.

• سه دسته اصلی از فیلترهای کالمن را می توان معرفی نمود:

- فیلتر کالمن پیوسته
- فیلتر کالمن گسسته
- فیلتر کالمن توسعه یافته

سایر دسته ها: Unscented Kalman Filters

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

•فیلتر کالمن پیوسته

چون عملکرد فیلتر کالمن مطابق مشاهده گر بهینه است و منجر به حذف نویز از تخمین می گردد به آن عنوان فیلتر داده اند.

اساس کار این فیلتر بر پایه کمترین مربعات استوار است.

برای تخمین متغیرهای حالت به دنبال بهترین تخمین زننده هستیم که خطای تخمین را در یک فضای بهینه کمینه نماید.

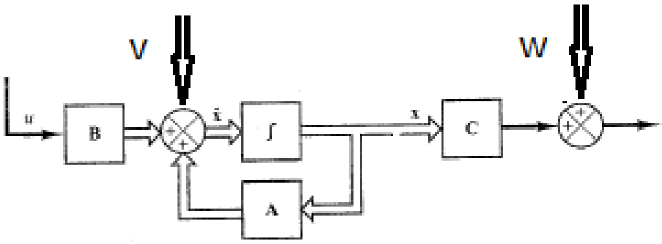
فرض کنید سیستم زیر را با وجود نویز های ورودی داریم:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + v(t) \\ y = c(t)x(t) + w(t) \end{cases}$$

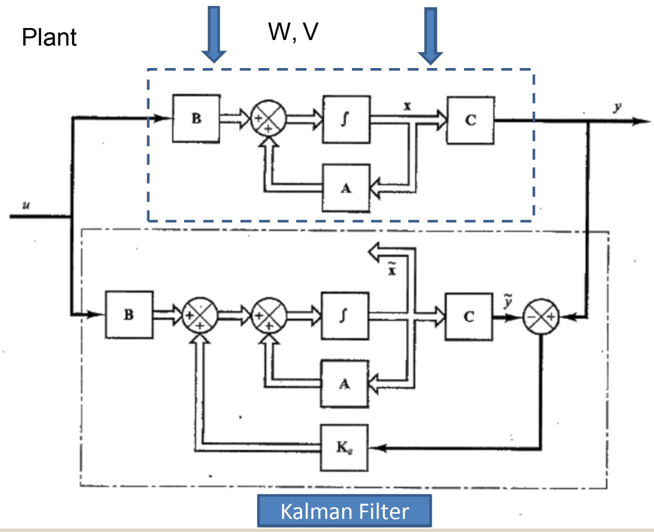
مقدمه ای بر فیلتر کالمن

در این حالت v(t) را نویز ورودی (که معمولا فرکانس پایین دارد) و w(t) را نویز اندازه گیری (که معمولا فرکانس بالا دارد) می شناسیم.

حال به بررسی بلوک مشاهده گر حالت در وضعیت وجود نویزها می پردازیم:



مقدمه ای بر فیلتر کالمن



مقدمه ای بر فیلتر کالمن

- ✓ حال فرض بر این است که نویزهای w و v اغتشاش سفید گوسی با میانگین صفر باشند. لذا:

$$E[v(t)]=0 \quad E[w(t)]=0$$
$$E[v(t)v'(\tau)]=Q(t)\delta(t-\tau)$$
$$E[w(t)w'(\tau)]=R(t)\delta(t-\tau)$$

- ✓ چون مقادیر میانگین صفرند پس عبارت های بالا معادل کوارایانس هستند. یعنی ماتریس های Q و R معادل که متقارن و غیر منفی معین هستند به ترتیب کواریانس نویز پروسه و نویز اندازه گیری را نشان می دهند.

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

- اگر فرض کنیم که نویزهای پروسه و اندازه گیری از هم مستقلند داریم: (این فرض کاربردی و تجربی است.)

$$E[v(t)w(\tau)] = 0 \quad \text{for all } t, \tau$$

- فرض بعدی اینست که تخمین از زمان t0 آغاز شده و x(t0) را یک متغیر اتفاقی گوسی با میانگین m و گواریانس P0 فرض نماییم. لذا:

$$E\{[x(t_0)-m)][x(t_0)-m]'\} = P_0 \quad E[x(t_0)] = m$$
$$E[x(t_0)v'(t)] = E[x(t_0)w'(t)] = 0$$

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

- اگر x(t0) معین باشد برابر m خواهد بود و P0 برابر صفر می شود.
- فرضیات مربوط به مشاهده پذیری نیز باید رعایت شوند.
- مسلما بدون در نظر گرفتن این فرضیات مساله پیچیده خواهد شد.
- هدف اصلی در طراحی، تخمین x هاست که به صورت $\hat{x}$ معرفی میشوند، لذا باید تابع هزینه زیر برای فرض زمان کلی صفر تا یک کمینه گردد:

$$E\{[x(t_1)-\hat{x}(t_1)]^T[x(t_1)-\hat{x}(t_1)]\}$$

یا

$$\boxed{E\{[x(t)-\hat{x}(t)]^T[x(t)-\hat{x}(t]\}}$$

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

- ✓ می توان نشان داد که تخمین x(t1) به صورت اعمال یک اپراتور خطی روی g(t) به شکل زیر قابل بیان است:

$$\hat{x}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} M'(t, t_1) y(t) dt$$

- ✓ در روندی طولانی ثابت می شود که از ربطه بالا و تابع هزینه هدف برای تخمین روابط نهایی فیلتر کالمن پیوسته بدست می آیند. در اینجا به جای بیان این عبارت های قابل اثبات از یک قضیه بهره می گیریم.

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

- ✓ قضیه دوگان Duality

تشابه زیادی بین کنترل بهینه و رویتگر بهینه وجود دارد که در قالب قضیه دوگانی قابل بیان است:

فرض کنید سیستم خطی نامتغیر با زمان زیر را داشته باشیم:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx \qquad \text{(I)}$$

و شاخص عملکرد آن

$$J(x,u,Q,R) = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt, \qquad Q \geq 0,\ R > 0$$

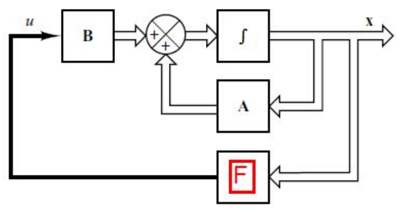
مقدمه ای بر فیلتر کالمن

- ✓ برای چنین سیستمی بردار کنترل بهینه به صورت زیر استخراج می گردد: (LQR)

$$u = -Fx$$

بهره بهینه $$F = R^{-1}B^{T}P$$

معادله ریکاتی $$PA + A^{T}P - PBR^{-1}B^{T}P + Q = 0$$



مقدمه ای بر فیلتر کالمن

- ✓ دوگان سیستم فوق
- ✓ اگر معادله فضای حالت را به فرم زیر بازنویسی نماییم داریم:

$$\dot{x} = A^{T}x + C^{T}u \qquad \text{(II)}$$

به دلیل خاصیت قابل اثباتی که در رفتار نظیر به نظیر کنترل کننده و رویتگر دو سیستم به وجود می آید سیستم ۲ را دوگان سیستم ۱ می نامند.

- ✓ شاخص عملکرد این سیستم به صورت زیر خواهد بود: (توجه به ابعاد ماتریس ها)

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} X^{T}(t)(B\overline{Q}B^{T})X(t) + U^{T}\overline{R}U(t)dt$$

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

- بهره پسخور بهینه این سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$L = \overline{R}^{-1} C P(t)$$

- و معادله ریکاتی به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{P}(t) + P(t)A^{T} - P(t)C^{T}\overline{R}^{-1}CP(t) + \overline{B}QB^{T} + AP(t) = 0$$

- نکته مهم: ثابت می شود که طراحی کنترل کننده بهینه برای سیستم دوگان (۲) معادل طراحی رویتگر بهینه برای سیستم اصلی (۱) می باشد و این انتخاب به کمینه سازی E[(x-xh)’(x-xh)] می انجامد.

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

- تنها یک تفات وجود دارد و در علامت ماتریس ریکاتی است که اصطلاحا گفته می شود حل روبه عقب دارد. (علامت منفی P در فیلتر بهینه کالمن)
- جمع بندی: طراحی فیلتر کالمن برای سیستم

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + v(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + w(t)$$

- که در آن v و w به ترتیب بردارهای نویز ورودی یا فرایند و نویز اندازه گیری یا رویت می باشند.

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

✓ با ساختار کلی مشاهده گر حالت، خواهیم داشت:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + L[y(t) - C\hat{x}(t)] + Bu(t)$$

$$L = \overline{R}^{-1}C\overline{P}(t)$$

$$-\dot{P}(t) + \overline{P}(t)A^{T} - \overline{P}(t)C^{T}\overline{R}^{-1}C\overline{P}(t) + B\overline{Q}B^{T} + A\overline{P}(t) = 0$$

✓ توضیح مشتق با علامت منفی و مثبت

نکته: حل معادله ریکاتی درحالت پایدار (مشتق P برابر صفر) انجام می شود.

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

مثال: برای سیستم زیر فیلتر کالمن طراحی نمایید.

Xd(t)=[0 1;0 0]x(t)+[0;1][u(t)+v(t)]
Yd(t)=[1 0;0 1]x(t)+w(t)

که در آن

$$E[vv^{T}(t)] = \overline{Q}\delta(t) = [1]\delta(t)$$

$$E[ww^{T}(t)] = \overline{R}\delta(t) = [2 \quad 0;0 \quad 1]\delta(t)$$

ابتدا از راه مستقیم با روابط ارائه شده و سپس جهت چک کردن نتایج از قضیه دوگان استفاده نمایید

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

حل:

از حل معادله ریکاتی داریم

P [2*2]

$$\overline{P}(t)A^{T}\neg\overline{P}(t)C^{T}\overline{R}^{-1}C\overline{P}(t)+B\overline{Q}B^{T}+A\overline{P}(t)=0$$

p11=1.2, p12=0.58, p22=0.9

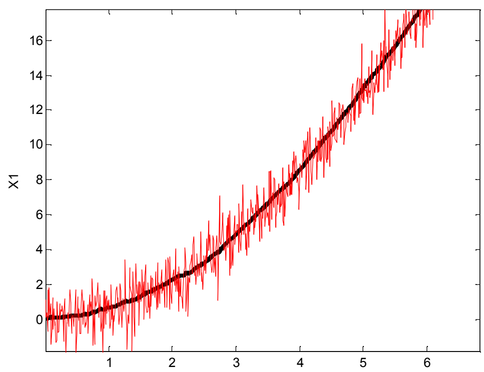
L=[0.64 0.29; 0.58 0.9]

برای سیستم دوگان

K=[0.64 0.29; 0.58 0.9]

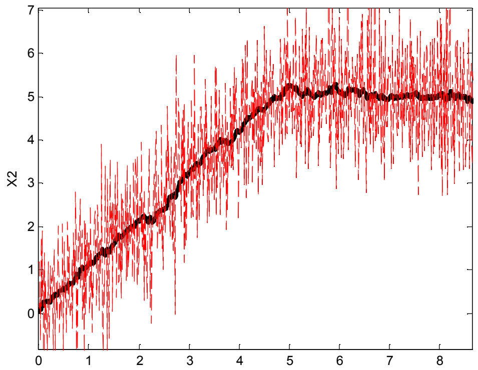
مقدمه ای بر فیلتر کالمن

حل عددی مثال



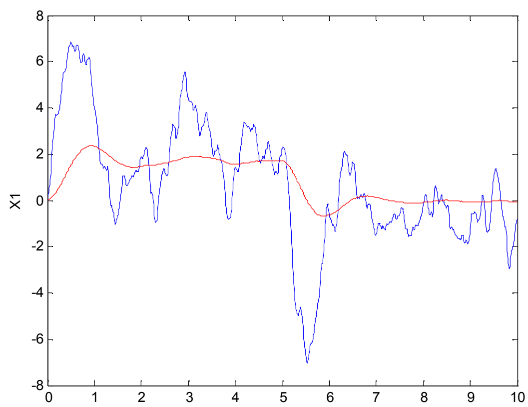
مقدمه ای بر فیلتر کالمن

حل عددی مثال

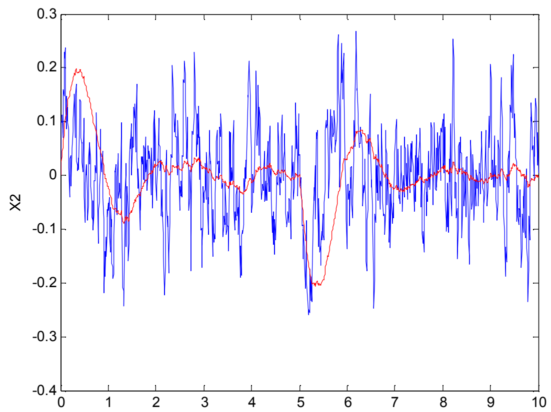


مقدمه ای بر فیلتر کالمن

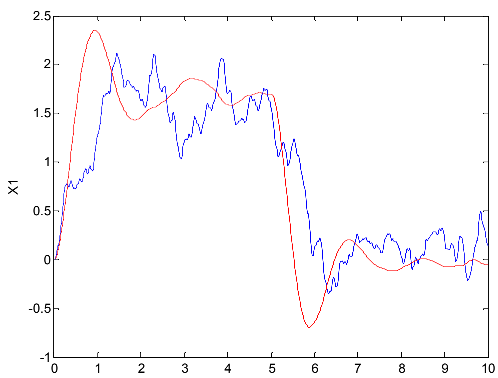
حل یک مثال نمونه سیستم مرتبه دو



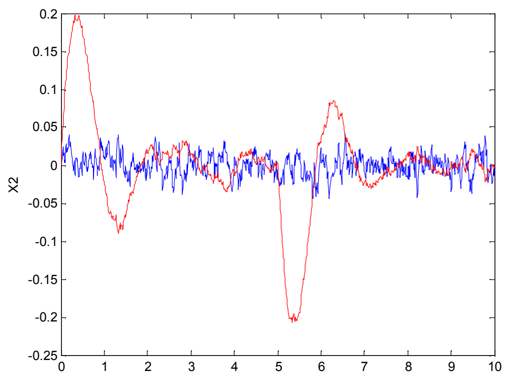
مقدمه ای بر فیلتر کالمن



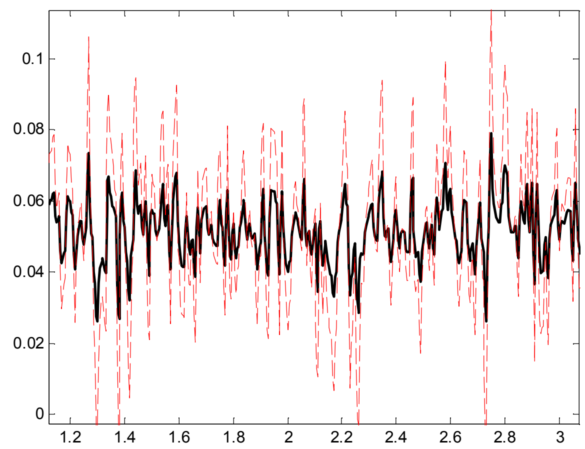
مقدمه ای بر فیلتر کالمن



مقدمه ای بر فیلتر کالمن



مقدمه ای بر فیلتر کالمن



مقدمه ای بر فیلتر کالمن

برخی نکات در زمینه فیلتر کالمن پیوسته، تفسیر معادله ریکاتی

$$\dot{P} = \underbrace{FP + PF^T} - PH^TR^{-1}HP + GQG^T$$

Unforced State Transition: The effect of the unforced system dynamics upon the covariance propagation

The decrease of uncertainty as a result of measurement

The increase of uncertainty due to the process disturbance Q

حل پایدار معادله ریکاتی

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = P_\infty \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{dP(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = FP_\infty + P_\infty F^T - P_\infty H^TR^{-1}HP_\infty + GQG^T$$

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

برخی نکات در زمینه فیلتر کالمن پیوسته

استفاده از پارامترهای اسکالر در معادله ریکاتی

$P_\infty \in R^{1\times1}\ ,\quad F,H,Q,R,G \in R^{1\times1}$

$$\frac{H^2}{R}P_\infty^2 - 2FP_\infty - G^2Q = 0$$

$$P_\infty = \frac{R}{H^2}\left(F \pm \sqrt{F^2 + \frac{Q}{R}H^2G^2}\right)$$

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = P_\infty = \frac{R}{H^2}\left(F + \sqrt{F^2 + \frac{Q}{R}H^2G^2}\right)$$

تفسیر معادلات

با افزایش واریانس نویز سنسور Pinf افزایش میابد.

با افزایش واریانس نویز سیستم نیز Pinf افزایش میابد.

با فرض تقریبی Q=0 ، F<0 منجر به پایداری می گردد.

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

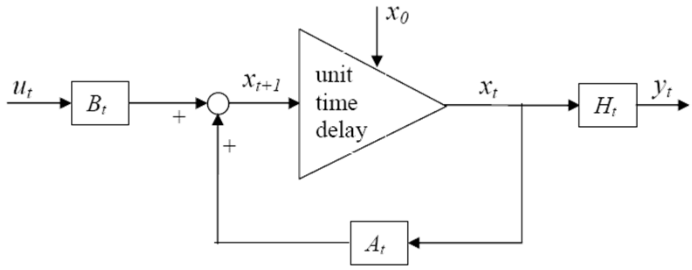
فیلتر کالمن گسسته

کاربرد بیشتر در سیستم های صنعتی و مهندسی، عدم لزوم پیوسته یا گسسته بودن سیستم

مدل فضای حالت گسسته

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t$$

$$y_t = H_t x_t$$



مقدمه ای بر فیلتر کالمن

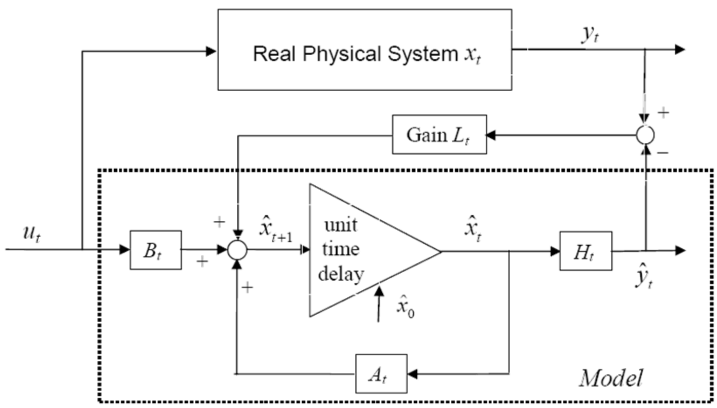
مشاهده گر حالت در سیستم گسسته

$$\hat{x}_{t+1} = A_t \hat{x}_t + B_t u_t + L_t (y_t - \hat{y}_t)$$

$$\hat{y}_t = H_t \hat{x}_t$$

فرم کلی

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \mathrm{K}_t (y(t) - \hat{y}(t))$$



مقدمه ای بر فیلتر کالمن

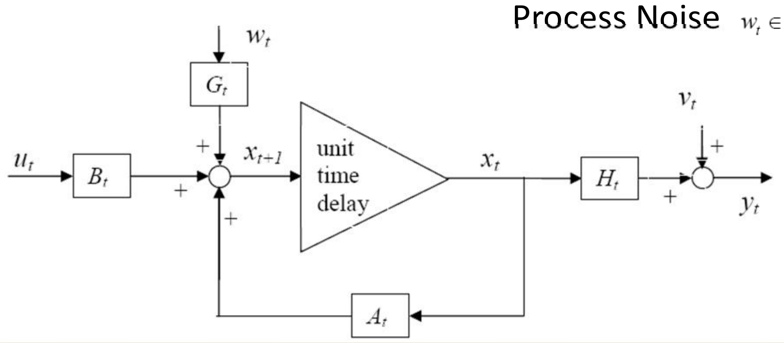
سیستم فضای حالت با ورودی رندوم

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t + G_t w_t$$

$$x_{t+1} = A_t x_t + G_t w_t$$
$$y_t = H_t x_t + v_t$$

Measurement Noise $v_t \in R^{\ell \times 1}$

Process Noise $w_t \in R^{n \times 1}$



مقدمه ای بر فیلتر کالمن

فرضیات:

$$E[v_t] = 0$$
$$E[w_t] = 0$$

$$C_V(t,s) = E[v_t \cdot v_s^T] \in R^{\ell \times \ell}$$

$$C_V(t,s) = E[v_t \cdot v_s^T] = 0, \quad \forall t \neq s$$

$$C_V(t) = E[v_t \cdot v_t^T]$$

$$C_W(t,s) = E[w_t \cdot w_s^T] \in R^{n \times n}$$

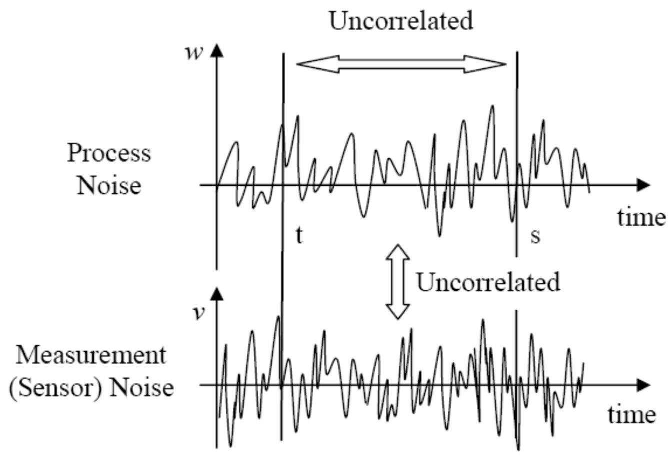
$$C_{WV}(t,s) = E[w_t \cdot v_s^T] \in R^{n \times \ell}$$

$$C_V(t,s) = E[v_t \cdot v_s^T] = \begin{cases} 0 & \forall t \neq s \\ R_t & \forall t = s \end{cases}$$

$$C_W(t,s) = E[w_t \cdot w_s^T] = \begin{cases} 0 & \forall t \neq s \\ Q_t & \forall t = s \end{cases}$$

$$C_{WV}(t,s) = E[w_t \cdot v_s^T] = 0 \qquad \forall t, \forall s$$

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

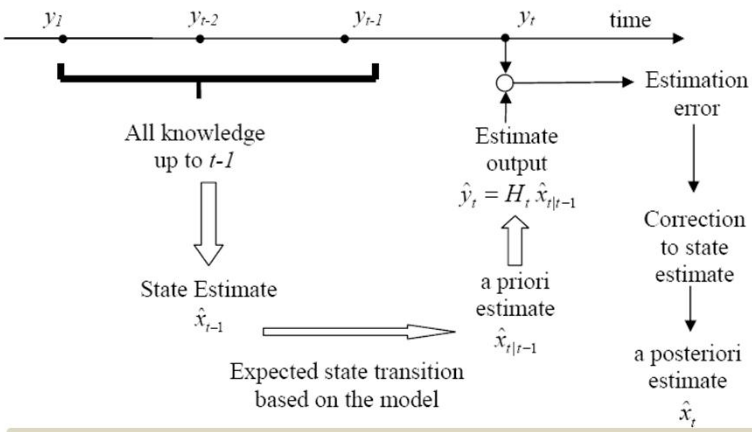


مقدمه ای بر فیلتر کالمن

تخمین وضعیت بهینه
معیار بهینگی

$$\overline{J}_t = E\left[(\hat{x}_t - x_t)^T(\hat{x}_t - x_t)\right]$$

فلوچارت
رویکرد
داده های
زمان حال
و گذشته



مقدمه ای بر فیلتر کالمن

با بهره گیری از فلوجارت ارائه شده می توان نوشت:

$x_t \Leftarrow A_{t-1}x_{t-1} + G_{t-1}w_{t-1}$; Let's write this as $\hat{x}_{t|t-1}$

Transition from estimated state at time t-1, $\hat{x}_{t-1}$

$$\hat{x}_{t|t-1} = E[A_{t-1}\hat{x}_{t-1} + G_{t-1}w_{t-1}]$$
$$= A_{t-1}\hat{x}_{t-1} + G_{t-1}E[\cancel{w_{t-1}}]$$

$\hat{y}_t = H_t\hat{x}_{t|t-1}$ Note E[v_t]=0

انتخاب فرم نهایی اصلاح شده با الگو گیری از الگوریـم های تخمین

$$\hat{x}_t = \hat{x}_{t|t-1} + K_t(y_t - H_t\hat{x}_{t|t-1})$$

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

حال همه فرایند طراحی معطوف کمینه سازی تابع هزینه تعریف شده است تا بتوان K بهینه را بدست آورد که به آن بهره کالمن می گوییم: (بازسازی خطا)

$$e_t \equiv \hat{x}_t - x_t = \hat{x}_{t|t-1} + K_t(y_t - H_t\hat{x}_{t|t-1}) - x_t$$
$$= \hat{x}_{t|t-1} + K_t(H_t x_t + v_t - H_t\hat{x}_{t|t-1}) - x_t$$
$$= (I - K_t H_t)\varepsilon_t + K_t v_t$$

با تعریف

$$\varepsilon_t \equiv \hat{x}_{t|t-1} - x_t$$

$$e_t^T e_t = [\varepsilon_t - K_t H_t \varepsilon_t + K_t v_t]^T [\varepsilon_t - K_t H_t \varepsilon_t + K_t v_t]$$

$$= \varepsilon^T \varepsilon + \varepsilon^T H^T K^T K H \varepsilon - 2\varepsilon^T K H \varepsilon + 2\varepsilon^T K v - 2v^T K^T K H \varepsilon + v^T K^T K v$$

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

حال که تابع هزینه بازسازی شده است می توان از آن نسبت به بهره کالمن گرادیان گرفت:

$$\mathrm{grad}_{K_t}(e_t^T e) = 0 \Rightarrow E[\mathrm{grad}_{K_t}(e_t^T e)] = 0$$

$$\Rightarrow E\left[KH\varepsilon\varepsilon^T H^T - KH\varepsilon v^T - Kv\varepsilon^T H^T + Kvv^T + \varepsilon v^T - \varepsilon\varepsilon^T H^T\right] = 0$$

$$KHE[\varepsilon\varepsilon^T]H^T - KHE[\varepsilon v^T] - KE[v\varepsilon^T]H^T + KE[vv^T] + E[\varepsilon v^T] - E[\varepsilon\varepsilon^T]H^T = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{E[\varepsilon v^T]}$$

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

$$E[\varepsilon_t v_t^T] = E[(\hat{x}_{t|t-1} - x_t)v_t^T]$$

$$= E[\hat{x}_{t|t-1} v_t^T] - E[x_t v_t^T]$$

$$\hat{x}_{t|t-1} = A_{t-1}\hat{x}_{t-1}$$

$$\hat{x}_{t-1} = \hat{x}_{t-1|t-2} + K_{t-1}(y_{t-1} - H\hat{x}_{t-1|t-2})$$

$$y_{t-1} \rightarrow H \cdot x_{t-1} + v_{t-1} \longleftrightarrow \text{Uncorrelated with } v_t$$

$$x_{t-1} \rightarrow A \cdot x_{t-2} + w_{t-2} \longleftrightarrow \text{Uncorrelated with } v_t$$

$$\therefore E[\hat{x}_{t|t-1} v_t^T] = 0$$

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

پارامتر بعدی عبارت فوق

$x_t = A\cdot x_{t-1} + w_{t-1}$ $\longleftrightarrow$ Uncorrelated with v_t

$A\cdot x_{t-2} + w_{t-2}$ $\longleftrightarrow$ Uncorrelated with v_t

$$\therefore E[x_t v_t^T] = AE[x_{t-1}v_t^T] + E[w_{t-1}v_t^T] = 0 \Rightarrow E[\varepsilon_t v_t^T] = 0$$

از طرفی xt با نویز اندازه گیری همبستگی ندارد، لذا: $E[x_t v_t^T] = 0$

$$E[\varepsilon v^T] = E[v\varepsilon^T] = 0$$

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

با تعریف پارامتر جدید P به عنوان کواریانس خطای متغیرهای زمان قبل داریم:

$$P_{t|t-1} \equiv E[\varepsilon_t \varepsilon_t^T] = E[(\hat{x}_{t|t-1} - x_t)(\hat{x}_{t|t-1} - x_t)^T]$$

$$\longrightarrow \quad K_t H_t P_{t|t-1} H_t^T + K_t R_t - P_{t|t-1} H_t^T = 0$$

$$\boxed{\therefore \quad K_t = P_{t|t-1} H_t^T [H_t P_{t|t-1} H_t^T + R_t]^{-1}}$$

بهره کالمن Kalman Gain

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

روشی برای بهبود کواریانس خطا

$$P_t = E[(\hat{x}_t - x_t)(\hat{x}_t - x_t)^T] = E[e_t e_t^T]$$

$$P_t = E[((I - KH)\varepsilon + Kv)((I - KH)\varepsilon + Kv)^T]$$

$$= (I - KH)E[\varepsilon_t \varepsilon_t^T](I - KH)^T + KE[vv^T]K^T$$

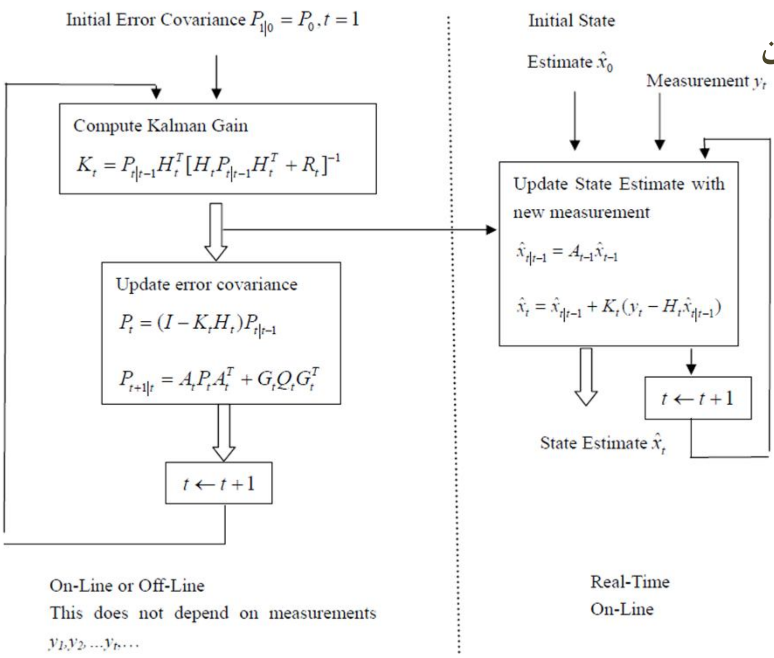
$$\therefore \quad P_t = (I - KH)P_{t|t-1}(I - KH)^T + KR_t K^T$$

$$\Rightarrow \quad P_t = (I - K_t H_t)P_{t|t-1}$$

تخمین Pt+1 (گام جلو)

$$\therefore \quad P_{t+1|t} = A_t P_t A_t^T + G_t Q_t G_t^T$$

فلوچارت فیلتر کالمن گسسته



مقدمه ای بر فیلتر کالمن

یک مرور سریع

$$\bar{J}_t = E[(\hat{x}_t - x_t)^T(\hat{x}_t - x_t)]$$

Optimal Estimate

$$\hat{x}_t = \hat{x}_{t|t-1} + \underbrace{K_t}_{\text{The Kalman Gain}} \underbrace{(y_t - \overbrace{\hat{y}_t}^{H_t \hat{x}_{t|t-1}})}_{\text{Estimation output error}}$$

$$K_t = P_{t|t-1}H_t^T\left(H_t P_{t|t-1} H_t^T + R_t\right)^{-1} \qquad P_t = (I - K_t H_t)P_{t|t-1}$$

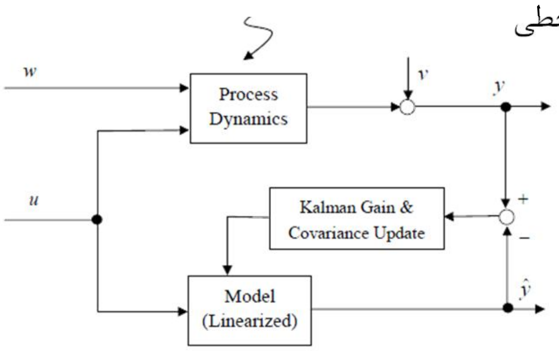
$$P_t \stackrel{\Delta}{=} E\left[(\hat{x}_t - x_t)(\hat{x}_t - x_t)^T\right]$$: a posteriori state estimation error covariance

$$P_{t|t-1} \stackrel{\Delta}{=} E\left[(\hat{x}_{t|t-1} - x_t)(\hat{x}_{t|t-1} - x_t)^T\right]$$: a priori state estimation error covariance

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

فیلتر کالمن توسعه یافته

کاربرد در سیستم های غیرخطی



$$\dot{x} = f(x,u,t) + w(t) \quad \ldots \quad n-\text{dim}$$

$$y = h(x,t) + v(t) \quad \ldots \quad l-\text{dim}$$

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

که در آن

$$E[w(t)]=0\,,\quad E[v(t)]=0$$

$$E[w(t)w^T(s)]=\begin{cases}0 & t\neq s\\ Q & t=s\end{cases}\qquad E[v(t)v^T(s)]=\begin{cases}0 & t\neq s\\ Q & t=s\end{cases}\qquad E[w(t)v^T(s)]=0$$

به دلیل ماهیت غیر خطی سیستم روابط جاری فیلتر کالمن قابل اعمال به این سیستم نیست. لذا دو راه پیشنهادی وجود دارد:

الف) خطی سازی سیستم غیر خطی از روش های معمول و اعمال فیلتر کالمن خطی (خارج خط)

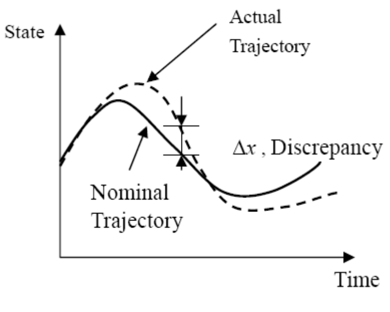
ب) خطی سازی سیستم حول وضعیت تخمین زده شده به صورت روی خط که منجر به فیلتر کالمن توسعه یافته می شود.

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

فیلتر کالمن برای سیستم خطی شده

معادلات نامی بدون نویز

در این حالت از روش های خطی سازی نظیر بسط تیلور استفاده می شود.



$$\dot{x}^*(t)=f\left(x^*(t),t\right)$$

$$x(t)=x^*(t)+\Delta x(t)$$

$$\dot{x}(t)=\dot{x}^*(t)+\Delta\dot{x}(t)$$

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

$$f(x,t) = f(x^* + \Delta x, t)$$
$$\cong f(x^*, t) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x^*} \Delta x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=x^*} \in R^{n\times n} \quad \text{Jacobian}$$

$$\dot{x}^* + \Delta\dot{x} = \underbrace{f(x^*, t)}_{\dot{x}^*} + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x^*} \Delta x + w(t)$$

$$\Delta\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x^*} \Delta x + w(t)$$

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

جایگزینی دلتا با خود x و مشتق جمله بسط با تابع F

$$\dot{x} = F(t)x + w(t)$$

حال برای y داریم:

$$y = H(t)x + v(t)$$

$$H(t) = \frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{x^*} \in R^{l\times n}$$

$$y^* + \Delta y = \underbrace{h(x^*, t)}_{y^*} + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{x^*}}_{H(t)} \Delta x + v$$

Replacing

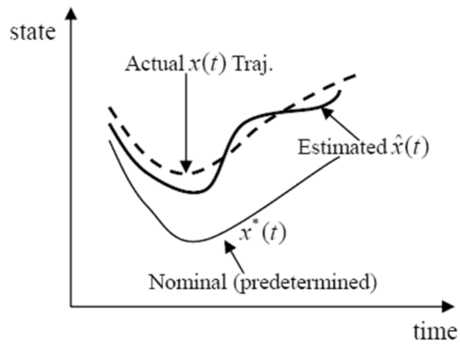
Δy by y

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

خطی سازی روی خط که منجر به روش تعمیم یافته می شود

اگر خطی سازی حول x استار انجام شود به مساله فیلتر کالمن خطی می رسیم. اما اگر حول x هت که تخمین متغیرهاست انجام شود به فیلتر کالمن توسعه یافته می رسیم

لذا F و H را حول $x = \hat{x}$



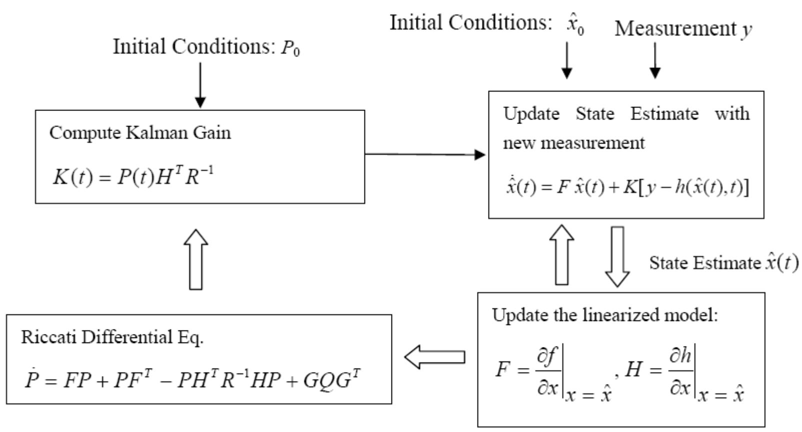
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}} = F(\hat{x},t)$$

$$\hat{y}(t) = h(\hat{x}(t),t)$$

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}} = H(\hat{x},t)$$

مقدمه ای بر فیلتر کالمن

فلوچارت فیلتر کالمن توسعه یافته



http://wp.kntu.ac.ir/khoshnood