Simulación de Sistemas

Autómatas Celulares

Autómata Celular

Ideas Básicas:

- En general, se discretiza el espacio en una **grilla** (celdas).

- Cada sitio de la grilla tiene un **estado** (puede ser ocupado o no por una partícula con velocidad, o el valor de alguna cantidad macroscópica, etc.)

- **Reglas** (Heurísticas) para definir **transición** de estados, entre celdas entre un paso temporal y el siguiente.

- En algunos casos el AC pertenece al dominio Microscópico y promediando sobre muchas celdas se llega al dominio Macroscópico.

Autómatas Celulares: Definición

- AC son arreglos regulares de celdas individuales de la misma clase

- Cada celda tiene un numero finito de estados discretos.

- Los estados se actualizan simultáneamente (sincrónicamente) en cada paso temporal.

Sincronico significa que cuando estoy pasando del estado t al estado t+1, para actualizar cada particula miro las del estado t, y no los valores nuevos que acabo de actualizar de las particulas vecinas

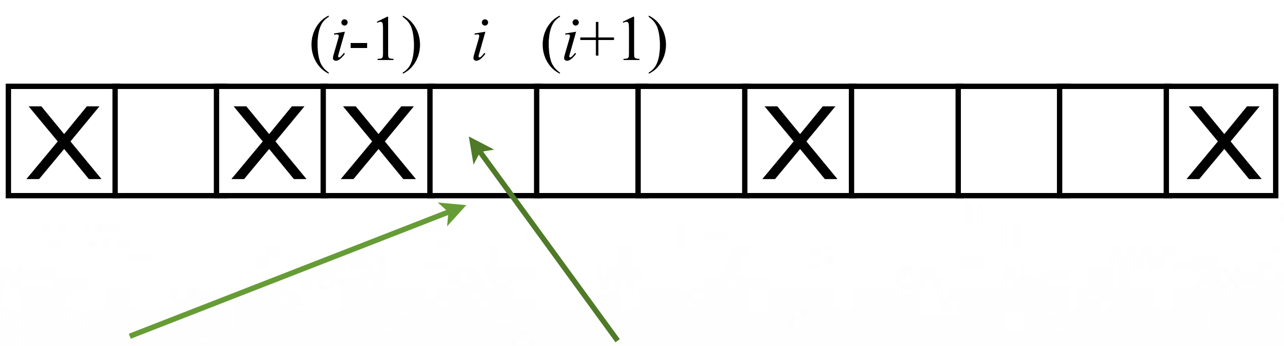
- Las reglas de actualización son determinísticas y uniformes en tiempo y espacio.

- Las reglas para la evolución de una celda depende solamente de un vecindario local a su alrededor.

Autómatas Celulares 1-D

Autómatas Celulares en una dimensión

Sea una cadena uniforme de celdas:

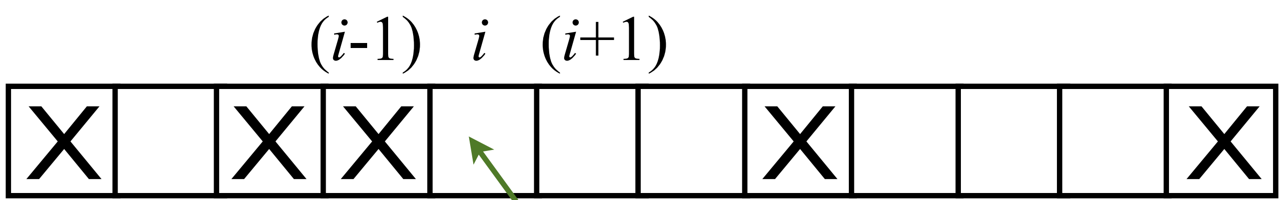


La celda i tiene un estado $a_i^{(t)}$ en el instante t.

Cada estado $a_i^{(t)}$ está definido por un nro. finito de enteros positivos (k) etiquetados desde 0 hasta (k-1).

Autómatas Celulares en una dimensión

Sea una cadena uniforme de celdas:



La celda i tiene un estado $a_i^{(t)}$ en el instante t.

La regla de evolución está dada por el mapeo:

$$a_i^{(t)} = f\left[\sum_{j=-r}^{j=r} \alpha_j a_{i+j}^{(t-1)}\right]$$

Va de -r a r => me muevo la misma cantidad de lugares a la izq que a la der

donde:
- r es el rango (nro.) de vecinos a considerar.
- α_j constantes enteras.
- f Función no lineal: "regla del autómata".

Automatas Celulares en una dimensión

Un ejemplo de AC con $k = 2$ y $r = 1$:

K = 2 entonces solo puede valer 0 o 1
r = 1 entonces me muevo un vecino a la izq y uno a la der

	$a_{i-1}^{(t-1)}$	$a_i^{(t-1)}$	$a_{i+1}^{(t-1)}$	$a_i^{(t)}$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Yo quiero actualizar ai, y tengo en cuenta el vecino de la izq y de la der. Como cada uno puede tener 2 valores, el numero total de casos es 8

En general el nro. de posibles combinaciones es $N = k^{2r+1}$

(el conjunto de las 8 reglas elegidas es la funcion de transformacion)

El nro. total de reglas posibles es k^N, en este caso es $2^8 = 256$.

Un AC de 1D cuya regla de actualización solo depende de los primeros vecinos (y de sí mismo) se llama: "AC Elemental".

Autómatas Celulares en una dimensión

Subclases de Reglas

- Regla Totalista: Todos los $\alpha_j = 1$.
- Regla Simétrica: $f\,[a_{i-r}\,,\, \ldots,\, a_{i+r}\,] = f\,[a_{i+r}\,,\, \ldots,\, a_{i-r}\,]$.
- Regla Legal: No cambia la configuración nula (todos ceros).
- ...

Autómatas Celulares en una dimensión

Hay 4 posibles patrones de Autómatas Celulares en 1-D

Para la materia suponemos que no cambian estos patrones para distintos input

1) Desaparece con el tiempo. (todo en 0)

2) Evoluciona a un tamaño fijo finito.

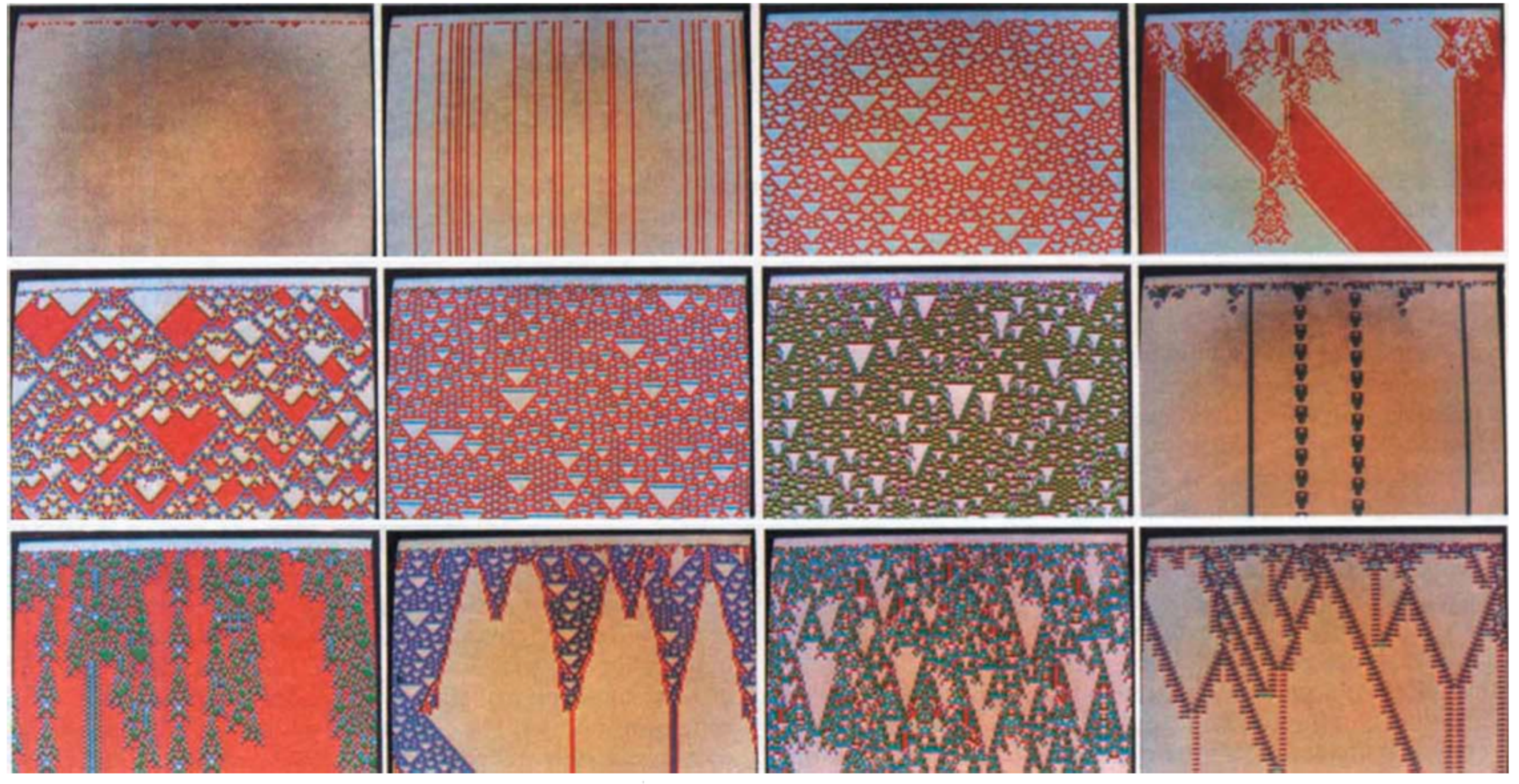
3) Crece indefinidamente a una velocidad fija. (hasta que alcanza el tam. maximo)

4) Crece y se contrae periódicamente.

En el caso 1 es interesante analizar el tiempo que tarda hasta desaparecer con el mismo valor del input pero distintas realizaciones (por ejemplo el 30% de las celdas ocupadas, pero en distintos lugares)

Autómatas Celulares en una dimensión

Ejemplos de Wolfram (1984, Nature, 311 pp:419)



Autómatas Celulares 2-D

Autómatas Celulares 2D

Definiciones de Vecindad

Vecindario Von Neumann
de alcance r

$$N_{i,j}^{(vN)} := \left\{(k,l) \in L \middle| |k-i| + |l-j| \leq r\right\}$$

Vecindario Moore
de alcance r

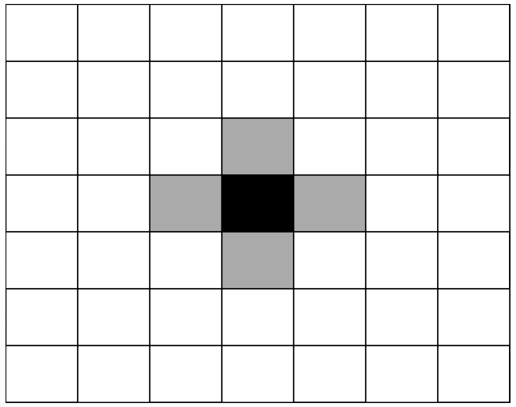
$$N_{i,j}^{(M)} := \left\{(k,l) \in L \middle| |k-i| \leq r \quad \text{and} \quad |l-j| \leq r\right\}$$

Autómatas Celulares 2D

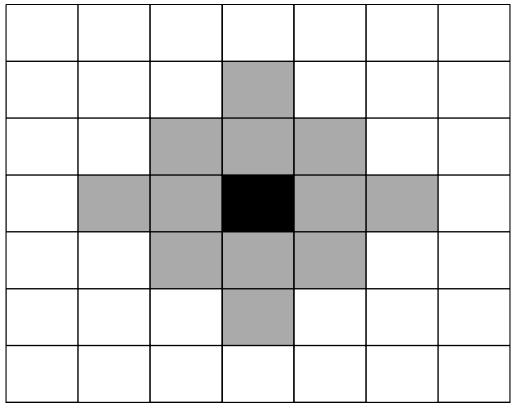
Definiciones de Vecindad

Von Neumann: sin incluir las diagonales
Moore: incluyendo las diagonales
Siempre hay que especificar si se incluyen o no

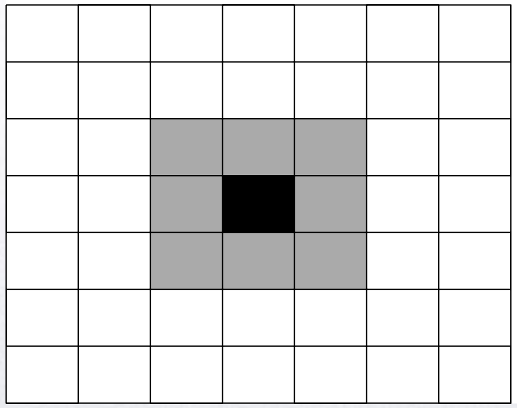
Von Neumann, $r = 1$

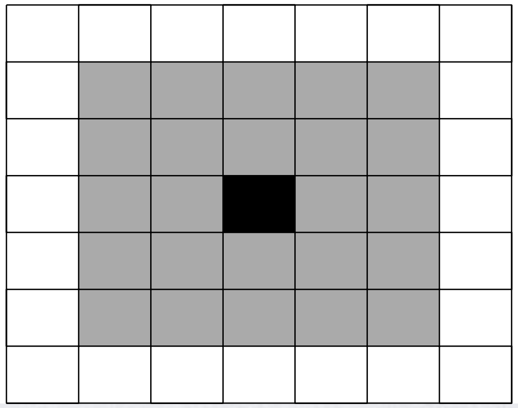


Von Neumann, $r = 2$



Moore, $r = 1$





Moore, $r = 2$

Autómatas Celulares 2D:
“Juego de la vida”

Autómatas Celulares 2D: "Vida"

En la década de 1970, Conway definió un autómata celular que simula la evolución de colonias de organismos vivos.

Las reglas son:

- Se considera 8 vecinos (Vecindad de Moore, $r = 1$).

- Cada celda tiene dos estados posibles "Viva" o "Muerta" ($k = 2$).

- Las Celdas Vivas, permanecerán vivas en el siguiente paso temporal si tiene 2 o 3 vecinos vivos, de lo contrario morirá.

- Las Celdas Muertas se transformarán en Vivas solamente si tiene exactamente 3 vecinos vivos.

Autómatas Celulares 2D: “Vida”

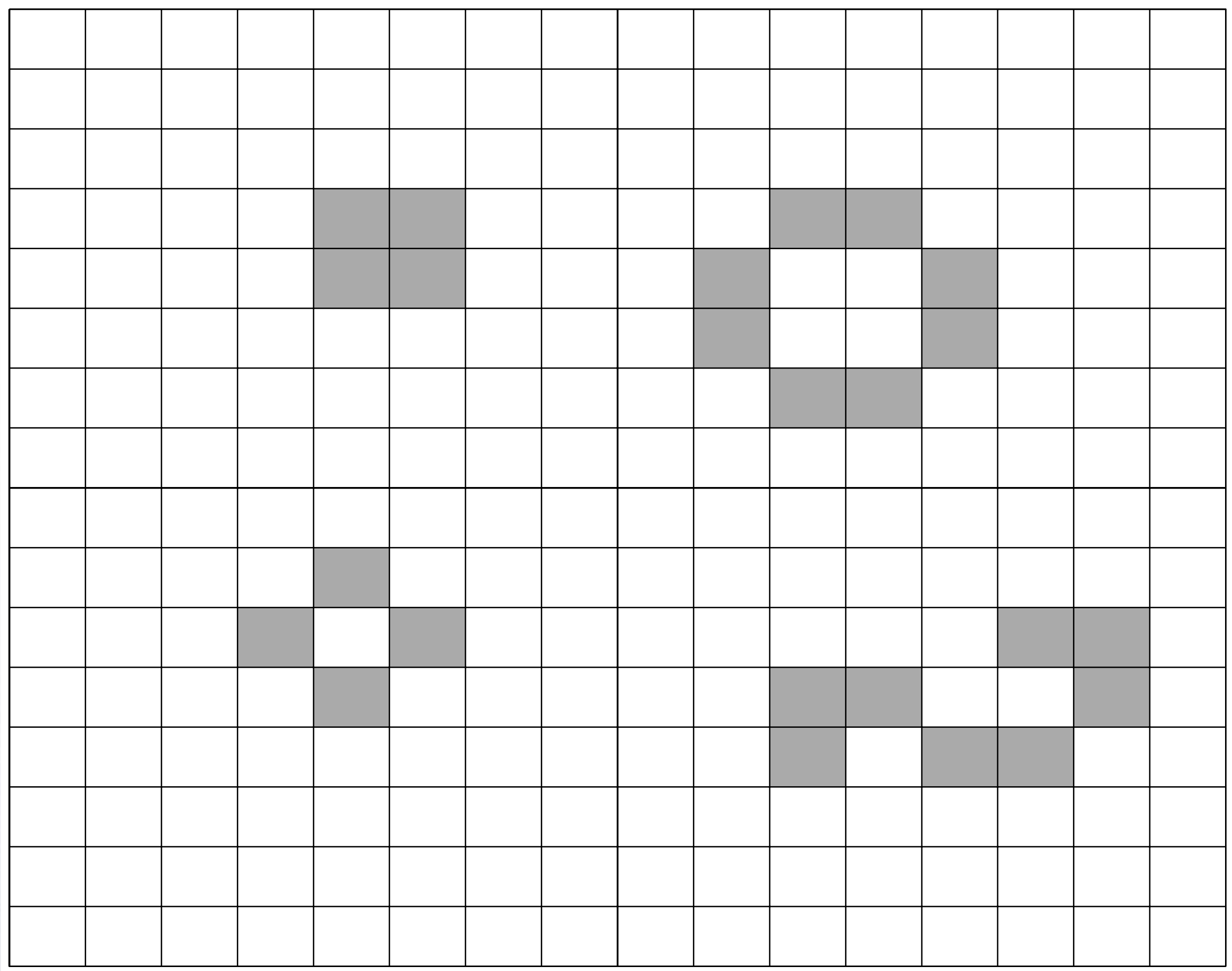
Implementación:

- Condición Inicial:
  Puede ser al azar (cada celda “Viva” o “Muerta”).
  Puede ser una configuración predeterminada.

- Condición de Contorno:
  Puede ser periódica o no.

Autómatas Celulares 2D: “Vida”

Patrones Estables

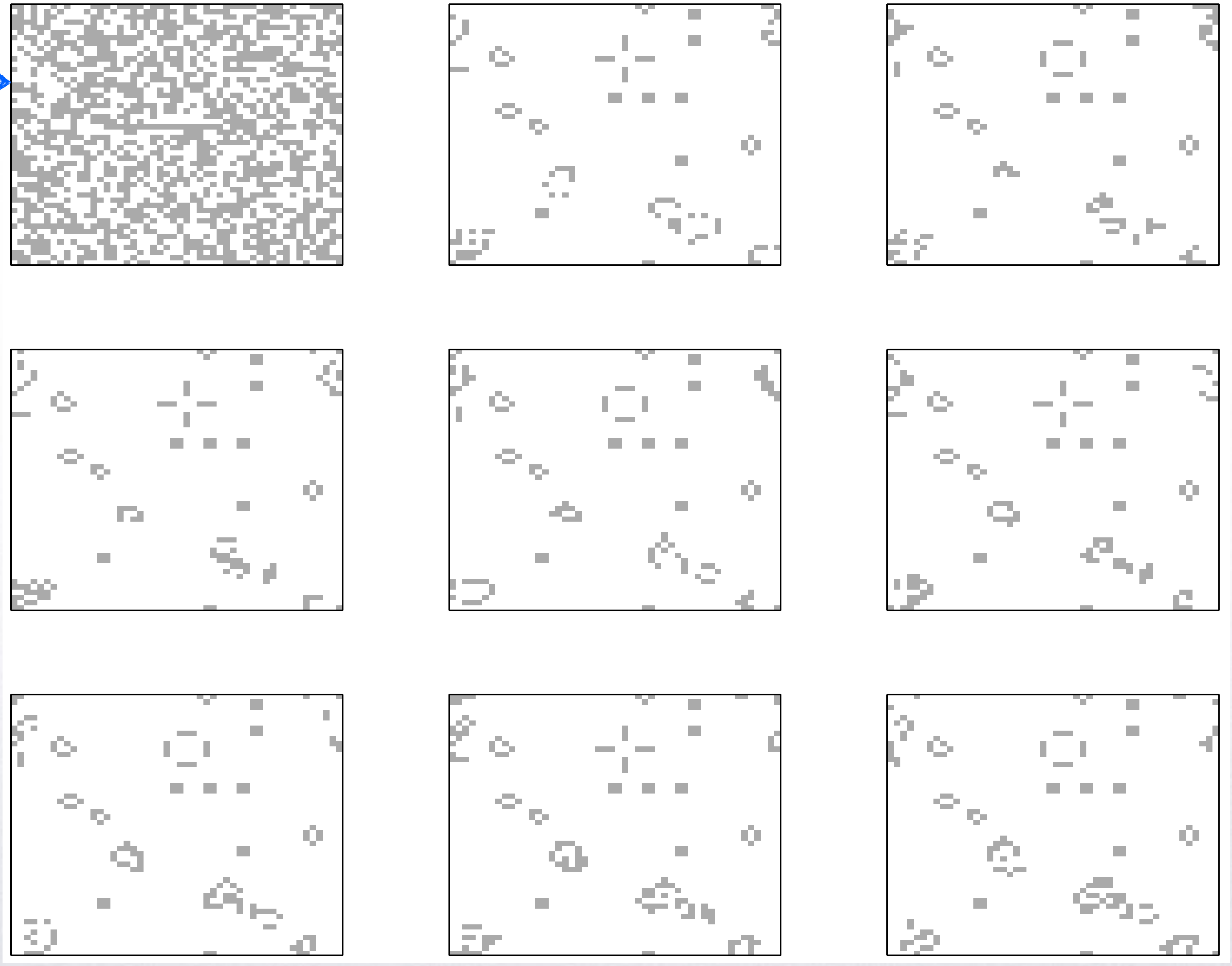


Autómatas Celulares 2D: "Vida"

Ejemplo de Evolución (50x50)

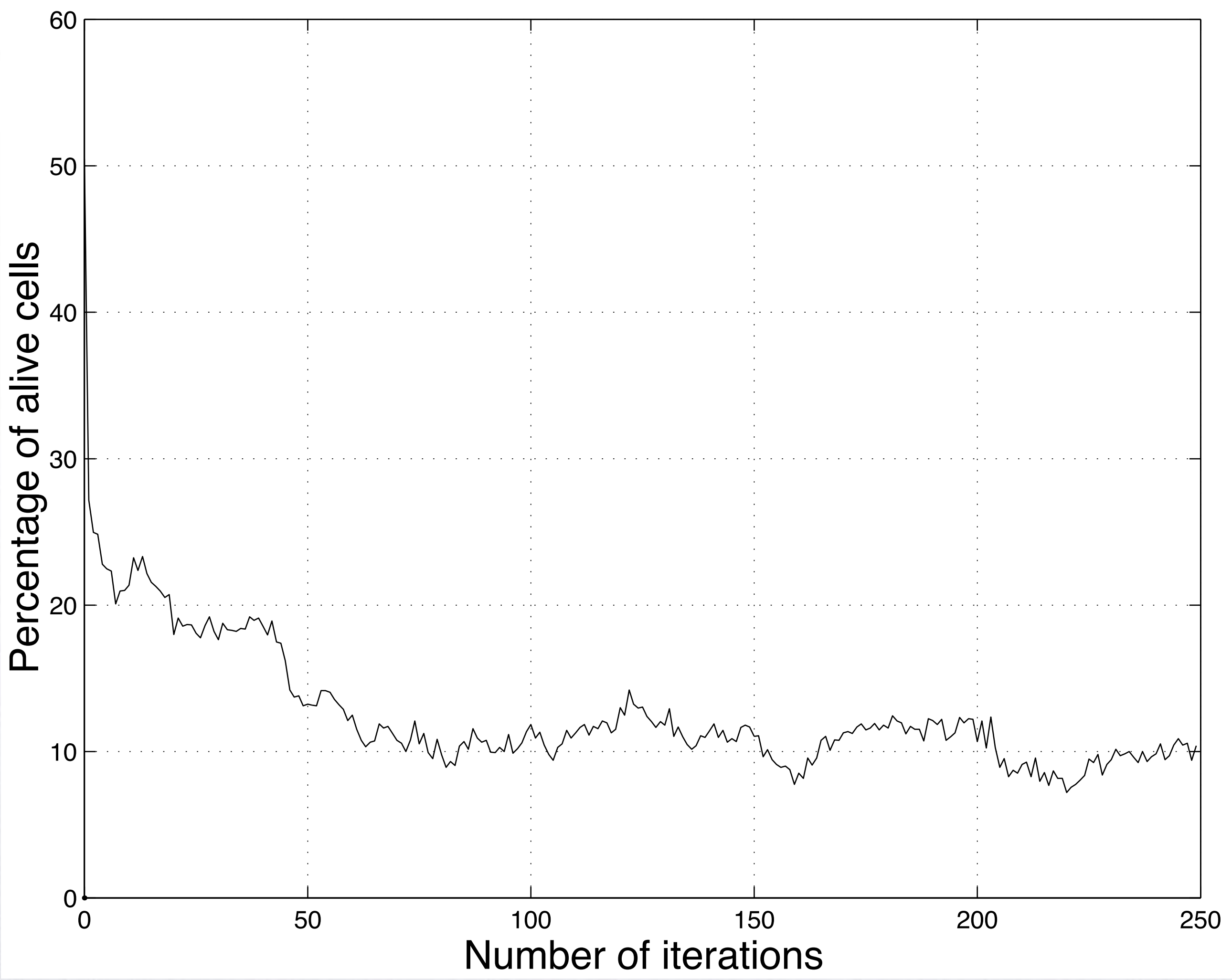
Estados a tiempos 141 a 148

Estado Inicial

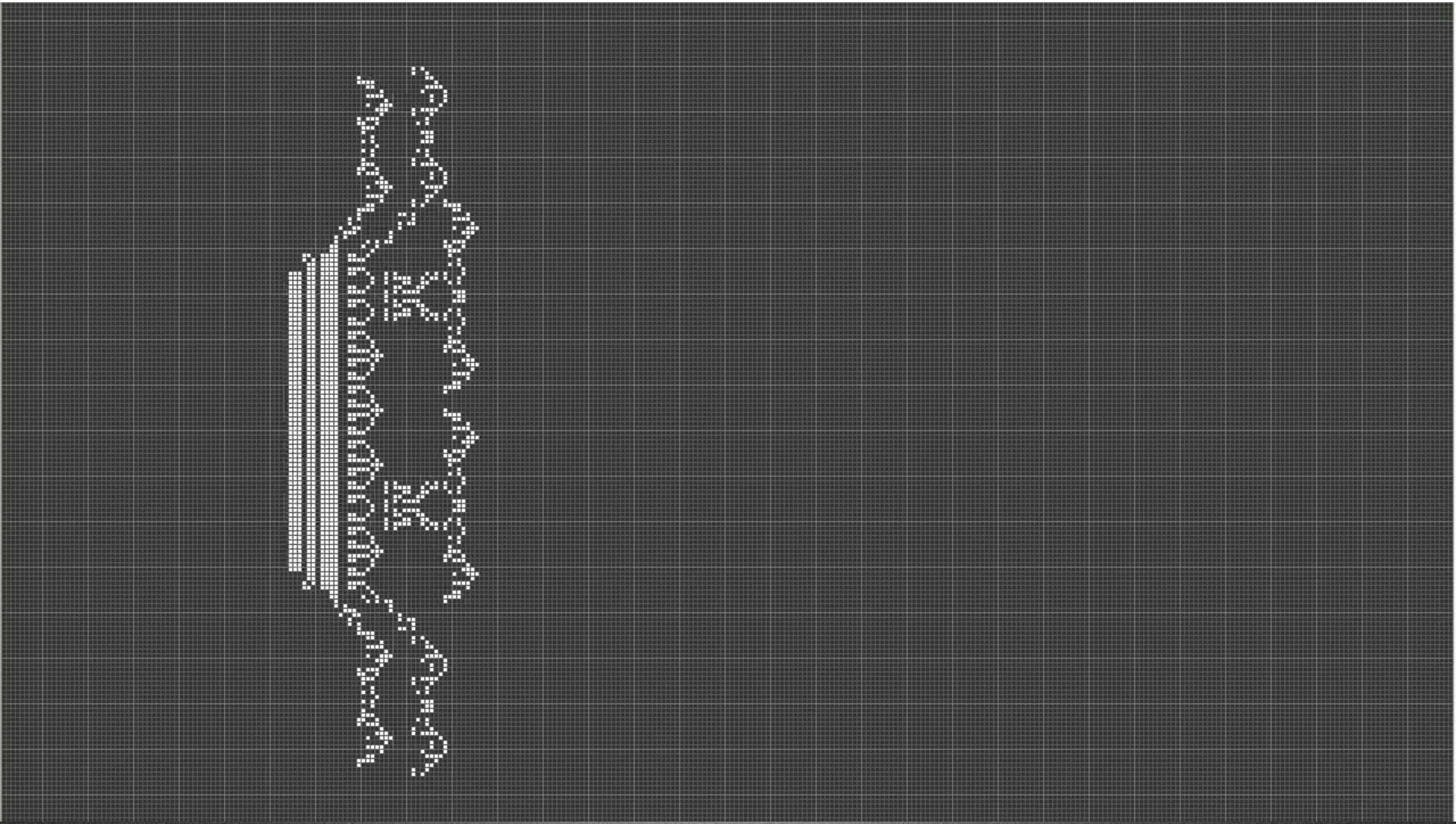


Autómatas Celulares 2D: “Vida”

Ejemplo de Evolución (50x50)

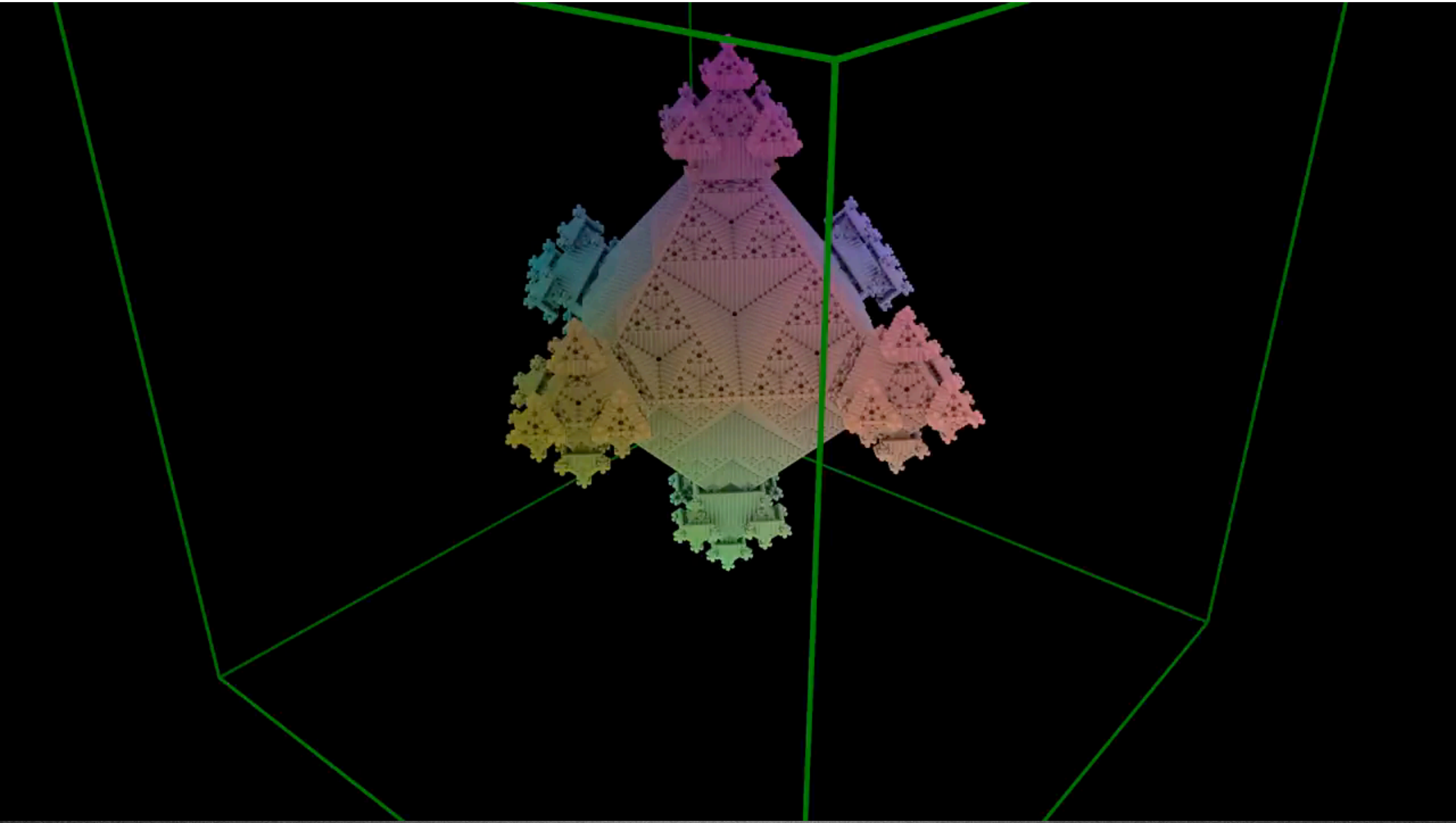


Autómatas Celulares 2D: "Vida"



"Game of life" 3D (tiempo)

Autómatas Celulares 3D (x,y,z)



Autómatas Celulares:
Modelos de Fluidos 2D “Lattice Gas”

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

(Antes) Ecuación de Navier Stokes

- Conservación de la masa
- Conservación de la energía
- Conservación del momento
- Hipótesis de medio Continuo

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla}P + \nu\nabla^2\boldsymbol{u}}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0 \longrightarrow \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0$$

Ecuación de Continuidad

+ Condiciones de Contorno

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

(Antes) Ecuación de Navier Stokes

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla}P + \nu\nabla^2\boldsymbol{u}}$$

Velocidad

Presión Cinemática
$P = p/\rho_0$

viscosidad

- Ecuaciones Diferenciales No Lineales.
- Solución Analítica en pocos casos.
- En general se usan métodos numéricos.

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Número de Reynolds

Velocidad Característica

Longitud Característica

$$\boxed{R_e = \frac{UL}{\nu}}$$

Número adimensional que considera fuerzas inerciales vs. viscosas

R_e << 1	Flujo Laminar	(es muy grande la viscosidad, por ejemplo miel)
R_e >> 1	Flujo Turbulento	

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

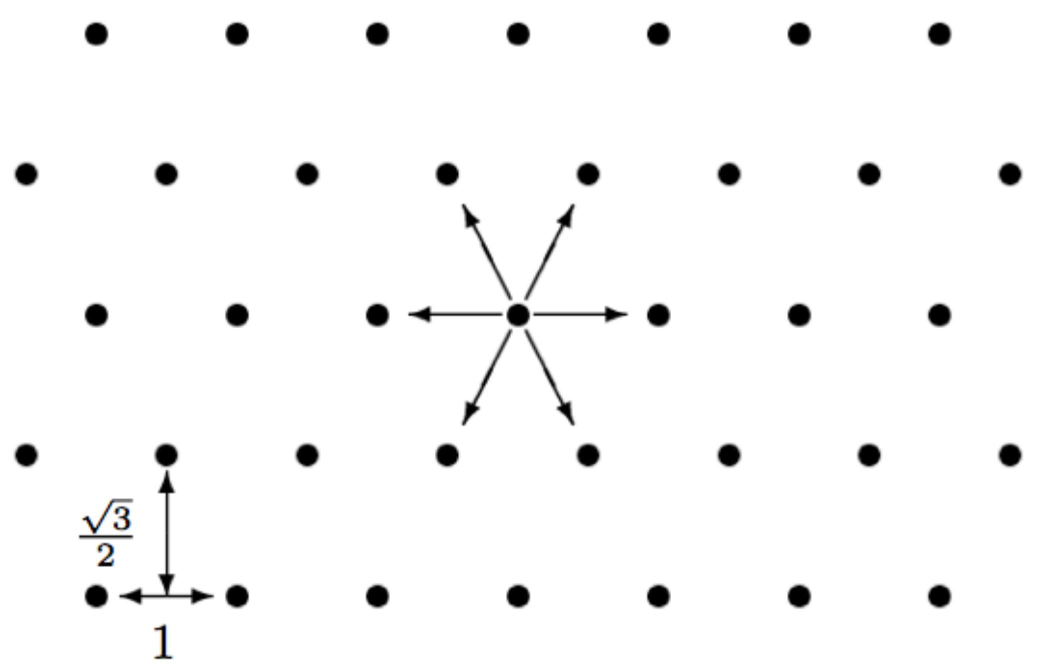
Modelo **FHP**

Frish, **H**asslacher, and **P**omeau (1986) definieron un modelo “lattice gas” que es equivalente a resolver las ecuaciones de Navier-Stokes

La ecuacion de navier stokes es una EDO no lineal que permite resolver problemas de fluidos (como el campo de velocidad). El modelo FHP se demostro que es equivalente a resolver la ecuacion de navier stokes para determinadas condiciones iniciales.

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Modelo **FHP**



- Retícula triangular con simetría hexagonal.

- Cada nodo tiene 6 primeros vecinos a la misma distancia.

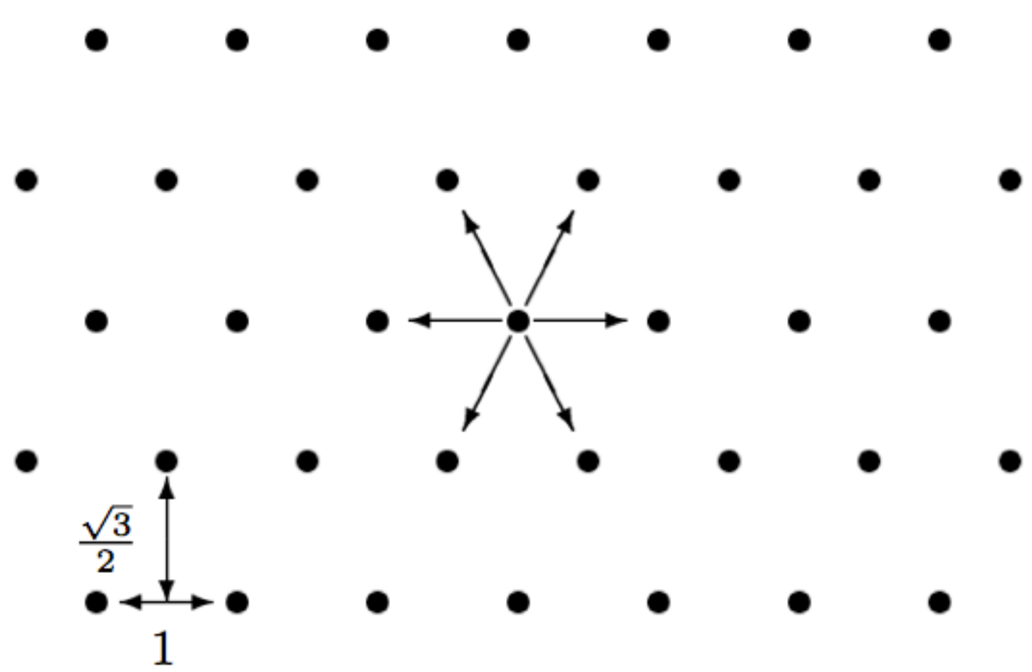
- Los vectores que unen estos nodos se llaman “lattice vectors” o velocidades de la retícula:

$$\boldsymbol{c}_i = \left(\cos\frac{\pi}{3}i, \sin\frac{\pi}{3}i\right), \quad i = 1, ..., 6.$$

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Modelo **FHP**

Cada punto es una celda, no una particula. Cada punto es el centro de la celda, y esta rodeada por un hexagono



r es el vector posición de un nodo.

$r + c_i$ son las posiciones de sus vecinos.

- Cada nodo tiene asociada una Celda.

- La Celda puede estar vacía u ocupada por varias partículas.

- Todas las partículas tienen la misma masa (=1) y son indistinguibles.

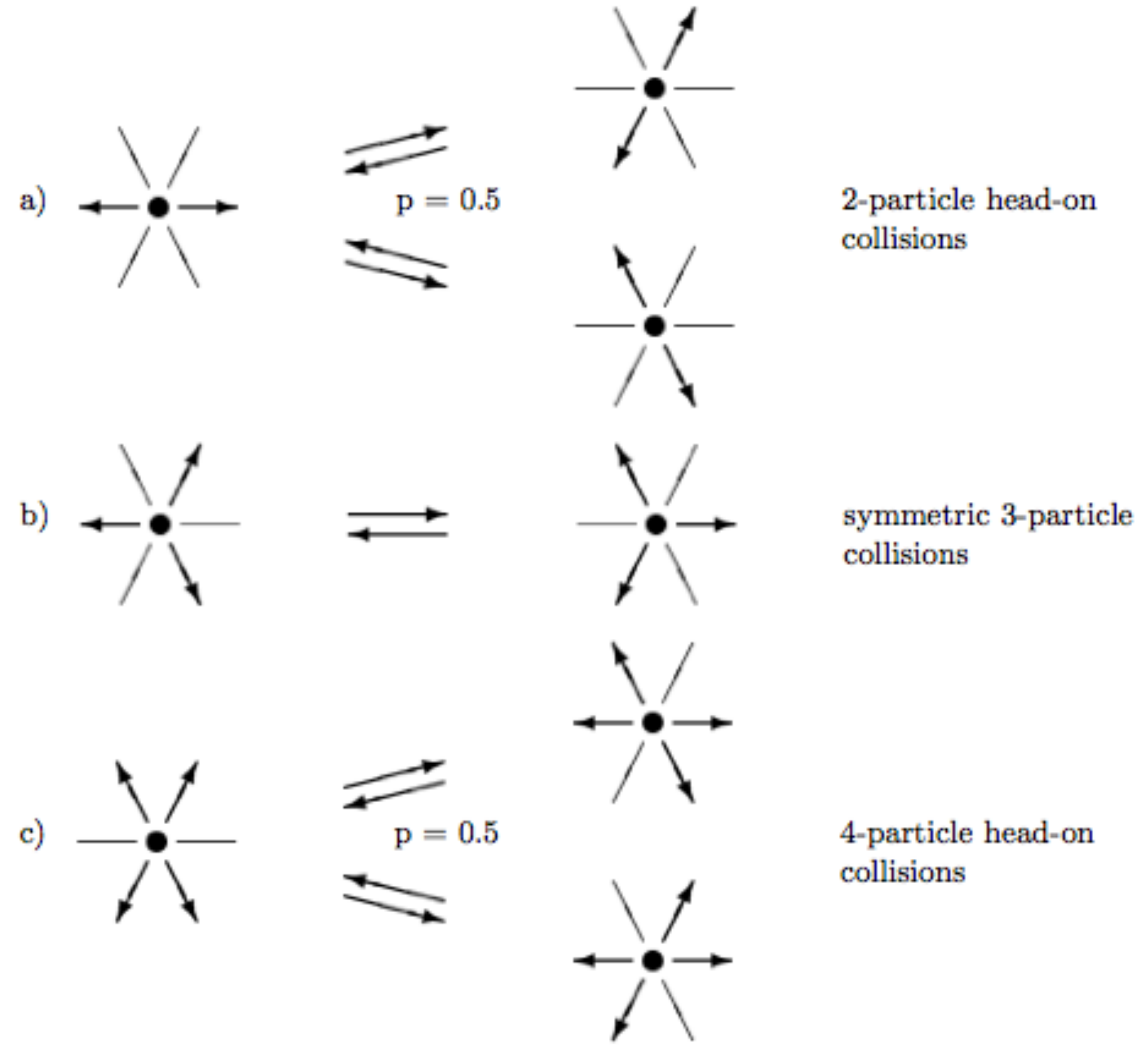
- Evolución. Cada paso temporal tiene 2 etapas:
  - Propagación (se mueve según velocidades).
  - Colisión (adquieren nuevas velocidades, según las reglas de colisión).

Las velocidades solo viven en la grilla. El modulo no cambia, porque en un paso temporal solo se puede avanzar una celda. Solo puede haber 6 posibles direcciones.

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

(porque todas las particulas tienen masa 1)

- **Todas las posibles colisiones deben conservar el momento (...además de la masa).**



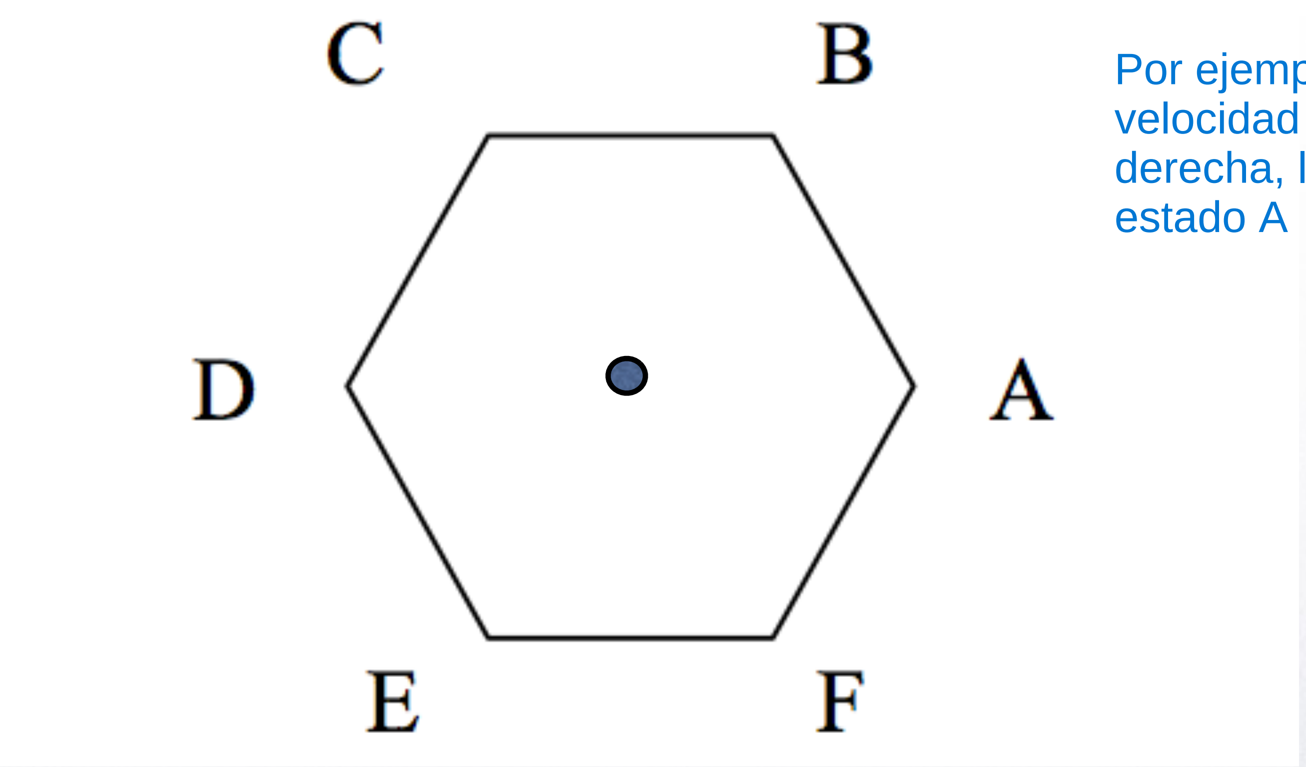
- Cómo serían las de 5 y 6 partículas?

- y las de 2 a 60º o 120º?

La unica forma de conservar el momento es dejar iguales (entonces se traspasan y no colisionan)

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Implementación: Codificación estado de cada Celda



Por ejemplo, si la velocidad es a la derecha, la celda tiene estado A

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Implementación: Codificación estado de cada Celda

	Bit Value							
	128	64	32	16	8	4	2	1
A	0	0	0	0	0	0	0	1
B	0	0	0	0	0	0	1	0
C	0	0	0	0	0	1	0	0
D	0	0	0	0	1	0	0	0
E	0	0	0	1	0	0	0	0
F	0	0	1	0	0	0	0	0
S	0	1	0	0	0	0	0	0
R	1	0	0	0	0	0	0	0

Las 6 posibles direcciones

Sólido

Random

Solido indica si no se mueve (por ejemplo es una pared)
Random se usa para tomar decisiones no detereministicas en determinadas colisiones

Hay 256 estados posibles.

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Implementación:
Ejemplo Tabla de mapeo de estados (sin considerar colisiones de 4 partículas)

Primero los que no cambian:
Desde 00000000 hasta 00111111
(de 0 a 63)
y
desde 10000000 hasta 10111111
(de 128 a 191)

Estas son todas las colisiones que no provocan cambios de un estado al siguiente

	Bit Value							
	128 R	64 S	32 F	16 E	8 D	4 C	2 B	1 A
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	0	0	1	1
...								
255	1	1	1	1	1	1	1	1

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Implementación:
Tabla de mapeo de estados

Presencia de sólido
Desde 01000000 hasta 01111111
(de 64 a 127)
y
desde 11000000 hasta 11111111
(de 192 a 255)

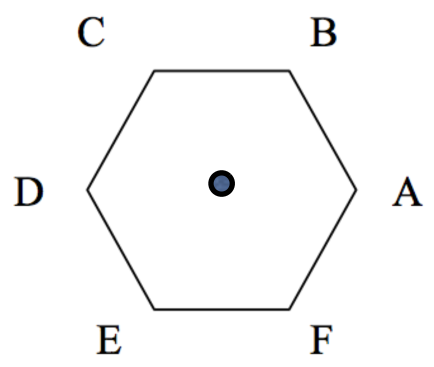
Al colisionar con un sólido la partícula regresa por donde vino: (se considera que el solido tiene masa infinita)

A pasa a D,

B pasa a E,

C pasa a F,

...

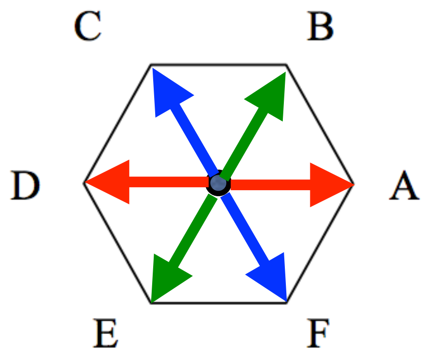


	In-State Bit Value							
	128 R	64 S	32 F	16 E	8 D	4 C	2 B	1 A
64	0	1	0	0	0	0	0	0
65	0	1	0	0	0	0	0	1
66	0	1	0	0	0	0	1	0
...								
127	0	1	1	1	1	1	1	1

	Out-State Bit Value							
	128 R	64 S	32 F	16 E	8 D	4 C	2 B	1 A
64	0	1	0	0	0	0	0	0
72	0	1	0	0	1	0	0	0
80	0	1	0	1	0	0	0	0
...								
127	0	1	1	1	1	1	1	1

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Implementación:
Tabla de mapeo de estados



Colisión Frontal Binaria
AD, BE y CF cada una puede pasar a cualquiera de las otras 2 con igual probabilidad.
Ejemplo:

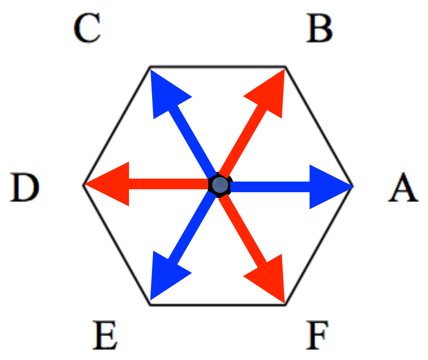
En este caso el random de la celda define para donde sale la colision (verde o azul)

	In-State Bit Value							
	128 R	64 S	32 F	16 E	8 D	4 C	2 B	1 A
9 (AD)	0	0	0	0	1	0	0	1
137 (AD)	1	0	0	0	1	0	0	1

	Out-State Bit Value							
	128 R	64 S	32 F	16 E	8 D	4 C	2 B	1 A
18 (BE)	0	0	0	1	0	0	1	0
164 (CF)	1	0	1	0	0	1	0	0

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Implementación:
Tabla de mapeo de estados



Finalmente, Colisión de 3 partículas:

En este caso el random no se usa

	In-State Bit Value							
	128 R	64 S	32 F	16 E	8 D	4 C	2 B	1 A
21 (ACE)	0	0	0	1	0	1	0	1
42 (BDF)	0	0	1	0	1	0	1	0
149 (ACE)	1	0	0	1	0	1	0	1
170 (BDF)	1	0	1	0	1	0	1	0

	Out-State Bit Value							
	128 R	64 S	32 F	16 E	8 D	4 C	2 B	1 A
42 (BDF)	0	0	1	0	1	0	1	0
21 (ACE)	0	0	0	1	0	1	0	1
170 (BDF)	1	0	1	0	1	0	1	0
149 (ACE)	1	0	0	1	0	1	0	1

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Condimentos Finales.

1 - Promedios Macroscópicos. Por lo menos16 x16 celdas y 10 pasos temporales.

2 - Fuerza Impulsora. Incluir momentum desde los bordes o cambiando con alguna probabilidad las velocidades de algunas celdas en una dirección deseada.

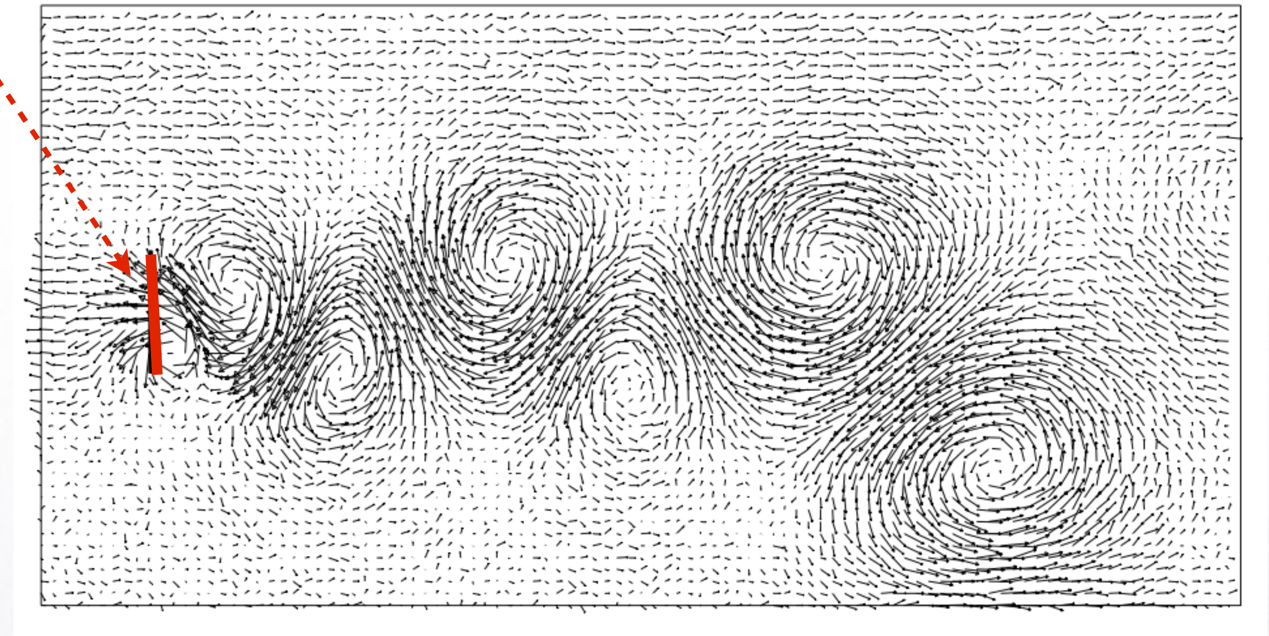
3 - Remapeo de la grilla hexagonal para cálculo de vecinos (ver biblio).

En resumen, para poder simular un fluido se necesita analizar promedios de un gran numero de celdas

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Ejemplo: Fluido alrededor de una barrera (de largo L).

- Grilla de 1929 x 960
- 100,000 pasos
- Promedios cada 32x32 celdas y cada 100 pasos temporales.



- Cómo se puede cambiar el nro. de Reynolds en estas simulaciones ?

Como nuestra simulacion no tiene viscosidad, para cambiar el nro. de Reynolds se puede agrandar o achicar la barrera (para tener un fluido mas laminar o mas turbulento)

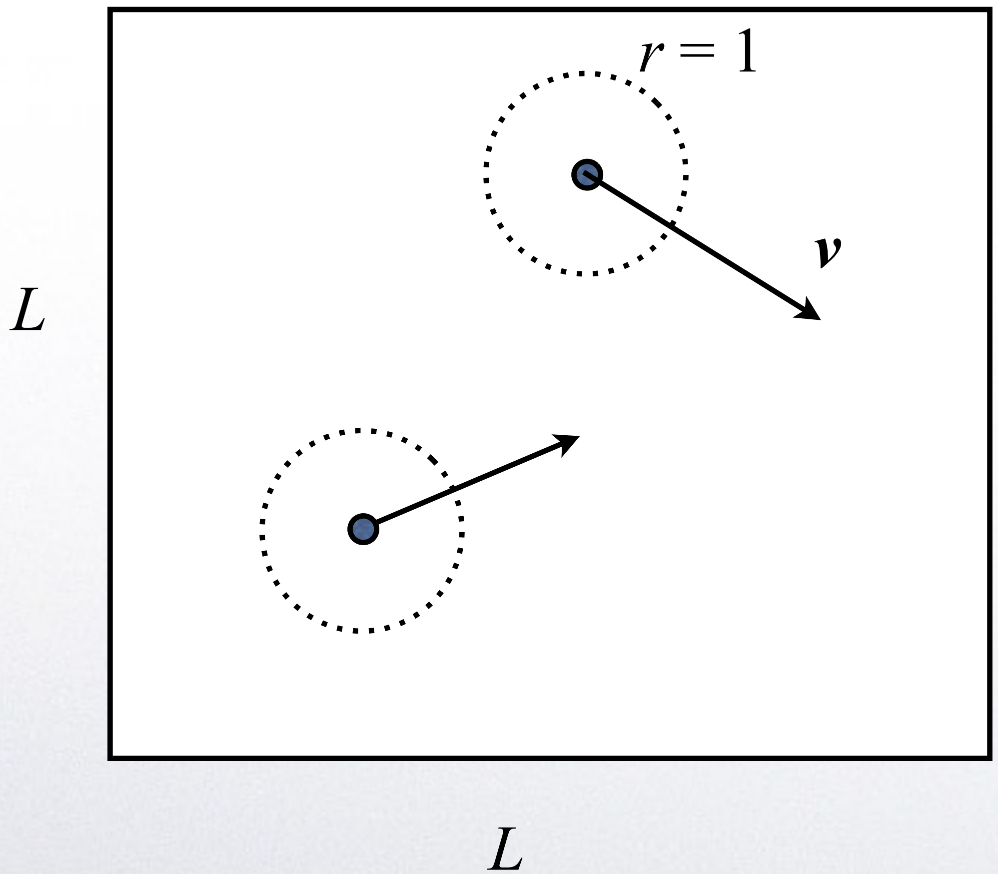
Autómatas Celulares:
“Off - Lattice”

Autómatas Celulares: "Off - Lattice"

Off Lattice porque las particulas viven en el espacio real, por lo que no estan dentro de una grilla

Bandadas de agentes autopropulsados

Vicsek et al. (1995)



Definiciones:

- Cada partícula es puntual y se mueve en el continuo dentro de la celda de lado L.

- r es el radio de interacción entre partículas.

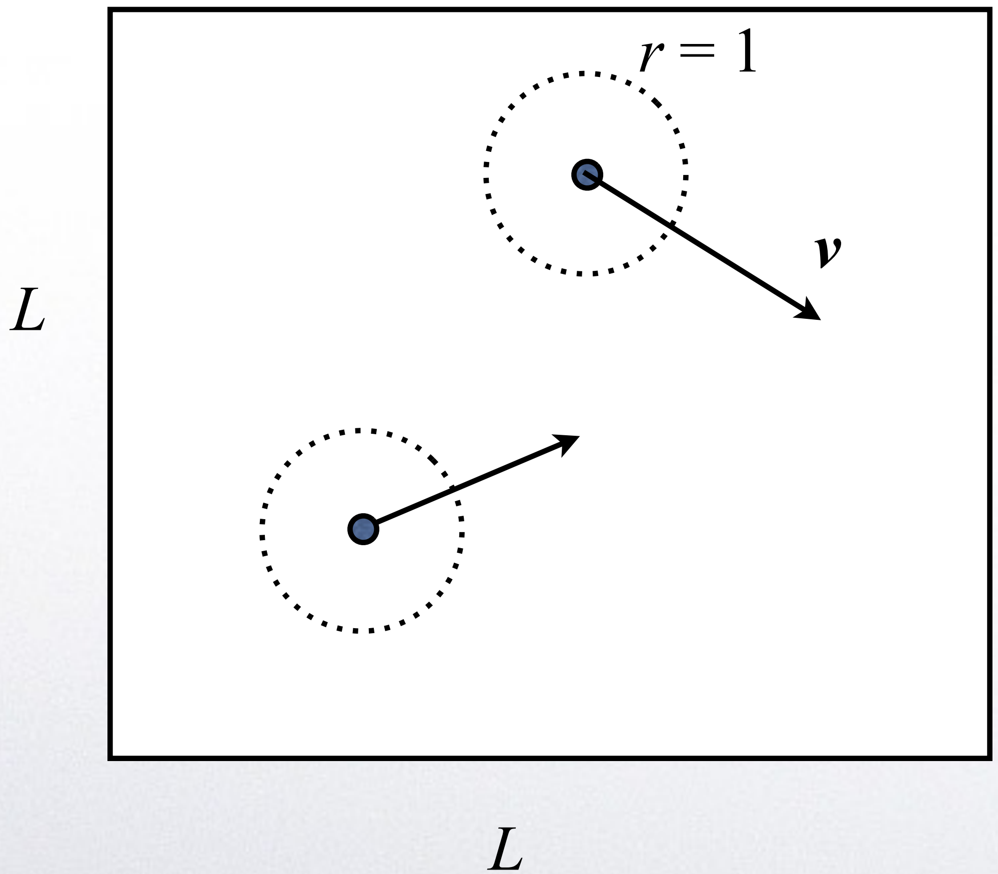
- $\boldsymbol{v}$ es la velocidad de módulo v y dirección dada por el ángulo θ.

- El paso temporal es $dt = 1$.

Vamos a necesitar saber que particulas estan en el radio de interaccion de las demas (LCI)

Autómatas Celulares: "Off - Lattice"

Bandadas de agentes autopropulsados



Condiciones Iniciales:

- a $t = 0$, se generan N partículas distribuidas rendom en la celda.

- Todas tienen igual modulo $v = 0.03$.

- Y direcciones θ distribuidas random.

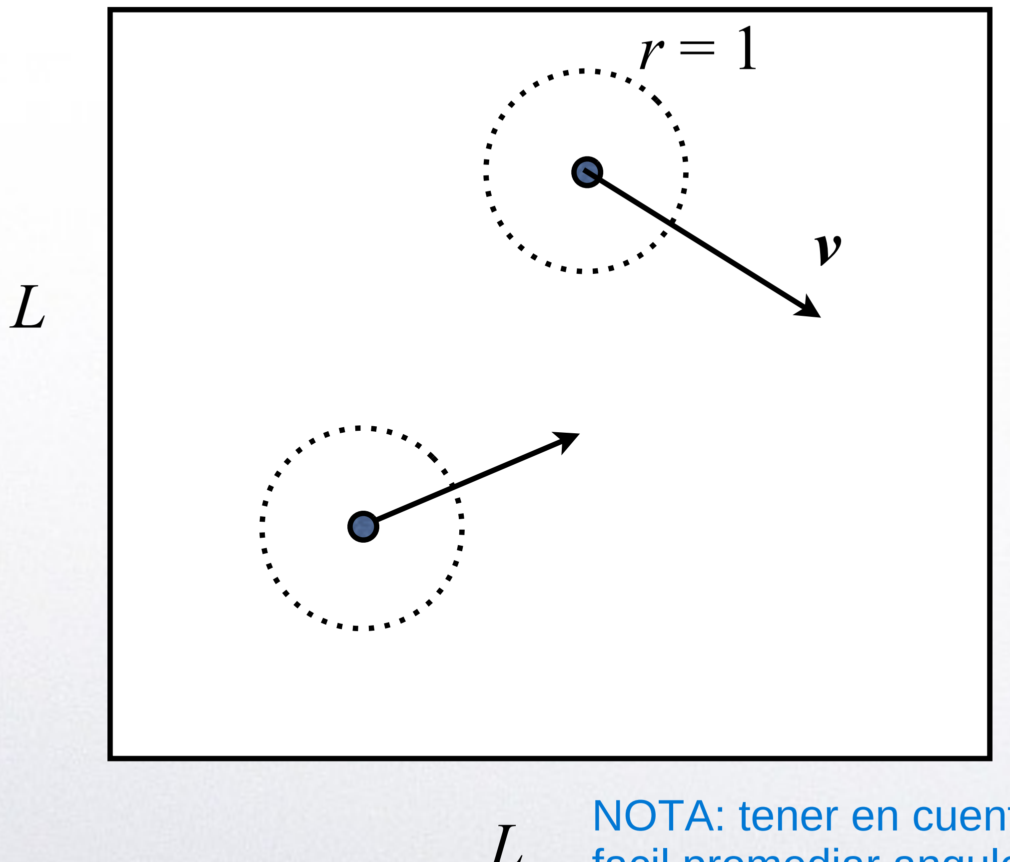
Autómatas Celulares: "Off - Lattice"

Bandadas de agentes autopropulsados

El modulo de velocidad es siempre el mismo, lo que va a cambiar es el angulo de la velocidad. Las particulas son puntuales, por lo que nunca van a chocar. Pero si tienen un radio de interaccion.

Evolución temporal:

<> Significa promedio



$$\mathbf{x}_i(t+1) = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{v}_i(t)\Delta t.$$

$$\theta(t+1) = \langle \theta(t) \rangle_r + \Delta\theta,$$

donde $\langle \theta\ (t) \rangle_r$ es el promedio de los ángulos de todas las partículas dentro de r incluyendo la propia partícula:

$$\mathrm{arctg}[\langle \sin(\theta(t)) \rangle_r / \langle \cos(\theta(t)) \rangle_r].$$

atan2[

Usar arcotangente esta mal, porque no tiene la imagen en los 4 cuadrantes, en cambio hay que usar ATAN2]

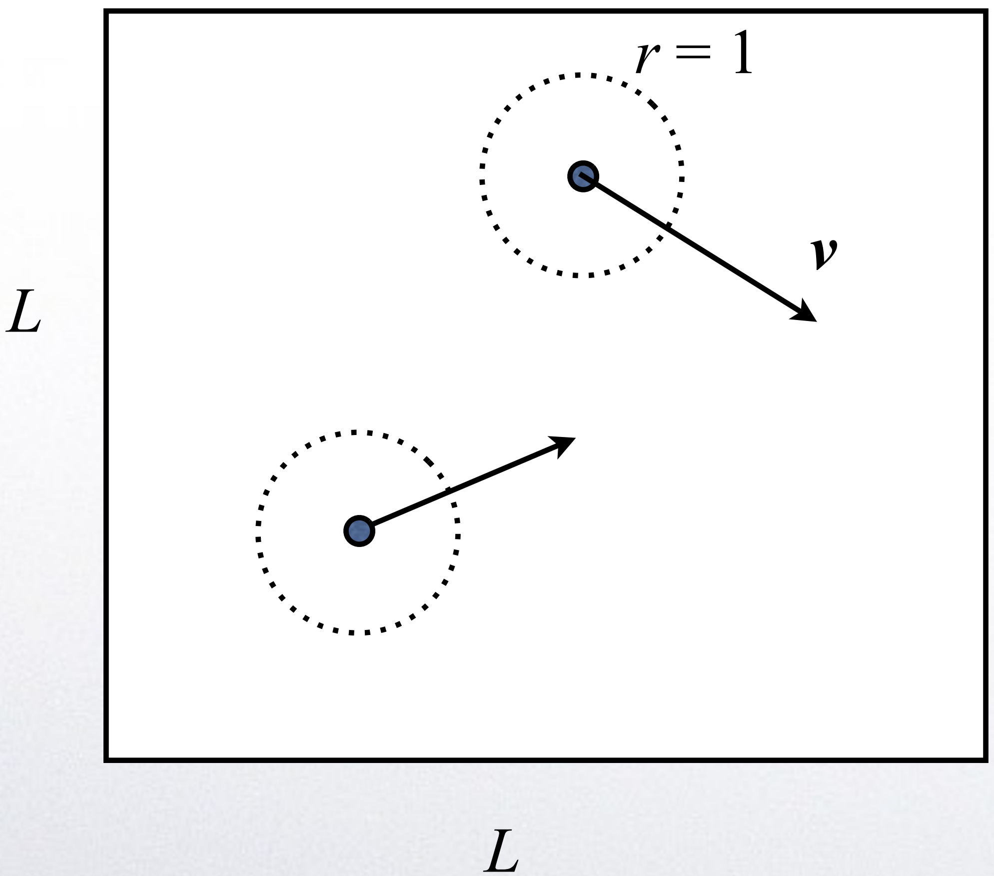
NOTA: tener en cuenta que NO es facil promediar angulos. Por ejemplo, el promedio entre 1 grado y 359 grados nos da 180, pero quisieramos que de 0

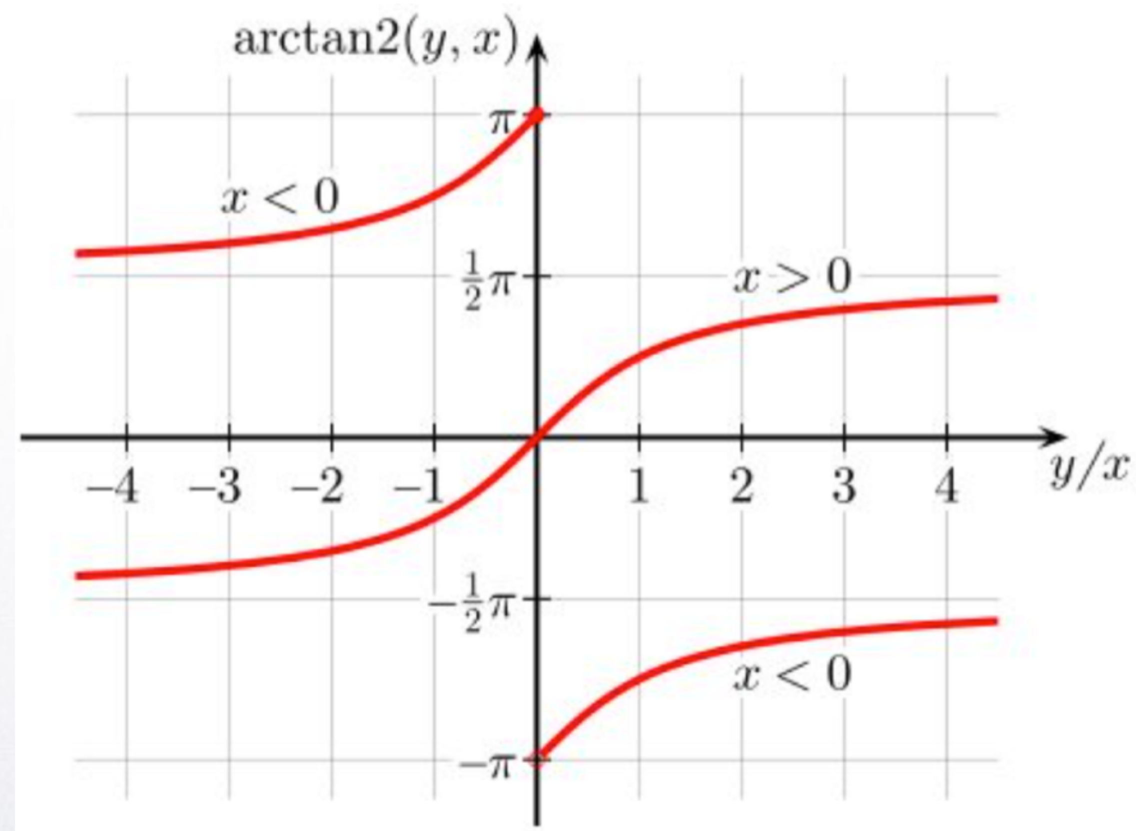
Y $\Delta\theta$ es un ruido uniforme entre [-η/2, η/2].

Autómatas Celulares: "Off - Lattice"

Bandadas de agentes autopropulsados

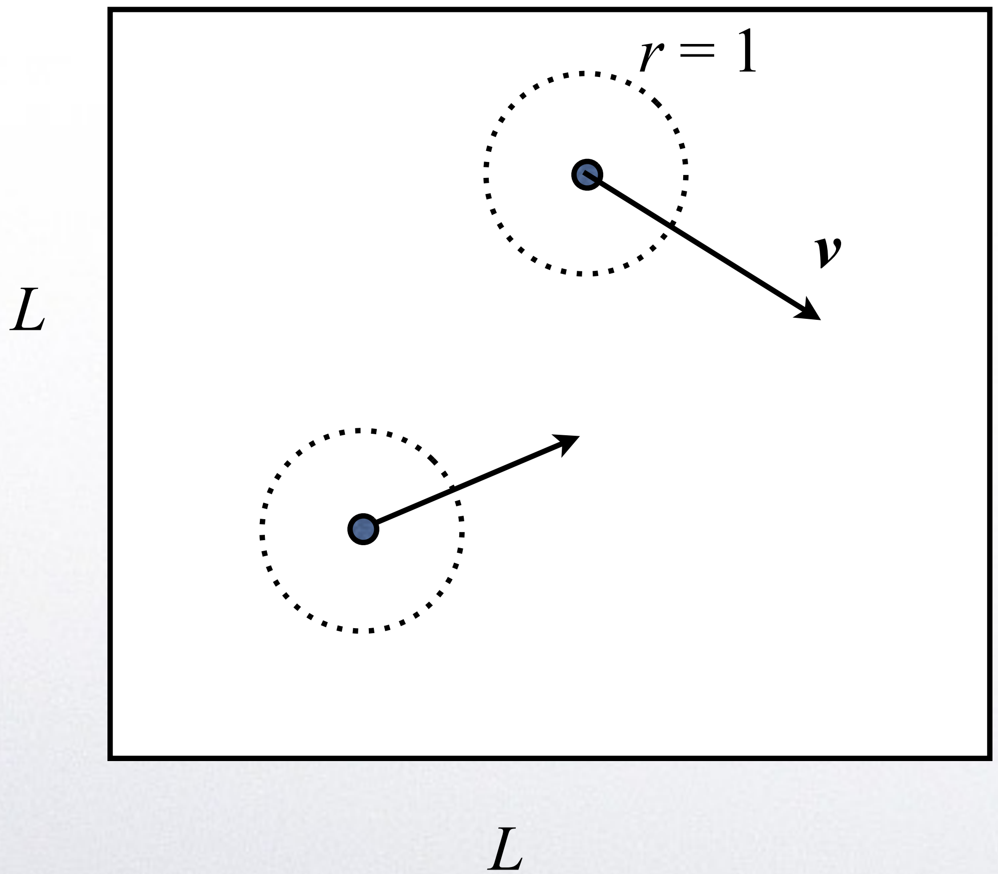
atan2[ ]





Autómatas Celulares: “Off - Lattice”

Bandadas de agentes autopropulsados



Entonces el sistema tiene 3 variables relevantes:

Modulo de la velocidad (v), Densidad ($\rho = N/L^2$) y Amplitud del ruido (η).

Se define el parámetro de orden (v_a) como:

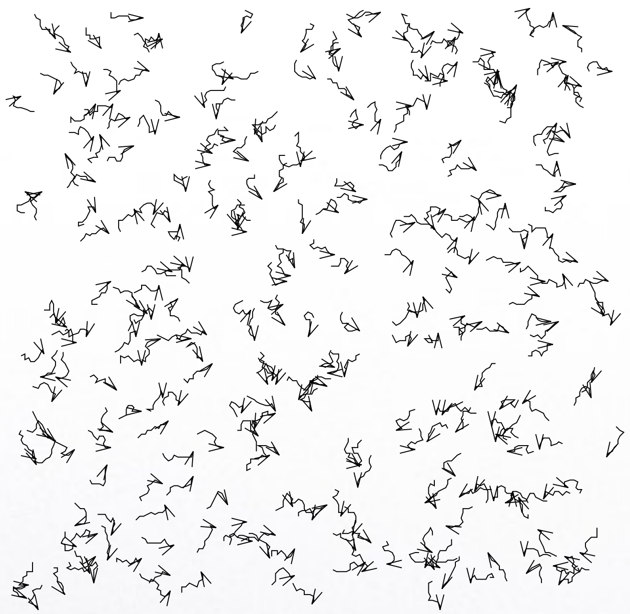
$$v_a = \frac{1}{Nv}\left|\sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i\right|$$

El promedio de las velocidades dividido N y el valor de la velocidad, le llamamos polarizacion.
Va a dar 0 (desorden) si las particulas apuntan todas en direcciones distintas, y 1 (orden) si estan yendo todas para el mismo lado.

El cual tiende a cero para total desorden y a 1 para partículas “polarizadas”.

Autómatas Celulares: “Off - Lattice”

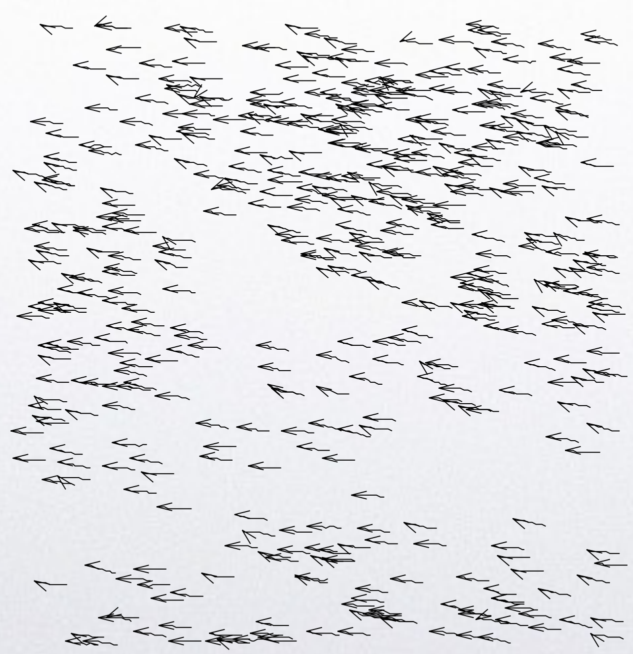
Bandadas de agentes autopropulsados



$v_a \longrightarrow 0$ para total desorden.

$(N{=}300,\ L{=}7,\ \eta{=}2)$

Valor alto de ruido,
entonces las particulas
van en desorden



$v_a \longrightarrow 1$ para partículas “polarizadas”.

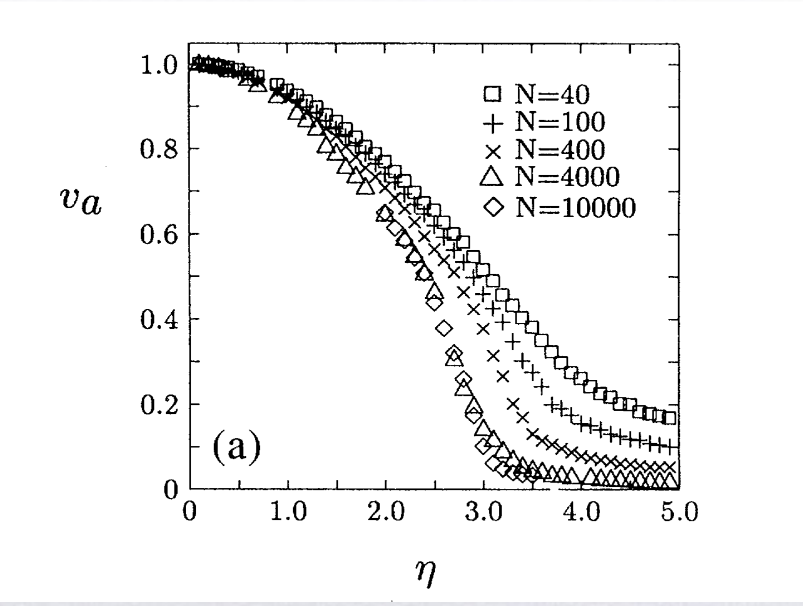
$(N{=}300,\ L{=}5,\ \eta{=}0.1)$

Autómatas Celulares: "Off - Lattice"

Bandadas de agentes autopropulsados

Bajas densidades y bajo ruido, se tienden a formar grupos que se mueven coherentemente.

(N=300, L=25, η=0.1)



A medida que se aumenta el ruido, el valor de la polarizacion va disminuyendo

Se puede estudiar como varía v_a por ejemplo con η.

Autómatas Celulares

Informe

- Formato:

Hay que tener en cuenta que lo que reportemos tiene que estar en el mismo patron

- Redacción Técnica.
- Ecuaciones numeradas.
- Afirmaciones, Conclusiones, descripciones BASADAS en DATOS
- Figuras: Referenciarlas, Leyendas, Ejes, Tamaño de Fuente...
- PROMEDIAR varias REALIZACIONES.
- Usar Latex (Ej.: www.overleaf.com).

Hay que citar quien creo el modelo, etc

- Ver documentación en “.../GuíasFormato/“.

Autómatas Celulares

Fin