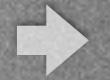




# Simulación de Sistemas

---

Clase Teórica 5:  
Medios Granulares



# Medios Granulares

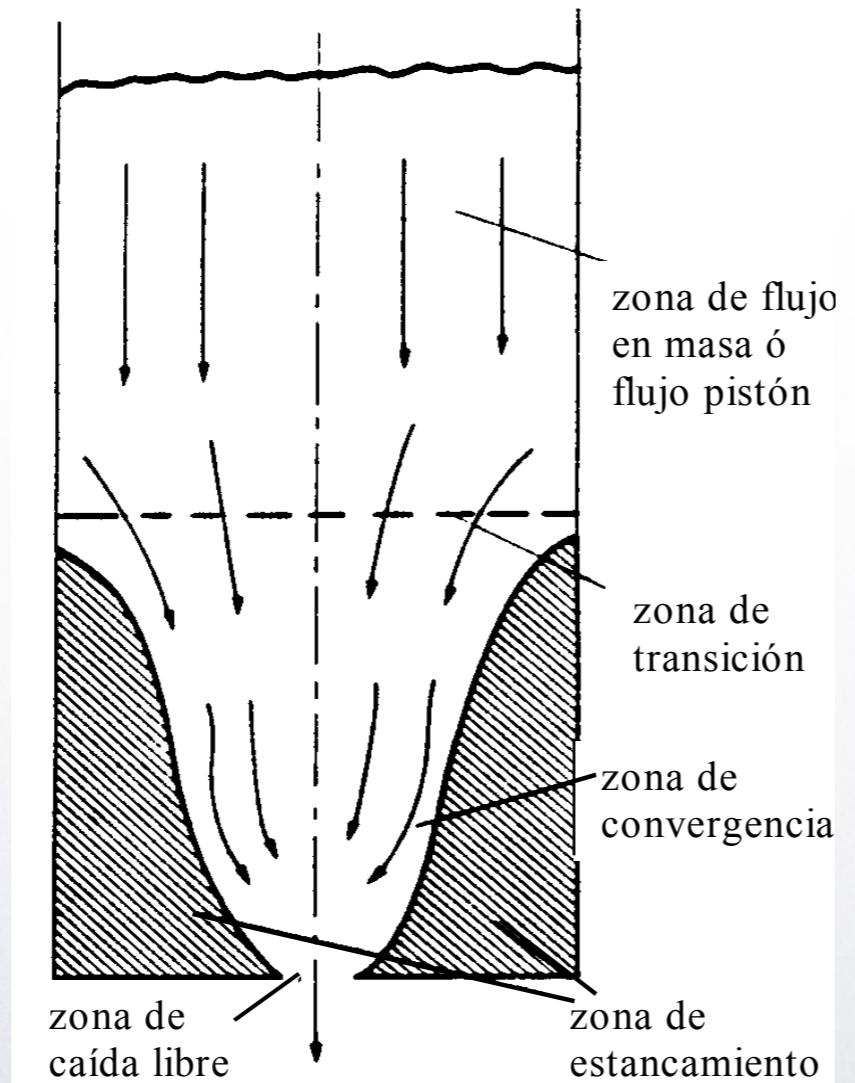
## Definición

- Sistema constituido por muchas partículas macroscópicas (granos, pellets, arena, polvo, etc).
- Interacciones a través de fuerzas de contacto normales (deformación viscoelástica) y tangenciales (rozamiento).
- Interacciones altamente disipativas, el sistema llegue al reposo si no recibe energía del exterior (gravitatoria, vibración del contenedor, etc) o propias (autopropulsión).
- Las características muy particulares. Comportamiento distinto al de sólidos, líquidos y gases (¿nuevo estado de la materia?). Ejemplo la presión NO depende de la altura de la columna.



# Medios Granulares

Ejemplo flujo granular gravitatorio en Silos



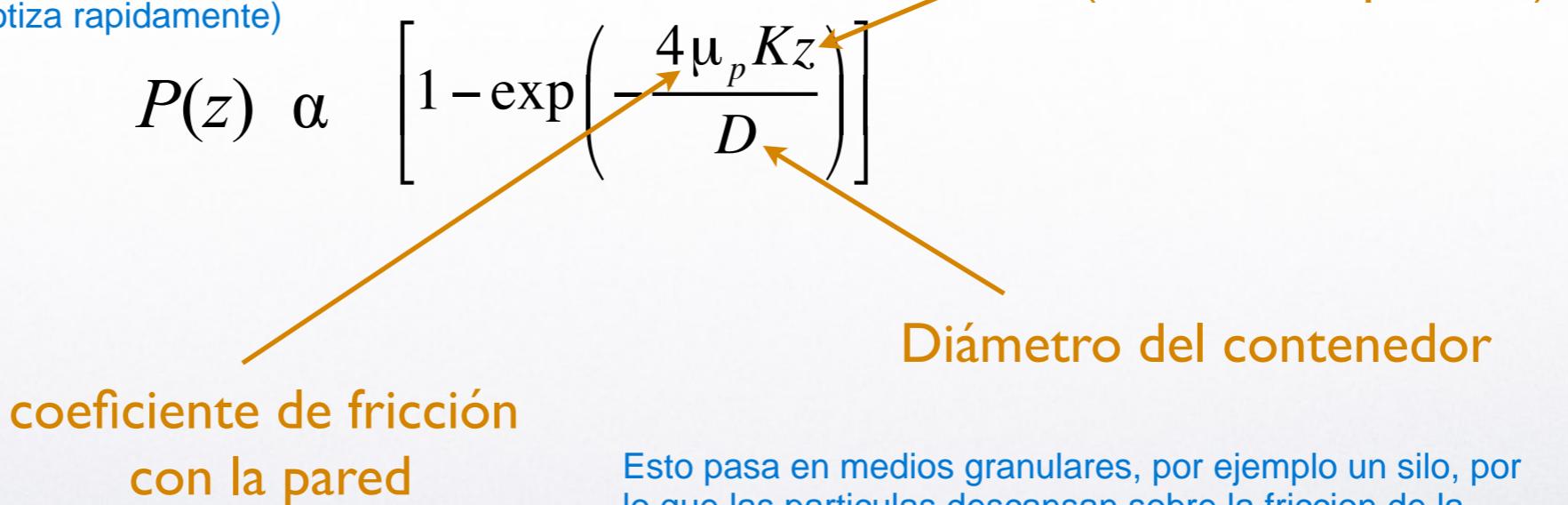


# Medios Granulares

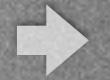
## Propiedades

Ley de Janssen (1895): La presión dentro del medio granular crece asintóticamente con la profundidad.

Por ejemplo en el agua, que mientras mas profundo hay mas presion. Esto no pasa en los medios granulares (en realidad solo un poco, porque se asintotiza rápidamente)



Esto pasa en medios granulares, por ejemplo un silo, por lo que las partículas descansan sobre la fricción de la pared. Esto no pasaría si las paredes no tuvieran fricción.



# Medios Granulares

## Propiedades

Ley de Beverloo (1961): Caudal ( $Q$ ) constante de un silo que se obtiene por análisis dimensional.

g: gravedad  
d: apertura del silo  
c: coeficiente de corrección

$$Q \approx n_p \sqrt{g} (d - cr)^{2.5} = B (d - cr)^{2.5}$$

Exponente para silo 3D  
(para 2D es 1.5)

radio medio partículas

Diámetro apertura de salida

Nro. de partículas por  
unidad de volumen

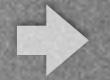
Esto NO es la densidad del  
material, solo cuenta  
cantidad de partículas

Entonces, el ancho de apertura se va a  
corregir a un ancho efectivo. No tendría  
sentido que  $cr$  sea negativo, ni que  $c$  sea  
muy grande ni muy chico. ( $c$  puede ser  
0.5, 1, 2 y valores así)



# Medios Granulares

Simulaciones de Medios Granulares



# Medios Granulares

## Simulaciones

- Sistemas densos:  $t_{choque} \gg t_{vuelo}$
- Método de Elemento Discreto: Dinámica molecular para granulares.
- Uno de los modelos pioneros: Cundall y Strack (1979).



# Medios Granulares

## Simulaciones

### Notación:

$\mathbf{g}$  Fuerza de Gravedad que apunta en ( $-\hat{\mathbf{y}}$ )

$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  velocidad

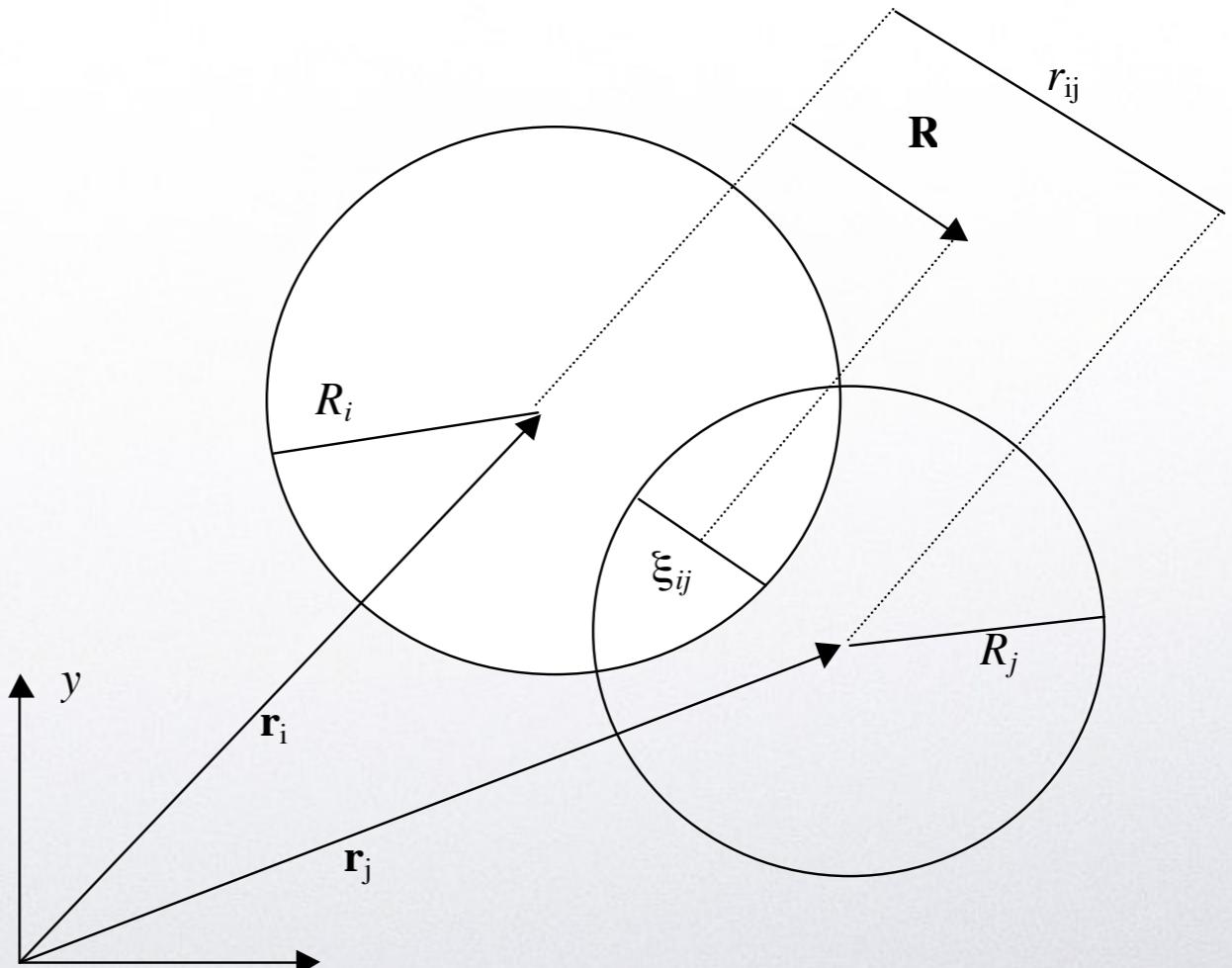
$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$  aceleración

$\dot{\mathbf{r}}_{rel}^c = (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j)$  velocidad relativa entre partículas.  
(diferencia de velocidades)

$\xi_{ij} = R_i + R_j - |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$  Superposición

En la vida real, las partículas no se superponen sino que se deforman. Por ejemplo, al chocar dos pelotas de tenis estas se deforman almacenando energía potencial.

### Definición variables geométricas





# Medios Granulares

## Simulaciones

Notación:

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{\mathbf{r}}_i)$$

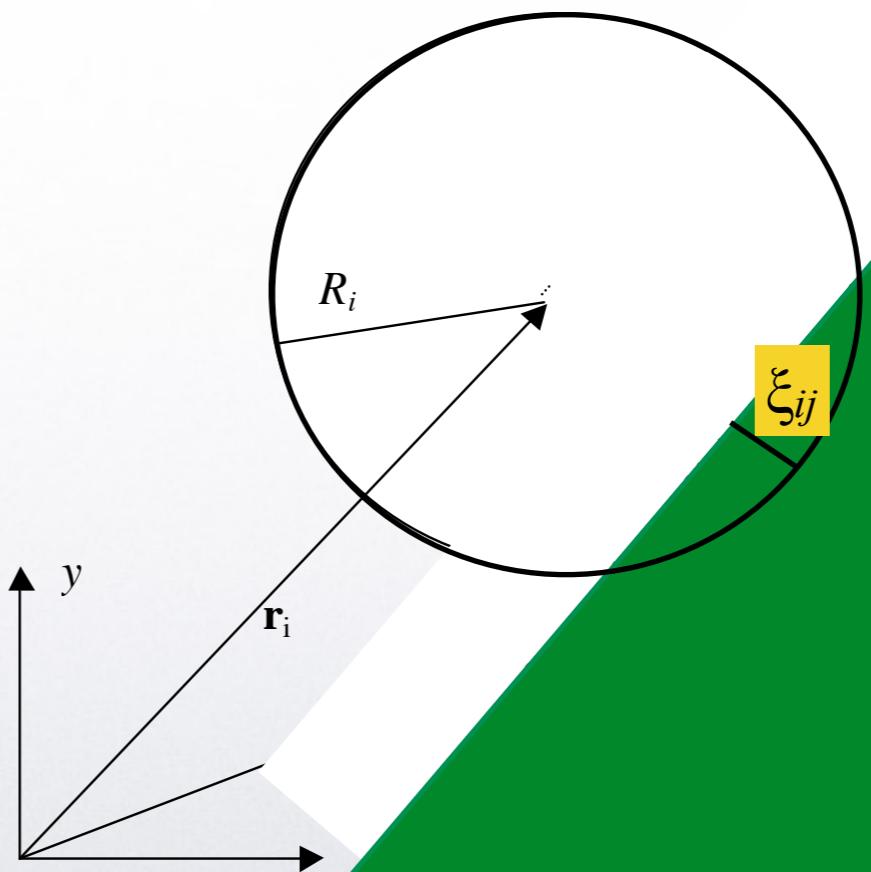
velocidad relativa entre  
partícula pared.

$$\xi_{ij} = R_i - |\mathbf{r}_{ip}|$$

Superposición

Definición variables geométricas

De forma análoga, vamos a modelar superposición con la pared en vez de deformaciones (porque es más fácil de hacer y podemos calcular la fuerza ejercida de similar manera)





# Medios Granulares

## Simulaciones

Se integran numéricamente las ecuaciones de movimiento acopladas,

### Traslaciones

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=\text{vecinas en contacto}} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_g$$

Todas las partículas van a sentir la fuerza de gravedad en su centro de masa, y la suma de fuerzas por las partículas ejercidas que están en contacto  
 $i = 1, \dots, N$

### Rotaciones

$$I_i \ddot{\theta}_i = \sum_{j=\text{vecinas en contacto}} \mathbf{M}_{ij}$$

En el TP, no hace falta modelar la rotación, solo la traslación.  
Para hacerlo, tenemos que calcular el torque como el vector del centro de la partícula hasta el punto de contacto, producto vectorial el vector de fuerza en el punto de contacto

donde  $I$  es el momento de inercia y  $M$  es el torque definido como:

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$$

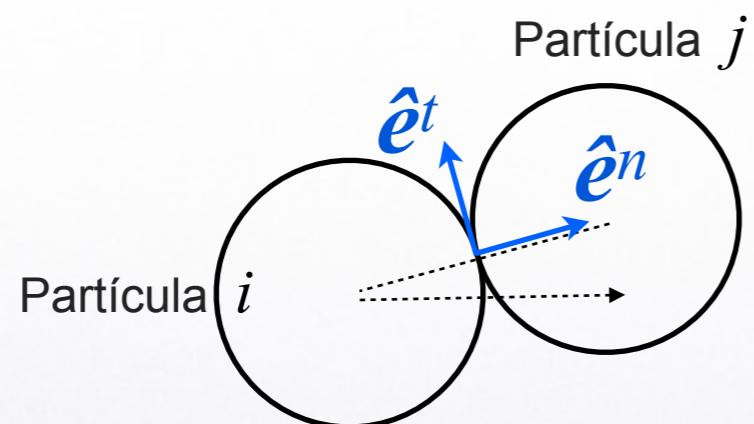


# Medios Granulares

## Simulaciones

### Definición variables geométricas

Durante la Colisión “Partícula - Partícula”



Para calcular la fuerza de rozamiento y la que no es de rozamiento, la dividimos en fuerza en la dirección normal y tangencial (rozamiento).

$\hat{e}^t$  versor tangencial al contacto

$\hat{e}^n$  versor normal al contacto

$$\hat{e}^n = (e_x^n, e_y^n)$$

$$\hat{e}^t = (-e_y^n, e_x^n)$$

Tangencial en X: el negativo de la normal en Y

Tangencial en Y: la normal en X

Donde:

$$e_x^n = (x_j - x_i) / |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$$

$$e_y^n = (y_j - y_i) / |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$$

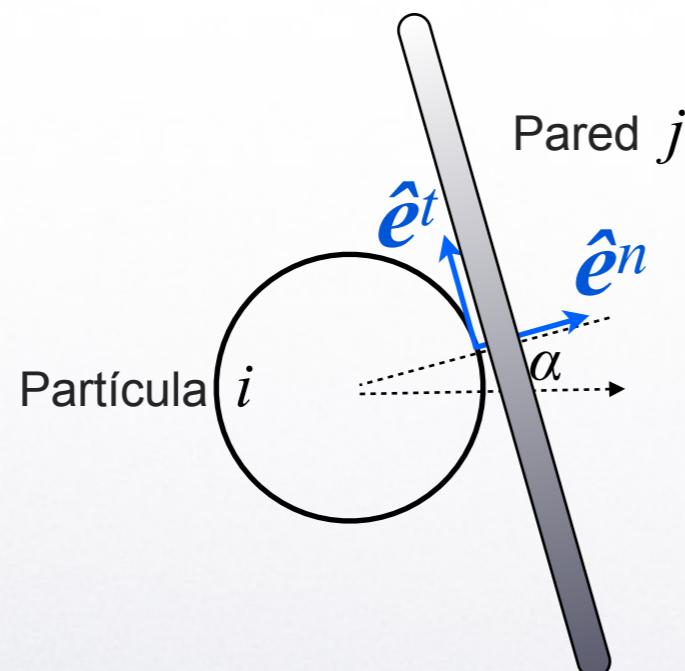


# Medios Granulares

Simulaciones

Definición variables geométricas

Durante la Colisión “Partícula - Pared”



Versores Constantes para cada Pared !

$\hat{e}^t$  versor tangencial la pared

$\hat{e}^n$  versor normal la pared

$$\begin{aligned}\hat{e}^n &= (e_x^n, e_y^n) \\ \hat{e}^t &= (-e_y^n, e_x^n)\end{aligned}$$

$\alpha$  es el ángulo entre el versor normal y el eje x.



# Medios Granulares

Simulaciones

Fuerzas de Contacto

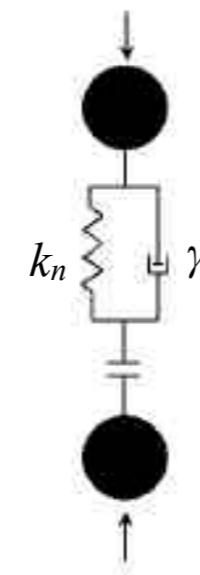


# Medios Granulares

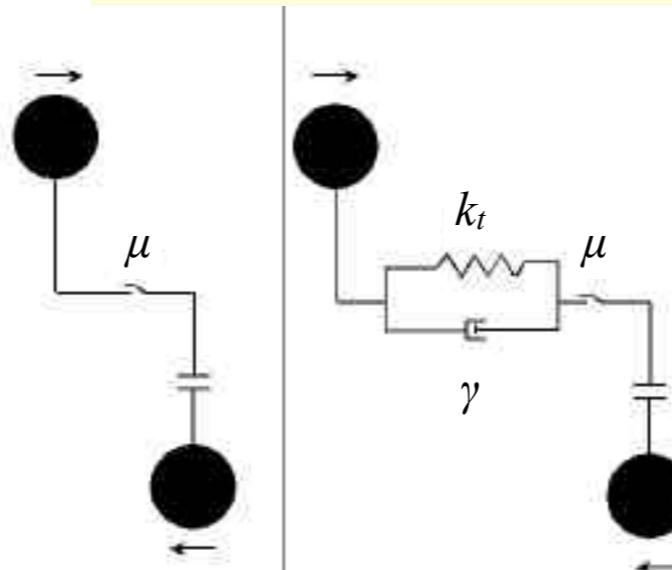
Simulaciones

Fuerzas de Contacto (Esquemas)

Ejemplo en la dirección normal ( $\hat{e}^n$ )



Ejemplos en la dirección tangencial ( $\hat{e}^t$ )



Se puede describir el rozamiento como un resorte ficticio que ejerce fuerza en sentido contrario al movimiento entre las partículas que se rozan



# Medios Granulares

Todas las ecuaciones en la dirección tangencial nos frena, porque tienen signo negativo al movimiento tangencial

Simulaciones

Fuerzas de Contacto

Opciones en la dirección normal ( $\hat{e}^n$ )

$$N.1) \quad \mathbf{F}_N = [-k_n \xi - \gamma \dot{\xi}] \hat{n}$$

Fuerza de un resorte amortiguado. El simbolo es el overlap, y el simbolo con . es la velocidad con la que esta cambiando

$$N.2) \quad \mathbf{F}_N = -k_n \xi \hat{n}$$

Fuerza de un resorte normal

Si tiramos una pelota al piso, choca solo con fuerza normal. En este caso, estariamos usando N1 dado que la pelota va perdiendo energia en cada choque con el piso.

Opciones en la dirección tangencial ( $\hat{e}^t$ )

Se hace el minimo entre estas dos formulas para evitar algunos problemas numericos

$$T.1) \quad \mathbf{F}_T = \min \begin{cases} -\mu |\mathbf{F}_N| \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{r}}_{rel} \cdot \hat{t}) \hat{t} \\ -k_T \xi_T \hat{t}, \end{cases}$$

donde  $\xi_T = \sum \Delta t \dot{\mathbf{r}}_{rel}^c(t)$   
Esto seria poner un resorte imaginario entre las particulas que rozan

$$T.2) \quad \mathbf{F}_T = -\mu |\mathbf{F}_N| \operatorname{sgn}(\dot{\mathbf{r}}_{rel} \cdot \hat{t}) \hat{t}$$

Caso de rozamiento coulombiano. El signo tiene que ser opuesto a la velocidad relativa en la componente tangencial al contacto (para calcular eso, hacemos ese producto).

$$T.3) \quad \mathbf{F}_T = -k_T \xi \underbrace{[\dot{\mathbf{r}}_{rel} \cdot \hat{t}]}_{F_T} \hat{t}$$

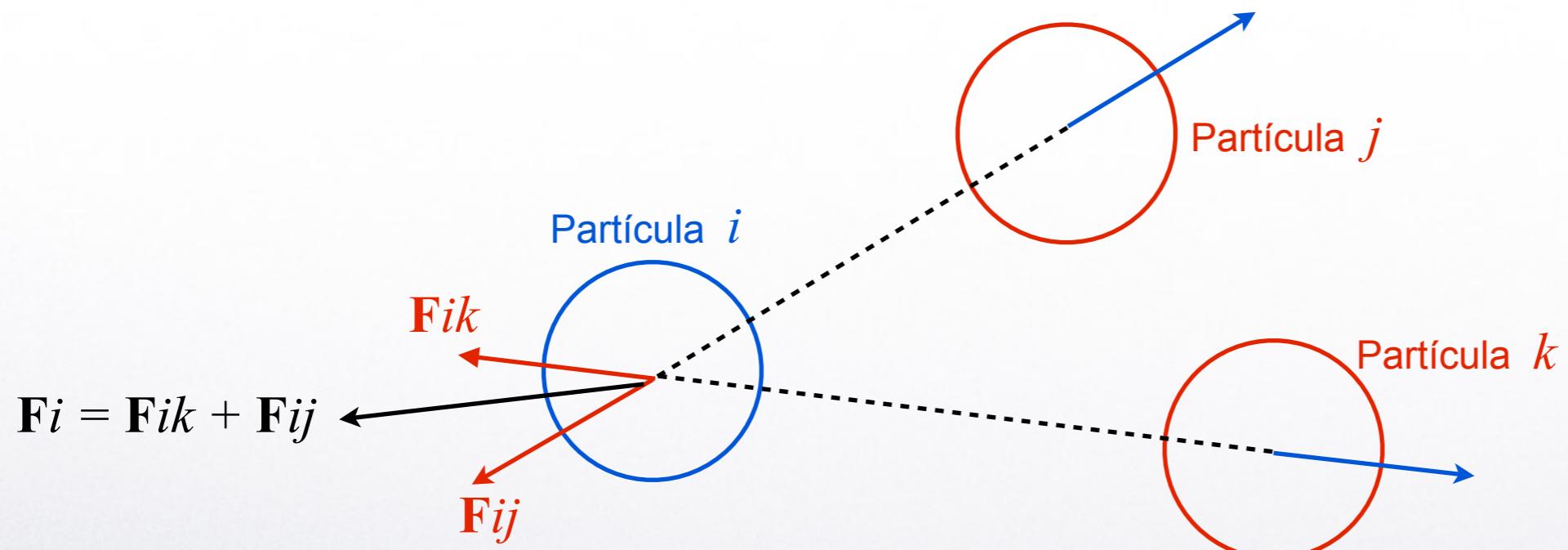
Una constante por el overlap, pero lo multiplicamos por la velocidad relativa (en los fluidos, como el aire por ejemplo, la fuerza es relativa a la velocidad)



# Medios Granulares

Simulaciones

Suma de Fuerzas





# Medios Granulares

Simulaciones

Suma de Fuerzas

Antes de sumar Fuerzas, para cada partícula, conviene proyectar las Fzas. normal y tangencial (generadas por cada una de las demás partículas en contacto) en las componentes cartesianas ( $x,y$ )

Esto es porque no podemos sumar las fuerzas normales que ejercen distintas partículas, porque son distintas direcciones normales. Vamos a aplicar el integrador para las fuerzas en X y en Y por separado.

$$F_x = F_N e^n_x + F_T (-e^n_y)$$

La fuerza en X es la componente normal por el versor normal en X, mas la componente tangencial por el versor tangencial en X (aunque acá ya está reemplazado por el negativo del versor tangencial en Y)

$$F_y = F_N e^n_y + F_T (e^n_x)$$

Dado que:

$$\hat{e}^n = (e^n_x, e^n_y)$$

$$\hat{e}^t = (-e^n_y, e^n_x)$$



# Medios Granulares

Simulaciones

Suma de Fuerzas

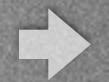
Finalmente la fuerza sobre cada partícula  $i$  debido al contacto con las demás partículas, paredes u obstáculos ( $j$ ) resulta:

$$F_i^{Tot} = \sum_j F_{Nij} e_x^n ij + \sum_j F_{Tij} (-e_y^n ij)$$

$$\mathbf{F}_i^{Tot} = m_i \mathbf{g} + \sum_j \mathbf{F}_{Nij} + \sum_j \mathbf{F}_{Tij}$$

La fuerza total es la gravedad  
(que es siempre en Y, mas la  
suma de fuerzas en X y en Y)

$$F_i^{Tot} = m_i \mathbf{g} + \sum_j F_{Nij} e_y^n ij + \sum_j F_{Tij} e_x^n ij$$



# Medios Granulares

Simulaciones

## Criterio para elegir el paso temporal

- Dependerá del método de integración, pero como referencia puede tomarse:

$$\Delta t \approx 0.1 \sqrt{m/k_n}$$

Esto es nada mas una guia. Si la particula es muy dura, voy a necesitar dt mas chiquitos, porque el choque se va a resolver rapido (buscamos que el choque dure muchos dt). Si la particula es mas blanda, puedo tener un dt mas grande porque los choques van a durar mas.



# Medios Granulares

## Simulaciones

Diferenciar entre:

Paso  $\Delta t$  de la simulación

Paso  $\Delta t_2$  para guardar el estado del sistema

No es lo mismo los  $\Delta t$  con los cuales voy a correr la simulacion (resolver las ecuaciones diferenciales), con los  $\Delta t$  que vamos guardando en el sistema. La idea es guardar uno cada N  $\Delta t$ . Por ejemplo, podemos guardar 1 de cada 10  $\Delta t$ .

$$\Delta t_2 = k \Delta t, \quad \text{con } k \in \mathbb{N}$$

Ejemplo:

$$t = \sum \Delta t \quad (\text{El tiempo total})$$

if  $(t / \Delta t_2) = \text{round}(t / \Delta t_2)$

    guardo estado sistema.

end



# Medios Granulares

## Simulaciones

Diferenciar entre:

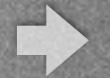
Paso  $\Delta t$  de la simulación

Paso  $\Delta t_2$  para guardar el estado del sistema

Con la máxima precisión ( $\Delta t$ ):  
Guardar una lista con los tiempos de salida de cada partícula:

$t_1$   
 $t_2$   
 $t_3$   
 $t_4$   
.....

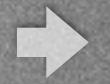
Esto es para analizar la curva de como fueron saliendo las partículas con mas precision. Y la idea es guardarlo cada  $\Delta t$ .



# Medios Granulares

Partículas de Formas Arbitrarias:

“Esferopolígonos”



# Medios Granulares

“Esferopolígonos”

F. Alonso-Marroquín

“Spheropolygons: A new method to simulate conservative and dissipative interactions between 2D complex-shaped rigid bodies”,

EPL, 83 (2008) 14001.



# Medios Granulares

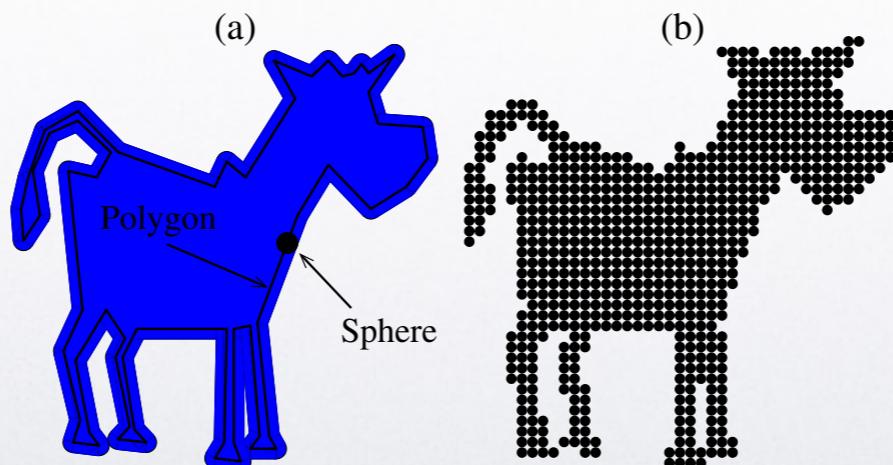
## “Esferopolígonos”

Ejemplo: un disco alrededor de un polígono de 62 caras.

Suma de Minkowski:

Dados dos conjuntos de puntos  $P$  y  $Q$  en un espacio Euclídeo, su suma de Minkowski está dada por  $P+Q=\{x+y \mid x \in P, y \in Q\}$ .

Lo cual es equivalente a arrastrar un conjunto alrededor del perfil del otro.



Otra forma de representarlo seria con 726 discos.

La idea es que si uno tuviera que simular una vaca o una pildora, no podria hacerlo con particulas esféricas.

Una primera posibilidad es modelar el objeto como muchas particulas esféricas que estan juntas.

Otra forma mejor es considerar un esferopolígono.

La vaca esta formado por lineas rectas con distintos angulos. Los vertices no tienen bien definidas las componentes normal y tangencial, y para resolver esto, es como si agarraramos un marcador redondo y recorremos todo el polígono con el marcador (y va a quedar como un vertice redondeado).

En resumen todos los vertices terminan suavizados o redondeados.

Para hacer las cuentas, consideramos todos los vertices y lados que esten en contacto entre las dos particulas, y calculamos esas fuerzas. Para cada vertice de la particula i, que lados de la particula j estan en contacto, y para cada vertice de la particula j, que lados de la particula i estan en contacto. No tenemos en cuenta entre lados y lados, porque es altamente improbable que los lados esten exactamente paralelos y se toquen los lados.



# Medios Granulares

“Esferopolígonos”

La Fuerza de interacción entre dos partículas  $i j$  considera los solapamientos entre Vértices ( $V_i$ ) de un polígono y Lados del otro ( $E_j$ ) y viceversa (  $V_j$  y  $E_i$  ):

NO CONSIDERAMOS ENTRE LADOS Y LADOS

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} = \sum_{V_i E_j} \vec{F}(V_i, E_j) + \sum_{V_j E_i} \vec{F}(V_j, E_i),$$



# Medios Granulares

## “Esferopolígonos”

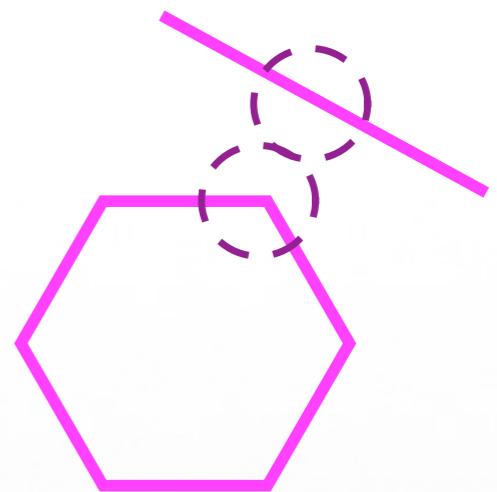
Elijo dos radios de un tamaño lógico (las líneas punteadas), y calculo el solapamiento fijandome si esos radios se solapan.

Para calcular el solapamiento se usan los esferopolígonos:

$$\delta(V, E) = \langle r_i + r_j - d(V, E) \rangle,$$

Donde  $r_i$  y  $r_j$  son los radios de los discos y  $d(V, E)$  es la distancia euclídea entre el vértice  $V$  y el segmento  $E$ :

La función  $\langle x \rangle$  es  $x$  si  $x > 0$  y cero en otro caso.





# Medios Granulares

“Esferopolígonos”

Fuerza de contacto con fricción:

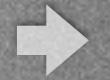
$$\vec{F}(V, E) = k_n \delta \vec{N} + k_t \delta_t \vec{T},$$

La fuerza normal y tangencial depende del overlap entre partículas

Donde  $\vec{N}$  y  $\vec{T}$  son los versores normal y tangencial al contacto.

y  $\delta_t$  es el desplazamiento elástico calculado como en la diapositiva 15:

$$\delta_t = \delta [\dot{\mathbf{r}}_{rel} \cdot \vec{T}]$$



# Medios Granulares

## “Esferopolígonos”

Dado que estas partículas no son esféricas es necesario considerar rotaciones. El torque que la partícula  $j$  hace sobre la  $i$  es:

$$\begin{aligned}\tau_{ij} = & \sum_{V_i E_j} (\vec{R}(V_i, E_j) - \vec{r}_i) \times \vec{F}(V_i, E_j) \\ & + \sum_{V_j E_i} (\vec{R}(V_j, E_i) - \vec{r}_i) \times \vec{F}(V_j, E_i),\end{aligned}$$

Calculamos el torque con la posición de contacto del vértice  $i$  con el lado de  $j$  producto escalar la fuerza que hay en ese punto de contacto.

Donde  $\vec{r}_i$  es el centro de masa de la partícula  $i$  y  $\vec{R}$  es el punto donde se aplica la fuerza (el punto medio del solapamiento).



# Medios Granulares

“Esferopolígonos”

Finalmente se integran las ecuaciones de movimiento:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_j \vec{F}_{ij} - m_i g \hat{y}, \quad I_i \ddot{\varphi}_i = \sum_j \tau_{ij}.$$

donde  $I_i$  es el momento de inercia de la partícula  $i$



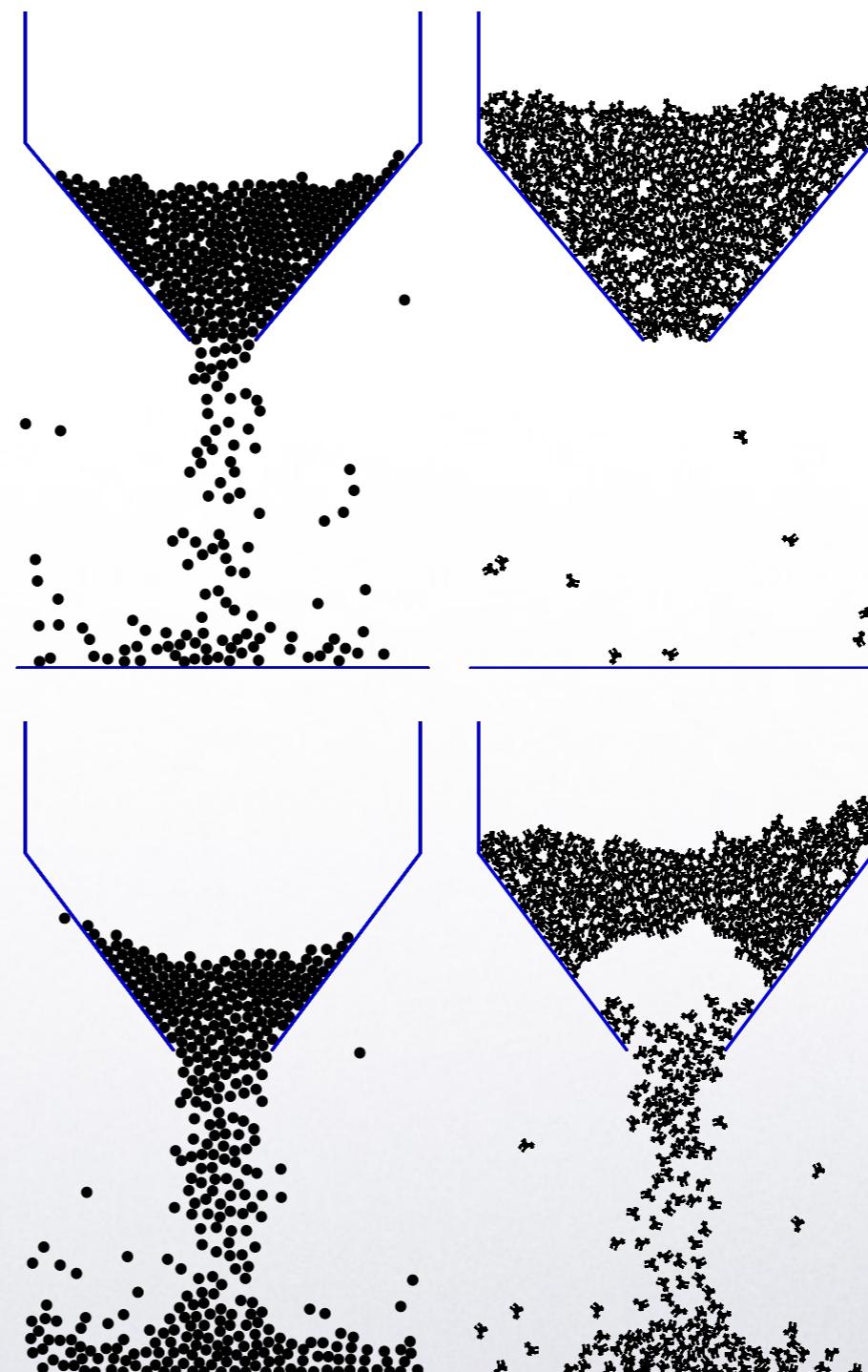
# Medios Granulares

“Esferopolígonos”

Comparación de simulaciones de un silo 2D con círculos y con vacas de Minkowski.

Para granos, si el ancho de apertura es 5 veces el radio de partícula, la posibilidad de atasco es muy baja.

Hay una manera para saber si un atasco es para siempre o va a durar determinado número de dts, mirando los tiempos de salida.





# Medios Granulares

FIN