



Simulación de Sistemas

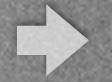


Dictado de la Materia



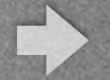
Dictado de la Materia

- Las teóricas son guías que deben ser complementadas con la bibliografía.
- Hay flexibilidad para profundizar en los temas de mayor interés.
- En particular, el Trabajo Práctico Final, será a elección entre todos los temas vistos o temas relevantes propuestos por Uds.
- Se puede usar lenguaje de programación a elección.



Dictado de la Materia

- Los T.P se realizarán en forma grupal. Sumarse a uno de los 9 grupos creados en campus 2024Q2GXX, donde los ultimos dos digitos representan el nro. de grupo. Por ahora grupos de 3 personas.
- Recordar y usar este nombre del grupo para toda comunicación con la Cátedra
- Las presentaciones de los T.P. son de asistencia obligatoria.
- Los T.P se entregan como actividad en Campus, subiendo presentación en pdf con links explícitos a animaciones, código, e informe cuando se requiera.
- La implementación del Código y demás documentación debe ser original. Campus cuenta con detección automática de plagios.



Dictado de la Materia

- Para Formato de Presentaciones e Informes consultar
“.../Contenido del Curso/00_GuíasFormato”.
- Consultar Reglamento completo (lectura obligatoria)
.../Contenido del Curso/00_Cronograma_y_Reglamento”..



Sistemas y Modelos



Sistema Real



Modelo Físico-Matemático

Este modelo es una simplificación del modelo real, por lo que se van a omitir varios detalles que no se consideren relevantes



Modelo / Implementación Computacional



Simulación

Es válido en un cierto rango de parámetros (dominio). No sería correcto tener un sistema real de partículas que se mueven a determinada velocidad, y luego extrapolar esos resultados teóricos a otras velocidades.

Las simulaciones tienen que compararse con resultados de la realidad para asegurarse de que son aceptables en determinado rango de parámetros que se quiere estudiar.



Definición de Sistema

Un sistema NO es igual a la suma de sus partes

- Posee componentes relacionadas entre sí que funcionan como un todo.
- Pueden ser físicos o conceptuales y se caracterizan por tener límites, componentes, entradas, salidas y procesos que convierten las entradas en salidas.
- Presentan Observables Medibles y Cuantificables (entradas / salidas).
- Los sistemas también pueden incluir subsistemas e interactuar con otros sistemas y con el ambiente externo.



Definición de Modelo (de un Sistema)

- Un Modelo es la abstracción de un Sistema "Real".
- Como tal es una aproximación/simplificación del Sistema y NO es único!!
- Hay variables medibles INPUT ($u(t)$) y OUTPUT ($y(t)$) del modelo.
INPUT: estímulo
OUTPUT: respuesta del modelo
- En general: $y(t) = g (u(t))$ Se considera que el output es una función del input
Este mapeo está dado por una función matemática en un modelo.



Definición de Modelo (de un Sistema)

Un Objetivo Central de Modelar un Sistema:

Entender y Predecir su comportamiento.



Objetivos de la Teoría de Sistemas

- **Modelado y Análisis:** *Entender cómo funciona el sistema.*
- **Diseño:** *De un sistema derivado que funcione con las mismas leyes.*
- **Control:** *Seleccionar un input para obtener un output deseado.*
- **Evaluación de Funcionamiento:** *Caracterización detallada del funcionamiento del sistema ante variadas condiciones operativas.*
- **Optimización:** *Encontrar las variables y parámetros que generan un cierto output objetivo.*



Caracterización de un Sistema

Que es tomar DATOS de un sistema ?

Medir y Registrar para un cierto muestreo temporal los valores de las variables de INPUT y OUTPUT.

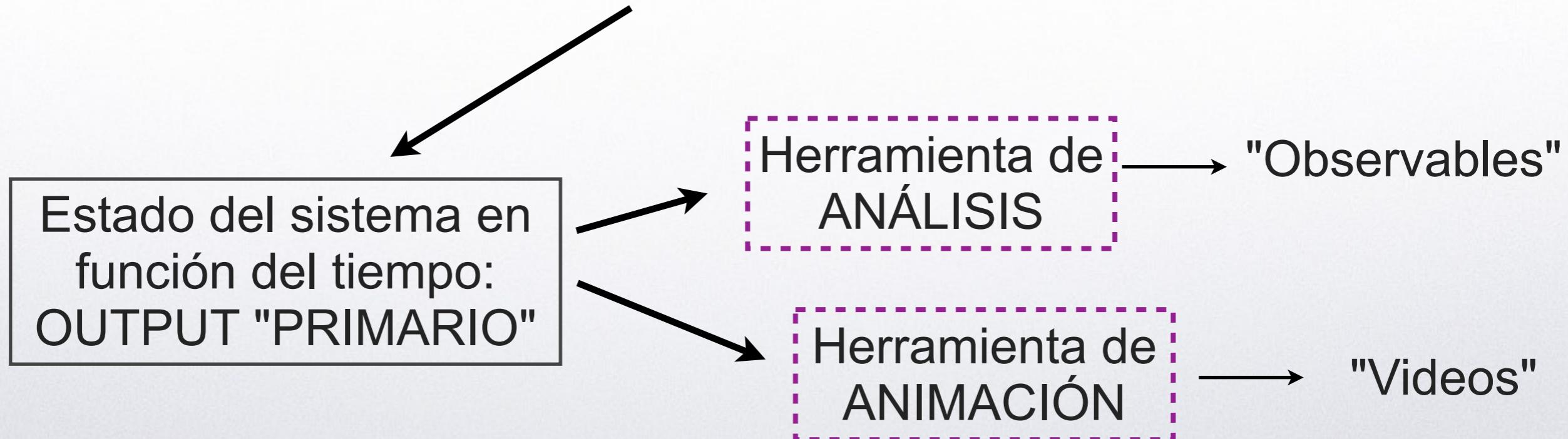


Simulación off-line

INPUT
y Parámetros

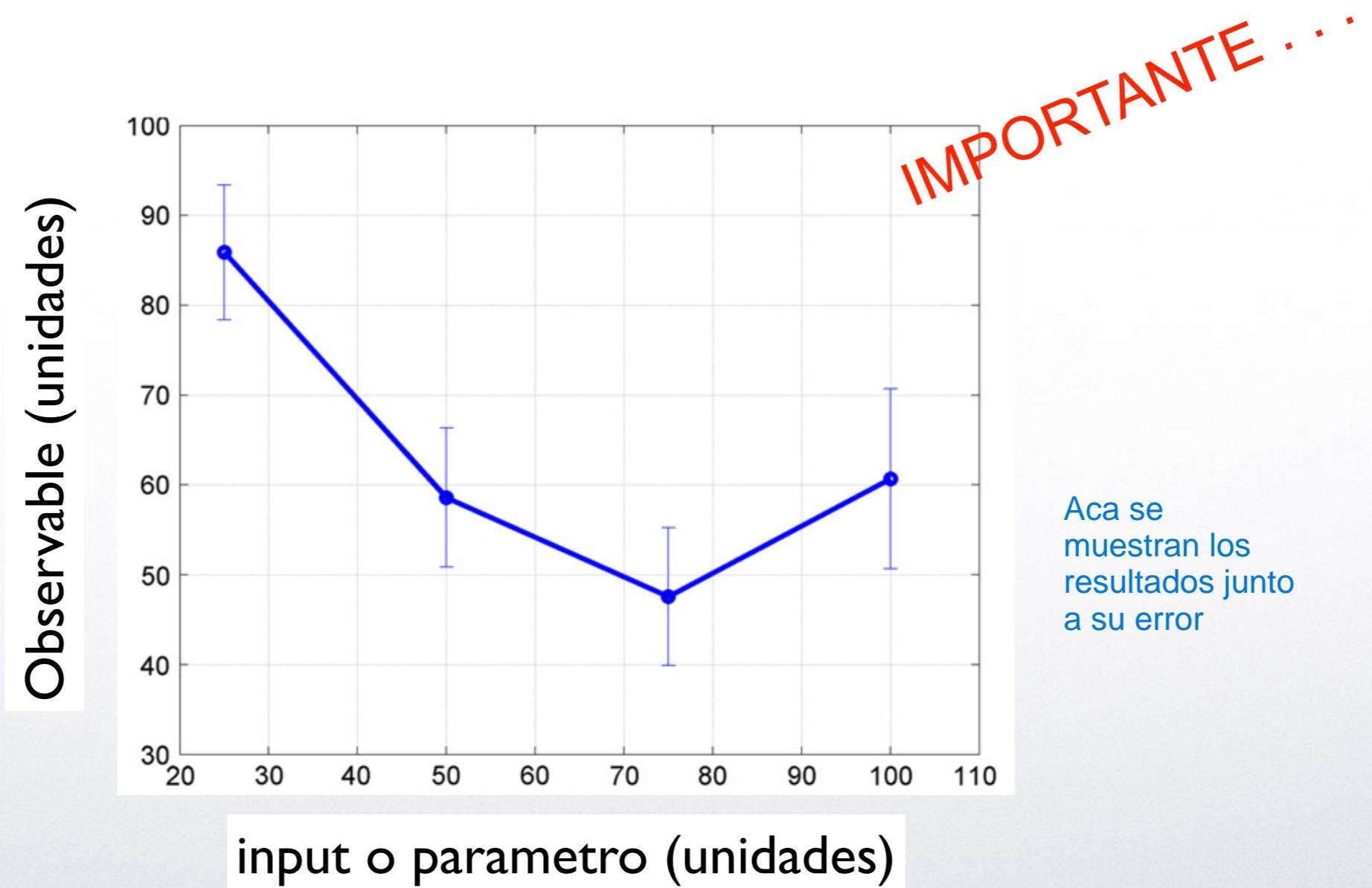
En algunos ámbitos como videojuegos es importante que la simulación responda en tiempo real para poder interactuar en tiempo real, pero nosotros no vamos a considerar este tipo de simulaciones.

IMPORTANTE . . .





Caracterización de un Sistema

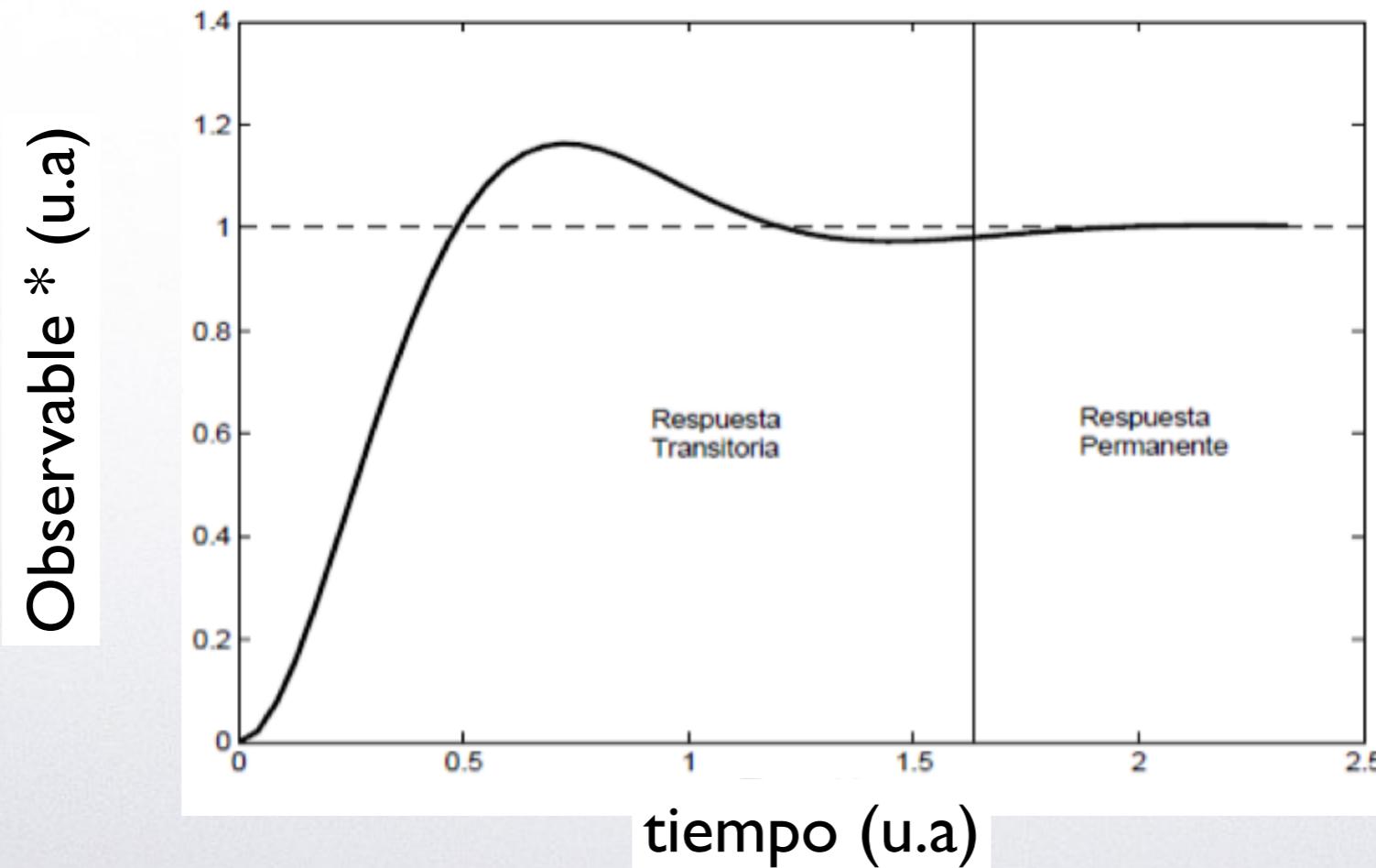




Caracterización de un Sistema

OUTPUT primario
(serie temporal,
Ej.: velocidades)

→ **"Observable"**
(escalar, no depende del tiempo,
Ej.: Energia Cinética en el Equilibrio (E_c))



Para
inputs y parámetros
dados

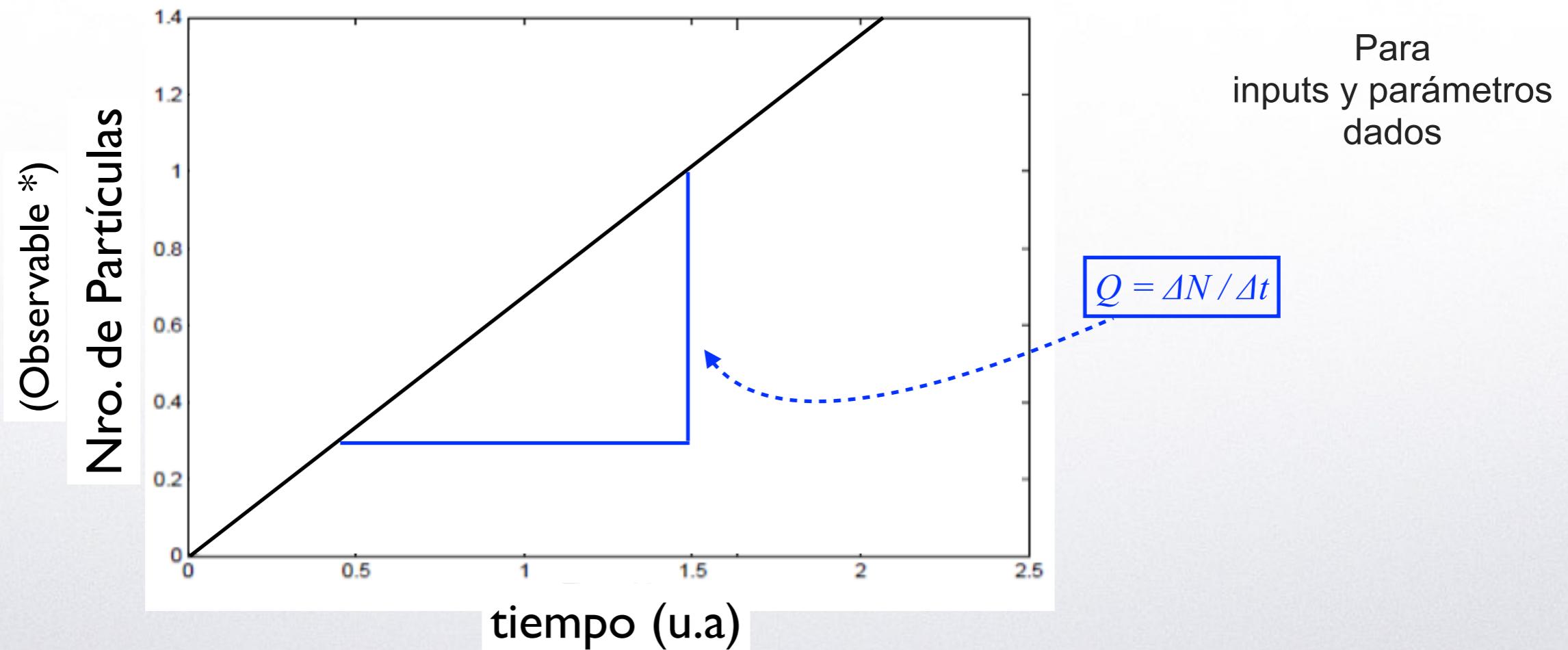
Vamos a evaluar sistemas que
evolucionan en el tiempo, entonces
el Observable puede depender del
tiempo



Caracterización de un Sistema

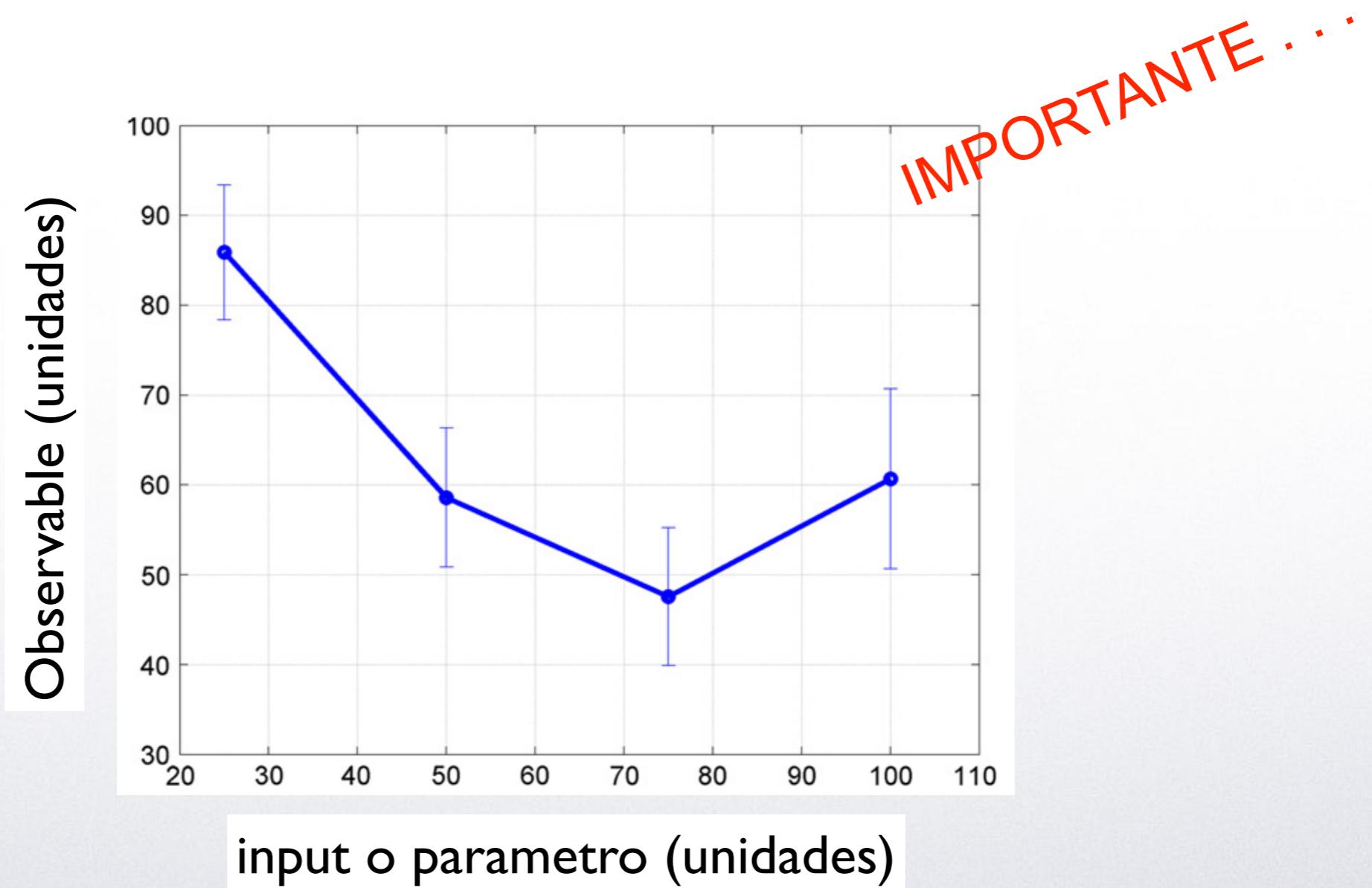
OUTPUT primario
(serie temporal,
Ej.: Posiciones)

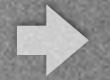
→ "Observable"
(escalar, no depende del tiempo,
Ej.: Caudal (Q))



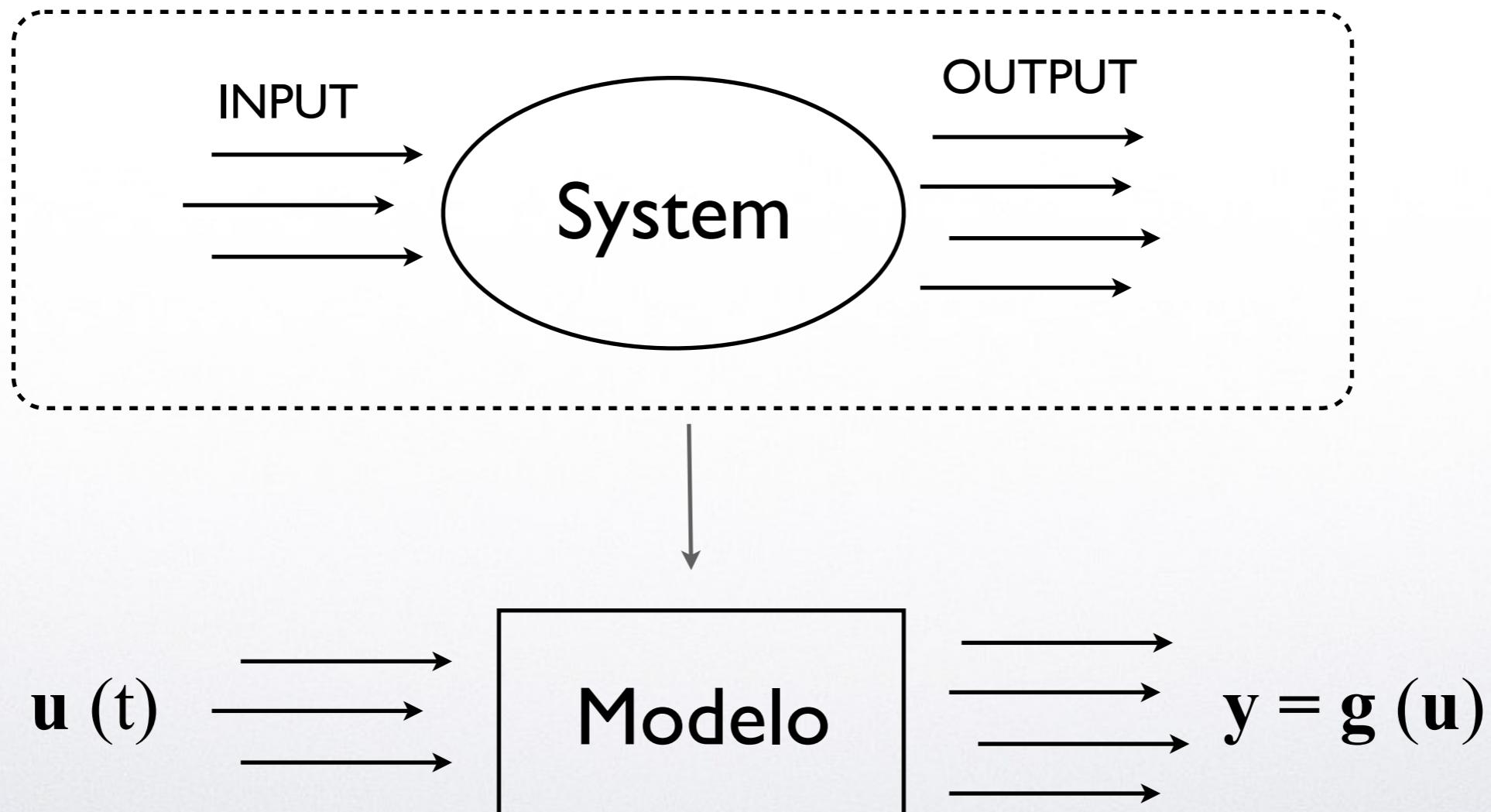


Caracterización de un Sistema





Definición de Modelo (de un Sistema)





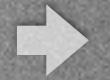
El Estado de un Sistema

Es la información necesaria tal que $y(t)$ queda unívocamente determinada por esta información y por $u(t)$, $t \geq t_0$

Definimos esta información como el estado $x(t)$, donde sus componentes se denominan variables de estado.

La "Dinámica de un Sistema" está dada por las relaciones matemáticas del modelo entre los input ($u(t)$), los output ($y(t)$) y el estado ($x(t)$).

Por ejemplo, imaginamos un sistema que es un tanque de agua de X litros, que tiene abajo un mechero que genera Y calorías por segundo. Podriamos considerar determinado estado inicial (temperatura inicial del agua por ejemplo), y input la cantidad de segundos que el mechero permanece abierto. El output podría ser la temperatura del agua luego de ese tiempo.



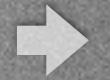
El Espacio de Estados

Definición: "Ecuaciones de Estado"

Son el Conjunto de ecuaciones necesarias para especificar el estado $x(t)$ para $t \geq t_0$ dados $x(t_0)$ y $u(t)$, $t \geq t_0$.

Definición: "Espacio de los Estados"

Es el Conjunto de todos los posibles valores que pueda tomar el estado.



El Espacio de Estados

Las "Ecuaciones de Estado" son en general ecuaciones diferenciales:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

Funcion del estado, el input y el tiempo

El Sistema queda totalmente definido si tenemos las ecuaciones:

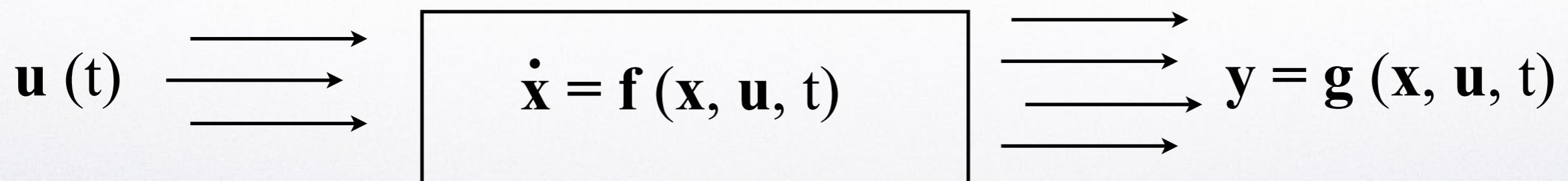
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = x_0$$

Porque toda ecuacion
diferencial necesita una
condicion inicial para
ser resuelta

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$



Modelado con Espacio de Estados



El modelo entonces es conocer la función diferencial que produce un output a partir de un estado inicial, un input y un tiempo

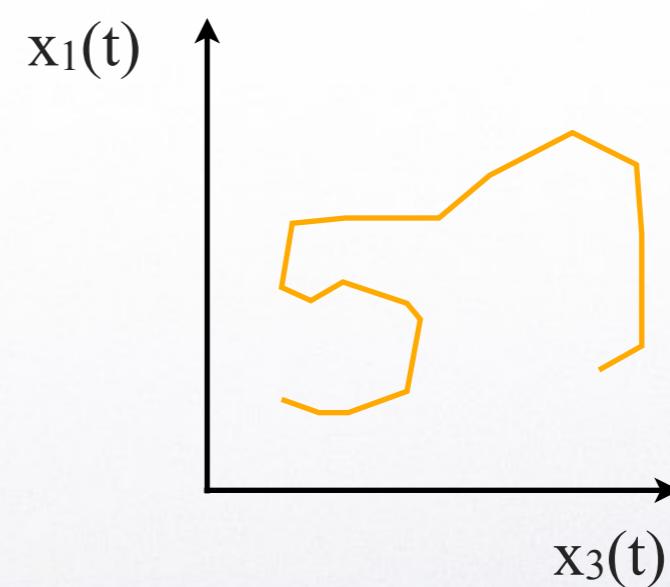
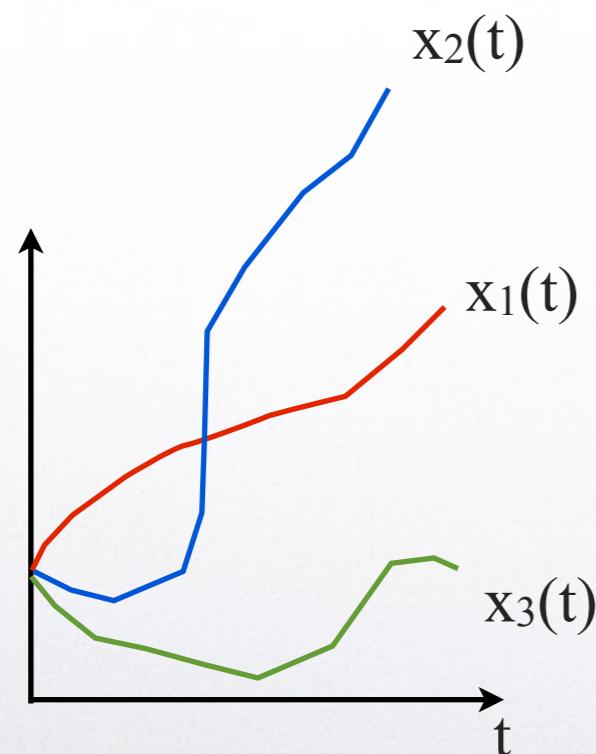


Espacio de Fases

Las variables de estado:

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots)$$

Representación bidimensional:
Espacio de Fases





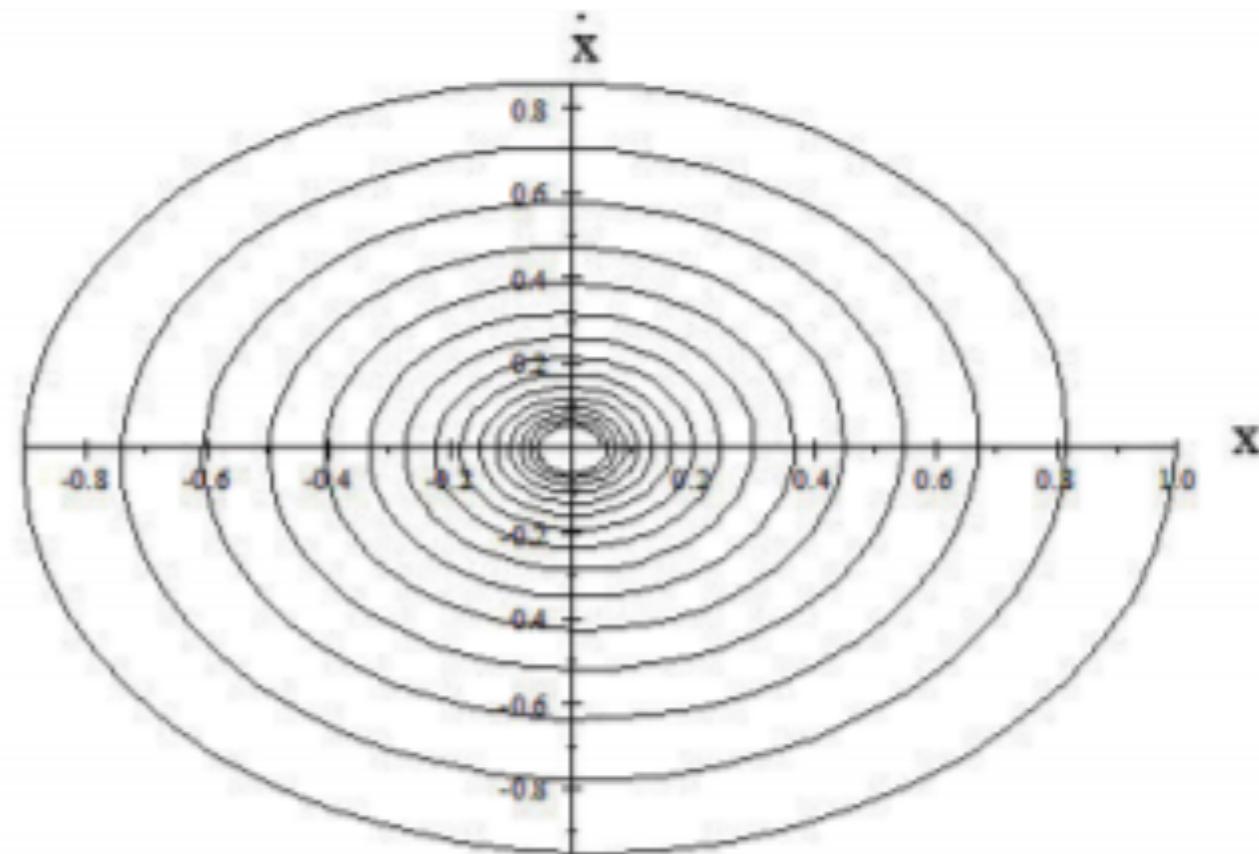
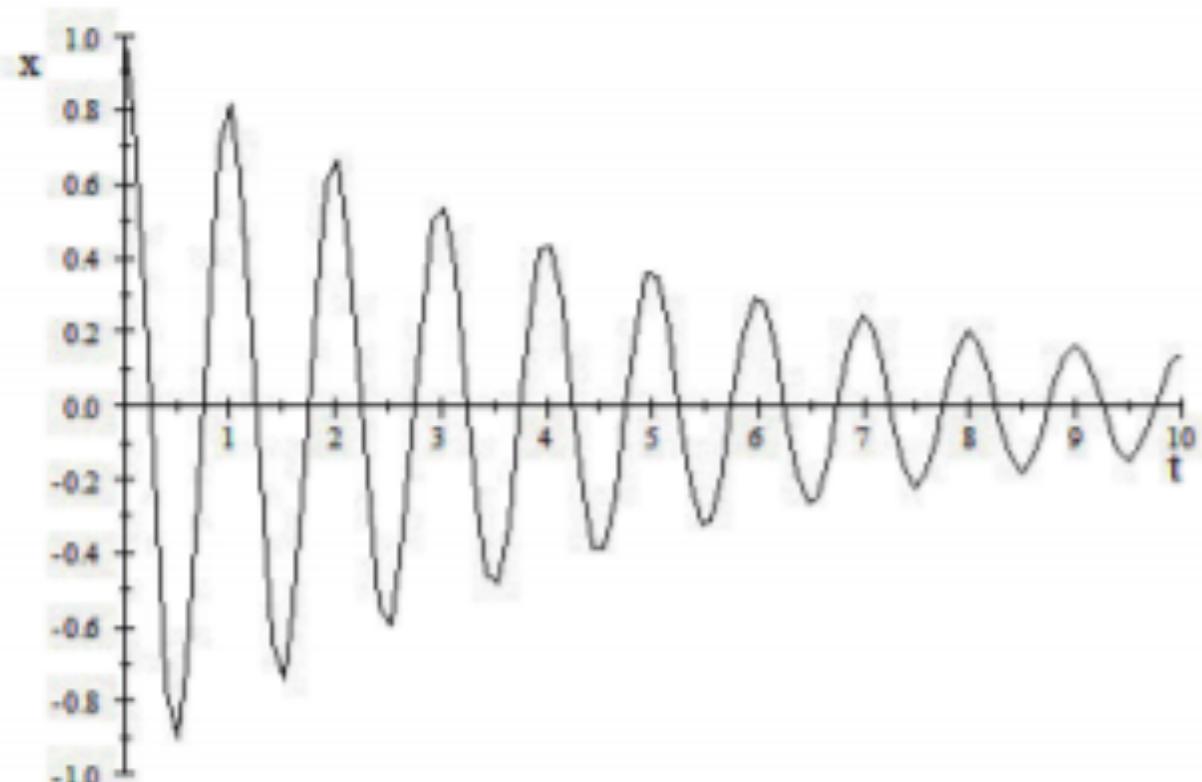
Espacio de Fases

Las variables de estado:

- Posición (x)
- velocidad (\dot{x})

Ecuación de Estado
Oscilador Amortiguado

$$m \ddot{x} = -k x - \gamma \dot{x}$$



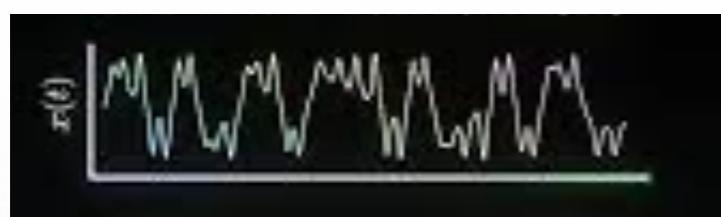


Espacio de Fases

Las variables de estado:

- Posición (x)
- velocidad (\dot{x})

x



\dot{x}



Ecuación de Estado
Oscilador de Duffing

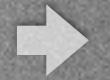
$$m \ddot{x} = x - x^3 - \delta \dot{x} + \gamma \cos(\omega t)$$

Ejemplo para un sistema no lineal





Clasificación de Modelos



Clasificación de Modelos

Modelos Estáticos:

$y(t)$ no depende de $u(\tau < t)$
(sin memoria)

Ecuaciones Algebraicas

Ej.: Circuito Corriente
Continua

Modelos Dinámicos:

$y(t)$ sí depende de $u(\tau < t)$,
en particular de $u(t = 0)$,
(con memoria)

Ecuaciones Diferenciales

Ej.: Oscilador armónico



Clasificación de Modelos

Modelos Lineales

La idea de "linealidad" es que la suma de dos estímulos (input) produce la suma de sus respectivas respuestas (output):

"Principio de Superposición"

$$\mathbf{g}(a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2) = a_1 \mathbf{g}(\mathbf{u}_1) + a_2 \mathbf{g}(\mathbf{u}_2)$$



Clasificación de Modelos

Modelos Lineales

En caso de linealidad las ecuaciones que definen al sistema/modelo se reducen a:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

donde **A**, **B**, **C** y **D** son los parámetros del modelo.



Clasificación de Modelos

Modelos No - Lineales

No cumplen con el principio de superposición.
El output no es proporcional al input.

Dinámica No-Lineal : " Teoría del Caos "

- 1- **Sensibilidad a las Condiciones Iniciales:** Infinitesimales diferencias en el Input producen outputs muy diferentes (las trayectorias en el espacio de fases difieren exponencialmente con el tiempo: *exponente de Lyapunov*). En un sistema lineal, si las condiciones iniciales son parecidas entonces el output es parecido
- 2- **Transitividad Topológica:** Dos regiones cualquiera del espacio de fases, se superpondrán en algún momento al evolucionar el sistema.
- 3- **Órbitas Periódicas Densas:** Cualquier punto del espacio de fases puede ser aproximado infinitesimalmente por una órbita periódica.



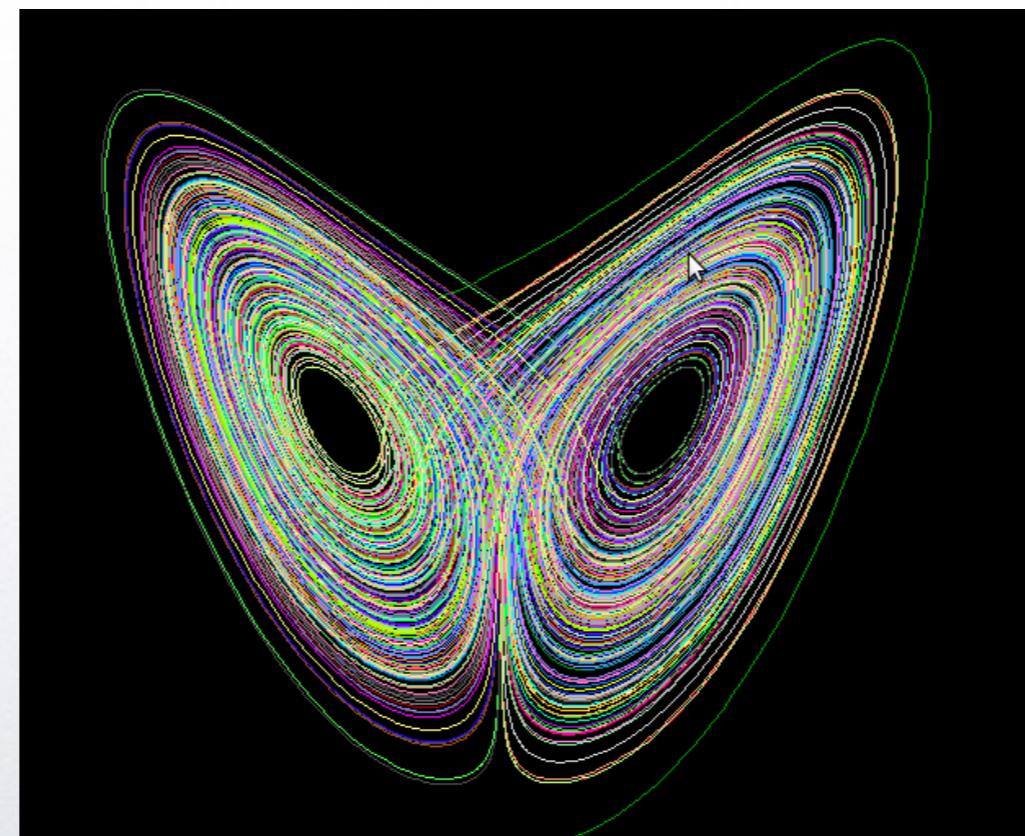
Clasificación de Modelos

Modelos No - Lineales

No cumplen con el principio de superposición.
El output no es proporcional al input.

Dinámica No-Lineal : " Teoría del Caos "

Espacio de Fases:
Atractor de Lorenz





Clasificación de Modelos

Modelos de Estados Continuos y Discretos

Continuos:

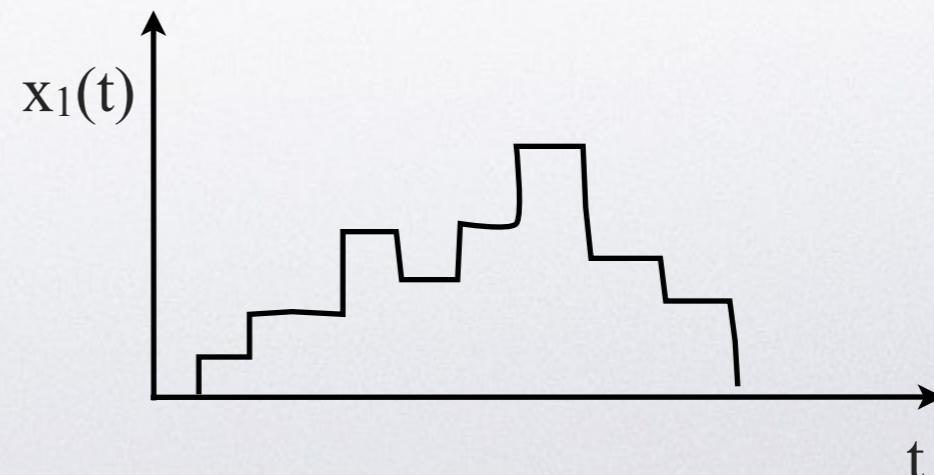
Las variables de estado son números reales.

“Ecuaciones Diferenciales”

Sistemas de Estado Discretos

Las variables de estado son:

- números enteros.
- ON / OFF
- HIGH / MEDIUM / LOW





Clasificación de Modelos

Modelos Deterministas y Estocásticos

Determinismo:

Demonio de Laplace

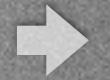
Conoce todas las condiciones iniciales
y todas las leyes de la naturaleza
entonces puede determinar la evolución
futura del universo (sistema).

Estocástico:

Si al menos uno de los inputs es random.

Se considera al azar (ignorancia sobre
algunos procesos).

Se plantea al modelo en términos de
probabilidades.



Modelo Estocástico:

Monte Carlo

Todo algoritmo numérico que involucre números aleatorios

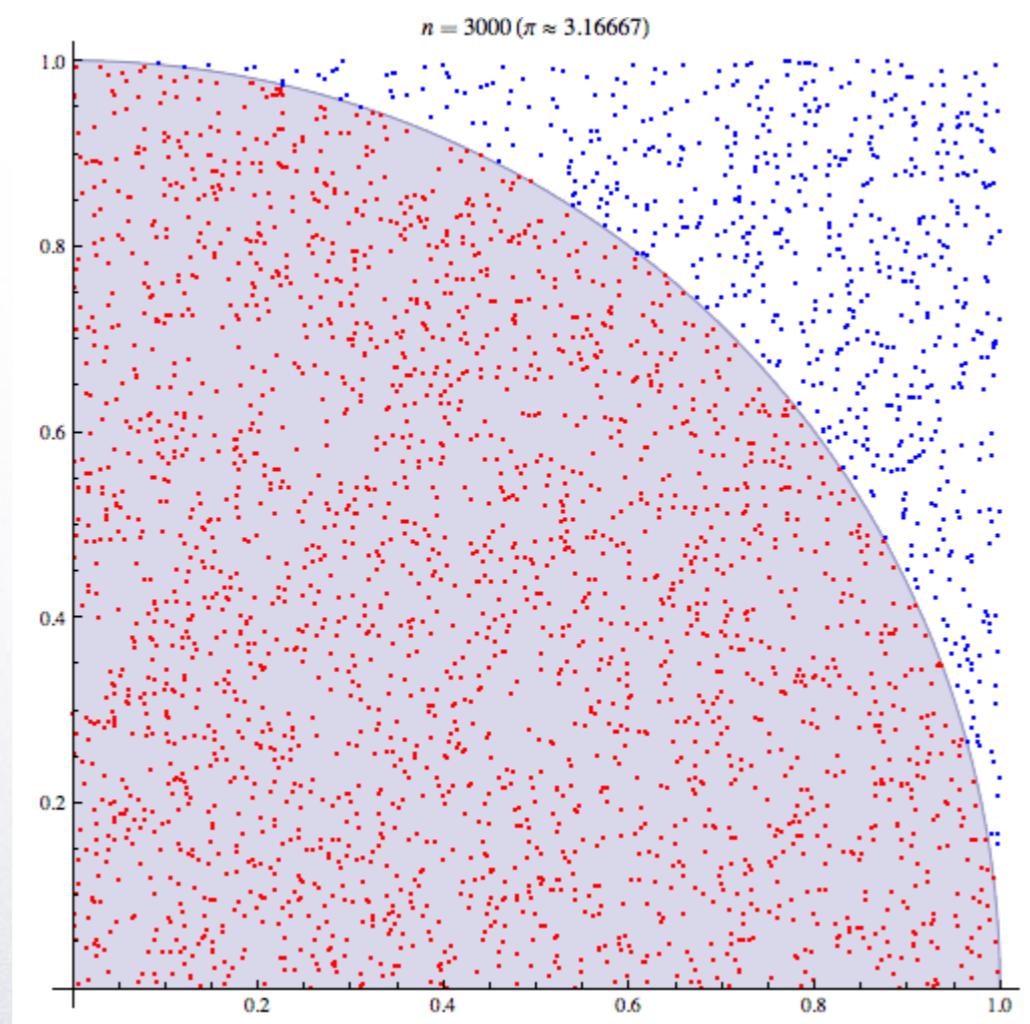
"Casino de Monte-Carlo" (Mónaco)





Modelo Estocástico: Monte Carlo

Estimación de π

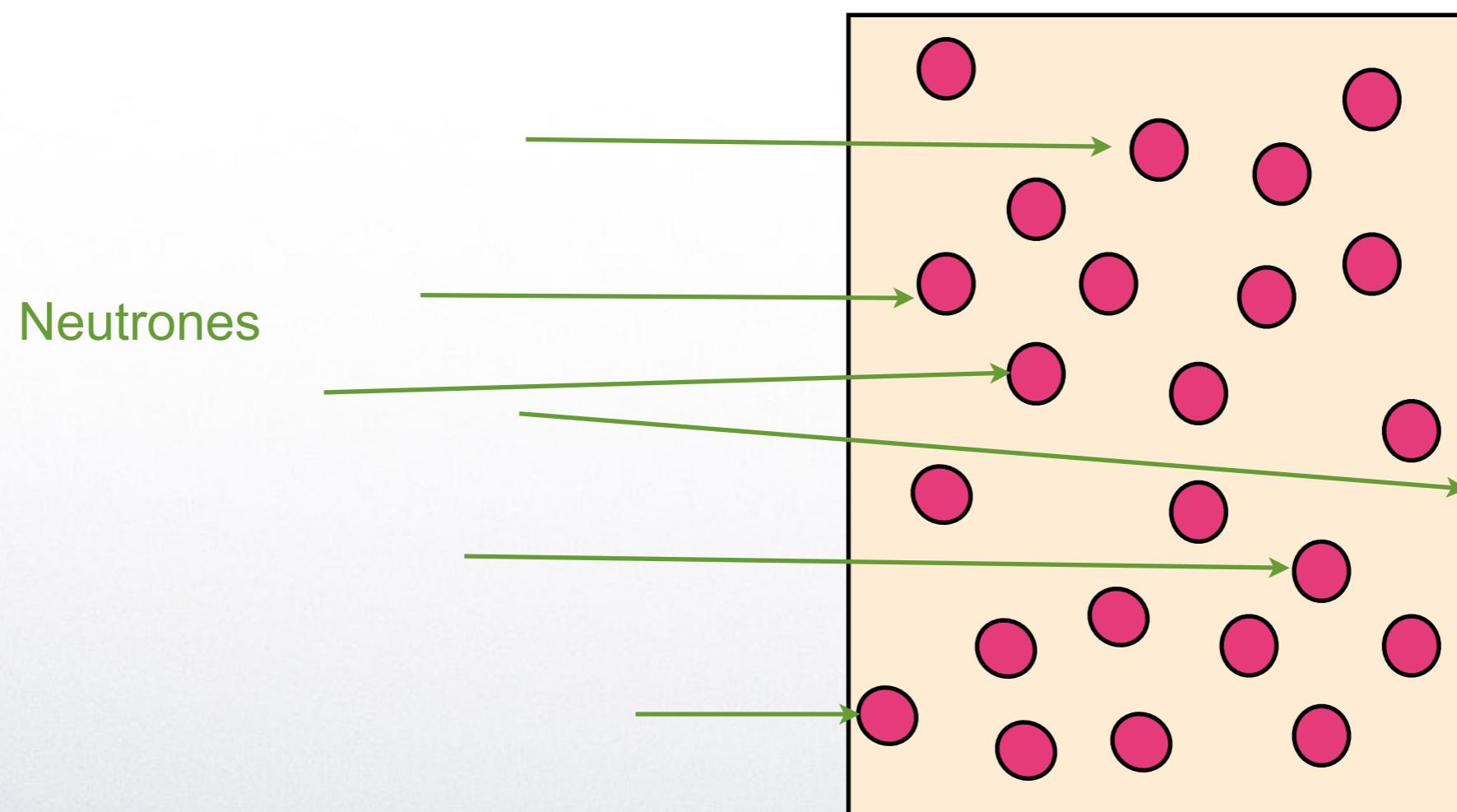


Para estimar el valor de PI, se genera una cierta cantidad de puntos aleatorios y se chequea a que distancia cayeron de radio 1



Modelo Estocástico: Monte Carlo

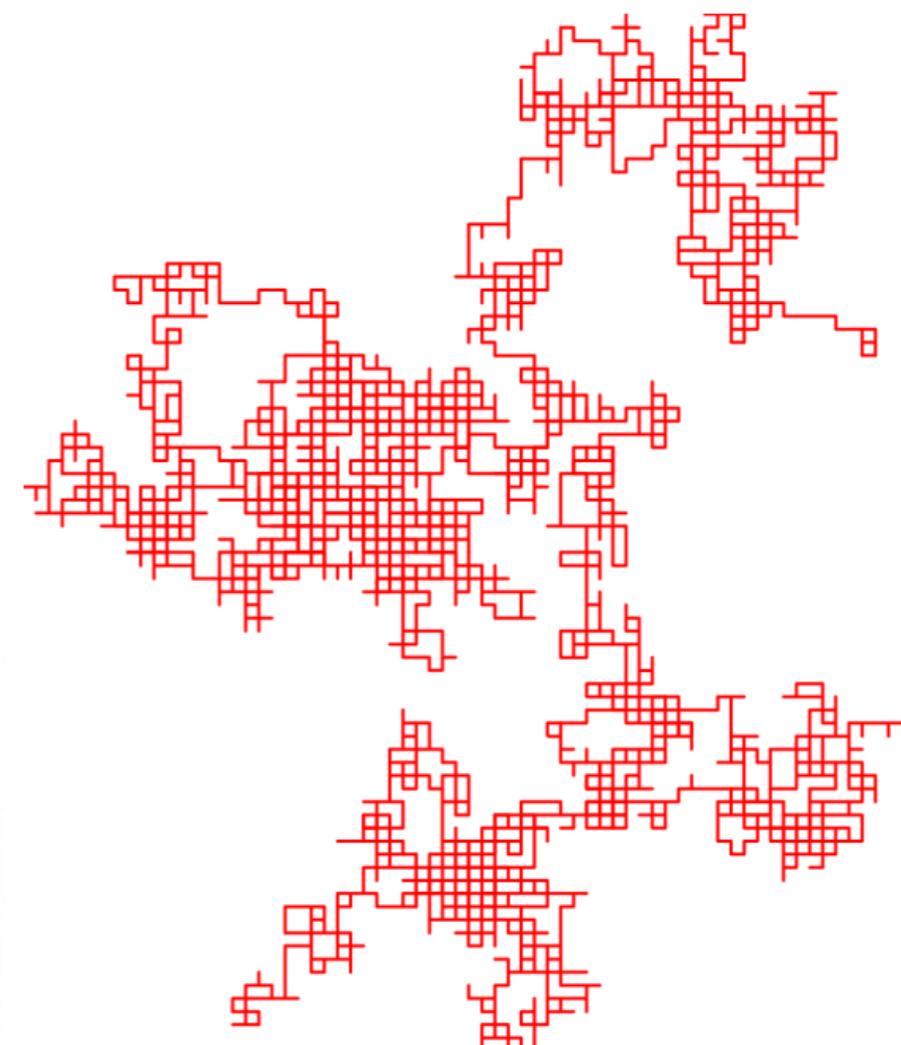
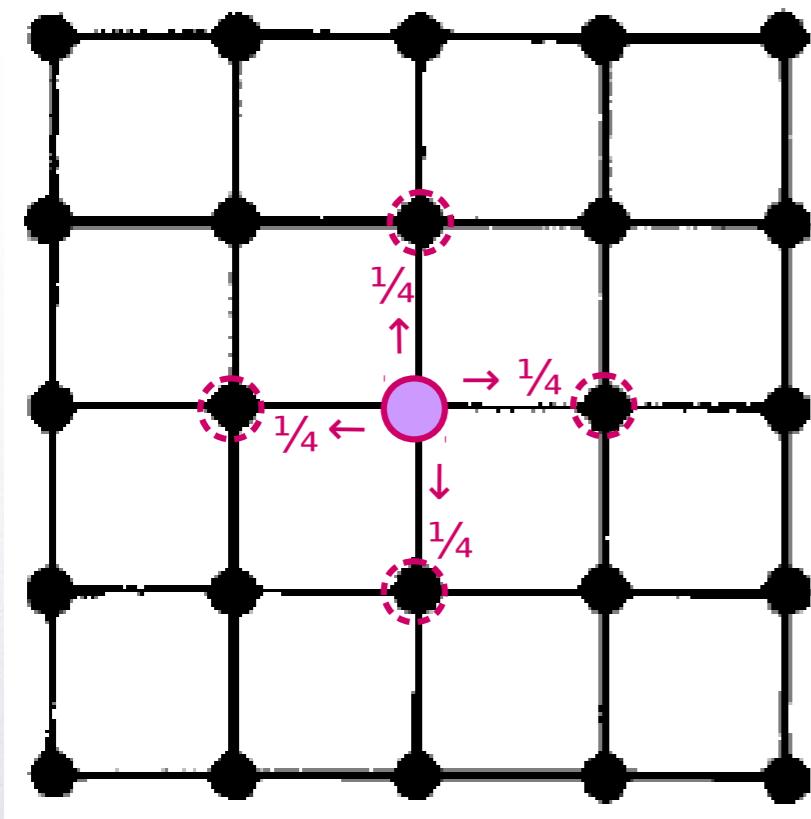
Interacción de radiación de neutrones con la materia





Modelo Estocástico: Monte Carlo

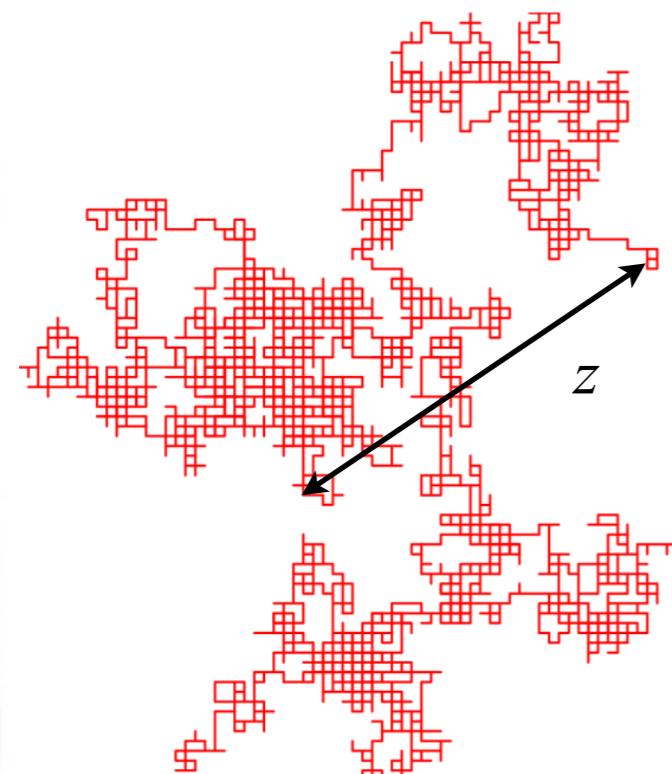
Difusión : Random Walk





Modelo Estocástico: Monte Carlo

Difusión : Random Walk



Coeficiente de Difusión



$$\langle z^2 \rangle \propto D t$$

Importante:

Para calcular ese coeficiente, no alcanza una trayectoria. Se deben simular muchas y promediar el desplazamiento cuadrático.

$$\langle z^2 \rangle = 2 D t \quad (\text{en 1 dimensión})$$

$$\langle z^2 \rangle = 4 D t \quad (\text{en 2 dimensiones})$$

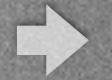
$$\langle z^2 \rangle = 6 D t \quad (\text{en 3 dimensiones})$$



Clasificación de Modelos y Simulaciones

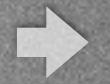
Basados en Tiempo Discreto

Basados en Eventos



Clasificación de Modelos y Simulaciones

Basados en Tiempo Discreto



Clasificación de Modelos y Simulaciones

Basados en Tiempo Discreto

El sistema evoluciona cada un cierto tiempo discreto fijo (dt), generalmente pequeño respecto del tiempo total de la evolución del sistema.



Clasificación de Modelos y Simulaciones

Basados en Tiempo Discreto

Ejemplo:

Integración numérica de una ecuación diferencial



Clasificación de Modelos y Simulaciones

Basados en Eventos



Clasificación de Modelos y Simulaciones

Basados en Eventos

Estos eventos son en momentos arbitrarios, y pueden no estar equiespaciados

El sistema evoluciona en la medida que suceden “eventos”, los cuales son instantáneos y producen un cambio en el estado del sistema.



Clasificación de Modelos y Simulaciones

Basados en Eventos

Ejemplo: Filas y Procesos (Teoría de Colas)

Componentes:

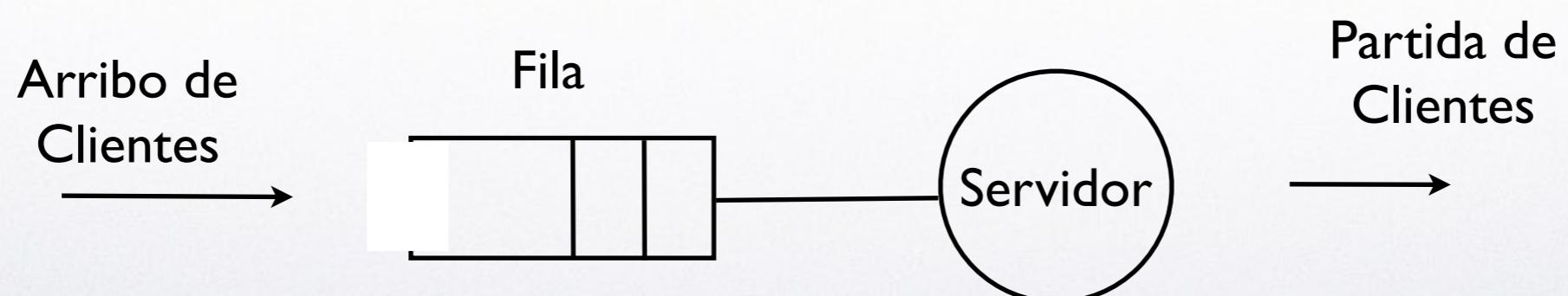
- **Entidades / Clientes** que esperan por un **Recurso / Servicio**.
- **Servidores** que proveen el recurso por el cual esperan los clientes.
- **La Fila** es el espacio donde los clientes esperan ordenados.



Clasificación de Modelos y Simulaciones

Basados en Eventos

Ejemplo: Filas y Procesos



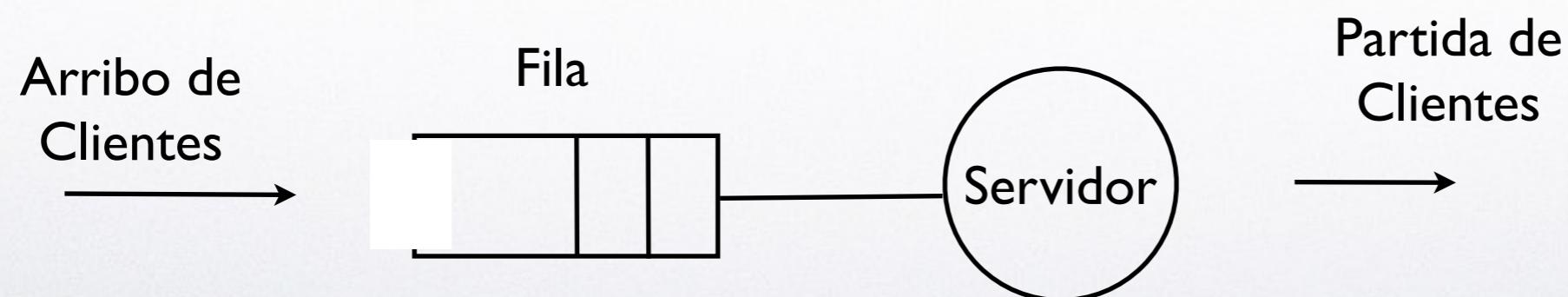


Clasificación de Modelos y Simulaciones

Basados en Eventos

La Fila tiene:

- Capacidad (a veces infinita).
- Comportamiento, p ej. FILO, FIFO, etc.



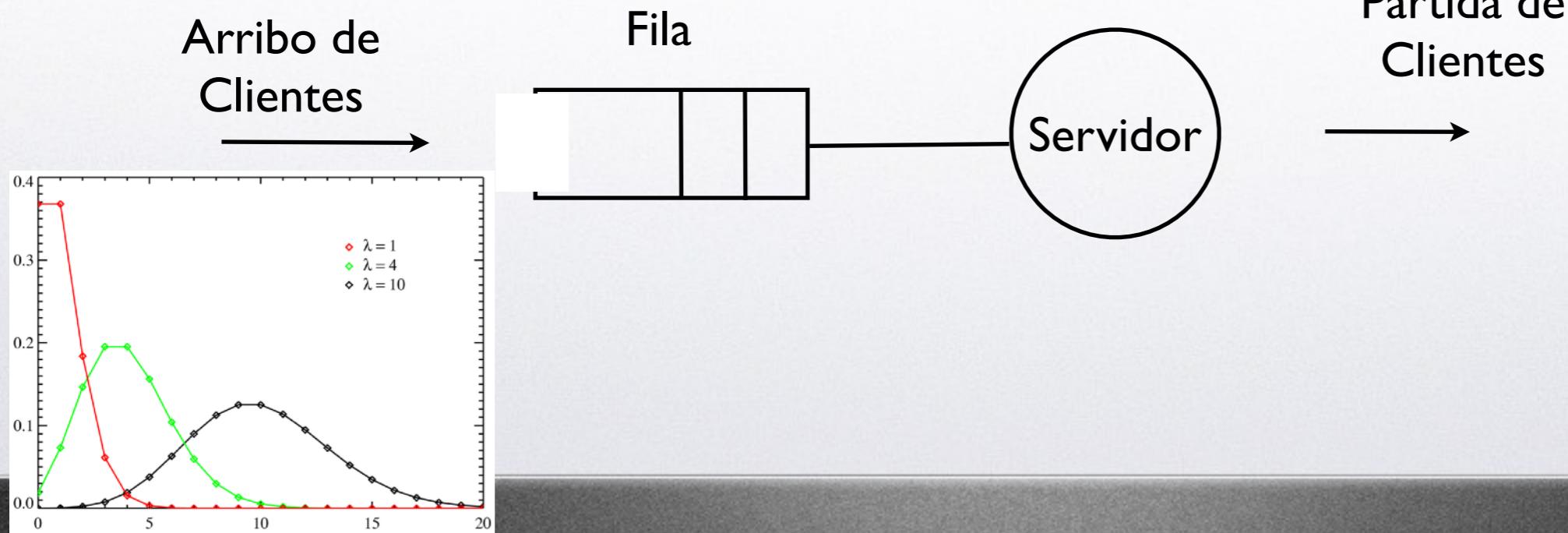


Clasificación de Modelos y Simulaciones

Basados en Eventos

- Los Clientes tienen una distribución de tiempos de arribo (Poisson) $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
- Los Servidores tienen una distribución de tiempos de procesamiento (Exponencial)

Por ejemplo, llega un cliente por minuto y el servidor puede atender a un cliente por minuto, pero ambos en distribuciones distintas. Entonces, al no coincidir las distribuciones, la fila puede crecer indefinidamente.



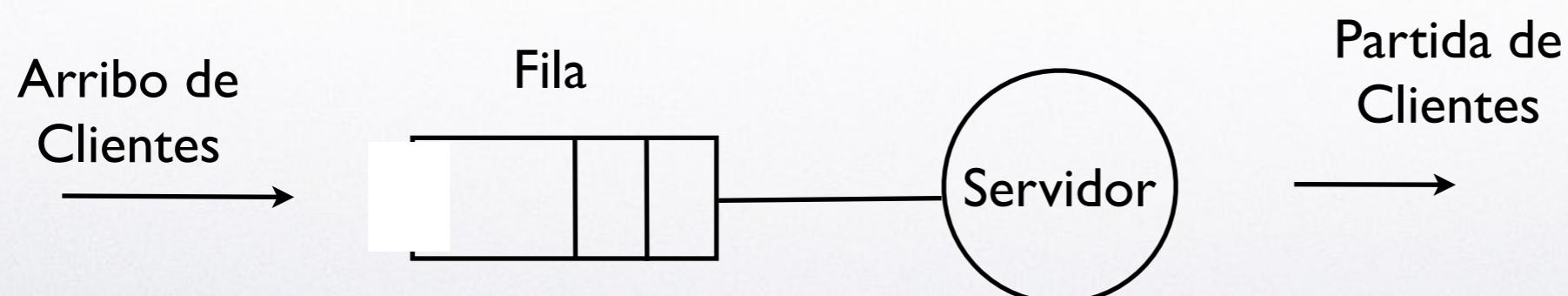


Clasificación de Modelos y Simulaciones

Basados en Eventos

Resultado analítico:

Cómo evolucionará el largo de la fila si la tasa de arribo es 1 /min y la tasa de partida (tiempo de atención promedio en el servidor) es también 1 /min ?

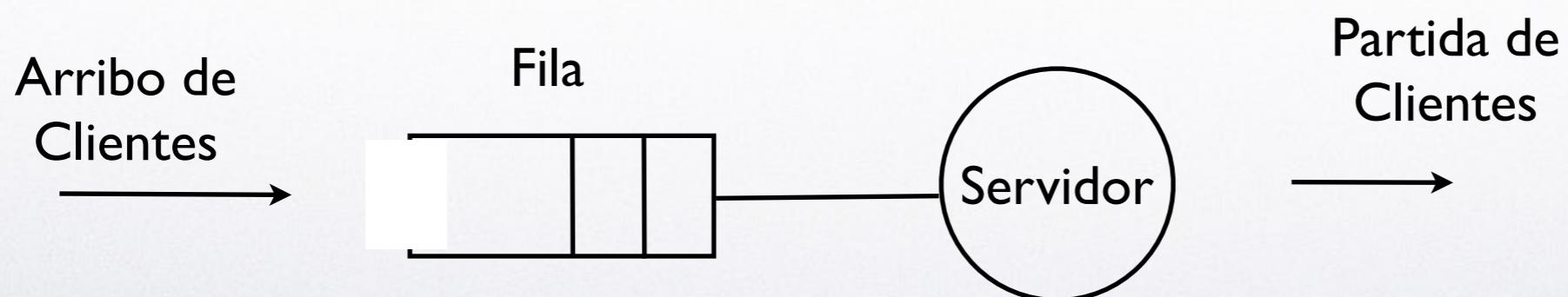




Clasificación de Modelos y Simulaciones

Basados en Eventos

Los eventos son el arribo o partida de un cliente.
Y la variable de estado natural es la "Longitud de la Fila"





Simulación vs. Animación



Simulación vs. Animación

El cinematógrafo

Sucesivas fotografías de un objeto en movimiento



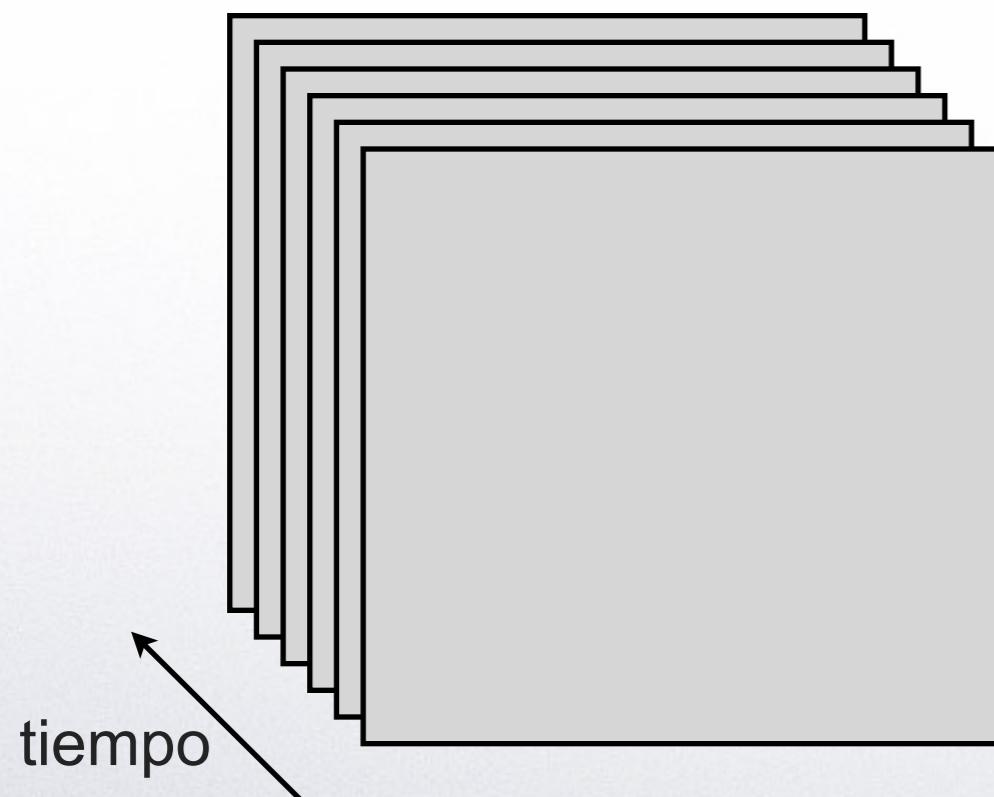
Permiten reproducirlo al observar la secuencia obtenida

Cómo ?

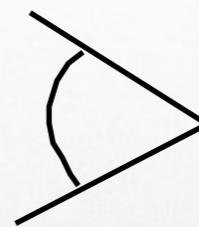


Simulación vs. Animación

El cinematógrafo

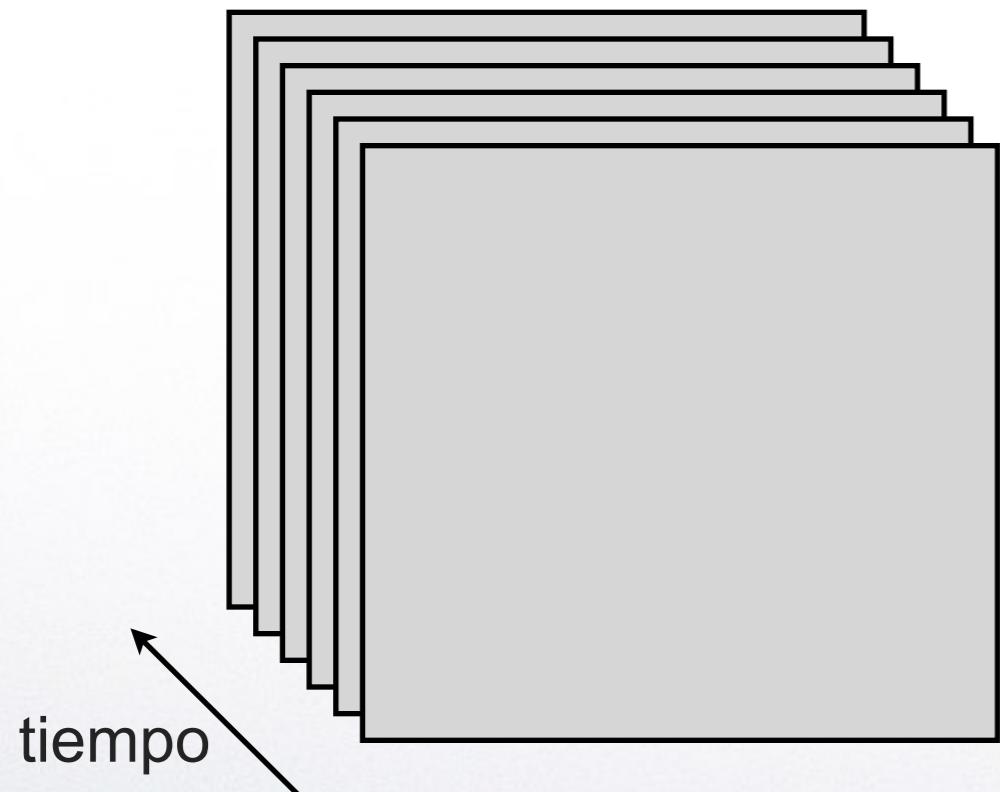


Persistencia de la
imagen en la retina ~1/10
segundos

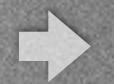




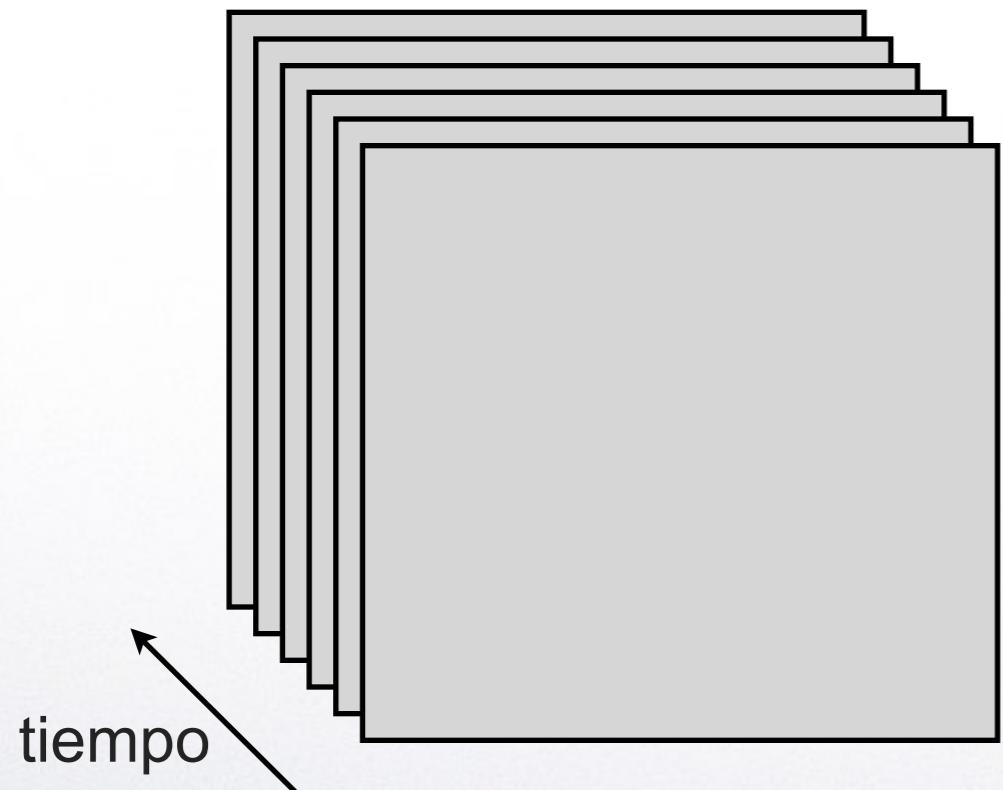
Simulación vs. Animación



En la Animación
las imágenes
sucesivas son
creadas para
generar la ilusión
de movimiento



Simulación vs. Animación



Imágenes creadas:

- Dibujos (papel o computadora)
- Objetos o muñecos que se mueven cuadro a cuadro.
- Simulación.



Simulación vs. Animación

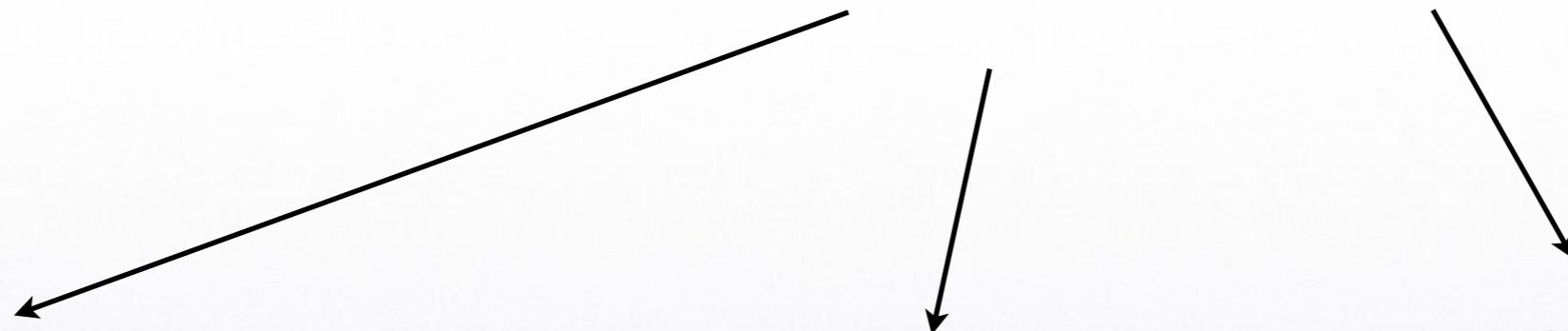
Simulación Computacional

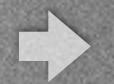
Un programa que reproduce el comportamiento de un sistema

Sistema Físico.
Ecuaciones
diferenciales

Interacción de
Agentes

Algoritmos.
Heurística





Simulación vs. Animación

Simulación Computacional

Un programa que reproduce el comportamiento de un sistema



Evolución Temporal

(se podría hacer una animación)



Simulación vs. Animación

Cuál es la diferencia ?

1) Una ANIMACIÓN puede estar generada a mano o puede estar generada a partir de una SIMULACIÓN.

2) Una SIMULACIÓN puede generar una sucesión temporal de datos susceptible de ser animados.



Conceptos de Estadística y Regresiones



Conceptos de Estadística

Consejos previos:

Para simulaciones usar Java, C(++), o similar

Para análisis/postprocesamiento de datos salidos de la simulación, usar: Matab, R, Octave, ... Phyton, Origin,...

No recomendable analizar datos con Excel o similar....



Conceptos de Estadística

Histograma

Distribución de Probabilidad

Función de Densidad de Probabilidad (PDF)

Error Muestral - Error de Medición



Conceptos de Estadística

Histograma

$$y_i = N_i$$

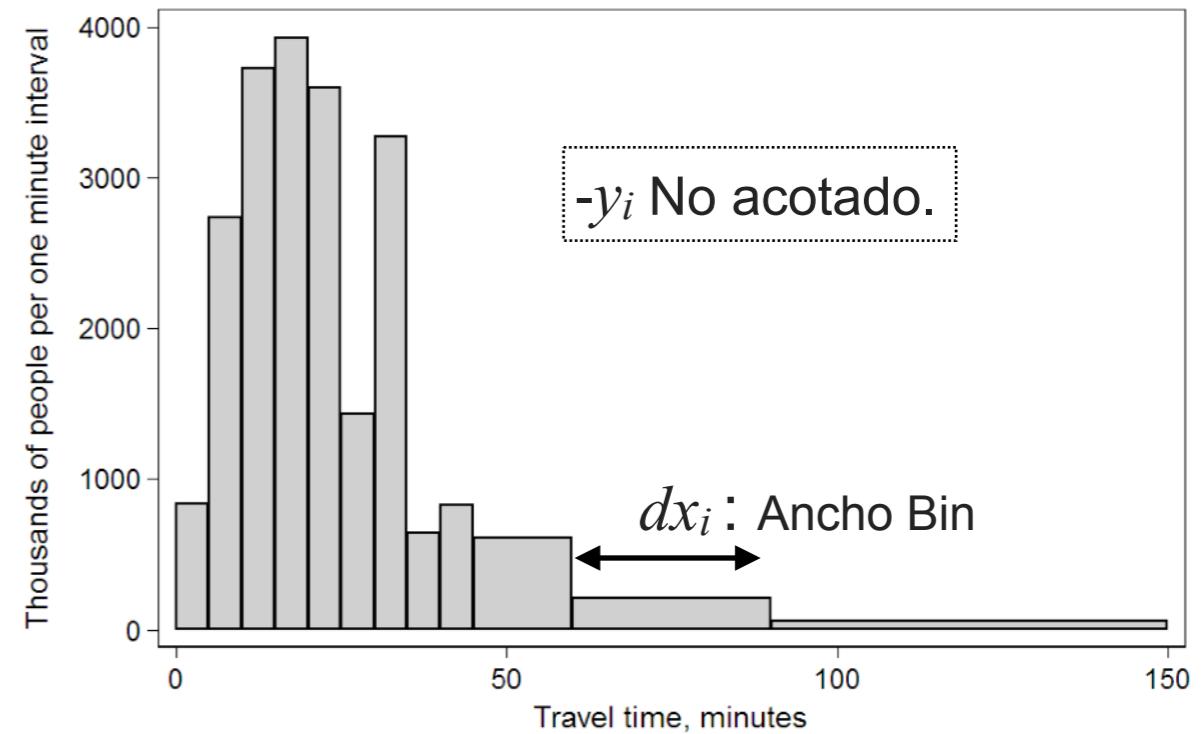
Distribución de Probabilidad

$$y_i = N_i / N$$

Densidad de Probabilidad

(PDF: Probability Density Function)

$$y_i = N_i / (dx_i N)$$



-Todos los y_i son menores a uno.

- La PDF es continua, a partir de datos finitos se la puede aproximar.
- Su integral es igual a uno. Algun y_i particular podría ser mayor a uno.



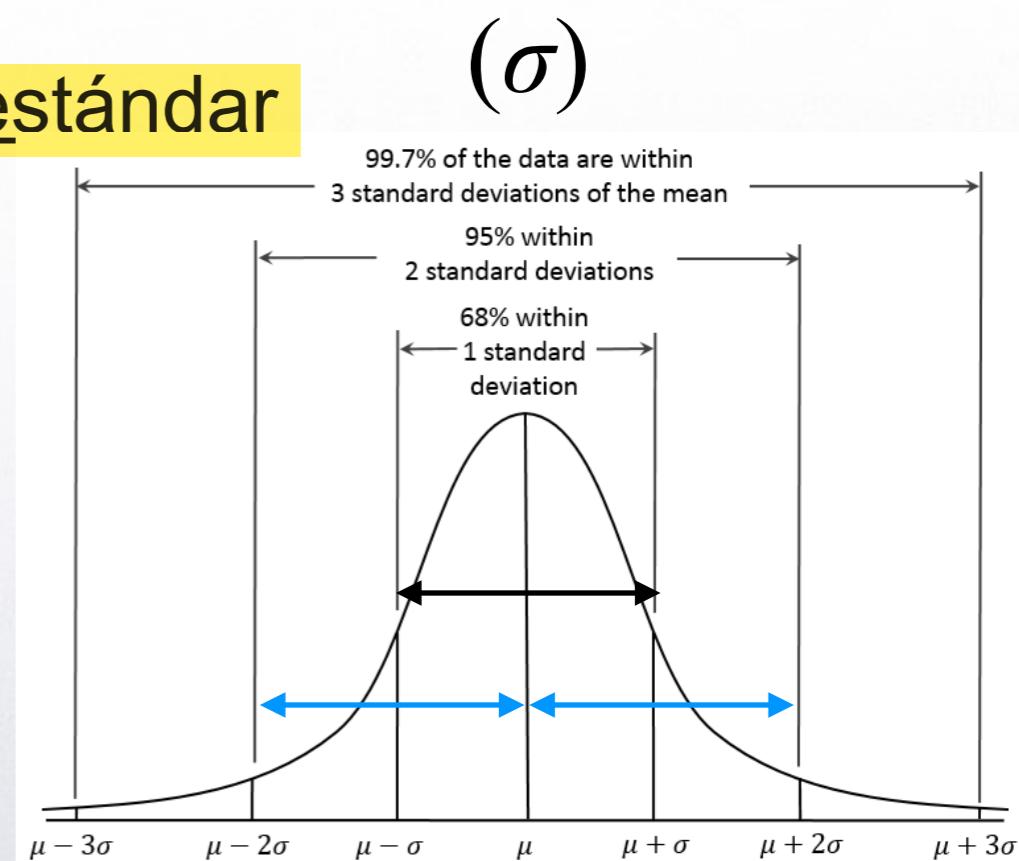
Conceptos de Estadística

Error Muestral o de Medición

Para simulaciones estocásticas, se repiten corridas (con distintas semilla) un cierto número de realizaciones y luego se reporta el observable como el promedio (μ) de los observables obtenidos.

Su error asociado, usualmente es el desvío estándar (si se trata de una distribución de Gauss).

$$\mu \pm \sigma$$





Conceptos de Estadística

Error Muestral o de Medición

Ejemplo de output promedio:

IMPORTANTE . . .

$$L = 45.4 \pm 0.3 \text{ cm}$$

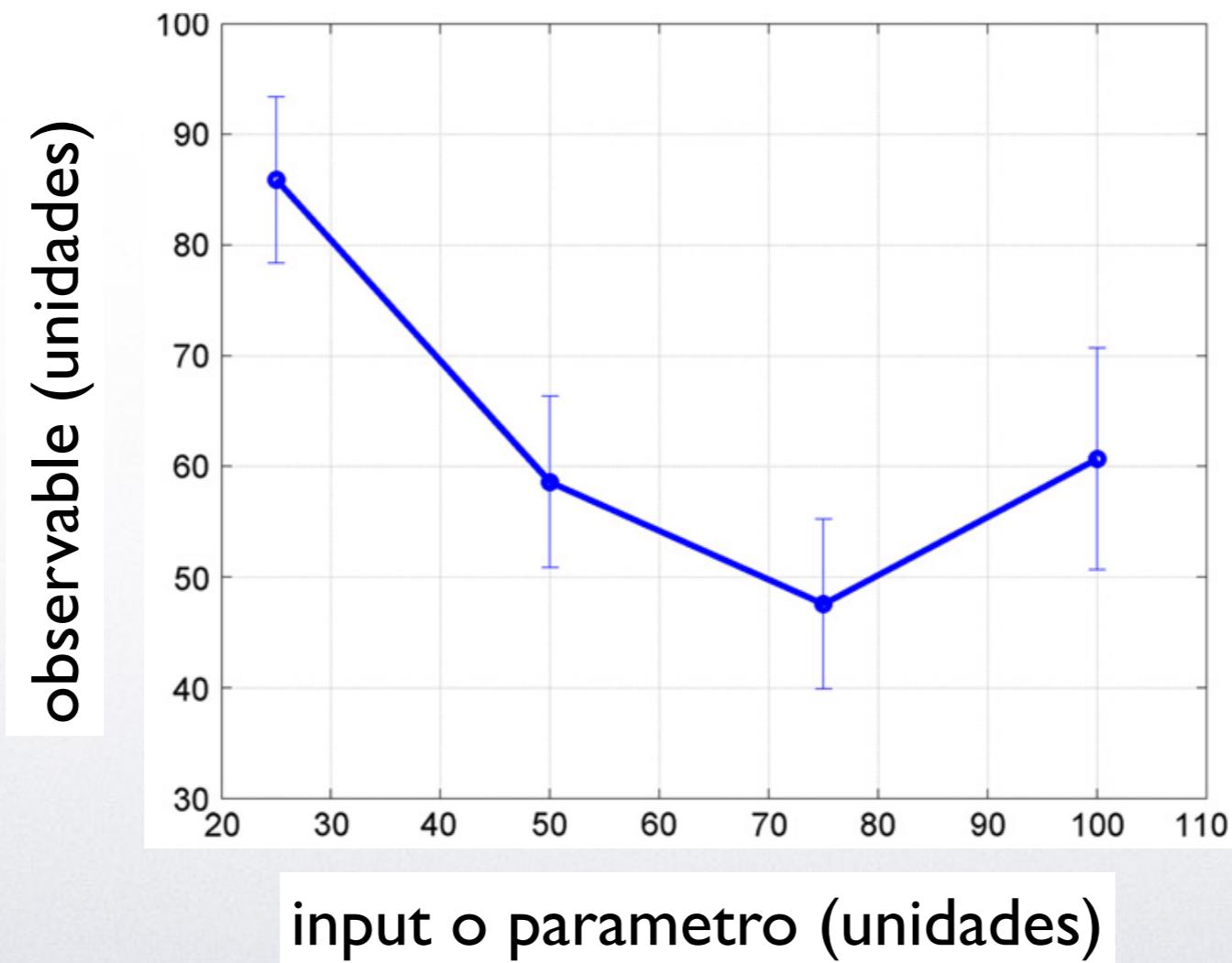
No tiene sentido dar decimales que estan por debajo del error

~~$$L = 45.423457 \pm 0.323428 \text{ cm}$$~~



Conceptos de Estadística

Error Muestral o de Medición (barras de error)





Conceptos de Regresiones



Conceptos de Regresiones

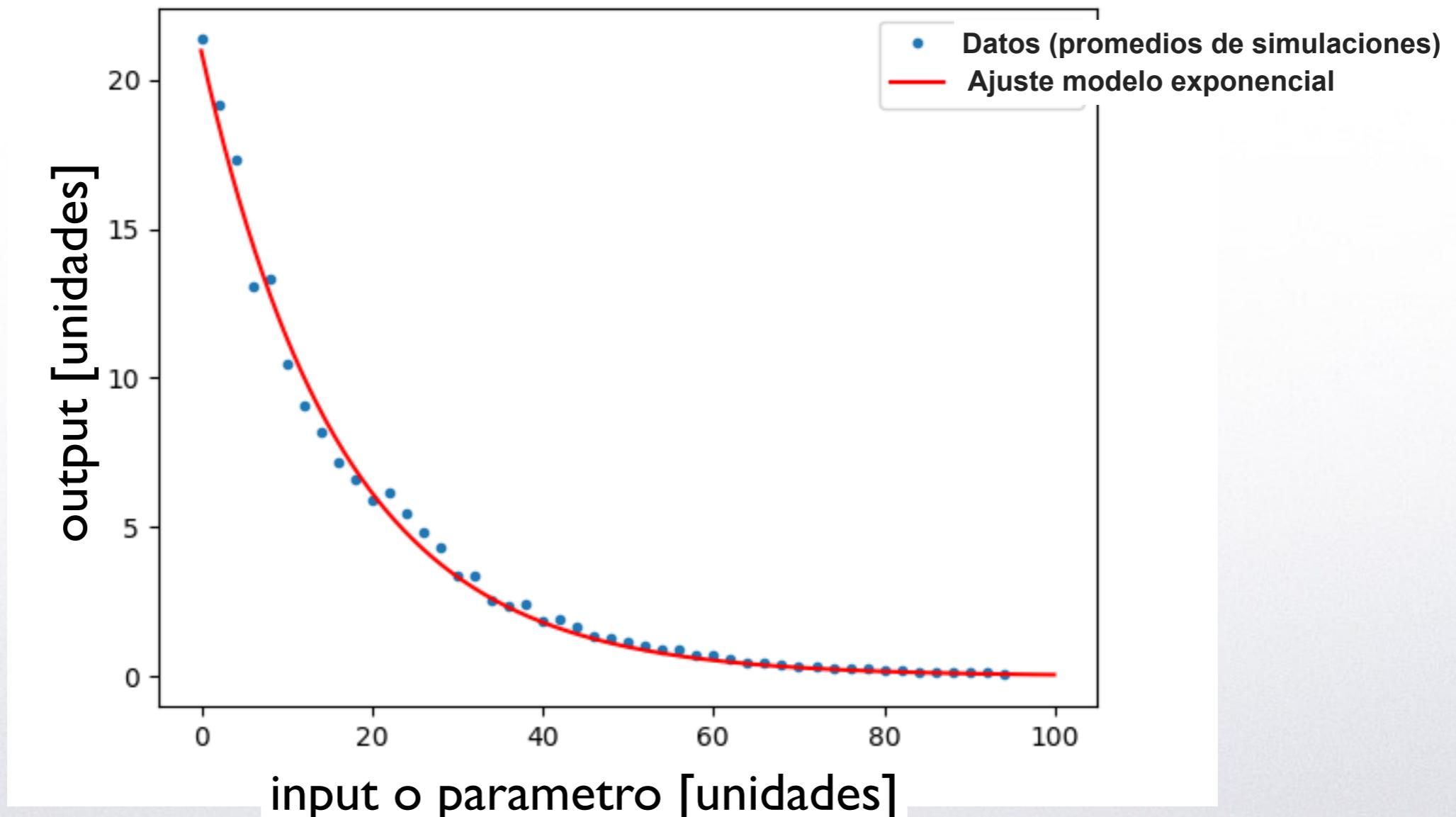
Ajuste de datos con modelos teóricos

(no con polinomios, "splines", o funciones arbitrarias ...)



Conceptos de Regresiones

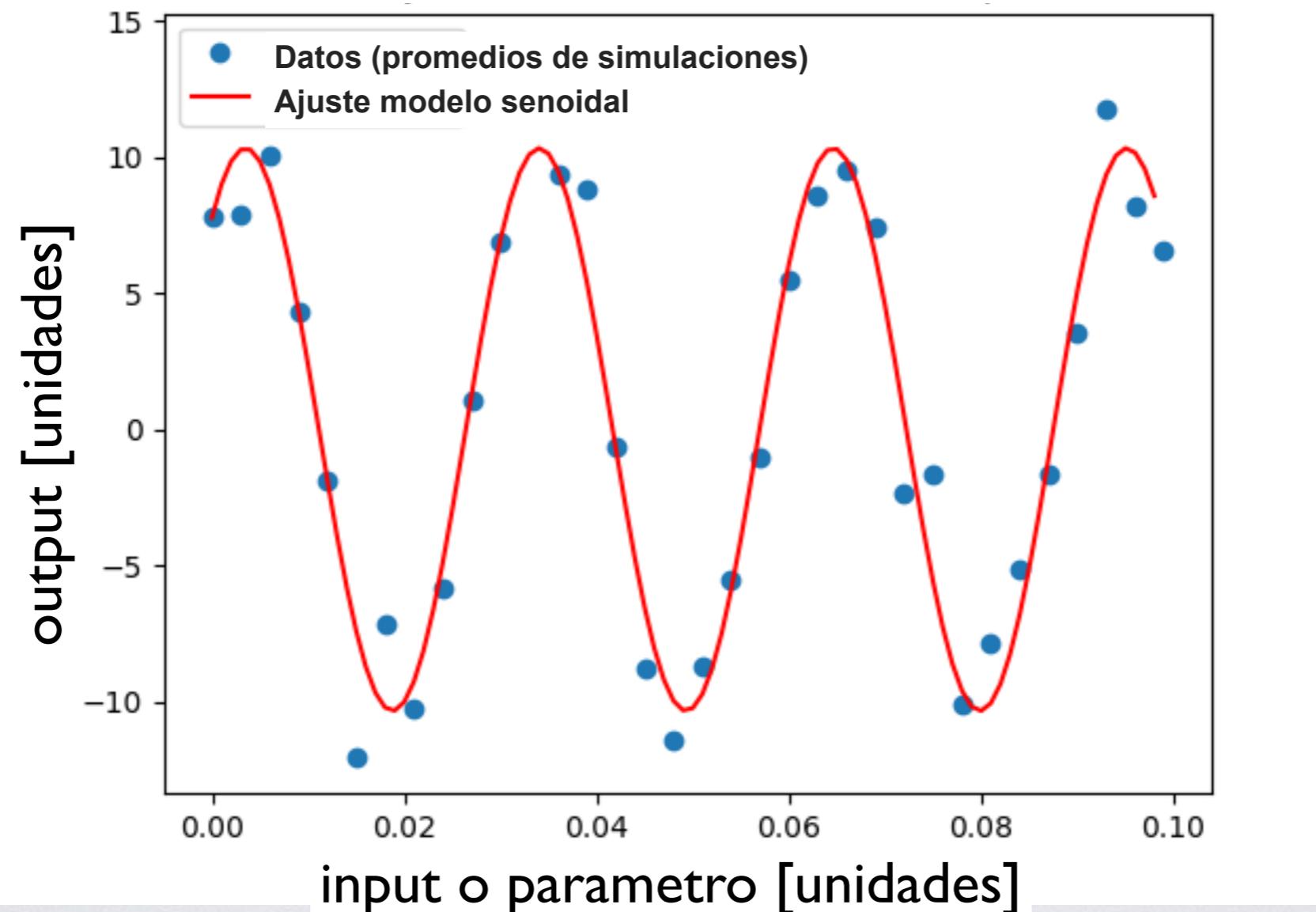
Ej.: *Modelo Exponencial*





Conceptos de Regresiones

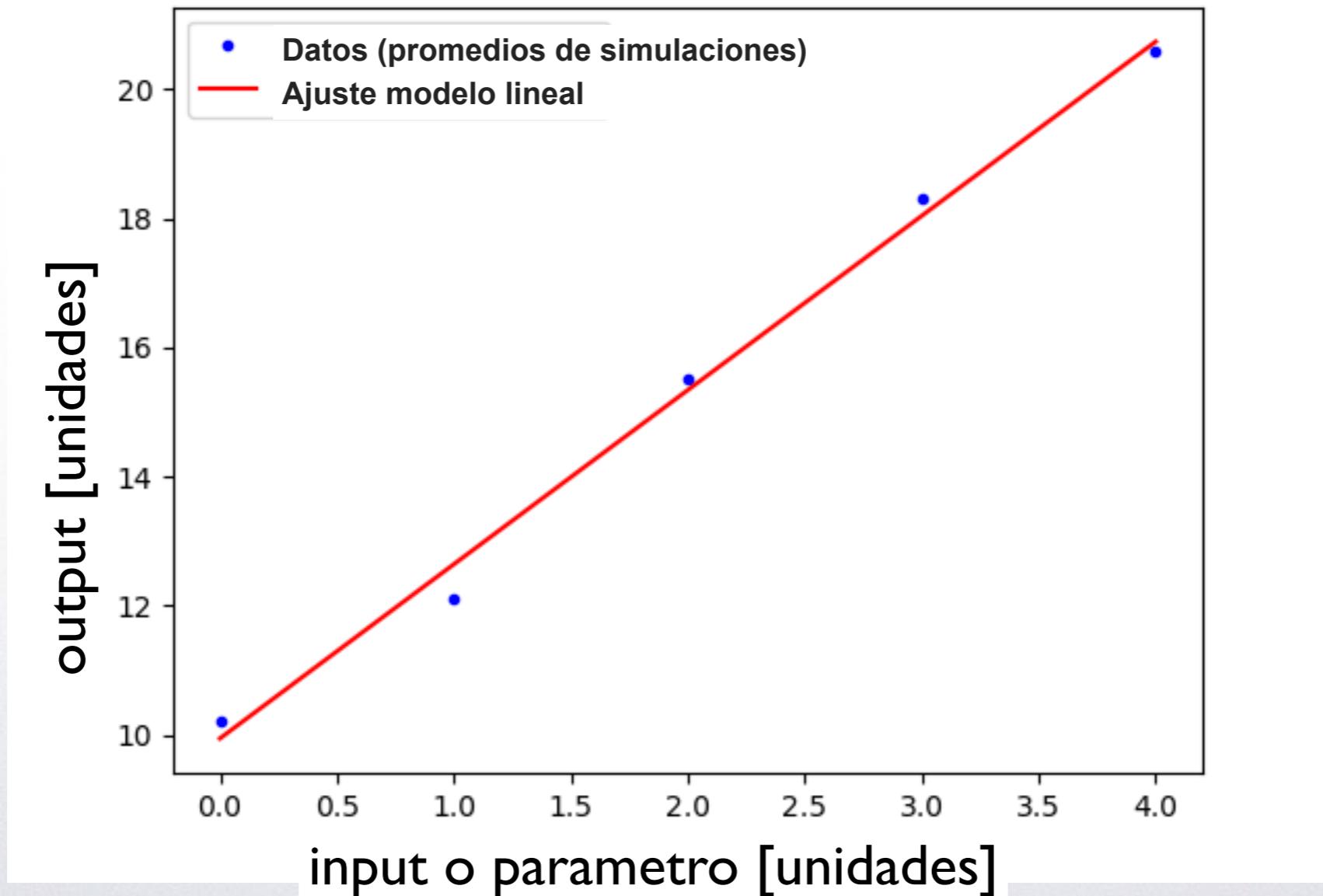
Ej.: *Modelo Senoidal*





Conceptos de Regresiones

Ej.: *Modelo Lineal*





Conceptos de Regresiones

Dados los datos y un modelo teórico se puede definir el error del modelo en función de un coeficiente del mismo:

Datos
(promedios de
simulaciones)

$$(x_i, y_i)$$

Ajuste modelo
(lineal u otro
cualquiera)

$$f(x_i, c)$$

Error del Ajuste:

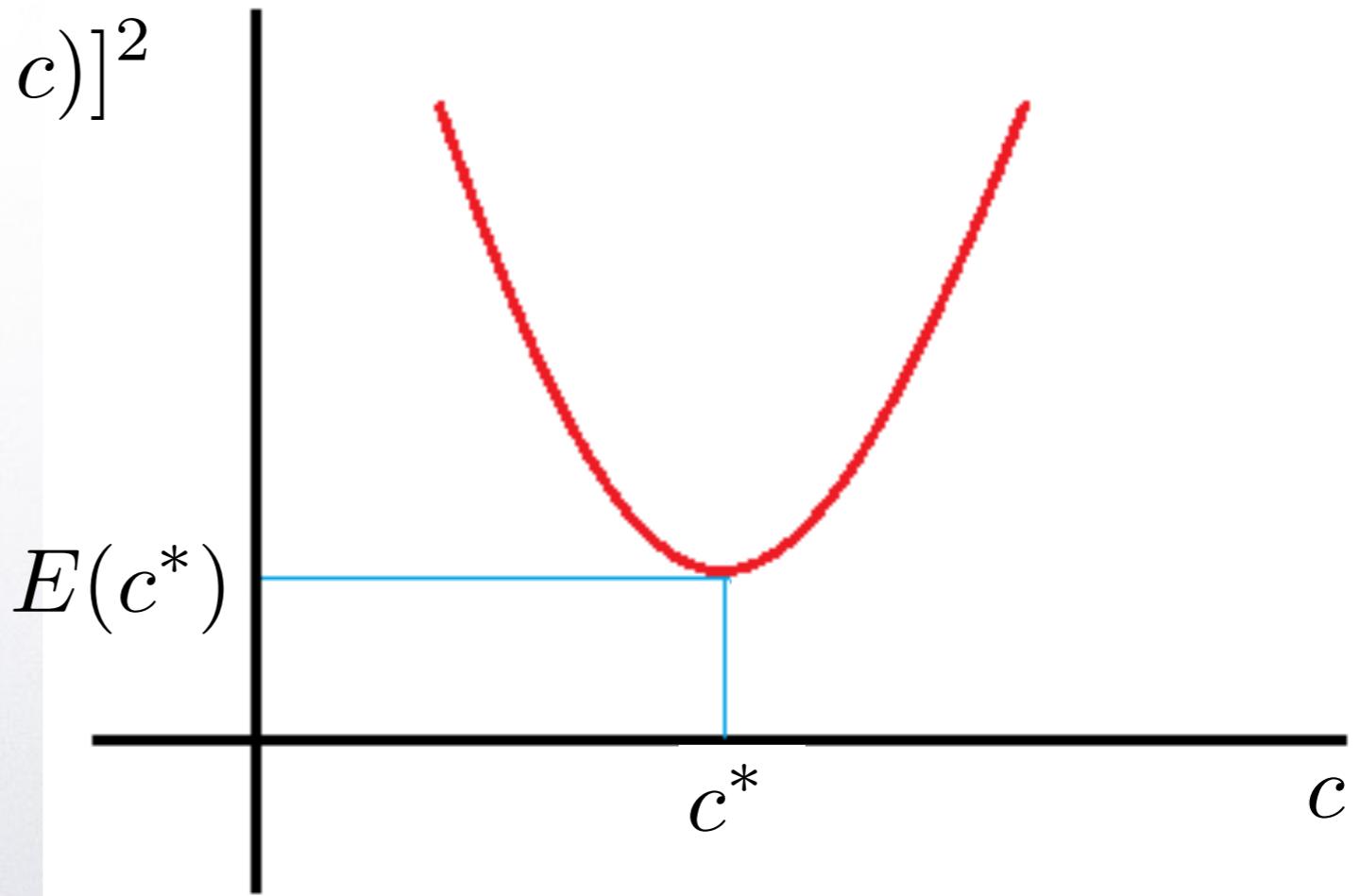
$$E(c) = \sum_i [y_i - f(x_i, c)]^2$$



Conceptos de Regresiones

El valor del coeficiente c que minimiza el error (E) es el que mejor ajuste del modelo a los datos produce.

$$E(c) = \sum_i [y_i - f(x_i, c)]^2$$

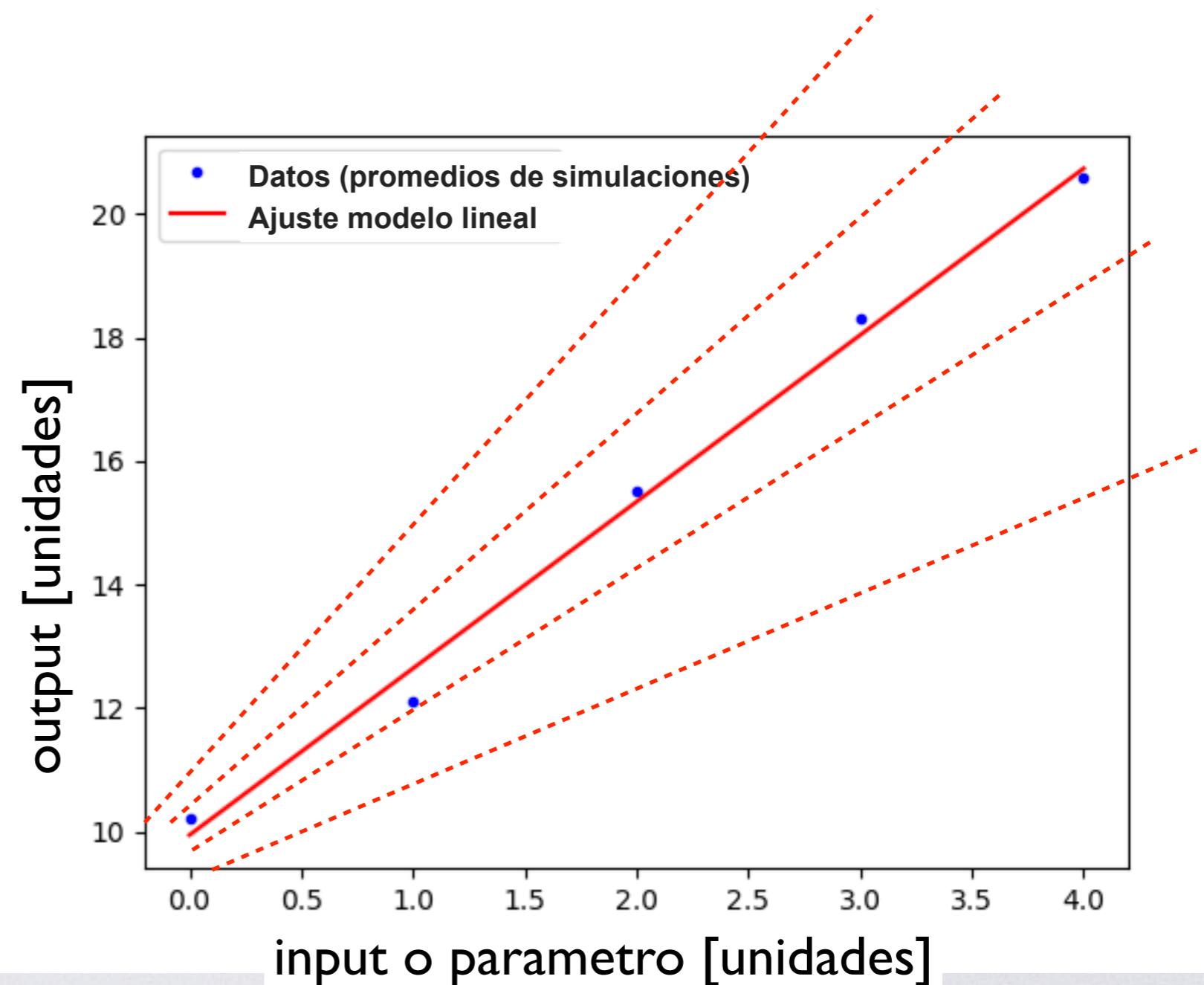




Conceptos de Regresiones

El valor del coeficiente c que minimiza el error (E) es el que mejor ajuste del modelo a los datos produce.

Por ejemplo en el Modelo Lineal





Conceptos de Regresiones

Reiteramos:

Los datos se ajustan con funciones que provienen de algún modelos teórico. No con funciones arbitrarias (no con polinomios de grado N, "splines", etc.)



FIN

Gracias por su atención!